



NHÓM VẬN DỤNG - VẬN DỤNG CAO

PHÂN TÍCH ĐỀ THAM KHẢO

NĂM HỌC 2019 - 2020



I. PHÂN TÍCH – BÌNH LUẬN CÂU 37

1 Phân tích

- Nhắc lại các cách tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau a và b .

Cách 1: Dụng đoạn vuông góc chung (thường dùng khi hai đường vừa chéo và vuông góc)

Cách 2: Quy về khoảng cách từ đường này đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường kia, cuối cùng là quy về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Cách 3: Quy về khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song mỗi mặt chứa một đường.

- Câu 37 đề thi tham khảo: Là bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong hình chóp có đường cao cho trước. Một bài ở mức độ Vận Dụng. Có hai ý tưởng nổi bật trong bài:

⊕ **Thứ nhất:** Là bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo và không vuông góc với nhau: Một đường nằm trong mặt phẳng đáy và một đường là cạnh bên. Nên giải quyết vấn đề khoảng cách này có lối mòn đối với học sinh thường dùng đó là cách 2:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b :

$$d(a, b) = d(a, (P)) = d(M, (P)) \quad \text{với: } (P) \supset b, (P) \perp a, M \in a.$$

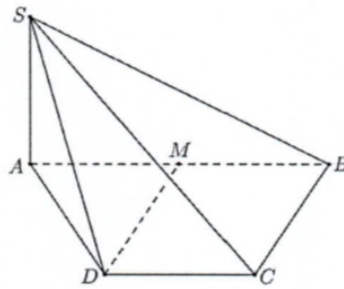
Vì bài toán có chân đường cao cho trước nên: Đưa Về bài toán tính khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng bên.

⊕ **Thứ hai:** Đáy của hình chóp là một hình thang rất hay, rất đặc biệt: từ đó dẫn đến đường chéo vuông góc với cạnh bên, là rút ngắn cách tính khoảng cách.

2 Lời giải tham khảo

Ngô Tú Hoa và Thoa Nguyễn

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$. SA vuông góc với đáy và $SA = 3a$ (minh họa hình dưới đây).



Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

A. $\frac{3}{4}a$.

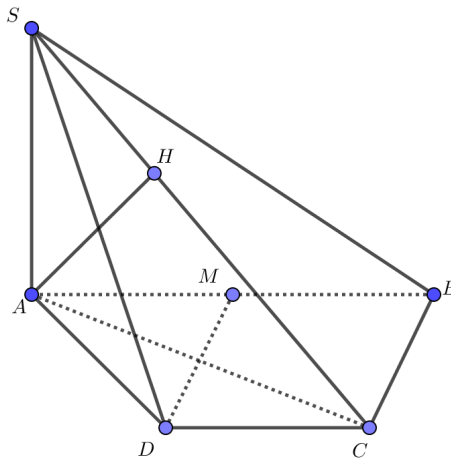
B. $\frac{3}{2}a$.

C. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

D. $\frac{6\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1.

Ta có $DM \parallel (SBC) \Rightarrow d(DM, SB) = d(DM, (SBC)) = d(M, (SBC))$

Ta có $MA = MB = MD = MC = a$

Suy ra tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm M , đường kính AB .

Suy ra tam giác ABC vuông tại C

Như vậy ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$

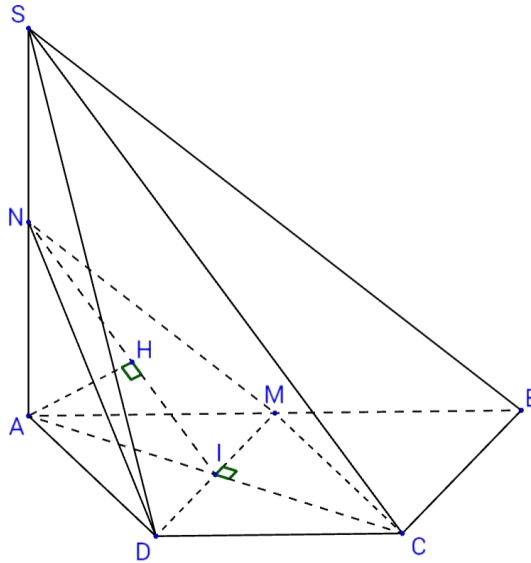
Trong mặt phẳng (SAC) Dựng $AH \perp SC$ tại H suy ra $BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Nên $d(A, (SBC)) = AH$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a\sqrt{3} ; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{3}{4}a$$

Cách 2



Gọi $I = AC \cap DM$, N là trung điểm của đoạn thẳng SA .

