

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

Ngày thi: 29/9/2023

Đề thi này có 01 trang

Bài 1: (5,0 điểm)

Với số thực a , xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2 - u_n^2}, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

- a) Chứng minh rằng với mọi số a hữu tỷ, các số hạng của dãy số (u_n) luôn xác định.
b) Với $a \in [0; 1)$, chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = n^2 u_n, \forall n = 1, 2, \dots$ luôn có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Bài 2: (5,0 điểm)

Xét dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1, u_2 = 2$ và

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

- a) Tìm tất cả các số nguyên a sao cho $3u_n^2 + a^n$ là số chính phương với mọi $n \geq 1$.
b) Chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$ thì $v_3(u_n) = v_3(n)$, trong đó ký hiệu $v_3(x)$ là số mũ của 3 trong phân tích tiêu chuẩn của số nguyên dương x .

Bài 3: (5,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của số thực dương k sao cho bất đẳng thức

$$k \cdot \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq k+1$$

luôn đúng với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác.

Bài 4: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn (O) có góc $\widehat{BAC} = 45^\circ$ và đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi X là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O) . Đoạn thẳng OX cắt EF, BE, CF theo thứ tự tại các điểm G, K, L .

- a) Chứng minh rằng $OG^2 = GK \cdot GL$.
b) Trên BC lấy điểm T sao cho góc $\widehat{AOT} = 90^\circ$. Chứng minh rằng AX vuông góc với HT .

— HẾT —

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

Ngày thi: 30/9/2023

Đề thi này có 01 trang

Bài 5: (6,0 điểm)

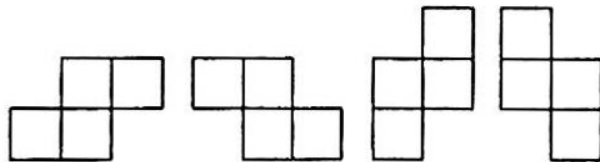
a) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^{2023} = y + y^{2023} \\ y^{2023} = z + z^{2023} \\ z^{2023} = t + t^{2023} \\ t^{2023} = x + x^{2023} \end{cases}$$

b) Cho $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức hệ số nguyên và số nguyên a thỏa mãn $Q(a) = Q(a+1) = 0$. Chứng minh rằng nếu $P(2024) = 2026$ thì phương trình $P(Q(x)) - 2023 = 0$ không có nghiệm nguyên.

Bài 6: (7,0 điểm)

Cho bảng ô vuông 12×12 được chia thành 144 ô phân biệt. Một hình chữ Z (nằm dọc hoặc nằm ngang, gồm 4 ô vuông) được tạo thành từ bảng 3×2 hoặc 2×3 cắt bỏ đi hai ô ở góc đối diện như các hình bên dưới:



a) Người ta muốn tô màu mỗi ô của bảng 12×12 ở trên bởi 2 màu xanh, đỏ sao cho trong mỗi hình chữ Z bất kỳ, luôn có đúng 2 ô xanh và 2 ô đỏ. Chứng minh rằng nếu trên cột 1 có hai ô liên tiếp được tô đỏ thì toàn bộ các ô ở cột 12 đều được tô xanh.

b) Tính số cách điền các số từ 1, 2, 3, ..., 144 lên bảng và mỗi số điền cho đúng một ô sao cho với mỗi hình chữ Z có trong bảng, số lượng số chẵn bằng số lượng số lẻ.

c) Hỏi có tồn tại hay không cách điền số các số từ 1, 2, 3, ..., 144 lên bảng, mỗi số điền cho đúng một ô sao cho với mỗi hình chữ Z có trong bảng, tổng các số trên đó đều chia hết cho 3?

Bài 7: (7,0 điểm)

Xét tam giác ABC nhọn, không cân có $AB < AC$ nội tiếp trong đường tròn (O) với B, C cố định và A thay đổi trên (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy I đối xứng với A qua EF và đường tròn ngoại tiếp tam giác IMO cắt lại AM tại L .

a) Chứng minh rằng L luôn thuộc một đường tròn cố định khi A di động trên (O) .

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt lại BC tại R , EF cắt BC tại T , AR cắt DE tại G . Chứng minh rằng nếu G là trung điểm của đoạn thẳng DE thì F là trung điểm của đoạn thẳng ET .

— HẾT —