

PHƯƠNG PHÁP CHUẨN HÓA TRONG SỐ PHỨC

Ví dụ 1: Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w = \frac{z}{1+z^3}$ là số

thực. Tính $\frac{|z|^2}{1+|z|^2}$.

A. $\frac{1}{2a+1}$

B. $\frac{2}{a+2}$

C. $\frac{1}{3a+2}$

D. $\frac{1}{2a+2}$

Lời giải:

Chuẩn hóa: Vì w là số thực nên ta chọn $w = 1 \Rightarrow \frac{z}{1+z^3} = 1 \Rightarrow z \approx 0,6624 + 0,5623i$

$$\text{Suy ra } \frac{|z|^2}{1+|z|^2} - \frac{1}{2a+1} = \frac{|0,6624+0,5623i|^2}{1+|0,6624+0,5623i|^2} - \frac{1}{2 \cdot 0,6624+1} \approx 0$$

Vậy đáp án là A

Ví dụ 2: Cho hai số phức z, w khác 0 và thỏa mãn $|z-w| = 2|z| = |w|$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $u = \frac{z}{w}$. Tính $a^2 + b^2 = ?$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{1}{4}$

Lời giải:

Chuẩn hóa: $w = 1$. Theo đề ta có:

$$\begin{cases} |z-1| = 2|z| \\ |z-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2) \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \Rightarrow u = \frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{4}$$

Ví dụ 3: Cho hai số phức z, w khác 0 và thỏa mãn $|z - w| = 5|z| = |w|$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $u = z.w$. Tính $a^2 + b^2 = ?$

- A. $\frac{1}{50}$ C. $\frac{1}{100}$
B. $\frac{1}{25}$ D. $\frac{1}{10}$

Lời giải:

Chuẩn hóa: $w = 1$. Theo đề ta có:

$$\begin{cases} |z - 1| = 5|z| \\ |z - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 25(x^2 + y^2) \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{50} \pm \frac{3\sqrt{11}}{50}i \Rightarrow u = \frac{1}{50} \pm \frac{3\sqrt{11}}{50}i \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{25}$$

Ví dụ 4: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 1$. Biểu thức $P = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$, ($n \in \mathbb{Z}^+$) nhận giá trị nào sau đây?

- A. 1 B. 0
C. -1 D. 3

Lời giải:

Chuẩn hóa: $n = 1, z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i$ Suy ra đáp án A

Ví dụ 5: Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ B. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$
C. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

Lời giải:

Chuẩn hóa: $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 1$ suy ra đáp án A

Ví dụ 6: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

A. 0

B. -1

C. 1

D. 2

Lời giải:

Chuẩn hóa: $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -1$ Suy ra $P = 0$

Ví dụ 7: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1999$

và $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Tính $P = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$.

A. $P = 1999$

C. $P = 999,5$

B. $P = 1999^2$

D. $P = 5997$

Lời giải:

Chuẩn hóa: $z_1 = 1999; z_2 = -1999; z_3 = 1 + i\sqrt{1999^2 - 1}$ suy ra $P = 1999$

Ví dụ 8: Cho các số phức a, b, c, z thỏa $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$). Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình bậc hai đã cho. Tính giá trị của biểu thức

$$P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 - 2[|z_1| - |z_2|]^2$$

A. $P = 2\left|\frac{c}{a}\right|$

C. $P = 4\left|\frac{c}{a}\right|$

B. $P = \left|\frac{c}{a}\right|$

D. $P = \frac{1}{2}\left|\frac{c}{a}\right|$

Lời giải:

Chuẩn hóa: $a = b = c = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow P = 4$. Đáp án C thỏa $P = 4$

Ví dụ 9: Nếu z không phải là số thực đồng thời $\frac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 4 thì môđun của z là?

A. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{16}$

Lời giải:

➤ **Thử đáp án:**

➤ **Đáp án A:**

Với $|z| = \frac{1}{8}$, chọn $x = \frac{1}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{17}}{72}$, do đó $z = \frac{1}{9} \pm \frac{\sqrt{17}}{72}i$

Thay z vào ta được $\frac{1}{|z|-z} = 4 + 4\sqrt{17}i$ (thỏa yêu cầu đề bài có phần thực bằng 4)

Vậy đáp án là A

Ví dụ 10: Nếu hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $z_1 \cdot z_2 \neq -1$ thì số phức

$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ có phần ảo bằng?

A. 0

C. 1

B. -1

D. Lớn hơn 1

Lời giải:

Chuẩn hóa: $z_1 = i$; $z_2 = 1$ do đó $w = \frac{i+1}{1+i \cdot 1} = 1$ suy ra phần ảo của w bằng 0

Vậy đáp án là A

Ví dụ 11: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Đặt $P = 8(b^2 - a^2) - 12$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = (|z| - 2)^2$

C. $P = (|z|^2 - 2)^2$

B. $P = (|z| - 4)^2$

D. $P = (|z|^2 - 4)^2$

Lời giải:

Ta có: $|z^2 + 4| = 2|z| \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 4)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2)$

Chọn $b = 0 \Rightarrow (a^2 + 4)^2 = 4a^2 \Rightarrow a = 1 + i\sqrt{3}$ suy ra $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$. Thay a, b vào P

ta được $P = 4$

Thay $z = 1 + i\sqrt{3}$ vào đáp án C ta được kết quả là 4. Vậy đáp án là C

Ví dụ 12: Cho các số phức $z_1, z_2 \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$. Tính

giá trị của biểu thức $P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

Chuẩn hóa: $z_1 = 1 \Rightarrow 2 + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_2 + 1} \Rightarrow z_2 = -0,5 + 0,5i$

$$P = \left| \frac{1}{-0,5 + 0,5i} \right| + \left| \frac{-0,5 + 0,5i}{1} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ví dụ 13: Cho số phức $z = a + bi \neq 0$ sao cho z không phải là số thực và $w = \frac{z}{1+z^2}$ là số thực. Tính $\frac{|z|}{1+|z|^2}$.

A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$
D. 1

Lời giải:

Chuẩn hóa: Vì w là số thực nên ta chọn $w = 1 \Rightarrow \frac{z}{1+z^2} = 1 \Rightarrow z = 0,5 + 0,5\sqrt{3}i$

$$\text{Suy ra } \frac{|z|}{1+|z|^2} = \frac{|0,5 + 0,5\sqrt{3}i|}{1+|0,5 + 0,5\sqrt{3}i|^2} = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 14: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$

A. -1
B. $1+i$

C. 2
D. $1-i$

Lời giải:

$$\text{Chuẩn hóa: } \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \Rightarrow P = -1$$