Dễ dàng chứng minh được $(SBC) \parallel (MND)$.

Do đó, $d(SB, DM) = d((SBC), (MND)) = d(B, (MND)) = d(A, (MND))$.

Trong mp(SAC) kẻ $AH \perp NI$, mặt khác, ta chứng minh được $MI \perp (SAC)$

nên suy ra: $AH \perp (MND)$ và $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$.

Vậy, $d(SB, DM) = d(A, (MND)) = AH = \frac{3a}{4}$.

Hoặc Áp dụng công thức thể tích trong phần tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng.

$$d(SB, DM) = d((SBC), (MND)) = d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}} = \frac{3a}{4}$$

II. Ý TƯỞNG VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN

1. Ý tưởng 1

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nằm trên hai mặt bên, trong hình chóp có đường cao

Câu 1

Chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$. Hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB và $SH = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, MC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AM, BN .

A. $\frac{15a}{4\sqrt{79}}$

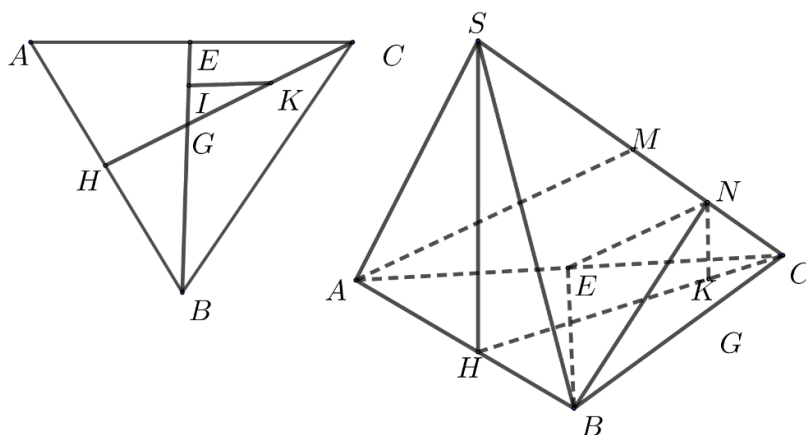
B. $\frac{2\sqrt{237}}{79}$

C. $\frac{2a\sqrt{237}}{79}$

D. $\frac{15a\sqrt{79}}{79}$

Lời giải

Chọn C



+ Gọi E là trung điểm cạnh AC ; K là hình chiếu của N trên $HC \Rightarrow NK // SH$.

$$\Rightarrow d(AM; BN) = d(A; (BEN)) = d(C; (BEN)) = \frac{8}{5} d(K; (BEN)).$$

$$\text{Vì } \frac{d(C; (BEN))}{d(K; (BEN))} = \frac{CG}{KG} = \frac{\frac{2}{3}HC}{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)HC} = \frac{5}{8}.$$

$$+ \text{Ta có: } \frac{KN}{SH} = \frac{CN}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow KN = \frac{a}{4}.$$

+ Gọi I là hình chiếu của K trên $BE \Rightarrow IK // EC$

$$\text{Do đó } \frac{IK}{EC} = \frac{GK}{GC} = \frac{5}{8} \Rightarrow KI = \frac{5a\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Vậy } d(AM; BN) = \frac{8}{5} d(K; (BEN)) = \frac{8}{5} \frac{KN \cdot KI}{\sqrt{KN^2 + KI^2}} = \frac{8}{5} \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + \frac{25}{64} \cdot 3a^2}} = \frac{2a\sqrt{237}}{79}.$$

2. Ý tưởng 2

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong hình chóp có đường cao

Câu 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC đều và $SA = AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BN .

A. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

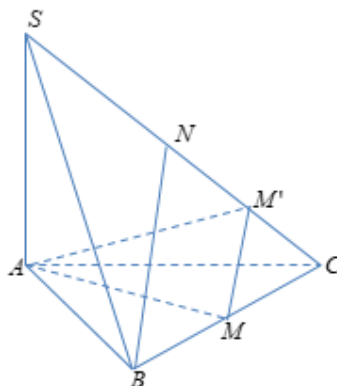
B. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$.

C. $\frac{a3\sqrt{13}}{13}$.

D. $\frac{a2\sqrt{13}}{13}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M' là trung điểm $SC \Rightarrow MM' // BN$.

$$\text{Khi đó } d(AM, BN) = d(BN, (AMM')) = d(B, (AMM')) = \frac{3 \cdot V_{B.AMM'}}{S_{\Delta AMN}}.$$

$$\text{Do } SC = 4M'C \text{ nên } d(M', (ABC)) = \frac{1}{4}SA = \frac{a}{4}$$

$$\text{và } S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}. \text{ Suy ra } V_{M'.ABM} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}. \text{ Tính được } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Theo công thức độ dài đường trung tuyến trong tam giác ta có

$$MM' = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BC^2 + BS^2}{2} - \frac{SC^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

$$AM' = \sqrt{\frac{AN^2 + AC^2}{2} - \frac{NC^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{a^2}{2} + a^2}{2} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta AMM'} = \frac{a^2\sqrt{39}}{32}. \text{ Vậy } d(AM, BN) = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{96}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{32}} = \frac{a\sqrt{13}}{13}$$

3. Ý tưởng 3

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong hình lăng trụ đứng có đường cao cho trước và có giả thiết góc giữa mặt bên và mặt đáy

Câu 3

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC là tam giác vuông tại A . Biết $AC = 2\sqrt{3}a$, M là trung điểm của CC' . Góc giữa mặt phẳng $(A'B'M)$ và mặt đáy bằng 30° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'M$ bằng.

A. $2\sqrt{3}a$.

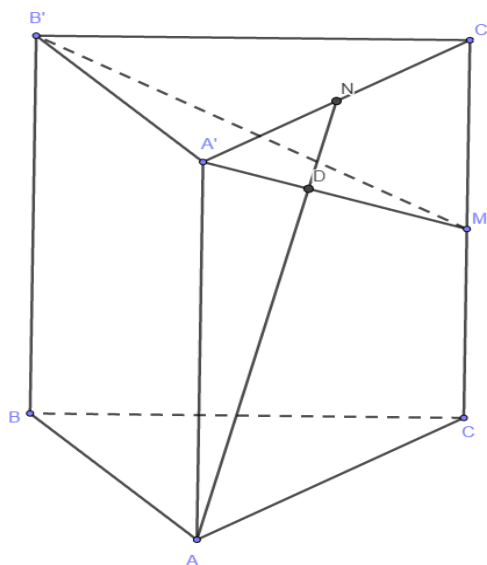
B. $4\sqrt{3}a$

C. $\sqrt{6}a$.

D. $2\sqrt{6}a$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\widehat{C'A'M} = \left((A'B'M), (A'B'C') \right) = 30^\circ \Rightarrow CC' = 4a \Rightarrow C'M = A'C' \tan 30^\circ = 2a$

Kẻ $AN \perp AM$ ($N \in A'C'$). Gọi $A'M \cap AN = D$.

$$\text{Khi đó: } d(B'M, AB) = d(A, (A'B'M)) = AD = \frac{A'A^2}{AN} = \frac{16a^2}{\sqrt{16a^2 + \frac{16}{3}a^2}} = 2\sqrt{3}a.$$

$$(\text{Do } A'N = \frac{A'A \cdot C'M}{C'A'} = \frac{4\sqrt{3}a}{3})$$

4. Ý tưởng 4

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong hình lăng trụ tam giác đều là hình có đường cao cho trước. Đưa về khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và được tính bằng phương pháp thể tích.

