

(Ngày thi: 12/5/2015)

Thời gian làm bài: 180 phút (không tính thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết $f'(x_0) = -3$.

Câu 2. (1,0 điểm)

1) Giải phương trình $\cos x + 2\sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x$.

2) Tìm số phức z sao cho $(1 + 2i)z$ là số thuần ảo và $|2z - \bar{z}| = \sqrt{13}$.

Câu 3. (0,5 điểm) Giải phương trình $\log_3(5x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1) = 0$.

Câu 4. (1,0 điểm) Giải bất phương trình $\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 < \frac{1}{1-x^2}$.

Câu 5. (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^4 (\sqrt{x} + \ln(x+1)) dx$.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật và $SA = AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm M của cạnh AB , mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° . Hai đường thẳng MC và BD cắt nhau tại I . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD) .

Câu 7. (1,0 điểm) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; -2)$, trọng tâm $G(0; 1)$ và trực tâm $H(\frac{1}{2}; 1)$. Tìm tọa độ của các đỉnh B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 8. (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; -2; 3)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 4 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) và B là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) . Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua H và vuông góc với đường thẳng d . Tính diện tích mặt cầu đường kính AB .

Câu 9. (0,5 điểm) Một hộp có 5 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu vàng và 8 viên bi màu xanh. Cùng một lần lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tìm xác suất sao cho trong 3 viên bi lấy ra không có viên bi nào là màu đỏ.

Câu 10. (1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx - xyz = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \frac{\sqrt{2x^2 + y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{2y^2 + z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{2z^2 + x^2}}{zx}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA 2015

(GỒM 4 TRANG)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho. (1 điểm)

Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.	
- Tập xác định: $\mathbf{R}$ - Sự biến thiên: + Chiều biến thiên: $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = 2$	0,25
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ + Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = 2$, đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -2$ + Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0,25
+ Bảng biến thiên (đầy đủ, đúng)	0,25
• Đồ thị:	0,25

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C).....(1 điểm)

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.	
$f''(x) = 6x - 6$. $f''(x_0) = -3 \Leftrightarrow 6x_0 - 6 = -3 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$	0,25
$y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{8}$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$	0,25
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = -\frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{8}$;	0,25
Hay là: $y = -\frac{9}{4}x + \frac{5}{2}$	0,25

Câu 2. (1,0 điểm) 1) Giải phương trình $\cos x + 2\sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x$. (0,5 điểm)

$PT \Leftrightarrow \cos x + 2\sin x(1 + \cos^2 x - 2\cos x) - 2 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 2)(1 + \sin 2x) = 0$ (*)	0,25
Do $\cos x - 2 \neq 0$ nên (*) $\Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.	0,25

2) Tìm số phức z sao cho $(1 + 2i)z$ là số thuần ảo và $|2z - \bar{z}| = \sqrt{13}$ (0,5 điểm)

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), khi đó $(1 + 2i)z = (1 + 2i)(a + bi) = (a - 2b) + (2a + b)i$ $(1 + 2i)z$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$	0,25
$ 2z - \bar{z} = a + 3bi = 2b + 3bi = \sqrt{13b^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow b = \pm 1$ Có hai số phức thỏa mãn đề bài: $z = 2 + i$; $z = -2 - i$	0,25

Câu 3. (0,5 điểm) Giải phương trình $\log_3(5x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1) = 0$.

Điều kiện: $x > \frac{3}{5}$, biến đổi được $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1) = -\log_3(x^2 + 1)$	0,25
Với điều kiện trên, PT đã cho tương đương với phương trình: $\log_3(x^2 + 1) = \log_3(5x - 3) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 4$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$; $x = 4$	0,25

Câu 4. (1,0 điểm) Giải bất phương trình $\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 < \frac{1}{1-x^2}$.

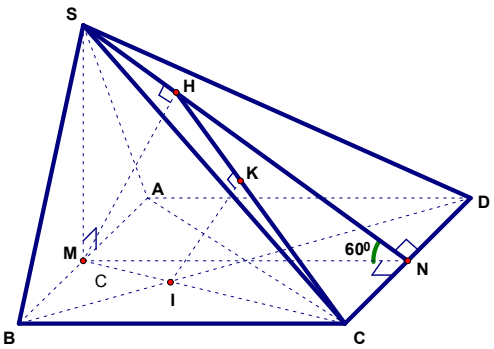
Điều kiện $ x < 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với:	
	0,25

