

CHUYÊN ĐỀ:

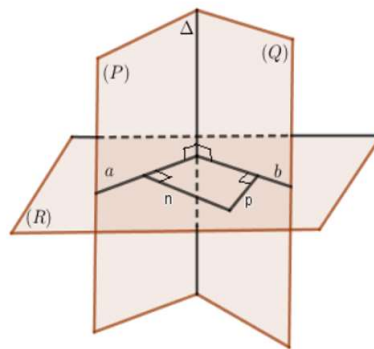
GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Tác giả: Trần Mạnh Tường

Nhóm giáo viên Toán tiếp sức Chinh phục kì thi THPT năm 2020

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng bất kì, lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



Trong hình vẽ trên, ta có thể thấy $((P);(Q)) = (n; p)$

2. Một số phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng:

Có 3 phương pháp sau đây hay được sử dụng để tính giá trị góc giữa hai mặt phẳng.

- **Phương pháp 1:** Dùng định nghĩa.

Kinh nghiệm: Muốn sử dụng được phương pháp này thì ta phải quan sát, phán đoán xem với đặc điểm đã cho của bài toán thì ta có thể xác định hoặc dựng được 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng mà bài toán yêu cầu tính góc giữa chúng hay không?

- **Phương pháp 2:** Xác định góc.

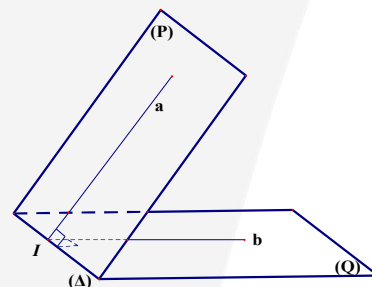
Ý tưởng của phương pháp này là ta dựng rõ hình hài của góc giữa hai đường thẳng, sau đó dùng các hệ thức lượng để tính giá trị của góc này.

Kinh nghiệm: Cách này thường dùng khi 2 mặt phẳng có thể xác định được giao tuyến và có các yếu tố vuông góc. Có 2 loại phương pháp khi sử dụng phương pháp này.

-) Phương pháp xác định góc loại 1:

Bước 1: Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng

Bước 2: Chọn 1 điểm I *thích hợp* trên Δ , từ I ta dựng 2 đường thẳng, đường thẳng a nằm trên mặt phẳng (P) và vuông góc với Δ , đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (Q) và vuông góc với Δ .



Khi đó $((P);(Q)) = (a; b)$

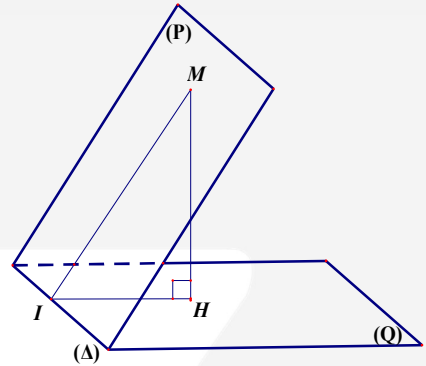
-) Phương pháp xác định góc loại 2:

Bước 1: Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng

Bước 2: Chọn 1 điểm M thích hợp nằm trên 1 trong 2 mặt phẳng, từ điểm M dựng hình chiếu vuông góc H đến mặt phẳng còn lại.

Bước 3: Dựng hình chiếu vuông góc I của điểm M hoặc điểm H đến giao tuyến Δ .

Khi đó $((P);(Q)) = \widehat{MIH}$



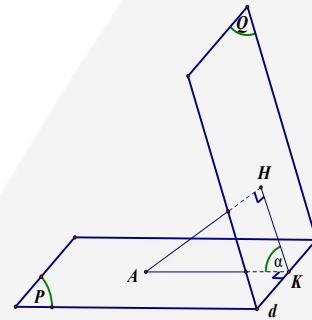
- Phương pháp 3: Dùng khoảng cách.

Cho hai mặt phẳng $(P) \cap (Q) = d$.

Từ $A \in (P)$, dựng $AK \perp d$; $AH \perp (Q)$.

Khi đó $d \perp (AKH)$ nên $((P);(Q)) = \widehat{AKH} = \alpha$.

Khi đó $\sin \alpha = \frac{AH}{AK}$, hay $\sin \alpha = \frac{d(A;(Q))}{d(A;d)}$



Bình luận: Phương pháp này có ưu điểm là ta không cần xác định rõ hình hài của góc giữa hai mặt phẳng, chỉ cần tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng và điểm đến đường thẳng, các khoảng cách này lại cũng có thể tính thông qua tỉ số giữa diện tích tam giác với một cạnh hoặc tỉ số giữa thể tích một đa diện với diện tích của 1 mặt.

II. VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: (Phương pháp xác định góc loại 1) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $A'A = A'B = A'C = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' . Xác định cosin của góc giữa $(A'BC)$ và $(A'MN)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{8\sqrt{3}}{15}$.

C. $-\frac{8\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Phân tích: Rõ ràng hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'MN)$ có điểm chung là A' và có BC, MN là 2 đường thẳng song song nên giao tuyến của chúng có thể xác định dễ dàng. Từ đó ta đi theo ý tưởng sử dụng phương pháp “xác định góc”. Lại do các tam giác như $A'BC, A'MN, A'B'C'$ là các tam giác cân nên từ A' ta có thể thấy xuất hiện nhiều đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến. Từ đó ta có thể lựa chọn “**Phương pháp xác định góc loại 1**”

Gọi K là trung điểm của BC . Do tam giác ABC đều và tam giác $A'BC$ cân tại A' nên

$$AK \perp BC; A'K \perp BC.$$

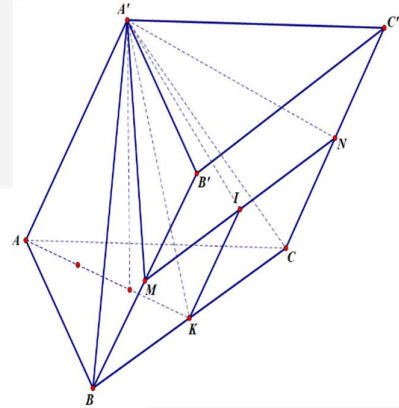
Gọi I là trung điểm MN . Ta có $A'I \perp MN$

(do tam giác $A'MN$ cân tại A').

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \parallel BC \\ A'I \subset (A'MN), A'I \perp MN \\ A'K \subset (A'BC), A'K \perp BC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = ((A'MN); (A'BC)) = (A'I; A'K)$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = |\cos \widehat{KA'I}|$$



Để tính $\cos \widehat{KA'I}$ ta sử dụng ý tưởng áp dụng định lý cosin trong tam giác $KA'I$. Muốn vậy ta tìm cách tính độ dài 3 cạnh của tam giác này là xong. Thật vậy, ta có:

$$A'K = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \text{ và } IK = \frac{1}{2}BB' = a.$$

$$A'M^2 = \frac{A'B^2 + A'B'^2}{2} - \frac{BB'^2}{4} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow A'I = \sqrt{A'M^2 - MI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\cos \widehat{KA'I} = \frac{A'K^2 + A'I^2 - KI^2}{2A'K \cdot A'I} = \frac{8\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{8\sqrt{3}}{15}.$$

Câu 2: (Sử dụng phương pháp khoảng cách) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $BA' = CA' = AA' = 2a$, $BA = BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$, tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

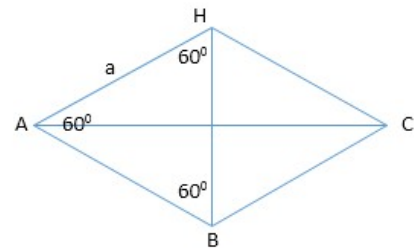
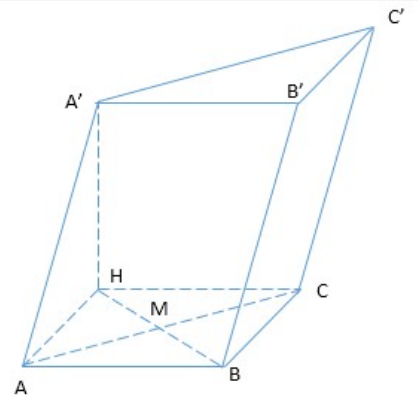
Chọn A

Phân tích:

- Nhìn tên hai mặt phẳng, ta thấy ngay chúng có giao tuyến là đường thẳng BB' nên ta có thể lựa chọn **phương pháp xác định góc** hoặc **phương pháp khoảng cách**.
- Từ $BA' = CA' = AA' = 2a$, ta thấy A' cách đều 3 đỉnh của tam giác ABC , từ đó suy ra A' thuộc trục đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC , hay đường nối từ A' đến tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC sẽ vuông góc với mặt phẳng (ABC) .
- Quan sát nhanh thì ta thấy hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(BCC'B')$ là 2 mặt bên nên việc dựng đường vuông góc từ 1 điểm nào đó lên 1 trong 2 mặt phẳng này là điều không dễ dàng.

Qua các phân tích trên, ta thấy rằng việc lựa chọn phương pháp khoảng cách có thể sẽ hợp lý hơn. Sau đây, ta sẽ cùng tìm hiểu cách vận dụng phương pháp này:

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A' xuống mặt đáy (ABC) . Vì $A'A = A'B = A'C$ nên H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Mặt khác, trong tam giác ABC có $BA = BC$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là điểm đối xứng của điểm B qua trung điểm M của đoạn AC . Ta có hình vẽ



Vì α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và

$$(BCC'B') \text{ nên } \sin \alpha = \frac{d(A, (BCC'B'))}{d(A, BB')}.$$

Trong đó:

$$\begin{cases} AA' // BB' \\ AH // BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' // (BCC'B') \\ AH // (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow (AHA') // (BCC'B')$$

$$\Rightarrow (BCC'B') \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow d(A, (BCC'B')) = d(A, BC) = d(H, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$d(A, BB') = d(B, AA') = \frac{2S_{\triangle AA'B}}{AA'} = \frac{a\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(A, (BCC'B'))}{d(A, BB')} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 3: (Sử dụng phương pháp dùng định nghĩa) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

A. $x = \frac{3a}{2}$.

B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = a$.

D. $x = 2a$.

Lời giải

Chọn C

Phân tích: Rõ ràng ta thấy hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) có giao tuyến là SC nên có thể nghĩ đến **phương pháp xác định góc** hoặc **phương pháp khoảng cách** đều được. Tuy nhiên, ở đây chúng ta sẽ thử tư duy theo **phương pháp dùng định nghĩa** để rèn luyện sự linh hoạt của tư duy và sự phong phú của cách làm. Để sử dụng **phương pháp dùng định nghĩa**, ta cần xác định được 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng này. Ta làm như sau
Từ A kẻ AH vuông góc với SB ($H \in SB$).

$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \text{ mà } AH \perp SB$$

suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD ($K \in SD$)

Tương tự, chứng minh được $AK \perp (SCD)$.

Như vậy, đến đây ta đã xác định được 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng trên là AH và AK .

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra

$$(\widehat{SBC}); (\widehat{SCD}) = (\widehat{AH}; \widehat{AK}) = \widehat{HAK} = 60^\circ.$$

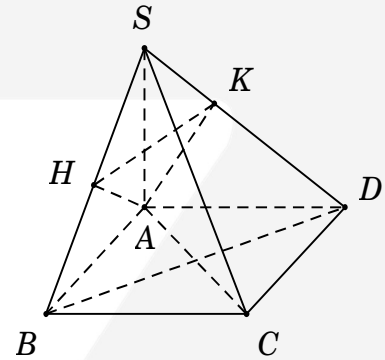
Lại có $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^\circ$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S , có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

$$\text{Suy ra } SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$

$$\text{Vì } HK \parallel BD \text{ suy ra } \frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a.$$



Qua 3 ví dụ trên, chúng ta thấy rằng, để xác định được góc giữa 2 mặt phẳng, chúng ta cần có tư duy linh hoạt, chủ động, nhận quan sắc bén. Mời độc giả tiếp tục rèn luyện thông qua các ví dụ sau:

III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Câu 1:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác đều có diện tích bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 2:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 3, AD = 4, \widehat{BAD} = 120^\circ$. Cạnh bên $SA = 2\sqrt{3}$ vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD, BC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) .
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C ; $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Tính $\frac{SM}{MC}$.
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB đều và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC . Trên cạnh SA lấy điểm N sao cho $SN = 2NA$. Khi đó, sin của góc giữa hai mặt phẳng (DMN) và $(ABCD)$ bằng:

- A. $\frac{4\sqrt{19}}{19}$. B. $\frac{\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{19}}{19}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $BC = a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, đường thẳng SC tạo với đáy một góc bằng 60° . Biết hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AB . Gọi E, F là hình chiếu của H lên SA, SC . Tính tan của góc giữa mặt phẳng (HEF) và mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{3}{4}$. B. 4. C. $\frac{4}{3}$. D. 2.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính $\sin \alpha$ với α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BA'C')$.

- A. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC . Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (MNP) bằng

- A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Câu 8: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$, đáy bằng a . Gọi I là trung điểm của DD' . Tính cosin góc tạo bởi $(IA'C')$, $(ACC'A')$.

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân $AB = AC = 2a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(A'BC)$.

- A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 60° .

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $A'A = A'B = A'C = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' . Xác định cosin của góc giữa $(A'BC)$ và $(A'MN)$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{8\sqrt{3}}{15}$. C. $-\frac{8\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{15}$.

Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tang của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là:

- A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

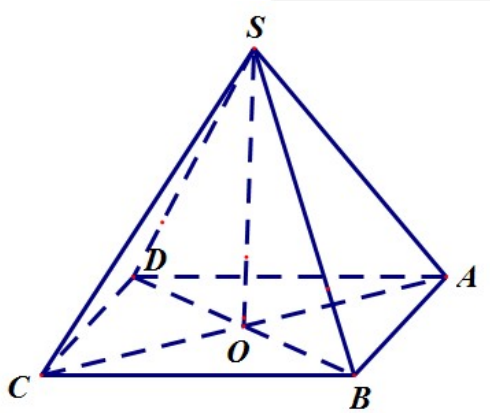
ĐÁP ÁN

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác đều có diện tích bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$.

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn B



Gọi O tâm của hình vuông $ABCD$ ta có $SO \perp (ABCD)$.

Theo định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng ta có : $\widehat{((P), (ABCD))} = \widehat{(SC, SO)} = \widehat{CSO}$

Vì các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác đều có diện tích bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ nên các cạnh của hình chóp có độ dài bằng $a\sqrt{3}$.

Trong tam giác SCO vuông tại O có : $SC = a\sqrt{3}$, $OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$\text{Suy ra } \sin \widehat{CSO} = \frac{OC}{SC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{CSO} = 45^\circ$$

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=3, AD=4, \widehat{BAD}=120^\circ$. Cạnh bên $SA=2\sqrt{3}$ vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD, BC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

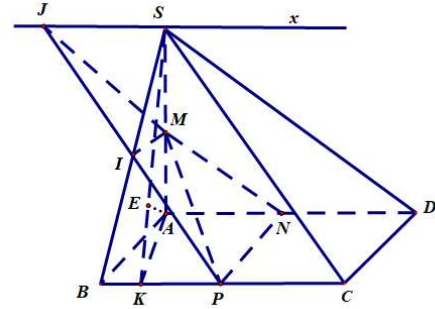
Lời giải

Chọn B.

Ta có: $(SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow \begin{cases} MI \parallel NP \parallel AB \\ MI = \frac{NP}{2} \end{cases}$.

Dễ dàng chứng minh được IP, MN, Sx đồng quy tại J . Như vậy I là trung điểm của JP , M là trung điểm của JN .



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(MNP) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{d(M, (SBC))}{d(M, IP)}$.

$$d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC))$$

Hạ $AK \perp BC, AE \perp SK \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AE$.

$$AK = AB \cdot \sin \widehat{ABK} = 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Delta SAK : \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{12} + \frac{4}{27} = \frac{75}{324} \Rightarrow AE = \frac{6\sqrt{3}}{5} \Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{3\sqrt{3}}{5}.$$

Ta có $d(M, IP) = \frac{1}{2} d(N, IP)$.

$$\Delta ABC : AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = 13 \Rightarrow AC = \sqrt{13}.$$

$$JP = 2IP = SC = \sqrt{13+12} = 5, JN = 2MN = SD = 2\sqrt{7}, PN = AB = 3.$$

$$\Rightarrow S_{JPN} = 3\sqrt{6}. \text{ Mặt khác } S_{JPN} = \frac{1}{2} d(N, JP) \cdot JP \Rightarrow d(N, JP) = \frac{6\sqrt{6}}{5} \Rightarrow d(M, IP) = \frac{3\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{Vậy } \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C ; $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc SC sao cho mặt phẳng (MAB) tạo với mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Tính $\frac{SM}{MC}$.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