Câu 4

Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a, AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $A'B'$ và $A'C'$. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng AN và BM

A. $\frac{4a\sqrt{65}}{65}$.

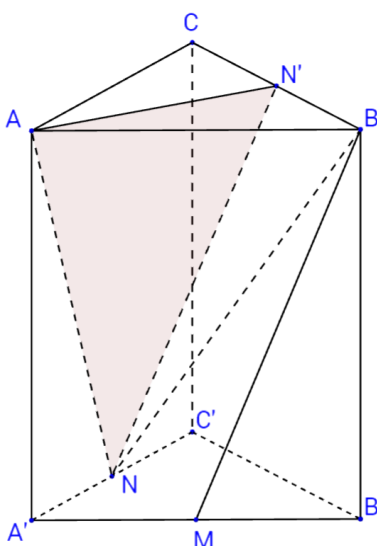
B. $\frac{14a\sqrt{65}}{65}$.

C. $\frac{4a\sqrt{65}}{195}$.

D. $\frac{12a\sqrt{65}}{65}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N' là trung điểm của BC , suy ra $BM \parallel (ANN')$

$$\text{Do đó } d(BM, AN) = d(BM, (ANN')) = d(B, (ANN')) = \frac{3V_{B.ANN'}}{S_{\Delta ANN'}}$$

$$\text{Ta có: } AN = \sqrt{AA'^2 + A'N'^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}, A'N' = \frac{a\sqrt{3}}{2}; NN' = BM = AN = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta ANN'} = \frac{a^2\sqrt{195}}{16}.$$

$$\text{Ta có } V_{B.ANN'} = \frac{1}{3} AA' \cdot S_{\Delta ANN'} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{Vậy } d(BM; AN) = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{195}}{16}} = \frac{4a\sqrt{65}}{65}$$

5. Ý tưởng 5

Phục dựng hình ẩn để tìm đường cao trong hình chóp, từ đó tính khoảng cách.

Câu 5

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp AB, SB \perp BC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, BC , biết $d(S, (ABC)) = 2a$. Tính khoảng cách giữa AM và SN .

A. $\frac{3\sqrt{10}a}{20}$

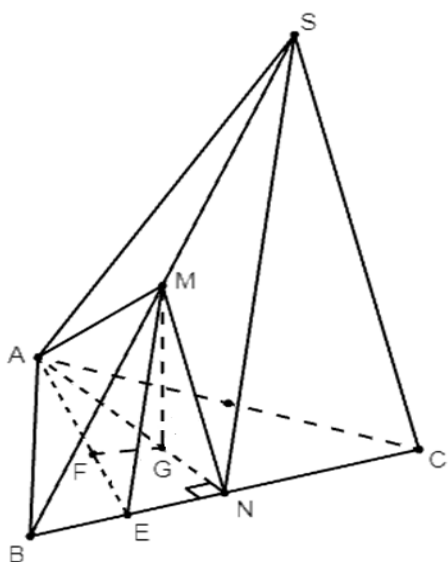
B. $\frac{3\sqrt{10}a}{40}$

C. $\frac{3\sqrt{5}a}{40}$

D. $\frac{3\sqrt{5}a}{20}$

Lời giải

Chọn B.



Từ giả thiết ta có hai tam giác vuông SAB và SBC chung cạnh huyền SB

$$\Rightarrow MA = MB = \frac{SB}{2} = MC.$$

$\Rightarrow$ hình chiếu của M trên (ABC) là tâm tam giác đều ABC , nên gọi G là tâm tam giác thì $MG \perp (ABC)$ và $MG = \frac{1}{2}d(S, (ABC)) = a$

Gọi E là trung điểm $BN \Rightarrow ME \parallel SN$

$$\Rightarrow d(AM, SN) = d(SN, (AME)) = d(N, (AME)) = \frac{3}{2}d(G, (AME)).$$

$$\text{Kẻ } GF \perp AE, F \in AE \Rightarrow d(G, (AME)) = \frac{MG \cdot GF}{\sqrt{MG^2 + GF^2}}$$

$$\text{Ta có } \frac{GF}{EN} = \frac{GA}{EA} \Rightarrow GF = \frac{a}{\sqrt{39}} \Rightarrow d(G, (AME)) = \frac{1}{\sqrt{39}\sqrt{1 + \frac{1}{39}}}a = \frac{1}{2\sqrt{10}}a$$

$$\Rightarrow d(AM, SN) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{10}}a = \frac{3\sqrt{10}a}{40}$$

6. Ý tưởng 6

Phục dựng hình ẩn để tìm đường cao trong bài toán tính khoảng cách mở rộng trong hình lăng trụ..