$\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 > 0 \quad (1)$	
Đặt $t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, khi đó bất phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t > 2 \end{cases}$	0,25
Với $t < 1$ thì $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{1-x^2} \quad (2)$ $-1 < x \leq 0$: bất phương trình (2) đúng $0 < x < 1$: bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2 < 1-x^2 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ - Tập nghiệm của bất phương trình (2) là $S_1 = \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	0,25
Với $t > 2$ thì $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 2 \Leftrightarrow x > 2\sqrt{1-x^2} \quad (3)$ - Bất phương trình (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 4(1-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{2\sqrt{5}}{5}$ - Tập nghiệm của bất phương trình (3) là $S_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1\right)$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left(-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1\right)$	0,25

Câu 5. (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^4 (\sqrt{x} + \ln(x+1)) dx$.

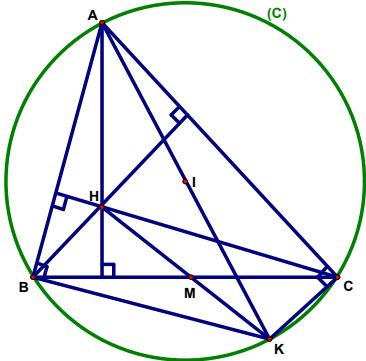
$I = \int_1^4 \sqrt{x} dx + \int_1^4 \ln(x+1) dx$	0,25
$I_1 = \int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} (x\sqrt{x}) \Big _1^4 = \frac{14}{3}$	0,25
$I_2 = \int_1^4 \ln(x+1) dx = [(x+1)\ln(x+1)] \Big _1^4 - \int_1^4 dx = 5\ln 5 - 2\ln 2 - 3$. $I = \frac{5}{3} + 5\ln 5 - 2\ln 2$	0,50

Câu 6. (1,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật và $SA = AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm M của cạnh AB , mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc 60° . Hai đường thẳng MC và BD cắt nhau tại I . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SCD) .

	Từ giả thiết có SAB là tam giác đều cạnh $2a$, SM là đường cao, $SM = (2a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$	0,25
Gọi N là trung điểm của CD thì có $MN \perp CD$; $SN \perp CD \Rightarrow \widehat{((SCD), (ABCD))} = \widehat{MNS} = 60^\circ$		

$BC = MN = \frac{SM}{\tan 60^\circ} = a$	0,25
Thể tích khối chóp S.ABCD: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot SM = \frac{1}{3} \cdot (2a) \cdot (a) \cdot (a\sqrt{3}) = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$	
Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên SN thì $MH \perp (SCD) \Rightarrow MH = d(M, (SCD))$ $MH = \frac{MN \cdot MS}{SN} = \frac{MN \cdot SM}{\sqrt{MN^2 + SM^2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0,25
Từ giả thiết suy ra I là trọng tâm của tam giác ABC. Kẻ $IK \parallel MH$ thì $K \in CH, IK = \frac{2}{3}MH, IK \perp (SCD)$ $\Rightarrow d(K, (SCD)) = IK = \frac{2}{3}MH = \frac{2}{3} \cdot d(M, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	0,25

Câu 7.(1,0 điểm) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có đỉnh A(2;-2), trọng tâm G(0;1) và trực tâm $H\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Tìm tọa độ của B, C và tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

	Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AG} \Rightarrow M\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{3}{2}; 3\right) \text{ hay } \vec{n} = (1; -2) \text{ là pháp vector của đường thẳng BC.}$	0,25
---	--	------

Phương trình BC: $x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 6$ Vì B và C đối xứng với nhau qua M nên gọi $B(2m - 6; m)$ thì có $C(4 - 2m; 5 - m)$	0,25
$\overrightarrow{AB} = (2m - 8; m + 2); \overrightarrow{HC} = \left(\frac{7}{2} - 2m; 4 - m\right)$ Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ $\Rightarrow (m - 4)(5 - 5m) = 0 \Leftrightarrow m = 4; m = 1.$ Vậy có B(2;4), C(-4;1) hoặc B(-4;1), C(2;4)	0,25
Kẻ đường kính AK của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC Tứ giác BHCK có BH//KC và BK//HC nên BHCK là hình bình hành. Suy ra: HK và BC cắt nhau tại M là trung điểm của BC và M cũng là trung điểm của HK. Ta có $H\left(\frac{1}{2}; 1\right), M\left(-1; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow K\left(-\frac{5}{2}; 4\right)$. Bán kính $R = \frac{1}{2}AK = \frac{15}{4}$ * Ghi chú: Có thể tìm tọa độ tâm I của đường tròn (C) bằng hệ thức O-le $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$ (Thí sinh phải trình bày chứng minh hệ thức này). Sau đó tính $R = IA$	0,25

Câu 8.(1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(1; -2; 3), đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z + 4 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) và B là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua H và vuông góc với đường thẳng d. Tính diện tích mặt cầu đường kính AB.

