

Câu I (4,0 điểm)

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2mx + 3$, biết rằng (P) có trục đối xứng là $x = 2$.

2. Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{2\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 + \sqrt{3}}{2\cos x + \sqrt{3}} = 1$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (4,0 điểm)

1. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(2x + 2y + z)^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8x^3 + 8y^3 + z^3}{(2x + 2y + z)(4xy + 2yz + 2zx)}.$$

2. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n và tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n}$.

Câu IV (4,0 điểm)

1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ lẻ và ba chữ số chẵn, trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?

2. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I, trọng tâm $G\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, các điểm

$M(0;1), N(4;1)$ lần lượt đối xứng với I qua AB và AC, điểm $K(2;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường tròn (C).

Câu V (4,0 điểm)

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn: $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức

$$T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

2. Cho hình lăng trụ ABCD.A₁B₁C₁D₁. Một mặt phẳng (α) thay đổi và luôn song song với đáy cắt các đoạn AB₁, BC₁, CD₁, DA₁ lần lượt tại M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mp(α) sao cho diện tích MNPQ nhỏ nhất.

Câu I.2. Giải PT: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

Đặt $\sqrt{7-x} = u \geq 0$; $\sqrt{x-1} = v \geq 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 6$ ta có pt:

$$v^2 + 1 + 2u = 2v + 1 + uv \Leftrightarrow 2(u-v) = v(u-v) \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2 \\ v = u = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn). Vậy tập nghiệm } S = \{4; 5\}.$$

Câu II. 1. Giải phương trình: $\frac{2\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 + \sqrt{3}}{2\cos x + \sqrt{3}} = 1$.

ĐK: $2\cos x + \sqrt{3} \neq 0$

$$\text{Từ pt} \Rightarrow 2\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x + 4 = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(2\cos x + \sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ 2\cos x + \sin x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \sin x = 1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ (loại nghiệm } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \text{)}. \underline{\text{KL}}: \text{ nghiệm của pt là } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

Câu II. 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 - 4y^2 + 4y = \sqrt{x+1}(y^2 - 5y + 4 + \sqrt{x+1}) \\ 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 6x - 7 = y^2(x-1)^2 + (y^2 - 1)\sqrt{3x-2} \end{cases}$$

ĐK: $x \geq \frac{2}{3}$. Từ pt đầu tương đương: $y(y-2)^2 - (y-2)^2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} - y)$

$$\Leftrightarrow (y - \sqrt{x+1})[(y-2)^2 + \sqrt{x+1}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y - 2 = x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \text{ (loại nghiệm } x = -1, y = 2)$$

Thế $y^2 = x+1$ ($y > 0$) vào pt thứ hai thì được:

$$2\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 2 + (3x - 2) - x\sqrt{3x-2} = (x+1)(x-1)^2 - (3x-3)$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} + \sqrt{3x-2}(\sqrt{3x-2} - x) = (x+1)(x-1)^2 - 3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} - \sqrt{3x - 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{3x - 2} + x} = (x^2 - 3x + 2)(x + 2)$$

$$+ \text{ TH1: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \cup x = 2 \Rightarrow \text{hệ có nghiệm } (x; y) = (1; \sqrt{2}) \cup (2; \sqrt{3}).$$

$$+ \text{ TH2: } \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} - \frac{\sqrt{3x - 2}}{\sqrt{3x - 2} + x} = x + 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3} + 2} = \frac{\sqrt{3x - 2}}{\sqrt{3x - 2} + x} + x + 2 \quad (*)$$

Dễ thấy (*) vô nghiệm vì $x \geq \frac{2}{3}$ thì VT(*) < 1 < VP(*).

KL: hệ có nghiệm $(x; y) = (1; \sqrt{2}) \cup (2; \sqrt{3})$.

Câu III.1. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(2x + 2y + z)^2$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \frac{8x^3 + 8y^3 + z^3}{(2x + 2y + z)(4xy + 2yz + 2zx)}$$

Đặt $\frac{2x}{2x + 2y + z} = a, \frac{2y}{2x + 2y + z} = b, \frac{z}{2x + 2y + z} = c \Rightarrow S = a + b + c = 1; a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$ và biểu thức P

$$\text{trở thành: } P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}.$$

Ta có $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ hay là:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$$

$a^3 + b^3 + c^3 = S^3 - 3S(ab + bc + ca) + 3abc$ thế vào P thì:

$$P = \frac{1 - 3(ab + bc + ca) + 3abc}{ab + bc + ca} \Rightarrow P + 3 = \frac{1 + 3abc}{ab + bc + ca}. \text{ Mặt khác từ giả thiết ta có:}$$

$$1 = S^2 = \frac{1}{2} + 2(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{1}{4} \text{ thế vào P thì ta được:}$$

$$P + 3 = 4 + 12abc \Rightarrow P = 1 + 12abc. \text{ Ta chứng minh } P = 1 + 12abc \leq \frac{11}{9}. \text{ Thật vậy khi đó bất } \Leftrightarrow 6abc \leq \frac{1}{9}.$$

$$\text{Ta có: } \left(a^2 + \frac{1}{36}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{36}\right) \geq \frac{a}{3} + \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} - c^2 + \frac{1}{18} \geq \frac{1}{3}(1 - c) \Rightarrow c \in \left(0; \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{Xét } Q = 6abc = 2ab \cdot 3c \leq 4ab = 2\left[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)\right] = 2\left[(1 - c)^2 - \left(\frac{1}{2} - c^2\right)\right] \leq \frac{1}{9}$$

$\Leftrightarrow 2\left(1-2c+c^2-\frac{1}{2}+c^2\right)-\frac{1}{9}\leq 0 \Leftrightarrow c^2-c+\frac{2}{9}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq c\leq \frac{2}{3}$. Bất đúng nếu ta lấy c là số lớn nhất thì

$1=a+b+c\leq 3c\Rightarrow \frac{1}{3}\leq c$. Ta có đpcm. Vậy $\max P = \frac{11}{9}$ tại $a=b=\frac{1}{6}, c=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{4}z$.

Câu III.2. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 3 \cdot 4^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n và tính

giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n}$.

Số hạng tổng quát có dạng $u_n = 4^n(an+b)$ thật vậy thay vào công thức truy hồi thì:

$4 \cdot 4^n(an+a+b) = 4 \cdot 4^n(an+b) + 4a \cdot 4^n = 4u_n + 4a \cdot 4^n$ ta chọn $a = \frac{3}{4}$ thì thỏa mãn công thức.

Với $u_1 = 4\left(b + \frac{3}{4}\right) = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \Rightarrow u_n = 4^{n-1}(3n-1), n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{4^{n-1}(3n-1)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{4^n(3n-1)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-1} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$.

Câu IV.1. Có bao nhiêu số có 8 chữ số khác nhau mà có mặt hai chữ số lẻ và ba chữ số chẵn, trong đó mỗi chữ số chẵn có mặt đúng hai lần?.

Gọi các chữ số lẻ khác nhau là x, y thuộc $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ và ba chữ số chẵn khác nhau là a, b, c thuộc $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

+ TH1: Nếu chọn một chữ số x lẻ đứng đầu thì có 5 cách chọn, chữ số lẻ y còn lại và ba chữ số chẵn thì số cách chọn là $4 \cdot C_5^3$ và chọn lại bộ (a; b; c) có một cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không kể số lẻ x đứng đầu) thì có cách khác nhau là: $4 \cdot C_5^3 \cdot 1 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$. (Ta nói x có 5 cách chọn nghĩa là đã xếp vị trí cho x, việc còn lại là sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số còn lại).

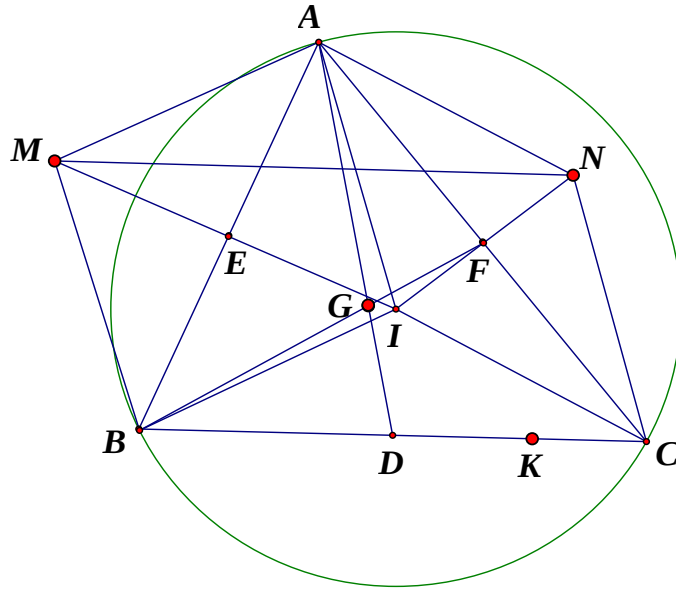
Vậy trường hợp 1 có các số thỏa mãn bài toán là: $5 \cdot 4 \cdot C_5^3 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 126000$ (số)

+ TH2: Nếu chọn một chữ số chẵn a đứng đầu thì có 4 cách, hai chữ số b, c có C_4^2 cách, chọn lại chữ số a có 1 cách, chọn lại cặp (b, c) có 1 cách. Chọn hai chữ số lẻ có C_5^2 cách. Bây giờ ta sắp xếp vị trí cho bộ 7 chữ số (không tính a) thì số cách khác nhau là: $C_4^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_5^2 \cdot \frac{7!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 75600$.

Trường hợp 2 có số các số thỏa mãn là: $4 \cdot 75600 = 302400$ số.

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là: $126000 + 302400 = 428400$ số.

Câu IV. 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I, trọng tâm $G\left(\frac{8}{3}; 0\right)$, các điểm $M(0;1), N(4;1)$ lần lượt đối xứng với I qua AB và AC, điểm $K(2;-1)$ thuộc đường thẳng BC. Viết phương trình đường tròn (C).



Ta thấy IM và IN vuông góc với các dây cung AB, AC nên đi qua các trung điểm E, F của AB và AC. Kết hợp tính đối xứng của M, N qua các cạnh AB, AC thì dễ dàng suy ra các hình AICN, AIBM là các hình thoi và do đó: $AM = AN = NC = BM = AI = IC = IB = R$.

Hơn nữa ta có $BM \parallel NC$ (cùng $\parallel AI$) và bằng nhau nên BMNC là hình bình hành suy ra $BC \parallel MN$. Phương trình MN là $y = 1$, và BC đi qua K nên có phương trình là $y = -1$.

Gọi $D(d; -1)$ là trung điểm của BC thì tọa độ của B và C là $B(d-b; -1)$ và $C(d+b; -1)$.

Vì $y_G = 0, y_B = y_C = -1 \Rightarrow y_A = 2$.

$$x_G = \frac{8}{3} \Rightarrow x_A + x_B + x_C = 8 \Rightarrow x_A + 2d = 8 \Rightarrow x_A = 8 - 2d \Rightarrow A(8 - 2d; 2).$$

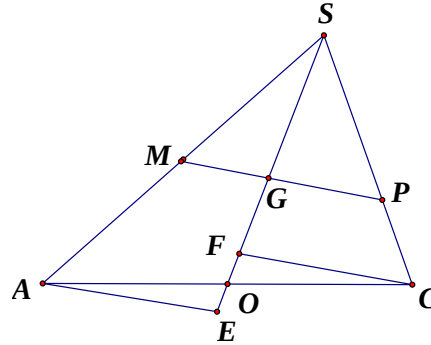
Mặt khác $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN} = (4; 0) \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$. Và $MB = MA = R \Rightarrow (d-2)^2 + 4 = (8-2d)^2 + 1$ nên $d = 3 \cup d = \frac{19}{3}$. Tương tự $NC = NA$ nên $(d-2)^2 + 4 = (4-2d)^2 + 1$ nên $d = 3$ là nghiệm chung của hai phương trình trên và khi đó tọa độ ba đỉnh: $B(1; -1), C(5; -1), A(2; 2)$.

Gọi $I(3; m)$, từ $IA = MA = R = \sqrt{5}$ ta có: $1 + (m-2)^2 = 5 \Rightarrow m = 0 \cup m = 4 \Rightarrow I(3; 0) \cup I(3; 4)$

Loại $I(3; 4)$ vì $IC \neq \sqrt{5}$. Vậy đường tròn (C) là: $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

Câu V. 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Một mặt phẳng không qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn: $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức $T = \left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + 4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $\frac{SB}{SN} = x, \frac{SD}{SQ} = y$. Gọi O là tâm hình bình hành và G là giao điểm của SO với $mp(MNPQ)$.



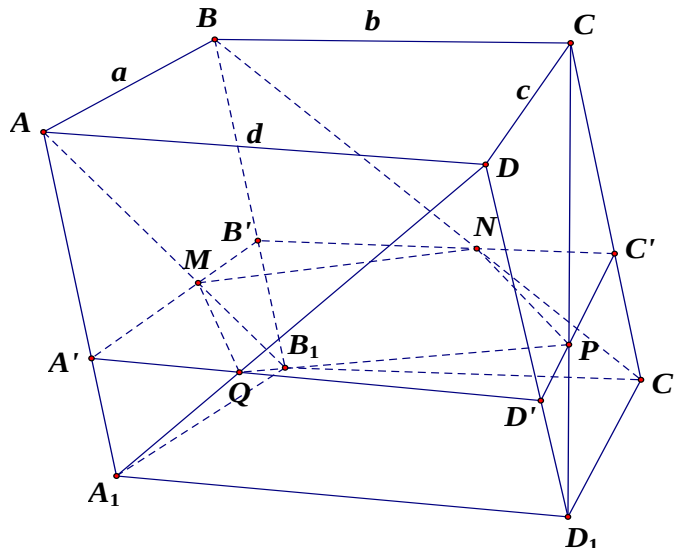
Trong $mp(SAC)$ vẽ AE, CF song song với MP cắt SO tại E, F . Khi đó $\frac{SA}{SM} = \frac{SE}{SG}, \frac{SC}{SP} = \frac{SF}{SG}$

Cộng các vế ta được $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SO + OE + SO - OF}{SG} = 2\frac{SO}{SG}$ (Vì $AECF$ là hình bình hành). Tương

tự ta cũng có tổng: $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 2\frac{SO}{SG}$ suy ra $x + y = 2 + 3 = 5$.

Khi đó ta xét $T = x^2 + 4(5 - x)^2 = 5x^2 - 40x + 100 = 5(x - 4)^2 + 20 \geq 20 \Rightarrow \min T = 20 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu V. 2. Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (α) thay đổi và luôn song song với đáy cắt các đoạn AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 lần lượt tại M, N, P, Q . Hãy xác định vị trí của $mp(\alpha)$ sao cho diện tích $MNPQ$ nhỏ nhất.



Để thấy thiết diện $A'B'C'D'$ có diện tích bằng hai đáy và bằng S . Đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 1, tỉ số $\frac{AA'}{AA_1} = AA' = x, 0 < x < 1$. Khi đó ta lần lượt tính được: $A'M = ax$, $A'Q = (1 - x)d$ nên tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta A'MQ}}{S_{\Delta ABD}} = x(1 - x)$.

Tương tự tỉ số diện tích $\frac{S_{\Delta B'MN}}{S_{\Delta ABC}} = x(1 - x)$, $\frac{S_{\Delta C'NP}}{S_{\Delta BCD}} = x(1 - x)$, $\frac{S_{\Delta D'PQ}}{S_{\Delta ACD}} = x(1 - x)$ và do đó cộng các đẳng thức trên ta có $2S = \frac{1}{x(1 - x)}(S_{\Delta A'MQ} + S_{\Delta B'MN} + S_{\Delta C'NP} + S_{\Delta D'PQ}) = \frac{1}{x(1 - x)}(S - S_{MNPQ})$

Đặt $S_{MNPQ} = S'$ thì $S' = S - 2x(1 - x)S$. Vậy để diện tích S' nhỏ nhất thì $2x(1 - x)$ lớn nhất và ta có theo bất Cô si: $2x(1 - x) \leq 2 \cdot \frac{(x + 1 - x)^2}{4} = \frac{1}{2}$ đạt được tại $x = \frac{1}{2}$.

Vậy khi mp(α) đi qua trung điểm cạnh bên và song song với hai đáy thì $S_{MNPQ} = S'$ nhỏ nhất và bằng nửa diện tích đáy.

HẾT.

Người hướng dẫn giải: Nguyễn Xuân Chung – THPT Lê Lai – Ngọc Lặc – Thanh Hóa