Câu 6

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ biết độ dài các cạnh bên $2\sqrt{2}a$ và $B'C = a\sqrt{7}$, $\widehat{B'AB} = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách $d(CC', AB')$.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

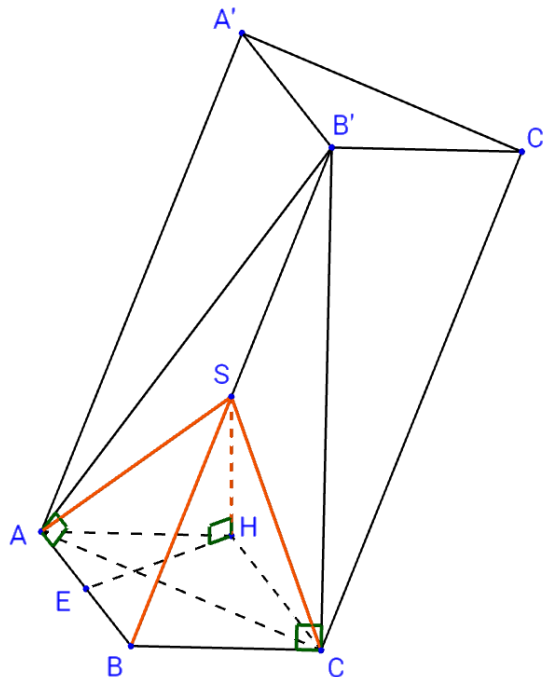
B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Tính được $\triangle BB'C$ vuông tại C . Nên gọi S là trung điểm BB' thì $SA = SB = SC$.

Nên gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABC) thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Lại có $\triangle ABC$ cân tại B , $\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ \Rightarrow H$ là 1 đỉnh của hình thoi $ABCH$.

$$\triangle AHB \text{ đều, nên kẻ } HE \perp AB, E \in AB \Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Và có } SH = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = a$$

$$d(AB', CC') = d(C', (SAB)) = d(H, (SAB)) = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

7. Ý tưởng 7

Phát triển bài toán giả thiết là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Phục dựng đường cao để xác định giả thiết .Từ đó tính thể tích

Câu 7

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, $SA = SB = a\sqrt{2}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng a . Tính thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

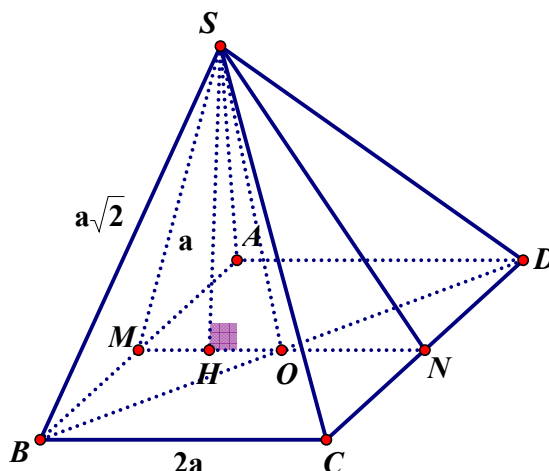
B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta có $SA = SB = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAB cân tại S suy ra $SM \perp AB$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng CD suy ra $MN \perp AB$.

Do đó $AB \perp (SMN)$ mà $AB \subset (ABCD)$ nên $(SMN) \perp (ABCD)$.

Kẻ $SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Lại có

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} = a \Rightarrow SM = AM = BM = a$$

hay tam giác SAB vuông cân tại S .

Mặt khác lại có $AB \parallel (SCD)$.

$$\text{Nên } d(AB, SC) = d(A, (SCD)) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD)) = a = SM$$

$$\Rightarrow SM \perp SN \Rightarrow SN = \sqrt{MN^2 - SM^2} = a\sqrt{3}.$$

Do đó $SH.MN = SM.SN \Leftrightarrow SH = \frac{SM.SN}{MN} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.4a^2 = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$

8. Ý tưởng 8

Phát triển bài toán giả thiết là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Phục dựng đường cao để xác định giả thiết .Từ đó tính thể tích