Hình chiếu của A trên mp (Oyz) là $H(0; -2; 3)$. Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 1)$	0,25
Mặt phẳng (Q) đi qua H. Vì (Q) $\perp$ d nên (Q) nhận $\vec{u} = (2; 1; 1)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình của (Q): $2(x - 0) + 1(y + 2) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 1 = 0$	0,25
$B \in d \Rightarrow B(1 + 2t; 2 + t; 3 + t)$. Tọa độ của B ứng với giá trị của t thỏa mãn:	

$2(1+2t)-(2+t)+2(3+t)+4=0 \Leftrightarrow t=-2$. Từ đó có $B(-3;0;1)$ (Hoặc giải hệ PT: $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1} \\ 2x-y+2z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z-5 \\ y=z-1 \\ 2(2z-5)-(z-1)+2z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$)	0,25
Mặt cầu đường kính AB có bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \sqrt{6}$. Diện tích của mặt cầu: $S_{(mc)} = 4\pi R^2 = 4\pi(\sqrt{6})^2 = 24\pi$ (đvdt)	0,25

Câu 9.(0,5 điểm) Một hộp có 5 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu vàng và 8 viên bi màu xanh. Cùng một lần lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tìm xác suất sao cho trong 3 viên bi lấy ra không có viên bi nào là màu đỏ.

Số phần tử của không gian mẫu: $C_{20}^3 = 1140$ phần tử Gọi A là biến cố: " Trong 3 viên bi lấy ra không có viên bi nào là màu đỏ", nghĩa là trong 3 viên bi lấy ra hoặc là toàn bi vàng, hoặc là toàn bi xanh, hoặc là có cả bi xanh và bi vàng	0,25
Ta có $C_7^3 = 35$ cách lấy 3 viên bi vàng, có $C_8^3 = 56$ cách lấy 3 viên bi xanh, có $C_7^2 \cdot C_8^1 + C_7^1 \cdot C_8^2 = 364$ cách lấy 3 viên có cả vàng và xanh. Do đó: $P(A) = \frac{C_7^3 + C_8^3 + C_7^2 \cdot C_8^1 + C_7^1 \cdot C_8^2}{1140} = \frac{455}{1140} = \frac{91}{228}$	0,25
Cách khác gọn hơn: Gọi A là biến cố: " Trong 3 viên bi lấy ra không có viên bi nào là màu đỏ", nghĩa là 3 viên bi được lấy ra từ 15 viên bi (vàng và xanh). Số cách chọn $C_{15}^3 = 455$ $P(A) = \frac{455}{1140} = \frac{91}{228}$	0,25

Câu 10.(1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx - xyz = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $F = \frac{\sqrt{2x^2 + y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{2y^2 + z^2}}{yz} + \frac{\sqrt{2z^2 + x^2}}{zx}$.

Biến đổi: $\frac{\sqrt{2x^2 + y^2}}{xy} = \sqrt{\frac{2x^2 + y^2}{x^2 y^2}} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}}$. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Giả thiết đề bài: $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx - xzy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$; và $F = \sqrt{2b^2 + a^2} + \sqrt{2c^2 + b^2} + \sqrt{2a^2 + c^2}$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức hiển nhiên $(\ \vec{u}\ \ \vec{v}\)^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$, với $\vec{u} = (1; 1; 1)$, $\vec{v} = (b; b; a)$ ta có: $3(2b^2 + a^2) = 3(b^2 + b^2 + a^2) \geq (b + b + a)^2 = (2b + a)^2 \Rightarrow \sqrt{2b^2 + a^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(2b + a)$ (1)	0,25
Tương tự, ta có $\sqrt{2c^2 + b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(2c + b)$ (2); $\sqrt{2a^2 + c^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(2a + c)$ (3)	0,25
Cộng (1), (2), (3) về theo về ta có: $F = \sqrt{2b^2 + a^2} + \sqrt{2c^2 + b^2} + \sqrt{2a^2 + c^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}(3a + 3b + 3c) = \sqrt{3}$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3$ Kết luận: F có giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{3}$	0,25

-----HẾT-----