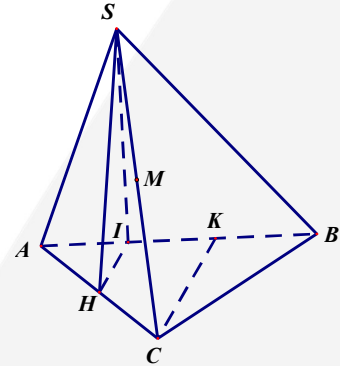
D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là trung điểm của AC .

$$\left. \begin{array}{l} (SAC) \perp (ABC) \\ SH \perp AC \\ AC = (SAC) \cap (ABC) \\ SH \subset (SAC) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$



Gọi φ_1 là góc giữa mặt phẳng (MAB) và mặt phẳng (ABC)

và φ_2 là góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt phẳng (ABC) .

Ta có: $\sin \varphi_1 = \frac{d(S; (MAB))}{d(S; AB)}$; $\sin \varphi_2 = \frac{d(C; (MAB))}{d(C; AB)}$.

Gọi K là hình chiếu của C lên AB ; I là trung điểm của AK .

Giả sử $AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$; $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow d(C; AB) = CK = CB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $HI = \frac{CK}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do $\left. \begin{array}{l} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp AB$ nên $d(S; AB) = SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Mặt khác $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$ nên

$\frac{d(S; (MAB))}{d(S; AB)} = \frac{d(C; (MAB))}{d(C; AB)} \Rightarrow \frac{d(S; (MAB))}{d(C; (MAB))} = \frac{d(S; AB)}{d(C; AB)} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{SM}{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB đều và nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC . Trên cạnh SA lấy điểm N sao cho $SN = 2NA$. Khi đó, sin của góc giữa hai mặt phẳng (DMN) và $(ABCD)$ bằng:

A. $\frac{4\sqrt{19}}{19}$.

B. $\frac{\sqrt{57}}{19}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{3\sqrt{19}}{19}$.

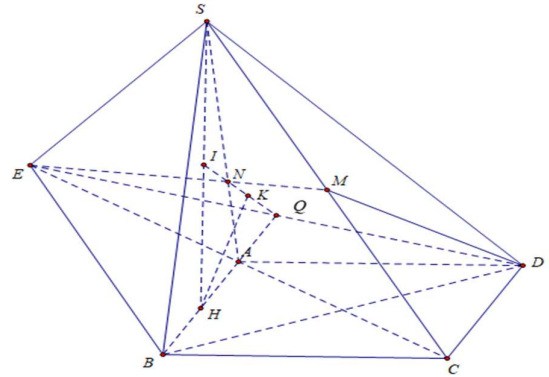
Lời giải

Chọn B

Đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC đều cạnh a .

Gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp (ABCD)$.

Gọi $E = MN \cap AC$, $AB \cap DE = Q$, $QN \cap SH = I$. Khi đó ta có $ED = (DMN) \cap (ABCD)$.



Xét tam giác SAC có $\frac{MS}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{NA}{NS} = 1 \Rightarrow EC = 2EA$. Suy ra A là trung điểm của EC .

Xét tam giác ECD có $AQ \parallel CD \Rightarrow AQ = \frac{1}{2}CD \Rightarrow HA = AQ$.

Và $AC = AD = AE = \frac{EC}{2} \Rightarrow CD \perp DE \Rightarrow HQ \perp DE$

Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp DE$. Suy ra $DE \perp (SHQ)$. Từ đó góc giữa mặt phẳng (DMN) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{HQN}$.

Xét tam giác SHA có $\frac{QA}{QH} \cdot \frac{IH}{IS} \cdot \frac{NS}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{IH}{IS} = 1 \Rightarrow IH = IS$.

Kẻ $HK \perp QN$ có $\sin \widehat{HQN} = \frac{HK}{HQ}$

Ta có tam giác SAB là tam giác đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Tam giác HIK có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HQ^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{57}}{19}$

Vậy $\sin \widehat{HQN} = \frac{HK}{HQ} = \frac{\sqrt{57}}{19}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $BC = a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, đường thẳng SC tạo với đáy một góc bằng 60° . Biết hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AB . Gọi E, F là hình chiếu của H lên SA, SC . Tính tan của góc giữa mặt phẳng (HEF) và mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{3}{4}$.

B. 4.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

+ $AB = 2a, BC = a$.

+ $(SC; (ABC)) = (SC; HC) = \widehat{SCH} = 45^\circ$.

+ Vì H là trung điểm AB , suy ra $CH = a$.

+ Gọi I là trung điểm AC và D đối xứng với H qua I .

+ $\begin{cases} DA \perp HA \\ DA \perp SH \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SHA) \Rightarrow DA \perp HE$

+ Ta có $\begin{cases} DA \perp HE \\ SA \perp HE \end{cases} \Rightarrow HE \perp (SAD) \Rightarrow HE \perp SD$ (1)

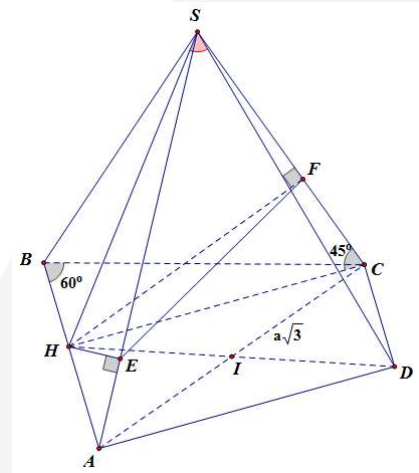
+ Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $HF \perp SD$ (2)

+ Từ (1); (2) ta suy ra $SD \perp (AEF)$, mà $SH \perp (ABC)$.

Từ đó suy ra $((AEF); (ABC)) = (SH; SD) = \widehat{HSD}$.

+ Xét tam giác vuông SHD có $HD = 2HI = 4a, SH = a$, suy ra $\tan \widehat{HSD} = 4$.

Vậy ta chọn đáp án B.



Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính $\sin \alpha$ với α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BA'C')$.

A. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I = A'C' \cap B'D'$, $K = A'B \cap AB'$. Khi đó,

$$IK = (AB'D') \cap (BA'C')$$

Ta có, $\sin \alpha = \frac{d(A', (AB'D'))}{d(A', IK)}$

Vì $IK = A'I = A'K = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác $A'IK$ đều.

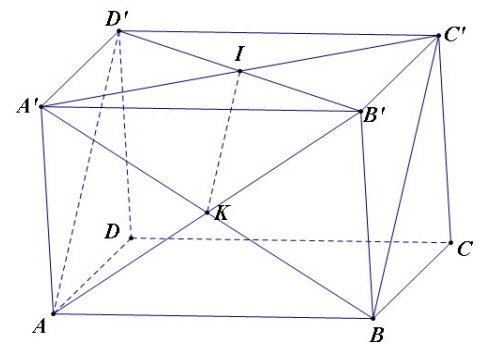
Gọi E là trung điểm của IK

$$\Rightarrow d(A', IK) = A'E = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Gọi H là hình chiếu của A' trên $(AB'D')$. Khi đó, $d(A', (AB'D')) = A'H$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vì vậy, } \sin \alpha = \frac{d(A', (AB'D'))}{d(A', IK)} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$



Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC . Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (MNP) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I = AC' \cap NC, K = AB' \cap BM$.

$$\text{Suy ra } IK = (A'B'C') \cap (MNP)$$

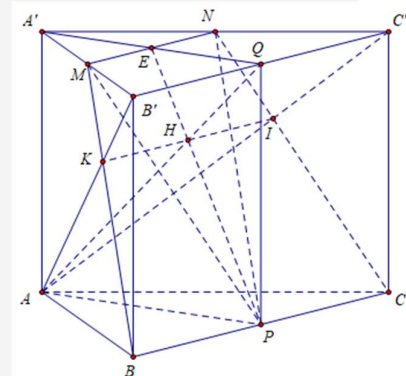
Ta có MN là đường trung bình của tam giác $A'B'C'$

$$\Rightarrow MN \parallel B'C' \Rightarrow IK \parallel B'C'$$

Gọi Q là trung điểm của $B'C' \Rightarrow AQ \perp B'C'$

$$\Rightarrow AQ \perp IK.$$

Vì $A'Q \perp B'C'$ và $AA' \perp B'C'$ nên $B'C' \perp (AA'Q) \Rightarrow IK \perp (AA'QP) \Rightarrow IK \perp EP$



Từ đây ta suy ra góc giữa $(AB'C')$ và (MNP) là góc giữa AQ và EP .