Câu 8

Cho tứ diện $ABCD$, có $AD = 3a, AB = 2a, BC = 4a, BD = \sqrt{13}a$ và $\widehat{DAC} = 90^\circ$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng $\frac{3\sqrt{10}a}{5}$, tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$

A. $6a^3$.

B. $\sqrt{6}a^3$.

C. $2\sqrt{6}a^3$.

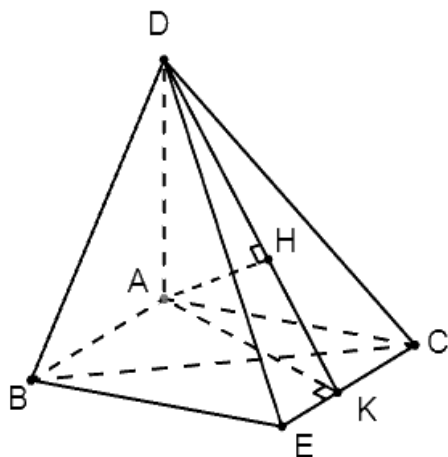
D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B

MỘT LÀ : *phát triển Khôi phục hình ảnh* là hình chóp có đáy là hình bình hành để sử dụng khoảng cách giữa cặp cạnh đáy và cạnh bên chéo nhau đưa về khoảng cách giữa một điểm thuận lợi trên cạnh đáy đến mặt bên.

HAI LÀ : *Sử dụng giả thiết tìm chân đường cao cho chóp $D.ABC$, triển khai giả thiết khoảng cách.*



Từ giả thiết ta có $AD^2 + AB^2 = BD^2 \Rightarrow DA \perp AB \Rightarrow DA \perp (ABC)$.

Dựng hình bình hành $ABEC$ có $EC = AB = 2a$.

$$d(AB, CD) = d(AB, (CDE)) = d(A, (CDE)).$$

Kẻ $AK \perp CE, AH \perp DK \Rightarrow AH \perp (DCE)$

$$\Rightarrow d(A, (CDE)) = AH = \frac{DA \cdot AK}{\sqrt{DA^2 + AK^2}} \Rightarrow \frac{3 \cdot AK}{\sqrt{9 + AK^2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{5} \Rightarrow AK = a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \sqrt{6}a = \sqrt{6}a^3$$

9. Ý tưởng 9

Phát triển bài toán giả thiết là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Phục dựng đường cao để xác định giả thiết khoảng cách. Từ đó tính thể tích

Câu 9

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BD = AD = 2a$, $AC = \sqrt{7}a$, $BC = \sqrt{3}a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD bằng a , tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

B. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

C. $2a^3\sqrt{6}$.

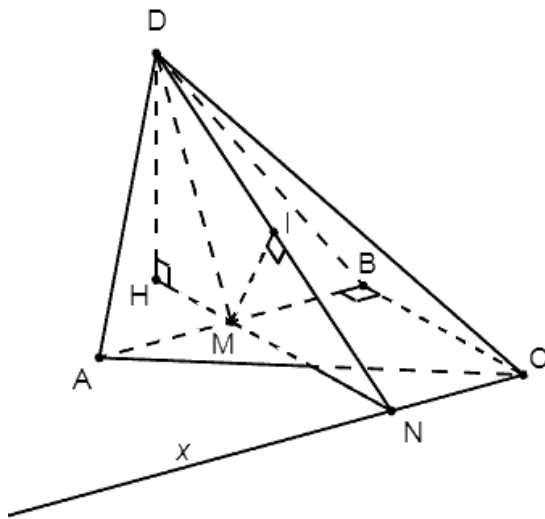
D. $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1.

Xuất phát từ cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.



GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ 1 :

Phục dựng đường cao để xác định được khoảng cách trong giả thiết

Coi tứ diện là hình chóp $D.ABC$.

Qua C kẻ tia $Cx // AB$. Khi đó $d(AB, CD) = d(AB, (CD, Cx))$.

Giả thiết $DA = DB$ suy ra hình chiếu H của D trên đáy thuộc đường thẳng trung trực đoạn AB , đường thẳng này qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB .

Lai có $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp AC$.

Nên qua M dựng $MN \parallel BC, N \in Cx \Rightarrow H \in MN$ và $CN \perp (DMN)$.

