



# CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC 2013 - 2014

## PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BIÊN SOẠN: LƯU HUY THƯỜNG



HỌ VÀ TÊN: .....

LỚP : .....

TRƯỜNG : .....

# CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## BÀI 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

### I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $ax + b = 0$

| $ax + b = 0 \quad (1)$ |            |                                           |
|------------------------|------------|-------------------------------------------|
| Hệ số                  |            | Kết luận                                  |
| $a \neq 0$             |            | (1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$ |
| $a = 0$                | $b \neq 0$ | (1) vô nghiệm                             |
|                        | $b = 0$    | (1) nghiệm đúng với mọi $x$               |

**Chú ý:** Khi  $a \neq 0$  thì (1) được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

#### 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax + b < 0$

| Biện luận |            |                                          | Dấu nhị thức bậc nhất                      |              |
|-----------|------------|------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------|
| Điều kiện |            | Kết quả tập nghiệm                       | $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$           |              |
| $a > 0$   |            | $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ | $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ | $a.f(x) < 0$ |
| $a < 0$   |            | $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ | $x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ | $a.f(x) > 0$ |
| $a = 0$   | $b \geq 0$ | $S = \emptyset$                          |                                            |              |
|           | $b < 0$    | $S = R$                                  |                                            |              |

#### 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI: $ax^2 + bx + c = 0$

##### 1. Cách giải

| $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$ |                                                                       |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\Delta = b^2 - 4ac$                           | Kết luận                                                              |
| $\Delta > 0$                                   | (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$                                   | (1) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$                                 |
| $\Delta < 0$                                   | (1) vô nghiệm                                                         |

**Chú ý:** – Nếu  $a + b + c = 0$  thì (1) có hai nghiệm là  $x = 1$  và  $x = -\frac{c}{a}$ .

– Nếu  $a - b + c = 0$  thì (1) có hai nghiệm là  $x = -1$  và  $x = \frac{c}{a}$ .

– Nếu  $b$  chẵn thì ta có thể dùng công thức thu gọn với  $b' = \frac{b}{2}$ .

##### 2. Định lý Vi-et

Hai số  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  khi và chỉ khi chúng thỏa mãn các hệ thức

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

#### 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

| Xét dấu tam thức bậc hai            |                                                                                                          | Giải bất phương trình bậc hai                |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ |                                                                                                          | Dựa vào định lý dấu tam thức bậc hai để giải |
| $\Delta < 0$                        | $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$                                                                   |                                              |
| $\Delta = 0$                        | $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$                            |                                              |
| $\Delta > 0$                        | $a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$<br>$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ |                                              |

## II. CÁC DẠNG TOÁN

### 1. Dạng toán 1: Giải và biện luận phương trình và bất phương trình

**HT1.** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số  $m$ :

- 1)  $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$
- 2)  $m(x - m) = x + m - 2$
- 3)  $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6$
- 4)  $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$
- 5)  $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$
- 6)  $(m + 1)^2 x = (2m + 5)x + 2 + m$

**HT2.** Giải các bất phương trình sau:

- 1)  $\frac{(2x - 5)(x + 2)}{-4x + 3} > 0$
- 2)  $\frac{x - 3}{x + 1} > \frac{x + 5}{x - 2}$
- 3)  $\frac{x - 3}{x + 5} < \frac{1 - 2x}{x - 3}$
- 4)  $\frac{3x - 4}{x - 2} > 1$
- 5)  $\frac{2x - 5}{2 - x} \geq -1$
- 6)  $\frac{2}{x - 1} \leq \frac{5}{2x - 1}$

**HT3.** Giải và biện luận các bất phương trình sau:

- 1)  $m(x - m) \leq x - 1$
- 2)  $mx + 6 > 2x + 3m$
- 3)  $(m + 1)x + m < 3m + 4$
- 4)  $mx + 1 > m^2 + x$
- 5)  $\frac{m(x - 2)}{6} + \frac{x - m}{3} > \frac{x + 1}{2}$
- 6)  $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$

**HT4.** Giải và biện luận các bất phương trình sau:

- 1)  $\frac{2x + m - 1}{x + 1} > 0$
- 2)  $\frac{mx - m + 1}{x - 1} < 0$
- 3)  $\sqrt{x - 1}(x - m + 2) > 0$

**HT5.** Giải và biện luận các phương trình sau:

- 1)  $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$
- 2)  $2x^2 + 12x - 15m = 0$
- 3)  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$
- 4)  $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$
- 5)  $(m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1 = 0$
- 6)  $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0$

**HT6.** Giải và biện luận các bất phương trình sau:

- 1)  $x^2 - mx + m + 3 > 0$
- 2)  $(1 + m)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$
- 3)  $mx^2 - 2x + 4 > 0$

**HT7.** Trong các phương trình sau, tìm giá trị của tham số để phương trình:

- i) Có nghiệm duy nhất
- ii) Vô nghiệm
- iii) Nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

1)  $(m-2)x = n-1$

2)  $(m^2 + 2m - 3)x = m - 1$

3)  $(mx+2)(x+1) = (mx+m^2)x$

4)  $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$

HT8. Tìm  $m$  để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a)  $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$

b)  $m^2x + 1 \geq m + (3m-2)x$

c)  $mx - m^2 > mx - 4$

d)  $3 - mx < 2(x - m) - (m+1)^2$

## 2. Dạng toán 2: Dấu của nghiệm số phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ ) (1)

• (1) có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow P < 0$

• (1) có hai nghiệm cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

• (1) có hai nghiệm dương  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

• (1) có hai nghiệm âm  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

**Chú ý:** Trong các trường hợp trên nếu yêu cầu hai nghiệm phân biệt thì  $\Delta > 0$ .

### Bài tập

HT9. Xác định  $m$  để phương trình:

i) có hai nghiệm trái dấu

ii) có hai nghiệm âm phân biệt

iii) có hai nghiệm dương phân biệt

1)  $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$

2)  $2x^2 + 12x - 15m = 0$

3)  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$

4)  $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

5)  $(m-1)x^2 + (2-m)x - 1 = 0$

6)  $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$

7)  $x^2 - 4x + m + 1 = 0$

8)  $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0$

## 3. Dạng toán 3: Áp dụng định lý Viet

### a. Biểu thức đối xứng của các nghiệm số

Ta sử dụng công thức  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ;  $P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$  để biểu diễn các biểu thức đối xứng của các nghiệm  $x_1, x_2$  theo  $S$  và  $P$ .

Ví dụ:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = S(S^2 - 3P)$$

### b. Hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số

Để tìm hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số ta tìm:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

( $S, P$  có chứa tham số  $m$ ).

Khử tham số  $m$  giữa  $S$  và  $P$  ta tìm được hệ thức giữa  $x_1$  và  $x_2$ .

### c. Lập phương trình bậc hai

Nếu phương trình bậc hai có các nghiệm  $u$  và  $v$  thì phương trình bậc hai có dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

trong đó  $S = u + v, P = uv$ .

### Bài tập

HT10. Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2; \quad B = x_1^3 + x_2^3; \quad C = x_1^4 + x_2^4; \quad D = |x_1 - x_2|; \quad E = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$$

1)  $x^2 - x - 5 = 0$

2)  $2x^2 - 3x - 7 = 0$

3)  $3x^2 + 10x + 3 = 0$

4)  $x^2 - 2x - 15 = 0$

5)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$

6)  $\sqrt{3}x^2 + 5x - \sqrt{2} = 0$

**HT11.** Cho phương trình:  $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$  (\*). Xác định  $m$  để:

1) (\*) có hai nghiệm phân biệt.

2) (\*) có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm kia.

3) Tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

**HT12.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(2m+1)x + 3 + 4m = 0$  (\*).

1) Tìm  $m$  để (\*) có hai nghiệm  $x_1, x_2$ .

2) Tìm hệ thức giữa  $x_1, x_2$  độc lập đối với  $m$ .

3) Tính theo  $m$ , biểu thức  $A = x_1^3 + x_2^3$ .

4) Tìm  $m$  để (\*) có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

5) Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là  $x_1^2, x_2^2$ .

**HT13.** Cho phương trình:  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$  (\*).

1) Tìm  $m$  để (\*) có nghiệm  $x = 0$ . Tính nghiệm còn lại.

2) Khi (\*) có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tìm hệ thức giữa  $x_1, x_2$  độc lập đối với  $m$ .

3) Tìm  $m$  để (\*) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa:  $x_1^2 + x_2^2 = 8$ .

$$HD: a) m = 3; m = 4 \quad b) (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 - 8 = 0 \quad c) m = -1; m = 2.$$

**HT14.** Cho phương trình:  $x^2 - (m^2 - 3m)x + m^3 = 0$ .

a) Tìm  $m$  để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

b) Tìm  $m$  để phương trình có một nghiệm bằng 1. Tính nghiệm còn lại.

$$HD: a) m = 0; m = 1 \quad b) x_2 = 1; x_2 = 5\sqrt{2} - 7; x_2 = -5\sqrt{2} - 7.$$

**BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI****I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ****1. Định nghĩa và tính chất**

$$\bullet |A| = \begin{cases} A & \text{ khi } A \geq 0 \\ -A & \text{ khi } A < 0 \end{cases}$$

$$\bullet |A| \geq 0, \forall A$$

$$\bullet |A.B| = |A|.|B|$$

$$\bullet |A|^2 = A^2$$

$$\bullet |A+B| = |A|+|B| \Leftrightarrow A.B \geq 0$$

$$\bullet |A-B| = |A|+|B| \Leftrightarrow A.B \leq 0$$

$$\bullet |A+B| = ||A|-|B|| \Leftrightarrow A.B \leq 0$$

$$\bullet |A-B| = ||A|-|B|| \Leftrightarrow A.B \geq 0$$

Với  $B > 0$  ta có:

$$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B;$$

$$|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}.$$

**2. Cách giải**

Để giải phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:

- Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.

- Bình phương hai vế.

- Đặt ẩn phụ.

**a) Phương trình:**

$$\bullet \text{Dạng 1: } |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 2: } |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 3: } a|f(x)| + b|g(x)| = h(x)$$

Đối với phương trình có dạng này ta thường dùng phương pháp khoảng để giải.

**b) Bất phương trình**

$$\bullet \text{Dạng 1: } |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$\bullet \text{Dạng 2: } |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \text{ có nghĩa} \\ g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Chú ý: } \bullet |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0; \quad |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$$

$\bullet$  Với  $B > 0$  ta có:

$$|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B;$$

$$|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases}.$$

$$\bullet |A+B| = |A|+|B| \Leftrightarrow AB \geq 0; |A-B| = |A|+|B| \Leftrightarrow AB \leq 0$$

**Bài tập**

**HT15.** Giải các phương trình sau:

1)  $|2x-1| = x+3$

2)  $\sqrt{x^2+6x+9} = |2x-1|$

3)  $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

4)  $|4x-17| = x^2 - 4x - 5$

5)  $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$

6)  $|x-1| - |x| + |2x+3| = 2x+4$

$$7) 2|x+1| - |x^2 - 2x - 8| = x^2 - x - 5 \quad 8) |x-1| + |x+2| + |x-3| = 14$$

**HT16.** Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1) |4x+7| &= 4x+7 & 2) |2x-3| &= 3-2x \\ 3) |x-1| + |2x+1| &= |3x| & 4) |x^2-2x-3| &= x^2 + |2x+3| \\ 5) |2x-5| + |2x^2-7x+5| &= 0 & 6) |x+3| + |7-x| &= 10 \end{aligned}$$

**HT17.** Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 - 2x + |x-1| - 1 = 0 \quad 2) x^4 + 4x^2 + 2|x^2 - 2x| = 4x^3 + 3$$

**HT18.** Giải các bất phương trình sau

$$\begin{aligned} 1) |x^2 - 2x - 1| &< x+1 & 2) |2x^2 + x - 3| &\geq 2x+1 \\ 3) |x^2 - 5x + 4| &\leq x^2 + 6x + 5 & 4) |x^2 + x - 1| &< |2x^2 + x - 2| \end{aligned}$$

### BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU CĂN THỨC

**Cách giải:** Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

- Nâng lũy thừa hai vế.

- Đặt ẩn phụ.

**Chú ý:** Khi thực hiện các phép biến đổi cần chú ý điều kiện để các căn được xác định.

#### I. Biến đổi tương đương

##### a. Phương trình:

**Dạng 1:**  $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

**Dạng 2:**  $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ (hay } g(x) \geq 0) \end{cases}$

**Dạng 3:**  $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

**Dạng 4:**  $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^3$

##### b. Bất phương trình

• **Dạng 1:**  $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

• **Dạng 2:**  $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$

#### Bài tập

**HT19.** Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{2x-3} = x-3 \quad 2) \sqrt{5x+10} = 8-x$$

3)  $x - \sqrt{2x - 5} = 4$

4)  $\sqrt{x^2 + x - 12} = 8 - x$

5)  $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$

6)  $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$

8)  $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$

8)  $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} = x^2 - 9$

**HT20.** Giải các bất phương trình sau:

1)  $\sqrt{x^2 + x - 12} < 8 - x$

2)  $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$

3)  $\sqrt{-x^2 - 4x + 21} < x + 3$

4)  $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$

5)  $\sqrt{3x^2 + 13x + 4} \geq x - 2$

6)  $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} > x + 1$

7)  $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} > \sqrt{2x - 8}$

8)  $\sqrt{2 - x} > \sqrt{7 - x} - \sqrt{-3 - 2x}$

9)  $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 2} \leq 1$

**HT21.** Giải các phương trình:

1)  $\sqrt{3x + 2} + \sqrt{x + 1} = 3$

2)  $\sqrt{3 + x} - \sqrt{2 - x} = 1$

3)  $x^2 + \sqrt{x + 1} = 1$

4)  $\sqrt{x + 9} = 5 - \sqrt{2x + 4}$

5)  $\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} = 3$

6)  $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x + 3}$

**HT22.** Giải các phương trình sau:

1)  $\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2$

2)  $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$

3)  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = 2$

4)  $\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5$

5)  $\sqrt[3]{5x + 7} - \sqrt[3]{5x - 13} = 1$

6)  $\sqrt[3]{9 - \sqrt{x + 1}} + \sqrt[3]{7 + \sqrt{x + 1}} = 4$

**HT23.** Giải các bất phương trình sau:

1)  $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{3 - x} \leq 2$

2)  $\frac{\sqrt{-2x^2 - 15x + 17}}{x + 3} \geq 0$

3)  $(x + 3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9$

4)  $\frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{2x + 5} \geq \frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{x + 4}$

**HT24.** Giải các bất phương trình sau:

1)  $x + 2 \leq \sqrt[3]{x^2 + 8}$

2)  $\sqrt[3]{2x^2 + 1} \geq \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

3)  $\sqrt[3]{x + 1} > \sqrt{x - 3}$

**HT25.** Giải các phương trình sau:

1)  $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 10} = \sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 5}$

2)  $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x + 3} = 0$

3)  $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x + 2}$

4)  $\sqrt{\frac{x^3 + 1}{x + 3}} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 3}$

5)  $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$

6)  $\sqrt{1 - x} = \sqrt{6 - x} - \sqrt{-5 - 2x}$

7)  $\sqrt[3]{12 - x} + \sqrt[3]{14 + x} = 2$

8)  $\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{2x - 1}$



**II. Đặt ẩn phụ**

**Dạng 1:**  $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$

**Dạng 2:**  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$

**Dạng 3:**  $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x).g(x)} = h(x)$  và  $f(x) \pm g(x) = k$  ( $k = \text{const}$ ) Đặt  $t = \sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$ .

**HT26.** Giải các phương trình sau:

1)  $x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$

2)  $\sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 = -x^2 + 11x$

3)  $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$

4)  $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$

5)  $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$

6)  $x^2 - 2x + 8 - 4\sqrt{(4-x)(x+2)} = 0$

**HT27.** Giải các phương trình sau:

1)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = 3 + \sqrt{(x+3)(6-x)}$

2)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} - 16$

3)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} = 1$

4)  $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = 3$

5)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$

6)  $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

7)  $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

8)  $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + 9}$

**HT28.** Giải các bất phương trình sau:

1)  $\sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 > -x^2 + 11x$

2)  $(x+5)(x-2) + 3\sqrt{x(x+3)} > 0$

3)  $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

4)  $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} \geq 1$

**HT29.** Giải các phương trình sau:

1)  $\sqrt{2x-4} + 2\sqrt{2x-5} + \sqrt{2x+4} + 6\sqrt{2x-5} = 14$

2)  $\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = 1$

3)  $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} + 3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4$

**Dạng 4: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn:** Là phương pháp sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu về 1 phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn chứa ẩn  $x$  ban đầu.

**Bài tập:**

$$1) x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2 - 2x} \quad 2) (4x - 1)\sqrt{x^3 + 1} = 2x^3 + 2x + 1$$

$$3) x^2 - 1 = 2x\sqrt{x^2 + 2x} \quad 4) x^2 + 4x = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

**Dạng 7: Đặt ẩn phụ chuyển phương trình về hệ đối xứng:**

$$+ \sqrt{ax + b} = c(dx + e)^2 + \alpha x + \beta y \text{ với } d = ac + \alpha, e = bc + \beta$$

$$\text{Đặt: } dy + e = \sqrt{ax + b}$$

$$+ \sqrt[3]{ax + b} = c(dx + e)^3 + \alpha x + \beta y \text{ với } d = ac + \alpha, e = bc + \beta$$

$$\text{Đặt: } dy + e = \sqrt[3]{ax + b}$$

**Bài tập**

**HT30.** Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{3x + 1} = -4x^2 + 13x - 5$$

$$2) x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}$$

$$3) \sqrt{x + 1} = x^2 + 4x + 5$$

$$4) \sqrt{\frac{4x + 9}{28}} = 7x^2 + 7x, x > 0$$

$$5) x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$$

$$6) x\sqrt[3]{35 - x^3} \left( x + \sqrt[3]{35 - x^3} \right) = 30$$

**III. Phương pháp trục căn thức**

**Bài tập**

**HT31.** Giải các phương trình sau:

$$1) x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$$

$$2) \sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$$

$$3) \sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 2}$$

$$4) \sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$$

$$5) 2\sqrt{(2 - x)(5 - x)} = x + \sqrt{(2 - x)(10 - x)}$$

$$6) \sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2$$

$$7) \sqrt[3]{x^2 + 4} = \sqrt{x - 1} + 2x - 3$$

$$8) \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt{3x^3 - 2} = 3x - 2$$

$$9) \sqrt{2x^2 + 16x + 18} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 4$$

$$10) \sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$$

$$11) \sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

**IV. Phương pháp xét hàm số**

**HT32.** Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$$

$$2) \sqrt{x - 1} = -x^3 - 4x + 5$$

$$3) \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 2} = 3$$

$$4) \sqrt{2x - 1} + \sqrt{x^2 + 3} = 4 - x$$

**V. Phương pháp đánh giá**

$$1) \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x - 1} = 2$$

$$2) 2\sqrt{7x^3 - 11x^2 + 25x - 12} = x^2 + 6x - 1$$

$$3) \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}} = 4 - \left( x - \frac{1}{x} \right)$$

$$4) \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} = 1$$

## VI. Các bài toán liên quan đến tham số

**HT1.** Cho phương trình  $\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + x + \sqrt{x-4} = m$ .

a. Giải phương trình với  $m = 6$ .

b. Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm. **Đ/s:**  $x = 4; m \geq 6$

**HT2.** Tìm tham số để phương trình  $3x^2 + 2x + 3 = m(x+1)\sqrt{x^2+1}$  có nghiệm thực. **Đ/s:**  $m < -3 \cup m \geq 2\sqrt{2}$

**HT3.** Cho phương trình  $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m$ .

a. Giải phương trình khi  $m = 2$ .

b. Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm. **Đ/s:**  $x = -1; x = 3. 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$

**HT4.** Tìm tham số thực  $m$  để bất phương trình  $\sqrt{x^2-4x+5} \geq x^2-4x+m$  có nghiệm thực trong đoạn  $[2;3]$ .

**Đ/s:**  $m \leq -1$

**HT5.** Tìm  $m$  để phương trình  $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5} = m$  có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

**Đ/s:**

**HT6.** Tìm  $m$  để phương trình  $m\sqrt{x^2-2x+2} = x+2$  có hai nghiệm phân biệt. **Đ/s:**  $m \in (1; \sqrt{10})$

**HT7.** Tìm  $m$  để phương trình  $m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = \sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$  có nghiệm thực. **Đ/s:**

$$m \in \left[-2\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right]$$

**HT8.** Cho phương trình  $(x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = m$  Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình có nghiệm.

**Đ/s:**  $m \geq -4$

# ÔN TẬP

## I. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

HT1. Giải các phương trình sau:

$$1. \quad |x^2 - 1| = |x^3 - 5x^2 - 2x + 4|$$

$$\text{Đ/s: } x = -1, x = \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2}, x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$2. \quad |x^3 - 3x + 1| = 2x + 1$$

$$\text{Đ/s: } x = 2, x = 5$$

$$3. \quad |x^2 - 1| + |x| = 1$$

$$\text{Đ/s: } x = 0, x = \pm 1$$

$$4. \quad |x + 1| + |x - 1| = 1 + |1 - x^2|$$

$$\text{Đ/s: } x = 0, x = \pm 2$$

$$5. \quad |3 - 2x| - |x| = 5(|2 + 3x| + x - 2)$$

$$\text{Đ/s: } x = -\frac{23}{9}, x = \frac{3}{23}$$

HT2. Giải các phương trình sau:

$$1. \quad \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 2x - 5$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{14}{5}$$

$$2. \quad \sqrt{7 - x^2} + x\sqrt{x + 5} = \sqrt{3 - 2x - x^2}$$

$$\text{Đ/s: } x = -1$$

$$3. \quad 3x + \sqrt{x^3 - x + 1} = -2$$

$$\text{Đ/s: } x = -1$$

$$4. \quad \sqrt{x^3 - 2x + 5} = 2x - 1$$

$$\text{Đ/s: } x = 2 \cup x = 1 + \sqrt{3}$$

$$5. \quad \sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 28} = x + 5$$

$$\text{Đ/s: } x = 1 \cup x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$6. \quad \sqrt{x^4 - 4x^3 + 14x - 11} = 1 - x$$

$$\text{Đ/s: } x = -2 \cup x = 1$$

$$7. \quad \sqrt{x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 17x + 7} = \sqrt{6}(x + 1)$$

$$\text{Đ/s: } x = \sqrt{3} - 2$$

$$8. \quad \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 7} = 1$$

$$\text{Đ/s: } x = 9$$

$$9. \quad \sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1} = 8$$

$$\text{Đ/s: } x = 8$$

$$10. \quad \sqrt{x + 8} - \sqrt{x} = \sqrt{x + 3}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1$$

$$11. \quad \sqrt{5x + 1} + \sqrt{2x + 3} = \sqrt{14x + 7}$$

$$\text{Đ/s: } x = -\frac{1}{9}; x = 3$$

$$12. \quad \sqrt{x(x - 1)} + \sqrt{x(x + 2)} = 2\sqrt{x^2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 0 \cup x = \frac{9}{8}$$

$$13. \quad \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14}$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{7}{2} \cup x = 7$$

$$14. \quad \sqrt{3x + 8} - \sqrt{3x + 5} = \sqrt{5x - 4} - \sqrt{5x - 7}$$

$$\text{Đ/s: } x = 6$$

$$15. \quad \sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x + 2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1$$

$$16. \quad \sqrt{10x + 1} + \sqrt{3x - 5} = \sqrt{9x + 4} + \sqrt{2x - 2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 3$$

$$17. \quad \sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 7} = \sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 8}$$

$$\text{Đ/s: } x = -1$$

$$18. \quad \sqrt{\frac{5}{4} - x^2} + \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{\frac{5}{4} - x^2} - \sqrt{1 - x^2} = x + 1$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{3}{5}$$

$$19. \quad \sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}} - 2\sqrt{2x + 3 - 4\sqrt{2x - 1}} + 3\sqrt{2x + 8 - 6\sqrt{2x - 1}} = 4$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = \frac{5}{2}$$

$$20. \quad \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x + 3}} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 3}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$21. \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1$$

$$22. \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = -1$$

$$23. \sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{5x+1}$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{19}{30}$$

$$24. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = 2$$

**HT3.** Giải các phương trình sau (nhóm nhân tử chung)

$$1. (x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$$

$$\text{Đ/s: } x = -3$$

$$2. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 0; x = -1$$

$$3. x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$$

$$\text{Đ/s: } x = 5; x = 4$$

$$4. \sqrt{x^2+10x+21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = 2$$

$$5. \sqrt{x^2+3x} + 2\sqrt{x+2} = 2x + \sqrt{x + \frac{6}{x} + 5}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = 2$$

$$6. x - 2\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x} + \sqrt{x^2-x} = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = 2$$

$$7. 2x^2 - 6x + 10 - 5(x-2)\sqrt{x+1} = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = 3; x = 8$$

$$8. \sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$$

$$\text{Đ/s: } x = 0; x = 1$$

$$9. \sqrt{x+1} + 2(x+1) = x-1 + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 0$$

$$10. \sqrt[3]{x^2+3x} + 2(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2}) = 1$$

$$\text{Đ/s: } x = -\frac{3}{2}$$

**HT4.** Giải các phương trình sau:  $(A^2 + B^2 = 0)$

$$1. 4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$$

$$\text{Đ/s: } x = 3$$

$$2. x^2 - x + 6 = 4\sqrt{1-3x}$$

$$\text{Đ/s: } x = -1$$

$$3. x^4 - 2x^2\sqrt{x^2-2x+16} + 2x^2 - 6x + 20 = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = 2$$

$$4. x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$$

$$\text{Đ/s: } x = 1$$

$$5. 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{5}{4}$$

$$6. 2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9-x^2} + 6\sqrt{(x+1)(9-x^2)} - x^3 - 2x^2 + 10x + 38 = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = 0$$

$$7. x^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} - 8x - 5$$

$$\text{Đ/s: } x = 1$$

$$8. 4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x})$$

**HT5.** Giải các bất phương trình sau (nhân liên hợp)

$$1. \sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + \sqrt{3x}$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{1}{2}$$

$$2. \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6$$

$$\text{Đ/s: } x = 3$$

$$3. \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$$

$$\text{Đ/s: } x = 3$$

$$4. \sqrt{10x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{2x-2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 3$$

$$5. (\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5) = x$$

$$\text{Đ/s: } x = 2$$

$$6. 3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+3}$$

$$\text{Đ/s: } x = 3; x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}$$

7.  $9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}) = x+3$

**Đ/s:**  $x = 6$

8.  $\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

**Đ/s:**  $x = 2$

9.  $(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1$

**Đ/s:**  $x = 1 \pm \sqrt{2}$

10.  $(3x+1)\sqrt{x^2 + 3} = 3x^2 + 2x + 3$

**Đ/s:**  $x = \pm 1$

11.  $(x+3)\sqrt{2x^2 + 1} = x^2 + x + 3$

**Đ/s:**  $x = 0; x = -5 + \sqrt{13}$

12.  $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$

**Đ/s:**  $x = 2$

13.  $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = x^2 - x - 2$

**Đ/s:**  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

14.  $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6$

**Đ/s:**  $x = -24; x = -88$

15.  $2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4}$

**Đ/s:**  $x = 3$

**HT6.** Giải các bất phương trình sau:

1.  $|3x+5| < |x^2+7x|$

**Đ/s:**  $x \in (-\infty; -5-2\sqrt{5}) \cup (-5; -5+2\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$

2.  $|x^2+8x-1| < 2x+6$

**Đ/s:**  $x \in (-5+2\sqrt{5}; 1)$

3.  $|2x^2-3x-10| \geq 8-x$

**Đ/s:**  $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{37}}{2}\right] \cup [1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$

4.  $\frac{|2x-1|}{x^2-3x-4} < \frac{1}{2}$

**Đ/s:**  $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 4) \cup \left(\frac{7+\sqrt{57}}{2}; +\infty\right)$

5.  $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| \geq x+5$

**Đ/s:**  $x \in (-\infty; -1-\sqrt{7}] \cup [-3+\sqrt{15}; 1] \cup (1; -1+\sqrt{7})$

6.  $\frac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|$

**Đ/s:**  $x \in [-5; -4) \cup (-2; 2-\sqrt{3}]$

**HT7.** Giải các bất phương trình sau:

1.  $\sqrt{2x+3} \leq \sqrt{4x^2-3x-3}$

**Đ/s:**  $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$

2.  $\sqrt{x^2-x-12} < x$

**Đ/s:**  $x \in [4; +\infty)$

3.  $\sqrt{-x^2+4x-3} > 2x-5$

**Đ/s:**  $\left[1; \frac{14}{5}\right)$

4.  $\sqrt{5x^2-2x-2} \geq 4-x$

**Đ/s:**  $x \in (-\infty; -3) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

5.  $\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5$

**Đ/s:**  $x \in (0; +\infty)$

6.  $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < \sqrt{5-2x}$

**Đ/s:**  $x \in [-2; 2)$

7.  $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-8} \leq \sqrt{2x+7}$

**Đ/s:**  $x \in [9; +\infty)$

8.  $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4x-1} \leq 3\sqrt{x}$

**Đ/s:**  $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

9.  $\sqrt{5x+1} - \sqrt{4-x} \leq \sqrt{x+6} \quad x \in \left[-\frac{1}{5}; 3\right] \quad \text{Đ/s: } \frac{x-1}{x} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x}} \geq 3 \quad x \in \left[-\frac{1}{12}; 0\right)$

$$10. \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x+4}$$

$$\text{Đ/s: } x \in [-2; -1] \cup x = 3$$

$$11. \left(x - \frac{2x+4}{2x-5}\right) \sqrt{10x-3x^2-3} \geq 0$$

$$\text{Đ/s: } x = 3 \cup x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right)$$

$$12. \frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$$

$$\text{Đ/s: } x \in [-1-\sqrt{52}; -5) \cup (1; -1+\sqrt{52})$$

$$13. \frac{\sqrt{-3x^2+x+4}}{x} < 2$$

$$\text{Đ/s: } x \in [-1; 0) \cup \left(\frac{9}{7}; \frac{4}{3}\right]$$

$$14. \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}} > \frac{1}{2x-1}$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$$

$$15. \frac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[\frac{\sqrt{13}-1}{6}; +\infty\right)$$

$$16. \sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \leq \sqrt{2x^2+9x+7}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = -5$$

$$17. \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-3x+1} \geq x-1$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup x = 1$$

$$18. \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$$

$$\text{Đ/s: } x \in [4; +\infty) \cup x = 1$$

**HT8.** Giải các bất phương trình sau (nhân liên hợp)

$$1. \frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} < x+21$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right) \setminus \{0\}$$

$$2. \frac{x^2}{(1+\sqrt{1+x})^2} > x-4$$

$$\text{Đ/s: } x \in [-1; 8)$$

$$3. \frac{6x^2}{(\sqrt{2x+1}+1)^2} > 2x+\sqrt{x-1}+1$$

$$\text{Đ/s: } x \in (10+4\sqrt{5}; +\infty)$$

$$4. \frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

$$\text{Đ/s: } x \in (-1; 3) \setminus \{0\}$$

$$5. 4(x+1)^2 < (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right) \setminus \{1\}$$

$$6. (\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right) \geq 4$$

$$\text{Đ/s: } x \geq 2$$

$$7. \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4}$$

$$\text{Đ/s: } x \geq 4 \cup x = 1$$

$$8. \frac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{2x+1} \geq \sqrt{2x+17}$$

$$\text{Đ/s: } x \in (0; 4]$$

$$9. \sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} > 2\sqrt{3}$$

$$\text{Đ/s: } x \in (1; 4]$$

$$10. 9(x^2+1) \leq (3x+7)\left(1-\sqrt{3x+4}\right)^2$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right)$$

$$11. 2\sqrt{1-\frac{2}{x}} + \sqrt{2x-\frac{8}{x}} \geq x$$

$$\text{Đ/s: } x \in [-2; 0) \in \{1+\sqrt{5}\}$$

12.  $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} > \frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$  Đ/s:  $x \in \left[-2; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; 2\right]$
13.  $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$  Đ/s:  $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$
14.  $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5} - 4x\sqrt{x^2+1} \geq 2(x+1)$  Đ/s:  $x \in (-\infty; -1]$
15.  $\frac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$  Đ/s:  $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{\sqrt{13}-1}{6}; +\infty\right)$
16.  $\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x^3}} \geq 1$  Đ/s:  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
17.  $\sqrt{2x^2+11x+15} + \sqrt{x^2+2x-3} \geq x+6$  Đ/s:  $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

**HT9.** Giải các phương trình sau (Đặt ẩn phụ không hoàn toàn):

1.  $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$  Đ/s:  $x = 1 \pm \sqrt{2}$
2.  $x^2 + (3-\sqrt{x^2+2})x = 1+2\sqrt{x^2+2}$  Đ/s:  $x = \pm\sqrt{14}$
3.  $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$  Đ/s:  $x = \pm 1; x = 5$
4.  $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right) = x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$  Đ/s:  $x = 0$
5.  $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}$  Đ/s:  $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$
6.  $4\sqrt{x+1}-1 = 3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$  Đ/s:  $x = -\frac{3}{5}; x = 0$
7.  $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4} = 3x^2+1$  Đ/s:  $x = 0$
8.  $x^2+2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}-x+2=0$  Đ/s:  $x = 0; x = -1$
9.  $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$  Đ/s:  $x = 1 \pm \sqrt{2}$
10.  $6x^2-10x+5-(4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5}=0$  Đ/s:  $x = \frac{\sqrt{59}-3}{10}$

**HT10.** Giải các phương trình sau (Đặt 1 ẩn phụ):

1.  $\sqrt{2x^2+4x+1} = 1-x^2-2x$  Đ/s:  $x = -2; x = 0$
2.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4$  Đ/s:  $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}$
3.  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$  Đ/s:  $x = 3$
4.  $(x^2+1)^2 = 5-x\sqrt{2x^2+4}$  Đ/s:  $x = -\sqrt{2} \cup x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$
5.  $x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}} = 3x+1$  Đ/s:  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
6.  $\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} - 1 = 0$  Đ/s:  $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$
7.  $2x^2-6x+4 = 3\sqrt{x^3+8}$  Đ/s:  $x = 3 \pm \sqrt{13}$
8.  $2x^2+5x-1 = 7\sqrt{x^3-1}$  Đ/s:  $x = 4 \pm \sqrt{6}$



$$9. \quad x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$$

$$\text{Đ/s: } x = -1 \cup x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$10. \quad 2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1 - \sqrt{2} \cup x = 2 + \sqrt{3}$$

**HT11.** Giải các phương trình sau (đặt 2 ẩn phụ hoặc chuyển về hệ):

$$1. \quad \sqrt[4]{5-x} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Đ/s: } x = 0; x = 5$$

$$2. \quad x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$3. \quad 3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}}$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{-5 + \sqrt{73}}{6}; x = \frac{-7 - \sqrt{69}}{6}$$

$$4. \quad x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$$

$$\text{Đ/s: } x = -1; x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$$

$$5. \quad 2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1 - \sqrt{2}; x = 2 + \sqrt{3}$$

$$6. \quad 4\sqrt[3]{(x+2)^2} - 7\sqrt[3]{(4-x)^2} + 3\sqrt[3]{(2-x)^2} = 0$$

$$7. \quad \sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 2$$

$$\text{Đ/s: } x = -6; x = 1$$

$$8. \quad (x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = x-24$$

$$\text{Đ/s: } x = -2 - 2\sqrt{7}; x = -5 - \sqrt{31}$$

$$9. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

**HT12.** Giải các bất phương trình sau (Đặt ẩn phụ):

$$1. \quad (x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2+5x+28}$$

$$\text{Đ/s: } x \in (-9; 4)$$

$$2. \quad x(x-4)\sqrt{-x^2+4x} + (x-2)^2 < 2$$

$$\text{Đ/s: } x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$$

$$3. \quad \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} < 181-14x$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left(\frac{6}{7}; 6\right)$$

$$4. \quad \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3 \leq 3\sqrt{-x^2+x+6}$$

$$\text{Đ/s: } x \in [-2; -1] \cup [2; 3]$$

$$5. \quad \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} \leq x + \sqrt{x^2-16} - 6$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[\frac{145}{36}; +\infty\right)$$

$$6. \quad \sqrt{3x^2+6x+4} < 2-2x-x^2$$

$$\text{Đ/s: } x \in (-2; 0)$$

$$7. \quad 2\sqrt{\frac{3x-1}{x}} \geq \frac{x}{3x-1} + 1$$

$$\text{Đ/s: } x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$8. \quad (x+1)(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3} < 2-(x-1)^2$$

$$\text{Đ/s: } x \in (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$$

$$9. \quad x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{35}{12}$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$$

$$10. \quad \frac{1}{1-x^2} + 1 > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left(-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$$

**HT13.** Giải các phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu của hàm số)

$$1. \quad \sqrt{\frac{6}{3-x}} + 3\sqrt{\frac{8}{2-x}} = 14$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{3}{2}$$

$$2. \quad \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+\sqrt{7x+2}} = 4$$

$$\text{Đ/s: } x = 1$$

$$3. \quad 4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0 \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{-1+\sqrt{21}}{4}$$

$$4. \quad x(4x^2 + 1) + (x - 3)\sqrt{5 - 2x} = 0$$

$$5. \quad (2x + 3)\sqrt{4x^2 + 12x + 11} + 3x(1 + \sqrt{9x^2 + 2}) + 5x + 3 = 0$$

$$\text{Đ/s: } x = -\frac{3}{5}$$

$$6. \quad \sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = 2(x - 1)^4(2x^2 - 4x + 1)$$

$$\text{Đ/s: } x = 0; x = 2$$

$$7. \quad x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$$

$$\text{Đ/s: } x = 1; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$8. \quad 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x - 5}$$

$$\text{Đ/s: } x = 2; x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$9. \quad x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x - 9}$$

$$\text{Đ/s: } x = 4; x = \frac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$10. \quad 2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x - 1)\sqrt{3x - 1}$$

$$\text{Đ/s: } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

**HT14.** Giải bất phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu của hàm số)

$$1. \quad \sqrt{x + 1} > 3 - \sqrt{x + 4}$$

$$\text{Đ/s: } x \in (0; +\infty)$$

$$2. \quad \sqrt{5x - 1} + \sqrt{x + 3} \geq 4$$

$$\text{Đ/s: } x \in [1; +\infty)$$

$$3. \quad 2(x - 2)\left(\sqrt[3]{4x - 4} + \sqrt{2x + 2}\right) \geq 3x - 1$$

$$\text{Đ/s: } x \geq 3$$

$$4. \quad (x + 2)\sqrt{x + 1} > 27x^3 - 27x^2 + 12x - 2$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[-1; \frac{7}{9}\right)$$

$$5. \quad 3\sqrt{3 - 2x} + \frac{5}{\sqrt{2x - 1}} - 2x \leq 6$$

$$\text{Đ/s: } x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

## TUYỂN TẬP ĐỀ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM

**HT15. Giải bất phương trình:**

1) (B - 2012)  $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$

2) (A - 2010)  $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$

3) (A - 2005)  $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$

4) (A - 2004)  $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$

5) (D - 2002)  $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

Đ/s: 1)  $\left[0; \frac{1}{4}\right] \cup [4; +\infty)$       2)  $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$       3)  $2 < x < 10$

4)  $x > 10 - \sqrt{34}$       5)  $x < -\frac{1}{2} \cup x = 2 \cup x \geq 3$

**HT16. Giải các phương trình sau:**

1) (B - 2011)  $3\sqrt{2 + x} - 6\sqrt{2 - x} + 4\sqrt{4 - x^2} = 10 - 3x$

2) (B - 2010)  $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

3) (A - 2009)  $2\sqrt[3]{3x - 2} + 3\sqrt{6 - 5x} - 8 = 0$

4) (D - 2006)  $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

5) (D - 2005)  $2\sqrt{x + 2} + 2\sqrt{x + 1} - \sqrt{x + 1} = 4$

Đ/s: 1)  $x = \frac{6}{5}$       2)  $x = 5$       3)  $x = -2$       4)  $x = 2 - \sqrt{2}$       5)  $x = 3$

# CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## I. CÁC DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

### 1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

**Giải và biện luận:**

- Tính các định thức:  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ,  $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ,  $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ .

| Xét D      |                                | Kết quả                                                                   |
|------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $D \neq 0$ |                                | Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}\right)$ |
| $D = 0$    | $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ | Hệ vô nghiệm                                                              |
|            | $D_x = D_y = 0$                | Hệ có vô số nghiệm                                                        |

**Chú ý:** Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

### 2. Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tùy theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

### 3. Hệ đối xứng loại 1

Hệ có dạng:  $(I) \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$  (với  $f(x, y) = f(y, x)$  và  $g(x, y) = g(y, x)$ ).

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa  $x$  và  $y$  thì  $f(x, y)$  và  $g(x, y)$  không thay đổi).

- Đặt  $S = x + y$ ,  $P = xy$ .
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn là  $S$  và  $P$ .
- Giải hệ (II) ta tìm được  $S$  và  $P$ .
- Tìm nghiệm  $(x, y)$  bằng cách giải phương trình:  $X^2 - SX + P = 0$ .

### 4. Hệ đối xứng loại 2

Hệ có dạng:  $(I) \begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa  $x$  và  $y$  thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

- Trừ (1) và (2) về theo vế ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 & (3) \\ f(x, y) = 0 & (1) \end{cases}$$

- Biến đổi (3) về phương trình tích:

$$(3) \Leftrightarrow (x - y) \cdot g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

- Như vậy,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = y \\ f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

- Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

### 5. Hệ đẳng cấp bậc hai

Hệ có dạng:  $(I) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$

- Giải hệ khi  $x = 0$  (hoặc  $y = 0$ ).
- Khi  $x \neq 0$ , đặt  $y = kx$ . Thế vào hệ (I) ta được hệ theo  $k$  và  $x$ . Khử  $x$  ta tìm được phương trình bậc hai theo  $k$ . Giải phương trình này ta tìm được  $k$ , từ đó tìm được  $(x; y)$ .

**Chú ý:** – Ngoài các cách giải thông thường ta còn sử dụng phương pháp hàm số để giải (sẽ học ở lớp 12).  
– Với các hệ phương trình đối xứng, nếu hệ có nghiệm  $(x_0; y_0)$  thì  $(y_0; x_0)$  cũng là nghiệm của hệ. Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất thì  $x_0 = y_0$ .

**BÀI TẬP****HT1.** Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -31 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$$

Đ/s: 1) 2) 3)  
4) 5) 6)

**HT2.** Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x^2 + 3y^2 - 2x = 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 - 2y = 2 \\ 2x^2 + xy - y = 9 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + x = 19 \\ x^2 + y^2 + y = 7 \end{cases}$$

Đ/s: 1)  $(1; -1); (-\frac{5}{7}; -\frac{1}{7})$  2)  $(2; 1)$  3)  $(1; 2); (-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}); (\frac{5 - \sqrt{33}}{4}; \frac{3 + \sqrt{33}}{4}); (\frac{5 + \sqrt{33}}{4}; \frac{3 - \sqrt{33}}{4})$

**HT3.** Giải hệ phương trình sau (đẳng cấp bậc 2)

$$1) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = -1 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 = 12 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 5 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 2 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

Đ/s: 1)  $(3; 1); (-3; -1); (\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{\frac{7}{3}}); (-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}})$  2)  $(1; 2); (-1; -2); (-\frac{9}{\sqrt{31}}; \frac{7}{\sqrt{31}}); (\frac{9}{\sqrt{31}}; -\frac{7}{\sqrt{31}})$   
3)  $(-1; -4); (1; 4)$  4)  $(-1; 1); (1; -1)$  5)  $(-3; -1); (3; 1)$

**HT4.** Giải các hệ phương trình sau (đối xứng loại 1)

$$1) \begin{cases} xy(x + 2)(y + 2) = 24 \\ x^2 + y^2 + 2(x + y) = 11 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^3 + y^3 = 12(x + y) \\ x - y = 2 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x^2 + 4x + y = 7 \\ x(x + 3)(x + y) = 12 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{y + 1} = 2 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$$

Đ/s: 1)  $(1; -4); (1; 2); (2; -3); (2; 1); (-4; -3); (-4; 1); (-3; -4); (-3; 2)$  2)  $(-2; -4); (4; 2); (1; -1)$

- 3)  $((3;2), (2;3))$       4)  $(-2;1), (1;-2), (-\sqrt{2};\sqrt{2}), (\sqrt{2};-\sqrt{2})$
- 5)  $(-4;7), (1;2), \left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}; \frac{-11-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2}; \frac{-11+\sqrt{21}}{2}\right)$       6)  $(3;1), (1;3)$
- 7)  $(-3;-1), (-1;-3), (1;3), (3;1)$       8)  $(1;4), (4;1)$

**HT5.** Giải các hệ phương trình sau (hệ đối xứng loại 2)

- 1)  $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 5 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 5 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 3x^2 = 2y + \frac{1}{y} \\ 3y^2 = 2x + \frac{1}{x} \end{cases}$       3)  $\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{y+5} + \sqrt{x-2} = 7 \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} x + \sqrt[4]{y-1} = 1 \\ y + \sqrt[4]{x-1} = 1 \end{cases}$       5)  $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$       6)  $\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x \end{cases}$

- Đ/s: 1)  $(2;2)$       2)  $(1;1)$       3)  $(11;11)$
- 4)  $(1;1)$       5)  $(0;0), (\sqrt{11};\sqrt{11}), (-\sqrt{11};-\sqrt{11})$       6)  $(0;0), (1;1)$

## II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

### 1. Phương pháp rút thế, phương pháp cộng

**HT6.** Giải các hệ phương trình sau:

- 1)  $\begin{cases} x^3 - 2xy + 5y = 7 \\ 3x^2 - 2x + y = 3 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$       3)  $\begin{cases} x - \sqrt{y+1} = \frac{5}{2} \\ y + 2(x-3)\sqrt{x+1} = -\frac{3}{4} \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} 5x^2 - 3y = x - 3xy \\ x^3 - x^2 = y^2 - 3y^3 \end{cases}$       5)  $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + x + \sqrt{y^2+x+y+1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1} - x + \sqrt{y^2+x+y+1} - y = 2 \end{cases}$       6)  $\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$
- 1)  $(1;2), \left(\frac{6-2\sqrt{33}}{7}; \frac{-153+44\sqrt{23}}{49}\right), \left(\frac{6+2\sqrt{33}}{7}; \frac{-153-44\sqrt{23}}{49}\right)$       2)  $(0;0), (1;1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
- 3)  $\left(3; -\frac{3}{4}\right)$       4)  $(0;0), (-1;1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$       5)  $(4;4)$       6)  $(4+2\sqrt{3}; 12+6\sqrt{3})$

### 2. Tìm mối liên hệ giữa $x, y$ từ 1 phương trình rồi thế vào phương trình còn lại

- 1)  $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 2 \end{cases}$       4)  $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$
- 5)  $\begin{cases} y^4 - 2xy^2 + 7y^2 = -x^2 + 7x + 8 \\ \sqrt{3y^2+13} - \sqrt{15-2x} = \sqrt{x+1} \end{cases}$       6)  $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 \\ (x-1)^4 = y \end{cases}$
- 7)  $\begin{cases} x+3 = 2\sqrt{(3y-x)(y+1)} \\ \sqrt{3y-2} - \sqrt{\frac{x+5}{2}} = xy - 2y - 2 \end{cases}$       8)  $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 1 + \sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

$$9) \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 5x - y - 2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 4 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3x^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1} \\ y(y-x) = 3 - 3y \end{cases}$$

$$\text{Đ/s: 1) } (1;1), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right)$$

$$2) (1;1), (-1;-1), \left(\pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$3) (2;2), (32 - 8\sqrt{15}; 8 - 2\sqrt{15})$$

$$4) (5;2)$$

$$5) (3;-2), (3;2)$$

$$6) (2;1)$$

$$7) (3;2)$$

$$8) (1;0)$$

$$9) (1;1), \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right)$$

$$10) (1;1), \left(\frac{415}{51}; \frac{17}{3}\right)$$

### 3. Đặt ẩn phụ chuyển về hệ cơ bản

HT7. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} xy - x + y = 3 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 5 \\ (x+y)\frac{x}{y} = 6 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x-y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x-y) \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 12x + 3y - 4\sqrt{xy} = 16 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 6} - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 + 1 + y(x+y) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 8(x^2 + y^2) + 4xy + \frac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đ/s: 1) } (0;-3), (3;0) \quad 2) \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), (2;1)$$

$$3) (1;-1), (-3;7)$$

$$4) (0;0), (3;2), (-2;-3)$$

$$5) (1;4)$$

$$6) (-3;2), (1;2)$$

$$7) (1;2), \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$8) (1;2), (-2;5)$$

$$9) (1;0)$$

$$10) (0;1)$$

### 4. Phương pháp hàm số

HT8. Giải các hệ phương trình sau:

$$1) \begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + \frac{1}{x^2+1} = y + \frac{1}{y^2+1} \\ \sqrt{9x^2 + \frac{4}{y^2}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{y} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y(1 + x^2) = x(1 + y^2) \\ x^2 + 3y^2 = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \sqrt{x^2 + 21} = \sqrt{y-1} + y^2 \\ \sqrt{y^2 + 21} = \sqrt{x-1} + x^2 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y-5} \\ y = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x-y \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x} + (3y-20)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^3 - 2y + 1 = 0 \\ (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$$

Đ/s: 1) (3;2)

$$2) \left( \frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; -\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \right)$$

$$3) \left( \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}; \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \right)$$

$$4) \left( 1; \frac{1}{2} \right)$$

$$5) \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right), \left( -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$6) (2;2)$$

$$7) (4;4)$$

$$8) (\sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$9) (5;4)$$

$$10) (1;1)$$

$$11) (1;0), (5;2)$$

$$12) (-3;2)$$

$$13)$$

$$14) (1;-1), \left( \frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{\sqrt{11}-3}{2} \right)$$