Xét hình chữ nhật $AA'QP$ có $AA' = 2$ và $A'Q = A'B' \cdot \sin 60^\circ = 3 \Rightarrow AQ = \sqrt{13}$.

Gọi $E = MN \cap A'Q$ nên E là trung điểm của $A'Q \Rightarrow EP = \frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{EH}{HP} = \frac{HQ}{HA} = \frac{EQ}{AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow HE = \frac{1}{3}EP = \frac{5}{6} \text{ và } HQ = \frac{1}{3}AQ = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\text{Tam giác } HEQ \text{ có } \cos \widehat{EHQ} = \frac{HE^2 + HQ^2 - EQ^2}{2HE \cdot HQ} = -\frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Do đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 8: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$, đáy bằng a . Gọi I là trung điểm của DD' . Tính cosin góc tạo bởi $(IA'C')$, $(ACC'A')$.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $CC' \perp (A'B'C'D')$, $CC' \subset (ACC'A')$
 $\Rightarrow (ACC'A') \perp (A'B'C'D')$

Kẻ $D'H \perp A'C' \Rightarrow D'H \perp (ACC'A')$, $A'C' \cap B'D' = H$.

$$\text{Do đó } D'H = \frac{B'D'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

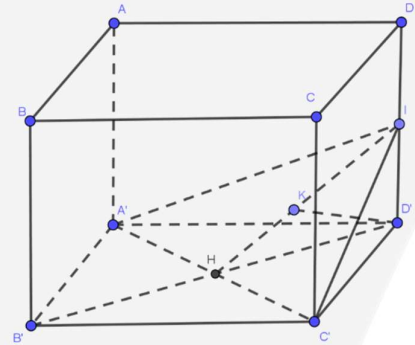
Mặt khác tứ diện $D'IA'C'$ có $D'I, D'C', D'A'$ đôi một vuông góc với nhau.

Kẻ $D'K \perp (A'IC')$ nên K là trực tâm đồng thời là trọng tâm của $\triangle A'IC'$ (vì $\triangle A'IC'$ đều).

$$\text{Ta có } \frac{1}{D'K^2} = \frac{1}{D'I^2} + \frac{1}{D'C'^2} + \frac{1}{D'A'^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow D'K = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Khi đó $((IA'C'); (ACC'A')) = (D'K; D'H) = \widehat{KD'H}$.

$$\text{Xét } \triangle D'KH \text{ vuông tại K có } \cos \widehat{KD'H} = \frac{D'K}{D'H} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân $AB = AC = 2a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(A'BC)$.

A. 30° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D

Ta có $(ACC'A') \cap (A'BC) = A'C$

Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A có

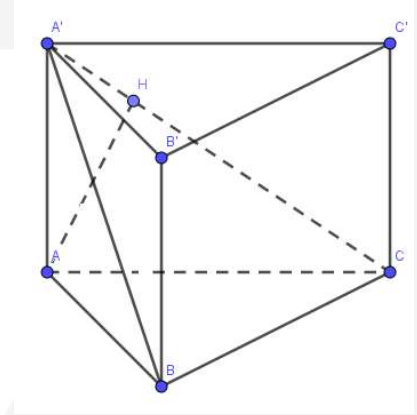
$$\frac{1}{d^2(A, A'C)} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow d(A, A'C) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Xét tứ diện $A'ABC$ có AA', AB, AC đôi một vuông góc, suy ra

$$\frac{1}{d^2(A, (A'BC))} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow d(A, (A'BC)) = a$$

$$\text{Suy ra } \sin((ACC'A'), (A'BC)) = \frac{d(A, (A'BC))}{d(A, A'C)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } ((ACC'A'), (A'BC)) = 60^\circ$$



Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $A'A = A'B = A'C = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' . Xác định cosin của góc giữa $(A'BC)$ và $(A'MN)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{8\sqrt{3}}{15}$.

C. $-\frac{8\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi K là trung điểm của BC . Do tam giác ABC đều và tam giác $A'BC$ cân tại A' nên $AK \perp BC$; $A'K \perp BC$.

Gọi I là trung điểm MN . Ta có $A'I \perp MN$ (do tam giác $A'MN$ cân tại A').

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \parallel BC \\ A'I \subset (A'MN), A'I \perp MN \\ A'K \subset (A'BC), A'K \perp BC \end{cases}$$

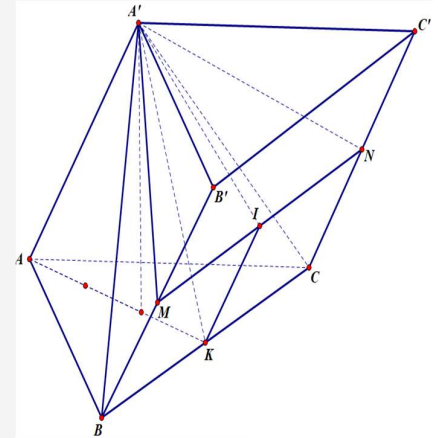
$$\Rightarrow \varphi = ((A'MN), (A'BC)) = (A'I, A'K)$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = |\cos \widehat{KA'I}|$$

$$A'K = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow IK = \frac{1}{2}BB' = a.$$

$$A'M^2 = \frac{A'B^2 + A'B'^2}{2} - \frac{BB'^2}{4} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow A'I = \sqrt{A'M^2 - MI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\cos \widehat{KA'I} = \frac{A'K^2 + A'I^2 - KI^2}{2A'K \cdot A'I} = \frac{8\sqrt{3}}{15} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{8\sqrt{3}}{15}.$$



Câu 11: Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$. Gọi M là điểm trên cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tang của góc hợp bởi hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó, $A'O \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC) , dựng $AH \perp BC$. Vì tam giác

$$ABC \text{ đều nên } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

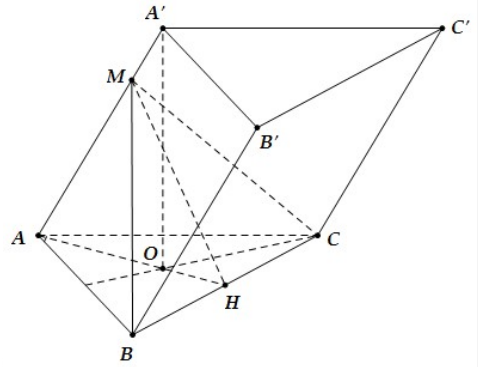
$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp A'O \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp MH.$$

$$\text{Do đó, } ((MBC), (ABC)) = (MH, AH) = \widehat{MHA} = \alpha.$$

Xét tam giác đều $A'AB$ ta có

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2MA \cdot AB \cdot \cos \widehat{MAB} = \frac{13}{16}a^2 \Rightarrow MB = \frac{\sqrt{13}}{4}a \Rightarrow MH = \sqrt{MB^2 - BH^2} = \frac{3}{4}a.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{MHA} = \frac{AH^2 + MH^2 - AM^2}{2AH \cdot MH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}.$$



Câu 12: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

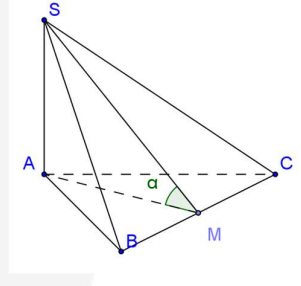
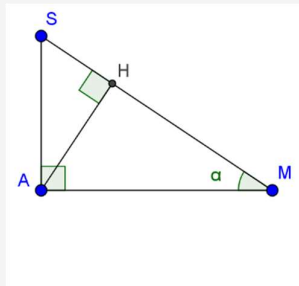
Gọi M là trung điểm BC , H là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với SM . Ta được:

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SMA}$.

$$AM = \frac{3}{\sin \alpha}; SA = \frac{3}{\cos \alpha}; AM = \frac{1}{2}BC.$$

$$\text{Suy ra } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot AM^2 \cdot SA = \frac{9}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Thể tích khối chóp nhỏ nhất khi $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất.



Xét hàm số $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x = \cos x - \cos^3 x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = -\sin x + 3\cos x \cdot \sin x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Suy ra $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$ lớn nhất khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.