Trong (DMN) kẻ $MI \perp DN \Rightarrow MI \perp (DCN) \Rightarrow MI = d(M, (DCN))$

Rõ ràng $d(AB, (CD, Cx)) = d(M, (DCN))$. Nên ta được $MI = a$.

GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ 2: Khai thác giả thiết khoảng cách đã xác định được, và giả thiết đặc biệt đưa về tam giác đặc biệt. Từ đó tính được đường cao.

Ta có $DM = \sqrt{3} = MN$ nên $\triangle DMN$ cân đỉnh $M \Rightarrow I$ là trung điểm DN

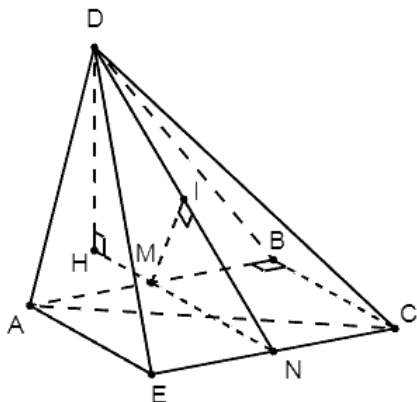
$$\Rightarrow DN = 2\sqrt{MN^2 - MI^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{MI \cdot DN}{MN} = \frac{a \cdot 2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}a^3 = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Cách 2.

Phục dựng hình chóp đáy là hình bình hành hay các trường hợp đặc biệt của hình bình hành.



⊗ **Hình quen**: Chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành thì

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(M, (SCD)) \text{ với bất kỳ điểm } M \in AB.$$

⊗ **Dấu hiệu**:

Từ giả thiết các cạnh ta có được $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC$

Nên có nửa hình chữ nhật $ABCE$ nên dựng hình chữ nhật $ABCE$

Ta có chóp $D.ABCE$ có đáy $ABCE$ là hình chữ nhật.

Khi đó $a = d(AB, CD) = d(AB, (CED)) = d(M, (CED))$ (Với M là trung điểm AB)

Từ giả thiết $DA = DB$ ta có được hình chiếu của D trên đáy thuộc mặt phẳng trung trực đoạn AB , mặt phẳng trung trực của AB cũng chính là mặt phẳng trung trực của $CE \Rightarrow DE = DC$.

Gọi N là trung điểm $CD \Rightarrow CE \perp (DMN)$.

Kẻ $MI \perp DN \Rightarrow MI \perp (DCE) \Rightarrow MI = d(M, (DCE)) = a$

Đến đây bài toán được giải quyết.

• **Lời giải.**

$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp AC$. Dựng hình chữ nhật $ABCE$.

Do đó ta có hình chóp $D.ABCE$ đáy hình chữ nhật $ABCE$.

Nên $a = d(AB, CD) = d(AB, (CED))$.

Từ giả thiết $DA = DB$ ta có được hình chiếu H của D trên đáy thuộc mặt phẳng trung trực đoạn AB và đó cũng chính là mặt phẳng trung trực của CE .

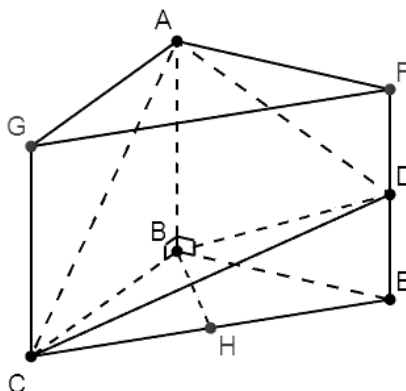
Nên gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CE thì $H \in MN$

$\Rightarrow CE \perp (DMN)$.

Đến đây ta làm như cách 1.

Cách 3.

Phục dựng hình lăng trụ đứng có hai mặt bên chứa hai mặt của tứ diện và một cạnh bên lăng trụ là một cạnh của tứ diện và một đỉnh của tứ diện thuộc một cạnh bên khác.



• **Lời giải**

Từ giả thiết $\Rightarrow AB \perp AC$

Dựng lăng trụ đứng $AGF.BCE$ có 1 cạnh bên là AB và D là trung điểm EF

$$\Rightarrow V_{AGF.BCE} = 3.V_{ABCD}$$

Khi đó, vì $AB \parallel (CEFG) \Rightarrow d(AB, CD) = d(B, CE) = BH = a$ với $H \in CE, BH \perp CE$

$$\text{Ta tính được } BE = a\sqrt{3} = BC \Rightarrow CE = 2\sqrt{2}a \Rightarrow S_{BCE} = \sqrt{2}a^2 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{BCE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$$



★★★★★

NHÓM TOÁN VD – VDC

PHÂN TÍCH VÀ PHÁT TRIỂN CÂU 49

ĐỀ THI THAM KHẢO BGD 4/2020

Ngô Tú Hoa – Dung Ngô – Nguyễn Thị Hồng Gấm

PHÂN TÍCH Ý TƯỞNG CÂU 49 ĐỀ THI THAM KHẢO

Có hai Nội Dung trọng tâm của câu 49 đó là: **Thể tích** và **Góc giữa hai mặt phẳng**I. Phân tích về bài toán thể tích:

Một bài toán thể tích kiểm tra được hai kỹ năng:

- + Thứ nhất là xác định và tính đường cao.
- + Thứ hai là tính diện tích đáy.

Thì trong bài toán này khó khăn đó là *đường cao*: **Phương của đường cao chưa có và giá trị của đường cao được cho ẩn trong giả thiết về góc giữa hai mặt phẳng.**

Khi đó, để giải bài toán này ta có thể dùng hai con đường:

- + Con đường 1 đi tìm và xác định đường cao của chóp đã cho bằng cách chọn ẩn là độ dài đường cao. Tìm ẩn qua giả thiết góc. Đó là cách làm 1 và 2 trong bài.
- + Con đường hai khi xác định góc giữa hai mặt phẳng, ta đã đưa yêu cầu tính thể tích về bài toán tính thể tích của hình để xác định đường cao: Đó là giao tuyến của hai mặt phẳng trong giả thiết góc. Khi đổi đường cao thì ta sẽ định hướng đáy mới theo đường cao này- Đó là cách 5 trong câu 49 này.

II. Phân tích về bài toán góc giữa hai mặt phẳng:

- Trước hết là nhắc lại lý thuyết về góc giữa 2 mặt phẳng phân biệt P và Q cắt nhau: Gọi $\varphi = \angle(P, Q)$, $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$, ta đưa về góc giữa hai đường thẳng a và b như sau:

+ Cách 1: Dùng định nghĩa: $\varphi = \angle(a, b)$ với $a \perp P, b \perp Q$

+ Cách 2: Xác định góc: $\varphi = \angle(a, b)$ với
$$\begin{cases} P \cap Q = d, O \in d \\ O \in a, a \subset P, a \perp d \\ O \in b, b \subset Q, b \perp d \end{cases}$$

+ Cách 3: Phương pháp khoảng cách:

$$\sin \varphi = \frac{d(M, Q)}{d(M, d)} \quad \text{ở đây } P \cap Q = d, M \in P$$

+ Cách 4: Công thức đa giác chiếu: $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$.

Ở đây: S là diện tích đa giác của đa giác H nằm trên P

và S' là diện tích của đa giác chiếu của đa giác H chiếu trên mp Q .

+ Cách 5: Phương pháp diện tích hai mặt: giả sử φ là góc giữa hai mặt ABC và ABD

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABD}}{3AB} \cdot \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{3V_{ABCD} \cdot AB}{2S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABD}}$$

* **Chú ý**: Khi gặp bài góc khó tìm: Ta có thể mở rộng mặt phẳng để góc cần tìm được nhìn thấy rõ ràng hơn, hoặc áp dụng mặt phẳng song song để đưa về góc giữa hai mặt phẳng dễ tìm hơn

• Tiếp theo Bài toán góc giữa hai mặt phẳng luôn là bài toán khó nhất trong các bài toán hình học không gian. Câu 49 trong đề thi tham khảo: Bộ đã đưa ra hai vấn đề khó thường gặp và kiểm tra kiến thức cơ bản về góc

+ **Khó thứ nhất** là cái khó chung của bài toán hình học không gian, là hình trong bài không có đường cao cho trước.

+ **Khó thứ hai** là cái khó riêng của bài toán góc giữa hai mặt phẳng. