

BÀI GIẢNG KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững khái niệm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách đường thẳng đến mặt phẳng.
- + Nắm được khái niệm khoảng cách giữa hai đường thẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng.
- + Nắm vững các tính chất về khoảng cách.

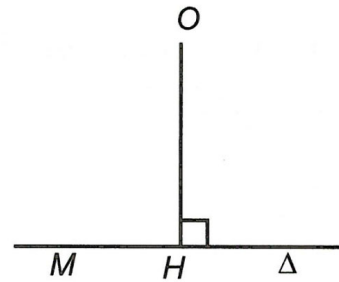
❖ Kỹ năng

- + Xác định được hình chiếu của một điểm đến đường thẳng và trên mặt phẳng.
- + Biết cách tính khoảng cách trong từng trường hợp.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Cho điểm O và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên Δ . Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến Δ .

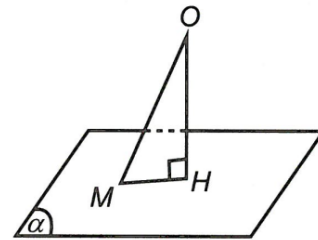


$$d(O, \Delta) = OH.$$

Nhận xét: $OH \leq OM, \forall M \in \Delta$

Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O . Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α) . Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) .

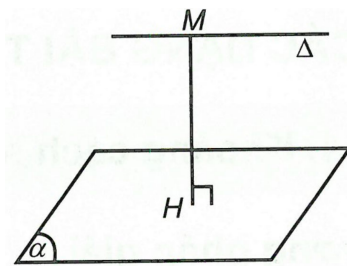


$$d(O, (\alpha)) = OH.$$

Nhận xét: $OH \leq OM, \forall M \in (\alpha)$

Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng

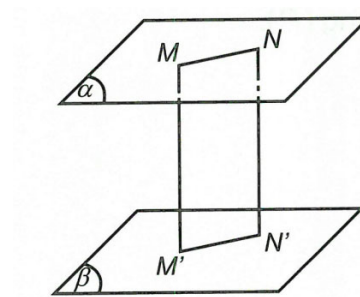
Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song với nhau. Khi đó khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ đến mặt phẳng (α) được gọi là khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) .



$$d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) \text{ với } M \in \Delta$$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

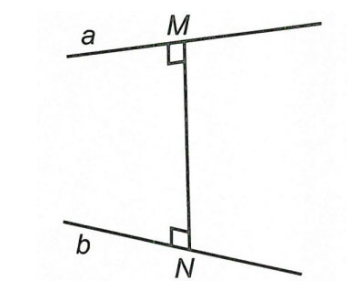
Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .



$$d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = d(N, (\alpha)) \text{ với } M \in (\alpha), N \in (\beta).$$

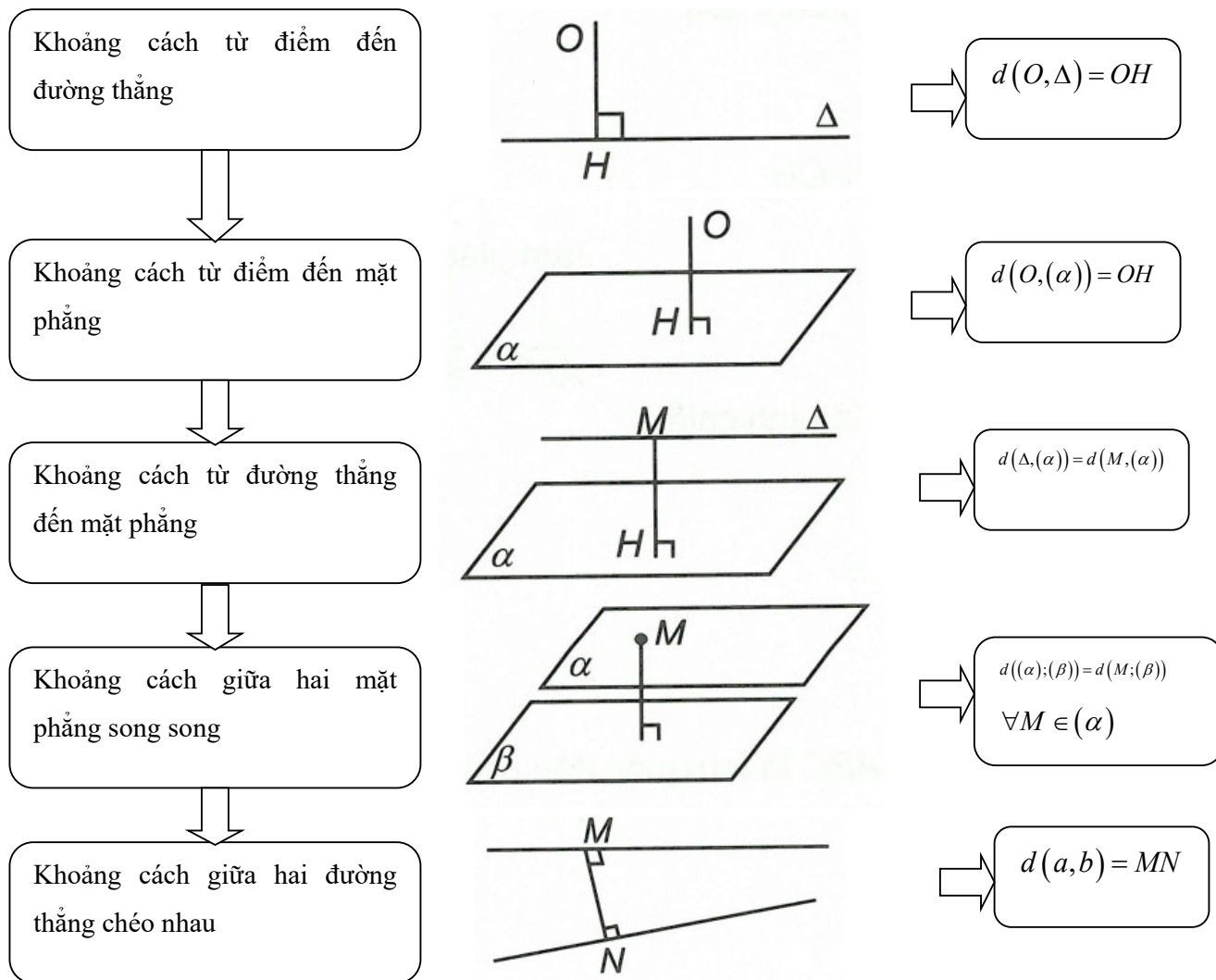
Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b . Độ dài đoạn vuông góc chung MN của a và b được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .



$$d(a, b) = MN.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

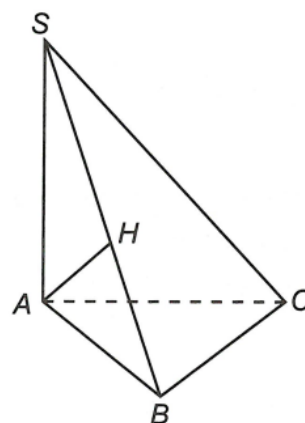
Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Phương pháp giải

Bài toán: Xác định khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P).

Ví dụ. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a, SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến (SBC) .

Hướng dẫn giải



Bước 1. Xác định hình chiếu H của O trên (α) .

Ta có $AH \perp SB; AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

+) Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α) .

$$\Rightarrow AH = d(A, (SBC)).$$

+) Tìm giao tuyến (α) của (P) và (α) .

+) Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(O; (\alpha)) = OH$.

Bước 2. Tính OH.

Tam giác SAB vuông tại A nên

Lưu ý: Tính chất của tứ diện vuông.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O.

$(OA \perp OB; OB \perp OC; OC \perp OA)$ và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng a^3 . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Hướng dẫn giải

Gọi I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BC và SI .

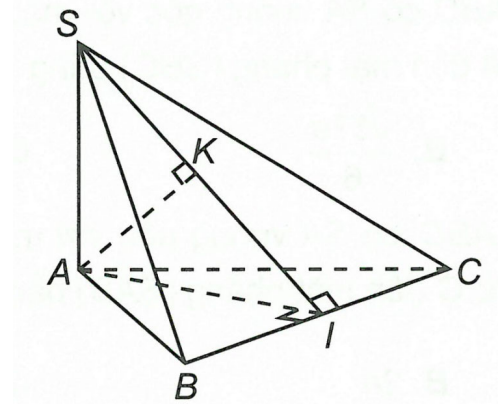
Ta có $AI \perp BC; SA \perp BC \Rightarrow AK \perp (SBC)$

$\Rightarrow AK = d(A, (SBC)).$

Ta có $V = a^3; S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = 4a\sqrt{3}.$

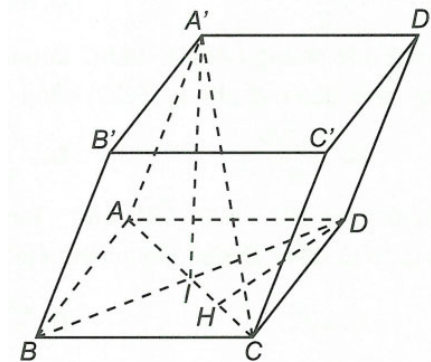
Trong tam giác vuông SAI , ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AK = \frac{4a\sqrt{195}}{65}.$$



Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(A'ACC')$

Hướng dẫn giải



Trong $(A'AC)$, kẻ $A'I \perp AC$.

Vì $(A'AC) \perp (ABCD)$ và $(A'AC) \cap (ABCD) = AC$ nên $A'I \perp (ABCD)$.

Vì $DD' \parallel AA'$ nên $DD' \parallel (A'ACC') \Rightarrow d(D', (A'AC)) = d(D, (A'AC))$

Kẻ $DH \perp AC$.

Ta có $AC = A'A\sqrt{2} = 2a \Rightarrow CD = a.$

Suy ra $d(D, (A'AC)) = DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Khoảng cách từ một điểm A bất kì đến mặt phẳng (P) bằng độ dài đoạn AH với H là một điểm bất kì trên mặt phẳng (P) .

B. Khoảng cách từ một điểm A bất kì đến mặt phẳng (P) bằng độ dài đoạn AH với $AH \perp (P)$.

C. Khoảng cách từ một điểm A bất kì đến mặt phẳng (P) là độ dài nhỏ nhất của đoạn AH.

D. Khoảng cách từ một điểm A bất kì đến mặt phẳng (P) bằng độ dài đoạn AH với H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{57}a}{3}$ B. $\frac{\sqrt{57}a}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{57}a}{3}$ D. $\frac{\sqrt{57}a}{12}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. a B. 2a C. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{a}{2}$ B. a C. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$; $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng 30° . Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

- A. a B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $a\sqrt{3}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{57}a}{3}$ B. $\frac{\sqrt{57}a}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{57}a}{9}$ D. $\frac{\sqrt{57}a}{18}$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B, $BC = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. a

B. $\frac{3a}{2}$

C. $2a$

D. $\frac{3a}{4}$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a, SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}a}{15}$

C. $\frac{4\sqrt{5}a}{15}$

D. $\frac{6\sqrt{5}a}{5}$

Câu 11: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 12: Cho tứ diện đều ABCD, biết khoảng cách A đến mặt phẳng (BCD) bằng $a\sqrt{6}$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{4}$

B. $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

C. $\frac{7\sqrt{3}a^2}{4}$

D. $\frac{9\sqrt{3}a^2}{2}$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

C. a

D. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$

C. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$

D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a, SA = 3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{6a}{7}$

B. $\frac{3\sqrt{21}a}{7}$

C. $\frac{5a}{7}$

D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ C. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình vuông tâm O có cạnh a . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ C. a D. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$, biết SC hợp với đáy một góc 45° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ C. $\frac{\sqrt{21}a}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{3\sqrt{21}a}{7}$ B. $\frac{2\sqrt{21}a}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}a}{21}$ D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. a

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ trọng tâm G của $\triangle SAB$ đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C , $SA \perp (ABCD)$, $AC = a$ và $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $a\sqrt{2}$ B. a C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc với nhau, $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$

B. $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

C. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

D. $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $a\sqrt{2}$

B. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$

C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

D. $a\sqrt{3}$

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên SB vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SB = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{a}{2}$

C. $a\sqrt{5}$

D. $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$

Câu 26: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng $2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$

B. $a\sqrt{3}$

C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Câu 27: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'CD)$ bằng

A. $a\sqrt{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 28: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a, BB' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

B. a

C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

D. $2a$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng $a, \widehat{BAD} = 60^\circ, SO \perp (ABCD), SO = a$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh bằng $a, \widehat{BAD} = 60^\circ, SO \perp (ABCD), SO = a$. Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-D	2-B	3-D	4-C	5-A	6-D	7-A	8-C	9-A	10-B
11-D	12-A	13-B	14-D	15-A	16-D	17-A	18-D	19-C	20-B

21-C	22-D	23-A	24-C	25-D	26-B	27-D	28-C	29-B	30-C
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Lời giải chi tiết

Câu 2.

Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SM

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM).$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH.$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét $\triangle SAM$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

Câu 3.

$$\text{Do } SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC).$$

$$\text{Dựng } CN \perp AB \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow d(C; (SAB)) = CN.$$

$$\text{Do } \triangle ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(C; (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 4.

$$\text{Do } SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC).$$

$$\text{Dựng } CN \perp AB \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow d(C; (SAB)) = CN.$$

$$\text{Do } \triangle ABC \text{ đều cạnh bằng } a \text{ nên } CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do M là trung điểm BC nên

$$d(M; (SAB)) = \frac{1}{2} d(C; (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 5.

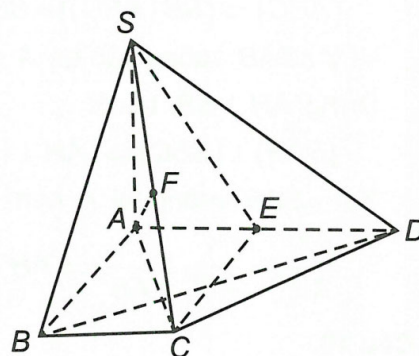
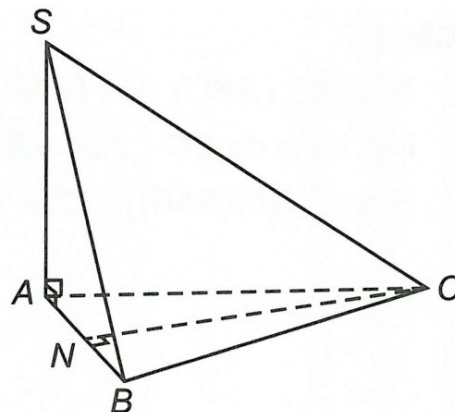
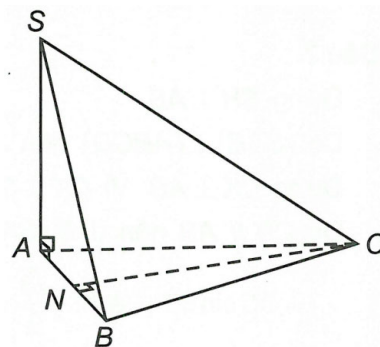
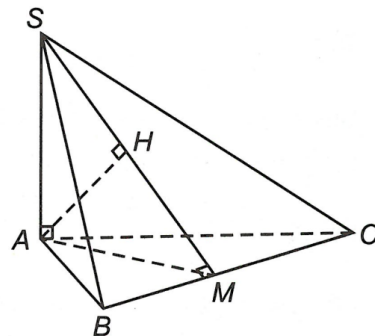
Gọi E là trung điểm AD.

Khi đó ABCE là hình vuông cạnh a. Suy ra $CE \perp AD$.

Lại có $CE \perp SA$.

$$\text{Do đó } CE \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{CSE} = \widehat{(SC, (SAD))} = 30^\circ.$$

$$\text{Lại có: } SC \cdot \sin 30^\circ = CE = a \Rightarrow SC = 2a.$$



ΔABC vuông cân tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Do $CE = \frac{1}{2}AD$ nên ΔACD vuông tại C $\Rightarrow AC \perp CD$.

Dựng $AF \perp SC$.

Ta có: $d(A, (SCD)) = AF = \frac{SA \cdot SC}{SC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2a} = a$.

Câu 6.

Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow (SBC) \perp (SAM)$.

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Xét ΔSAM vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$$

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\frac{GM}{MA} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $d(G, (SBC)) = \frac{1}{3}d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{57}a}{18}$.

Câu 7.

Dựng $SH \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Dựng $CK \perp AB$. Vì $CK \perp SH$ nên $CK \perp (SAB)$.

Do $CD \parallel AB$ nên $d(D, (SAB)) = d(C, (SAB)) = CK$

$$= BC \sin 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 8.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

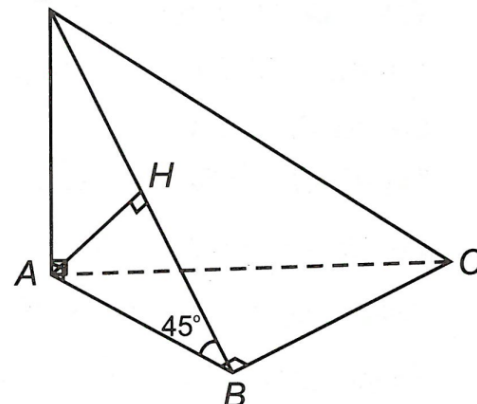
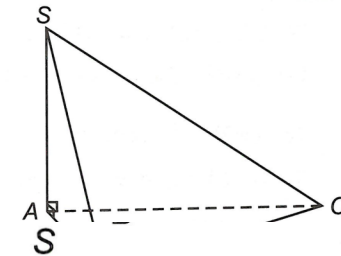
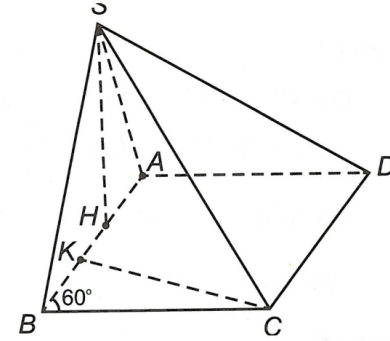
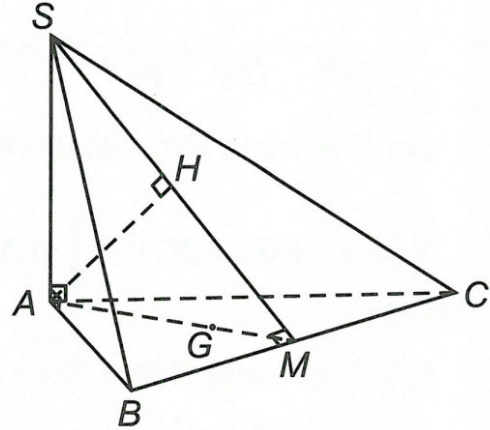
Mặt khác do $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra $d(C, (SAB)) = CB = 2a$.

Câu 9.

Do $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy ΔSAB vuông cân tại A $\Rightarrow SA = AB = a$.



Dựng $AH \perp SB$, ta có:

$$(SAB) \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH.$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 10.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $(SAC) \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC) , dựng $BH \perp AC$.

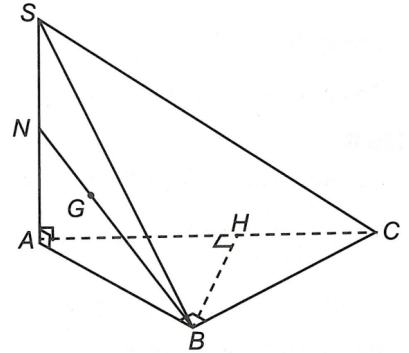
Ta có $BH \perp (SAC)$. Suy ra $d(B; (SAC)) = BH$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Do G là trọng tâm $\triangle SAB$ nên $\frac{NG}{NB} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Suy ra } d(G; (SBC)) = \frac{1}{3} d(A; (SBC)) = \frac{2\sqrt{5}a}{15}.$$



Câu 11.

Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu vuông góc của A trên BM.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp BM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow CD \perp AH (1).$$

Tương tự, ta chứng minh được $BC \perp AH (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (BCD)$.

Suy ra $d(A; (BCD)) = AH$ và H là trọng tâm $\triangle BCD$.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Nhận xét: Trong tứ diện đều, hình chiếu vuông góc của một đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trọng tâm (trọng tâm) của mặt đó.

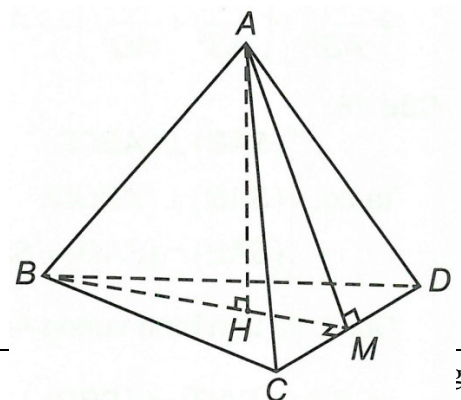
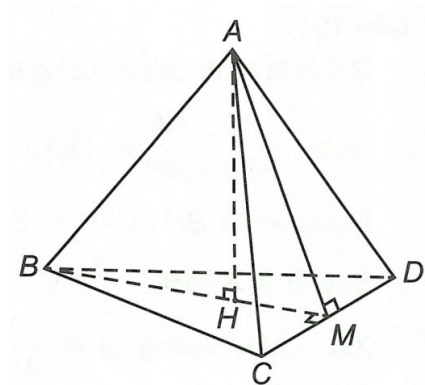
Câu 12.

Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu vuông góc của A trên BM.

Áp dụng kết quả **câu 11**, ta có

$$d(A; (BCD)) = AH \text{ và H là trọng tâm } \triangle BCD.$$

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H: $AH^2 = AB^2 - BH^2$



$$\Leftrightarrow AH^2 = AB^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 6a^2 = \frac{2}{3} AB^2 \Rightarrow AB = 3a.$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}(3a)^2}{4} = \frac{9\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Câu 13.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB; (ABCD))} = \widehat{SBA}$.

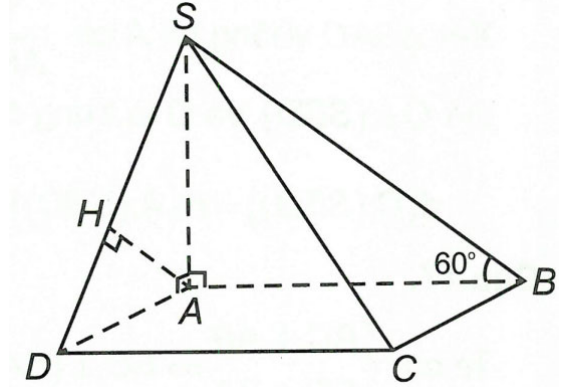
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$

Xét ΔSAB vuông tại A : $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH$.

Xét ΔSAD vuông tại A : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Do $AB \parallel CD$ nên $d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



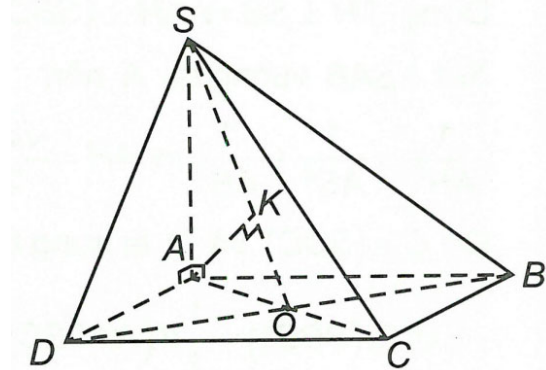
Câu 14.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow \begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO).$

Dựng $AK \perp SO \Rightarrow AK \perp (SBD).$

Suy ra $d(A; (SBD)) = AK$.



Xét ΔSAO vuông tại A : $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 15.

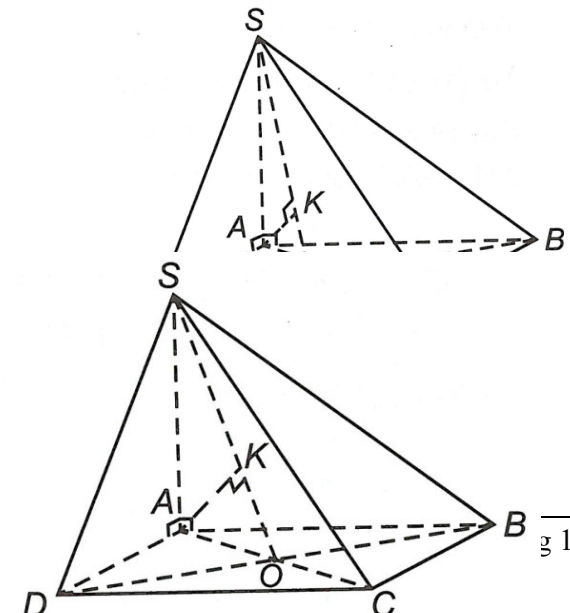
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow (SBD) \perp (SAH).$

Dựng $AK \perp SH \Rightarrow AK \perp (SBD).$

Suy ra $d(A; (SBD)) = AK$.

Xét ΔSAH vuông tại A : $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2}$
 $= \frac{1}{AS^2} + \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \right) \Rightarrow AK = \frac{6a}{7}.$



Câu 16.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD). \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$$

$$\text{Gọi } O \text{ là tâm hình vuông } ABCD \Rightarrow \begin{cases} BD \perp OA \\ BD \perp SA \end{cases}$$

$$\Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO).$$

$$\text{Dựng } AK \perp SO \Rightarrow AK \perp (SBD).$$

$$\text{Suy ra } d(A; (SBD)) = AK.$$

$$\text{Xét } \triangle SAO \text{ vuông tại } A \text{ có } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $O \in (SBD)$ và O là trung điểm AC nên

$$d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Câu 17.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$\text{Suy ra } ((SBC); (ABCD)) = \widehat{SBA}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } A: SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Vì } BC \perp (SAB) \text{ nên } (SAB) \perp (SBC).$$

Dựng

$$AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH.$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Do $C \in (SBC)$ và O là trung điểm AC nên

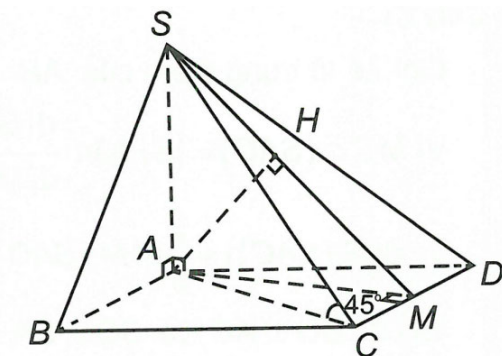
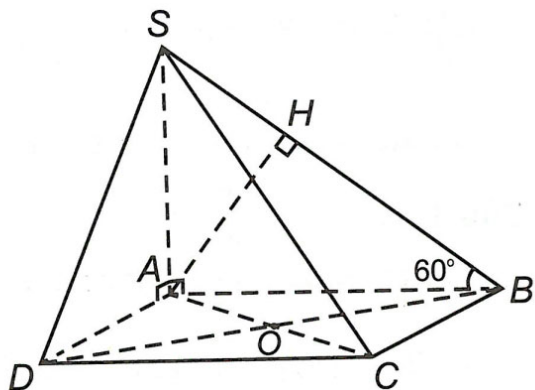
$$d(O; (SBC)) = \frac{1}{2} d(A; (SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

Câu 18.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABCD). \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$$

Tam giác ABC cân tại B và $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Suy ra $\triangle ABC, \triangle ACD$ đều.



Vậy $\widehat{SC; (ABCD)} = \widehat{SCA} = 45^\circ \Rightarrow SA = AC = a$.

Gọi M là trung điểm của CD $\Rightarrow \begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAM)$.

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH$.

Xét $\triangle SAM$ vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $AB \parallel (SCD)$ nên $d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 19.

$\triangle ABC$ cân tại B và $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC, \triangle ACD$ đều.

Gọi M là trung điểm CD $\Rightarrow CD \perp AM$.

Mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAM)$.

Dựng

$AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH$.

Xét $\triangle SAM$ vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Gọi N là trung điểm BC nên $\frac{GS}{NS} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $d(G; (SCD)) = \frac{2}{3} d(N; (SCD))$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} d(B; (SCD)) = \frac{1}{3} d(A; (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{21}.$$

Câu 20.

Ta có $(SAB) \perp BC \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SB.

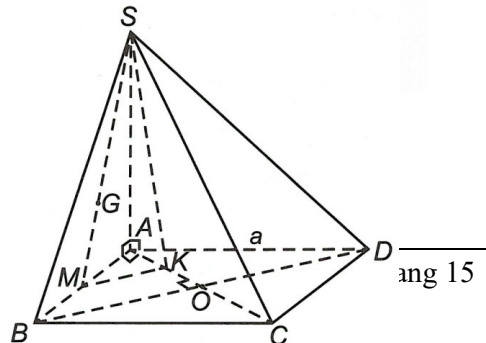
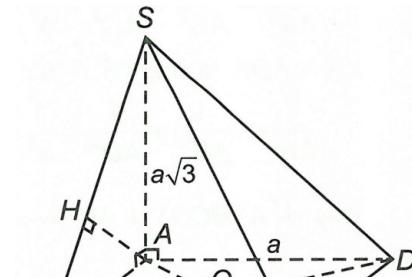
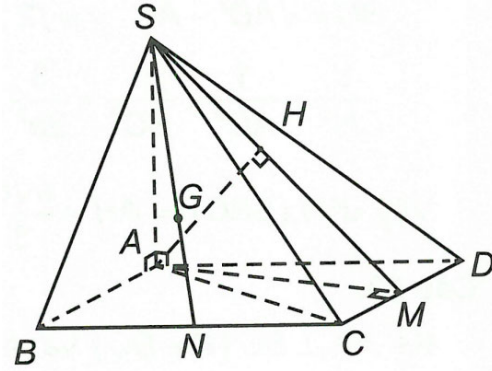
Kẻ $AH \perp SB$ nên $d(A; (SBC)) = AH$.

Vì $OA \cap (SBC) = \{C\}$ nên

$$\frac{d(O; (SBC))}{d(A; (SBC))} = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(O; (SBC)) = \frac{1}{2} d(A; (SBC))$$

$$\Rightarrow d(O; (SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Câu 21.

Gọi M là trung điểm của AB.

$$\text{Vì } MG \cap (SAC) = \{S\} \text{ nên } \frac{d(G, (SAC))}{d(M, (SAC))} = \frac{GS}{MS} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow d(G, (SAC)) = \frac{2}{3} d(M, (SAC)).$$

Ta có: $BO \perp AC$ và $BO \perp SA \Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Mặt khác: $BM \cap (SAC) = \{A\}$.

Suy ra:

$$d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)) = \frac{1}{2} BO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow d(G, (SAC)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 22.

Kẻ $CH \perp AB$ ($H \in AB$).

Do $CH \perp SA$ ($SA \perp (ABC)$) nên $CH \perp (SAB)$.

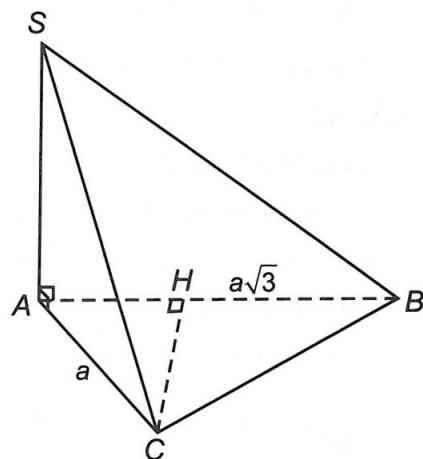
Suy ra $d(C, (SAB)) = CH$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại C có:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = a\sqrt{2};$$

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{2a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(H, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

**Câu 23.**

Kẻ $AK \perp BC$ ($K \in BC$) và $AH \perp DK$ ($H \in DK$).

Do $BC \perp DA$ (do $AD \perp (ABC)$) nên $BC \perp (DAK)$.

Suy ra $AH \perp BC$. Do $AH \perp DK$ nên

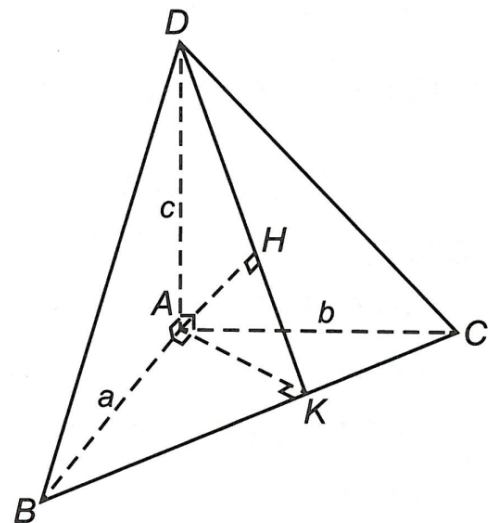
$$AH \perp (BCD) \Rightarrow d(A, (BCD)) = AH.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Xét $\triangle ADK$ vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$



$$\text{Vậy } d(A, (BCD)) = AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Câu 24.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $(\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Kẻ $AH \perp SD (H \in SD)$ (1).

Ta có: $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$.

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD)$.

Do đó $d(A, (SCD)) = AH$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a.$$

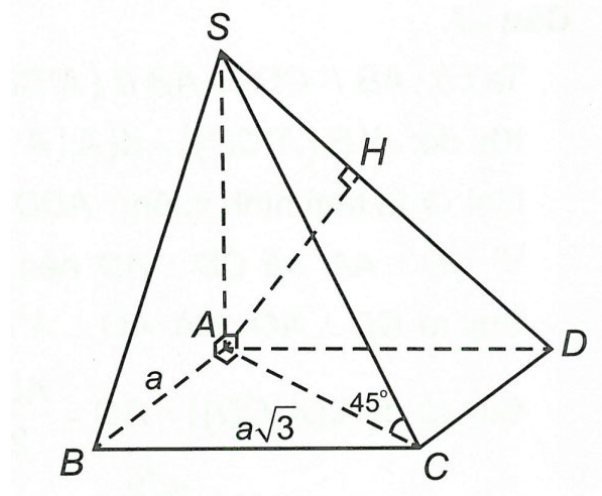
Xét $\triangle SAC$ vuông tại A có:

$$SA = AC \cdot \tan 45^\circ = 2a.$$

Xét $\triangle SAD$ vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{7}{12a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = AH = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$



Câu 25.

Ta có: $AM \perp BC$ ($\triangle ABC$ đều); $AM \perp SB$ (do $SB \perp (ABC)$)

Do đó $AM \perp (SBC)$.

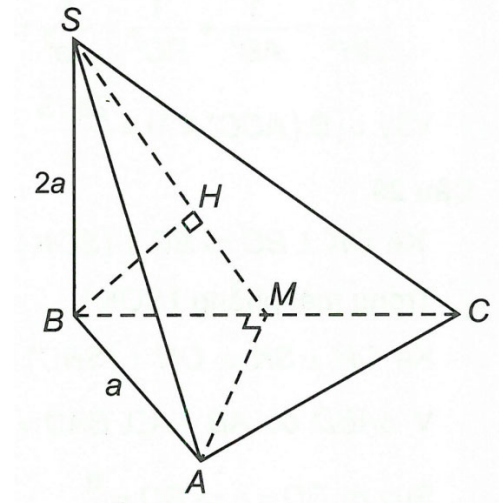
Trong mặt phẳng (SBM) , kẻ $BH \perp SM$.

Mà $BH \perp AM$ nên $BH \perp (SAM)$.

Suy ra $d(B, (SAM)) = BH$.

Xét $\triangle SBM$ vuông tại B có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{17}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$



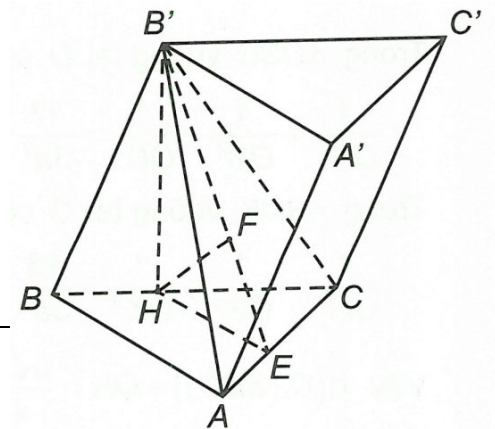
Câu 26.

Ta có: $BC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow HB = a\sqrt{2}$.

Lại có $B'H = \sqrt{BB'^2 - HB^2} = a\sqrt{2}$.

Dựng $HE \perp AC$; $HF \perp B'E$.

Suy ra $HF \perp (B'AC) \Rightarrow d(H, (B'AC)) = HF$.



Ta có $\frac{HE}{AB} = \frac{CH}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = 2a$.

Suy ra $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{B'H^2} \Rightarrow HF = \frac{HE \cdot B'H}{\sqrt{HE^2 + B'H^2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác $\frac{d(B, (B'AC))}{d(H, (B'AC))} = \frac{BC}{HC} = \frac{3}{2}$.

Do đó $d(B, (B'AC)) = \frac{3}{2} \cdot HF = a\sqrt{3}$.

Câu 27.

Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (A'CD)$

Khi đó: $d(B, (A'CD)) = d(A, (A'CD))$

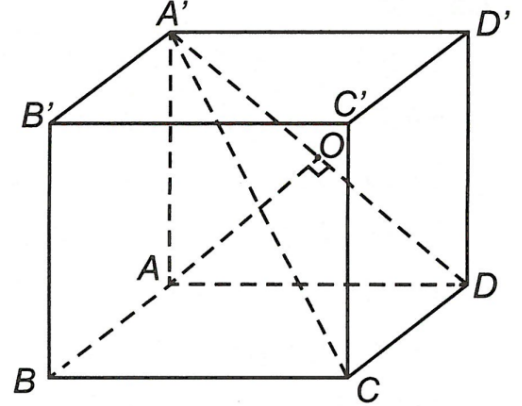
Gọi O là tâm hình vuông $ADD'A'$.

Vì $CD \perp AA'$ và $CD \perp AD$ nên $CD \perp (ADD'A')$.

Suy ra $CD \perp AO$. Mà $AO \perp A'D$ nên $AO \perp (A'CD)$.

Suy ra $d(A, (A'CD)) = AO = \frac{AD'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(B, (A'CD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Câu 28.

Kẻ $BH \perp AC (H \in AC)$.

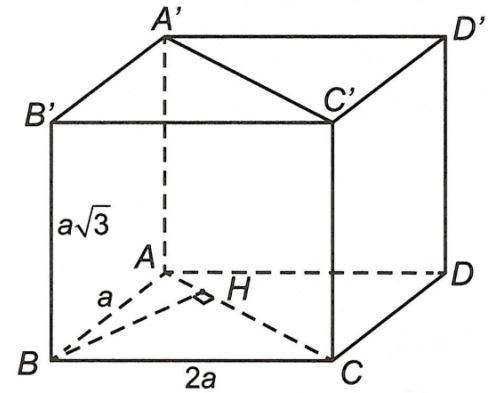
Lại có $BH \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABCD)$).

Suy ra $BH \perp (ACC'A') \Rightarrow d(B, (ACC'A')) = BH$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có:

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(B, (ACC'A')) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



Câu 29.

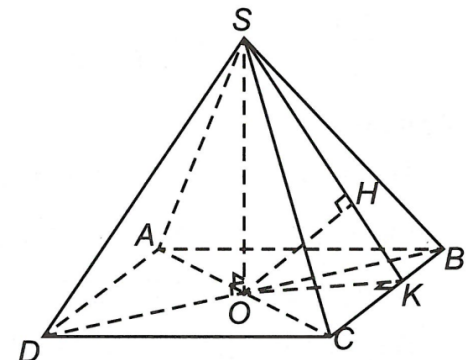
Kẻ $OK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOK)$.

Trong mặt phẳng (SOK) :

Kẻ $OH \perp SK \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$.

Vì $\triangle ABD$ có $AB = AD$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $\triangle ABD$ đều.

Suy ra $BD = a \Rightarrow BO = \frac{a}{2}$.



Suy ra $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}$.

Trong ΔOBC vuông tại O có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{13}{3a^2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Trong ΔSOK vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $d(O, (SBC)) = OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 30.

Kẻ $OK \perp BC (K \in BC), OH \perp SK (H \in SK)$.

Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.

Khi đó $d(AD, (SBC)) = d(M, (SBC))$ (với M là giao điểm của AD và OK).

Kẻ $MN \parallel OH (N \in SK)$.

Ta có $(SOK) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SK nên $OH \perp (SBC)$.

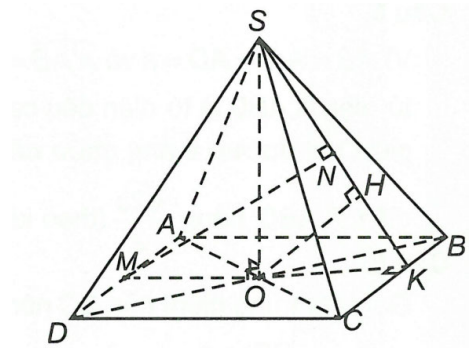
Suy ra $MN \perp (SBC)$.

Suy ra $d(AD, (SBC)) = d(M, (SBC)) = MN = 2OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Bài toán 1. Tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau a và b trường hợp $a \perp b$

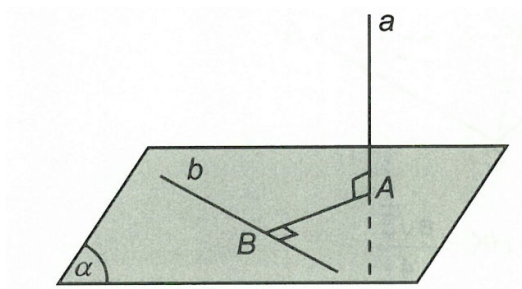
 Phương pháp giải



Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a tại

A.

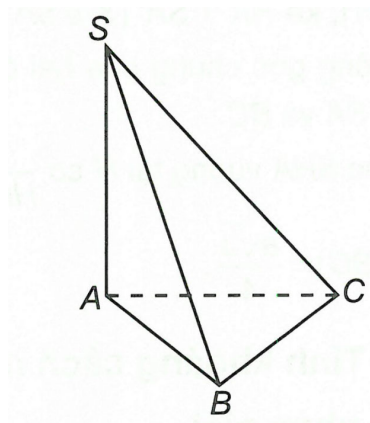
Dựng $AB \perp b$ tại B



AB là đoạn vuông góc chung của a và b .

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

Hướng dẫn giải



Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp BC \end{cases}$. Suy ra AB là đoạn vuông góc

chung của SA và BC .

Vậy $d(SA, BC) = AB = a$

🌈 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a ; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD .

Hướng dẫn giải

Ta có: AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

Suy ra $\widehat{(SC, (ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$.

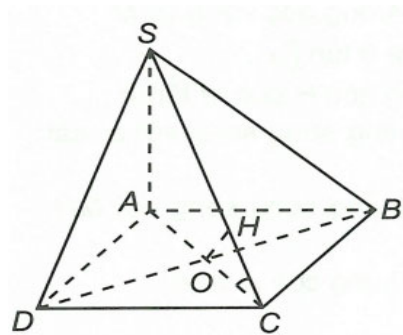
Lại có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC$.

Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Dựng $OH \perp SC$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp BD \end{cases}$. Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Suy ra $d(BD, SC) = OH$.

Xét tam giác OHC vuông tại H có: $OH = OC \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy.

Tính theo a khoảng cách hai đường thẳng SA, BC .

Hướng dẫn giải

Kẻ $AH \perp BC$ (1). Ta có $AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

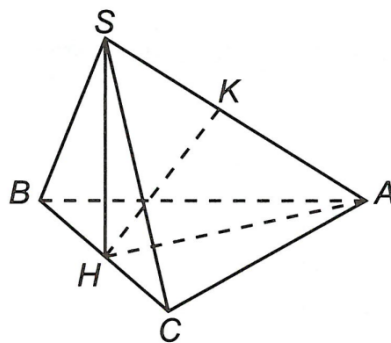
Vì $SA \perp (ABC), BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SHA)$.

Trong (SAH) , kẻ $HK \perp SA$ ($K \in SA$). Suy ra HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau SA và BC .

Xét tam giác SHA vuông tại H có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



Bài toán 2. Tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau a và b không vuông góc

• **Phương pháp giải**

Cách 1.

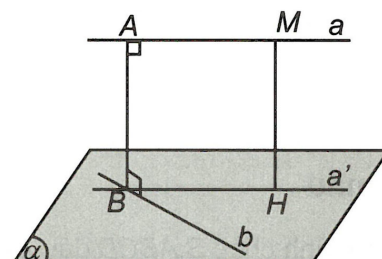
Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a .

Chọn điểm M thích hợp trên a , dựng $MH \perp (\alpha)$ tại H .

Qua H , dựng đường thẳng $a' // a$, cắt b tại B .

Từ B dựng đường thẳng song song MH , cắt a tại A .

AB là đoạn vuông góc chung của a và b .



Cách 2.

Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a tại M .

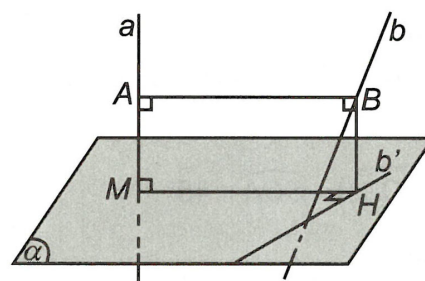
Dựng hình chiếu b' trên b lên (α) .

Dựng hình chiếu vuông góc H của M lên b' .

Từ H , dựng đường thẳng song song với a , cắt b tại B .

Qua B , dựng đường thẳng song song với MH , cắt a tại A .

AB là đoạn vuông góc chung của a và b .



• **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và

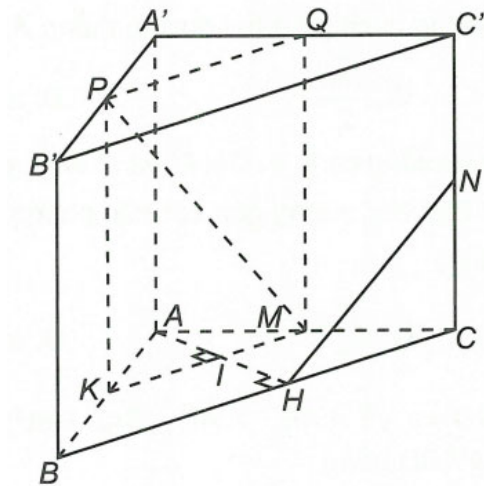
$SA = AB = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

Hướng dẫn giải

Suy ra $AD \perp (SAB)$.

$$\text{Vậy } d(CD; SB) = a\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn giải



Xét tam giác ABC vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2 - AB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $PM \subset (MKPQ)$ và $HN \subset (BCC'B')$.

Khi đó $d(MP, NH) = d((MKPQ), (BCC'B'))$.

$$\text{Do} \left\{ \begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp CC' (CC' \perp (ABC), AH \subset (ABC)) \end{array} \right. \Rightarrow AH \perp (BCC'B').$$

Suy ra $AH \perp (KMQP)$ tại $\{I\} = AH \cap KM$.

$$\text{Vậy } d(MP, NH) = d((MPKQ), (BCC'B')) = IH = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách từ điểm A trên d_1 đến d_2 .
- B. Khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách từ điểm B trên d_2 đến d_1 .
- C. Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là độ dài của đoạn AB với AB vuông góc với d_1 và d_2 .
- D. Khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách từ điểm A trên d_1 đến mặt phẳng (P) chứa d_2 và d_1 song song với (P) .

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
- B. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với mặt phẳng kia.
- C. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.
- D. Hai đường thẳng chéo nhau thì có vô số đường vuông góc chung.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $\frac{a}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
- D. a

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC bằng

- A. $\frac{2\sqrt{57}a}{\sqrt{19}}$
- B. $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$
- C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
- D. a

Câu 5: Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
- D. a

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

- A. $\frac{a}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$
- C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\frac{\sqrt{10}a}{5}$

B. $\frac{\sqrt{10}a}{10}$

C. $\frac{\sqrt{30}a}{10}$

D. $\frac{\sqrt{30}a}{5}$

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$, $CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng

A. a

B. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = a$, $CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC_1 bằng

A. $\frac{3\sqrt{5}a}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Câu 10: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Câu 11: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

D. a

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$, $AD = DC = SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $a\sqrt{3}$

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và CD bằng

A. $a\sqrt{2}$

B. a

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD bằng

A. a

B. $a\sqrt{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa hai đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{42}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{24}}{8}$

D. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

A. $a\sqrt{2}$

B. a

C. $a\sqrt{3}$

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

A. $\frac{2\sqrt{17}a}{17}$

B. $\frac{\sqrt{17}a}{17}$

C. $\frac{\sqrt{17}a}{34}$

D. $\frac{3\sqrt{17}a}{17}$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tam O , cạnh a , góc $\widehat{BCD} = 60^\circ$, có SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{57}a}{19}$

B. $\frac{2\sqrt{57}a}{\sqrt{19}}$

C. $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$

D. $\frac{\sqrt{57}a}{9}$

Câu 19: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và $A'B'$ bằng

A. a

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}a}{3}$

D. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$

B. $\frac{a}{2}$

C. $\frac{3a}{4}$

D. $\frac{3a}{2}$

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1-D	2-B	3-B	4-B	5-B	6-D	7-C	8-D	9-B	10-A
11-B	12-C	13-B	14-C	15-D	16-D	17-B	18-C	19-A	20-C

Lời giải chi tiết

Câu 3.

Gọi K là trung điểm CD .

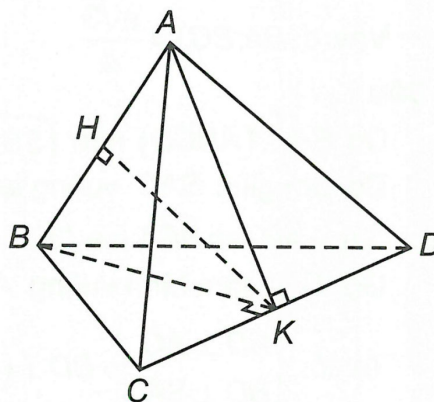
$$\text{Suy ra } \begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp BK \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABK).$$

$$\text{Dựng } HK \perp AB \Rightarrow HK = d(AB; CD).$$

Xét tam giác BHK vuông tại H , ta có

$$HK = \sqrt{BK^2 - BH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB; CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Nhận xét:

Đối với tứ diện đều cạnh a thì khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện bằng nhau và bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra

Câu 4.

Ta thấy $\begin{cases} DM \perp NC \\ DM \perp SH \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SHC) \Rightarrow DM \perp SC$.

Ta có: $\triangle MAD = \triangle NDC \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow MD \perp NC$.

Do $SH \perp (ABCD)$ nên $MD \perp SH \Rightarrow MD \perp (SHC)$.

Kẻ $HK \perp SC (K \in SC)$.

Suy ra HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC nên $d(DM, SC) = HK$.

Ta có: $HC = \frac{CD^2}{CN} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ và $HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Do đó $d(DM, SC) = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$.

Câu 5.

Vì $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tứ diện $A'ABD$ là tứ diện đều cạnh a . vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ

diện $A'ABD$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ (theo kết quả câu 3).

Câu 6.

Gọi H là trung điểm của BC nên

$$AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}, SH \perp (ABC), SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

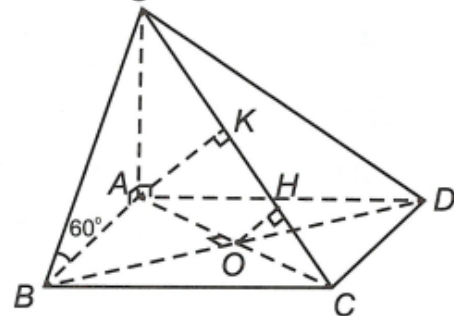
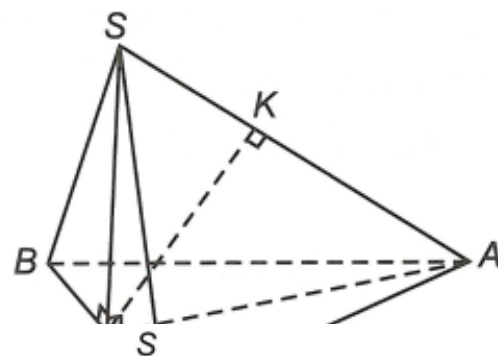
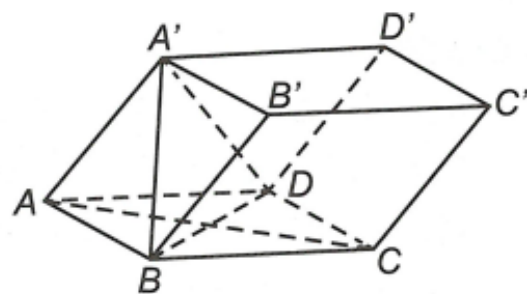
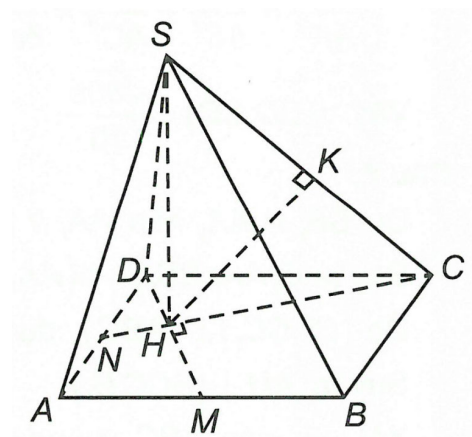
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên $SA \Rightarrow HK \perp SA$.

Ta có: $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow d(SA; BC) = HK$.

Xét tam giác SHA vuông tại H .

$$\text{Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 7.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{(SB; (ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Do tam giác SAC vuông tại A nên

$$SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$$

Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Trong mặt phẳng (SAC), dựng $OH \perp SC$.

$$\text{Suy ra } d(BD; SC) = OH.$$

$$\text{Dựng } AK \parallel OH \Rightarrow OH = \frac{1}{2} AK.$$

Xét tam giác SAC vuông tại A:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{5}{6a^2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{30}a}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(BD; SC) = \frac{\sqrt{30}a}{10}.$$

Câu 8.

Do $BB_1 \parallel AA_1$ nên $AA_1 \parallel (BCC_1B_1)$.

$$\text{Suy ra } d(AA_1; BC_1) = d(AA_1; (BCC_1B_1)) = d(A; (BCC_1B_1)).$$

Do $(BCC_1B_1) \perp (ABC)$, dựng $AH \perp BC, (H \in BC)$.

$$\text{Suy ra } AH \perp (BCC_1B_1).$$

$$\text{Xét tam giác ABC vuông tại A: } AH = \frac{1}{2} BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AA_1; BC_1) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 9.

Gọi O là giao điểm của AB_1 và A_1B .

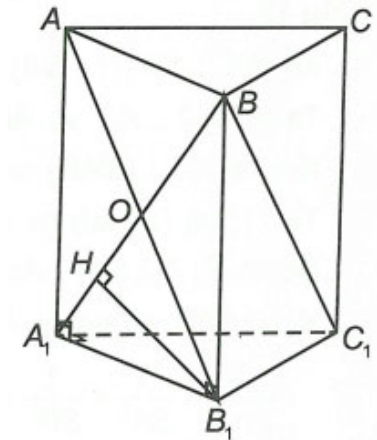
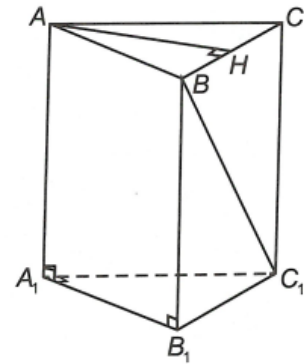
Do $AC \parallel A_1C_1$ nên $AC \parallel (BA_1C_1)$.

$$\text{Suy ra } d(AC; BC_1) = d(AC; BA_1C_1) = d(A; (BA_1C_1)) = d(B_1; (BA_1C_1))$$

(do $O \in (BA_1C_1)$ và O là trung điểm AB_1).

$$\text{Dựng } B_1H \perp A_1B(1).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A_1C_1 \perp A_1B_1 \\ A_1C_1 \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow A_1C_1 \perp (ABB_1A_1)$$



$$\Rightarrow A_1C_1 \perp B_1H(2).$$

Từ (1) và (2) ta có: $B_1H \perp (A_1BC_1) \Rightarrow d(B_1; (A_1BC_1)) = B_1H$.

Xét tam giác A_1BB_1 vuông tại B_1 :

$$\frac{1}{B_1H^2} = \frac{1}{(A_1B_1)^2} + \frac{1}{(BB_1)^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow B_1H = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(BC_1; AC) = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 10.

Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và SA.

Ta có: $BC \perp SI$ (ΔSBC đều) và $BC \perp AI$ (ΔABC đều).

Do đó $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp IK.(1)$

Mặt khác $SI = IA \Rightarrow \Delta SAI$ cân tại I.

Có IK là đường trung tuyến nên $IK \perp AB.(2)$

Từ (1) và (2) suy ra IK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Do đó $d(SA; BC) = IK$.

Xét ΔAKI vuông tại K có:

$$IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 11.

Kẻ $OH \perp BC (H \in BC)(1)$.

Ta có: $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$.

Suy ra $OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp OH(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

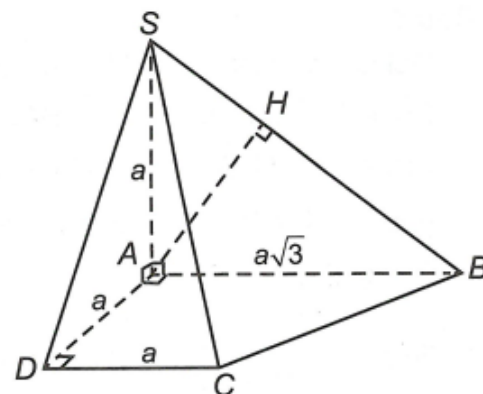
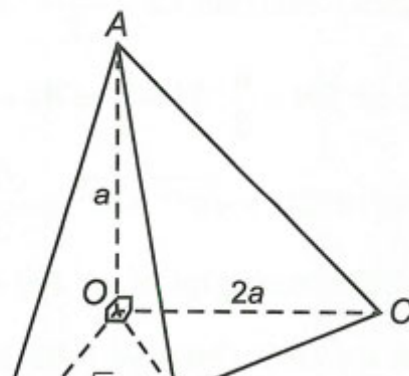
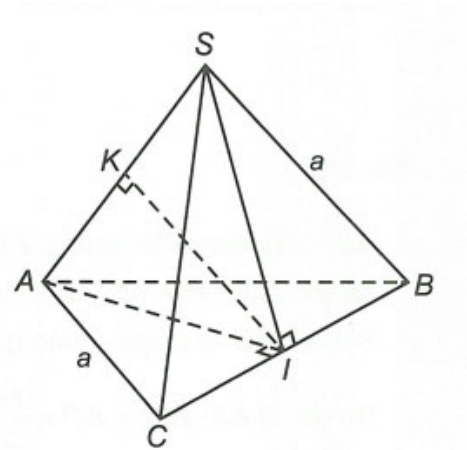
Do đó $d(OA; BC) = OH$.

Xét ΔOBC vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(OA; BC) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 12.



Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$ (1).

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$).

Suy ra $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AD và SB.

Do đó $d(AD; SB) = AH$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AD; SB) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 13.

Ta có $BC \perp BB'$ và $BC \perp CD$.

Suy ra BC là đoạn vuông góc chung của BB' và CD.

Do đó $d(BB'; CD) = BC = a$.

Câu 14.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Ta có: $AO \perp BD$ và $AO \perp AA'$.

Suy ra AO là đoạn vuông góc chung của AA' và BD.

$$\text{Do đó } d(AA'; BD) = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 15.

Ta có $\widehat{(SC, (ABC))} = \widehat{(SC, HC)} = \widehat{SCH} = 60^\circ$.

$\triangle ABC$ đều nên $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ với I là trung điểm AB.

$$\text{Ta có } BH = \frac{a}{3}; BI = \frac{a}{2} \Rightarrow IH = \frac{a}{6}.$$

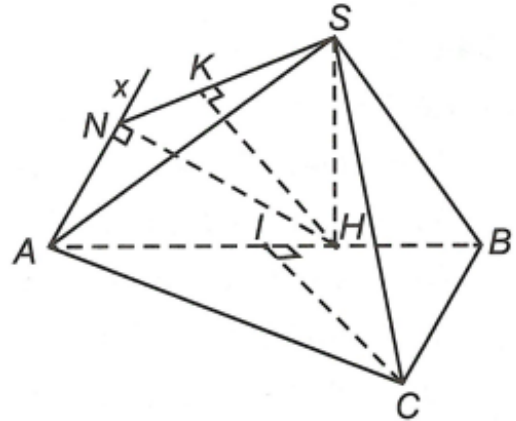
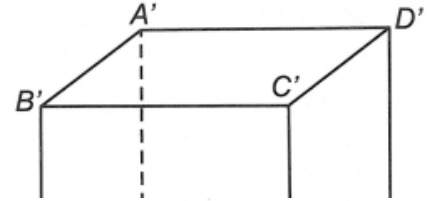
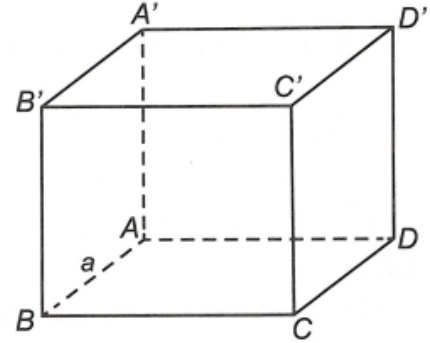
$$\text{Suy ra } CH = \sqrt{IH^2 + IC^2} = \frac{\sqrt{7}a}{3}.$$

$$\triangle SCH \text{ vuông tại H có } SH = HC \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{21}a}{3}.$$

Kẻ $Ax \parallel BC$. Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN. Suy ra $BC \parallel (SAN)$.

$$\text{Ta có: } BA = \frac{3}{2}AH \text{ nên } d(SA, BC) = d(B, (SAN)) = \frac{3}{2}d(H, (SAN)).$$

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$. Do đó $HK \perp (SAN)$.



Suy ra $d(H, (SAN)) = HK$.

$$AH = \frac{2a}{3}, HN = AH \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$HK = \frac{SH \cdot HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(SA, BC) = \frac{3}{2} HK = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Câu 16.

Vì $AA' \parallel (BCC'B')$ nên

$$d(AA'; BC') = d(AA'; (BCC'B')) = d(A; (BCC'B')).$$

Kê $AH \perp BC (H \in BC)$.

Mà $AH \perp BB' (do BB' \perp (ABC))$.

Suy ra $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó $d(A; (BCC'B')) = AH$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AA'; BC') = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 17.

Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD, H là trung điểm AB.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SH \perp AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Gọi I là giao điểm của HD và AC $\Rightarrow ID = 2IH$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$.

Suy ra $IG \parallel SD \Rightarrow SD \parallel (AGC)$.

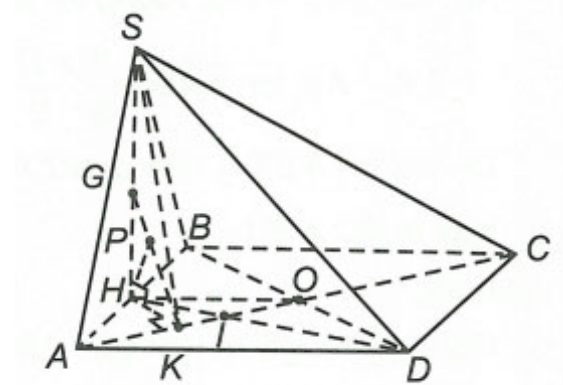
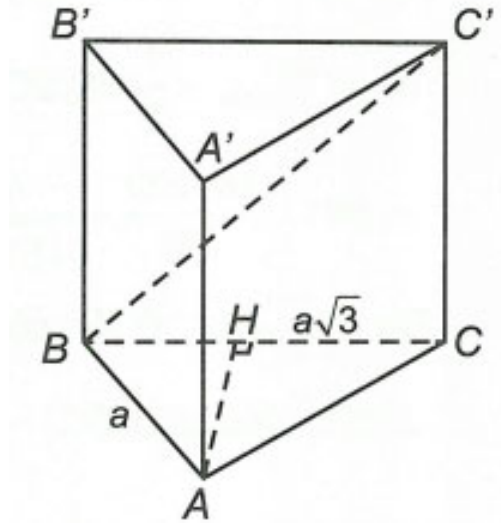
$$\Rightarrow d(SD; AC) = d(SD; (AGC)) = d(D; (AGC)) = 2d(H; (AGC)).$$

Dựng $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (GHK)$.

Dựng $HP \perp GK \Rightarrow HP \perp (GAC)$.

Suy ra $d(H; (GAC)) = HP$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; HO = \frac{BC}{2} = a; SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HG = \frac{1}{3} SH = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Xét tam giác GHK vuông tại H:

$$\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{17}{a^2}.$$

$$\text{Suy ra } HP = \frac{\sqrt{17}a}{17}.$$

$$\text{Vậy } d(SD; AC) = \frac{\sqrt{17}a}{17}.$$

Câu 18.

Ta có: $SB \subset (SBC)$ và $AD // (SBC)$.

Do đó $d(AD, SB) = d(AD, (SBC))$.

Qua O kẻ $MN \perp BC$ ($M \in AD, N \in BC$).

Ta có: $BC \perp MN$ và $BC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SMN)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SMN) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SN.

Kẻ $MH \perp SN$ ($H \in SN$) $\Rightarrow MH \perp (SBC)$.

Khi đó ta có $d(AD, SB) = d(M, (SBC)) = MH$.

$$\text{Ta có } S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} MN \cdot SO = \frac{1}{2} MH \cdot SN$$

$$\Rightarrow MH = \frac{MN \cdot SO}{SN} = \frac{MN \cdot SO}{\sqrt{SO^2 + ON^2}}.$$

Do tam giác BCD có $CD = CB = a$ và $\widehat{BCD} = 60^\circ$ suy ra tam giác ΔBCD đều $d(D, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2} = MN$.

$$\text{Vậy } d(AD, SB) = d(M, (SBC)) = MH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 19.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, theo giả thiết

$$A'G \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{AA'; (ABC)}) = \widehat{A'AG} = 60^\circ.$$

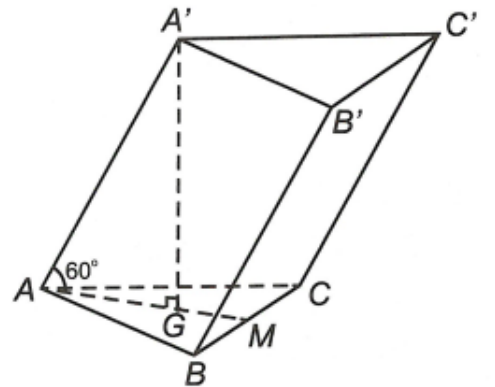
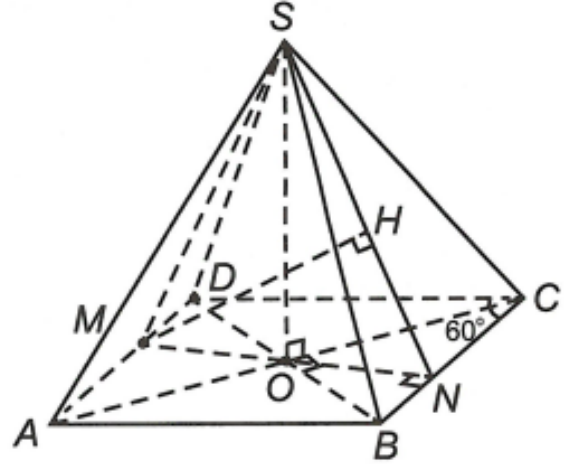
Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G:

$$A'G = AG \cdot \tan \widehat{A'AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 60^\circ = a.$$

Do $BC // (A'B'C')$ nên $d(BC; A'B') = d(BC; (A'B'C')) = A'G = a$.

Vậy $d(BC; A'B') = a$.

Câu 20.



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Theo giả thiết $A'G \perp (ABC)$, suy ra $(\widehat{AA';(ABC)}) = \widehat{A'AG} = 60^\circ$.

Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G:

$$A'G = AG \cdot \tan \widehat{A'AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 60^\circ = a.$$

Gọi M là trung điểm BC.

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AM).$$

Dựng $MN \perp AA' \Rightarrow d(BC; AA') = MN$.

Xét tam giác AMN vuông tại N:

$$MN = AM \cdot \sin \widehat{NAM} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3a}{4}. \text{ Vậy } d(BC; AA') = \frac{3a}{4}.$$

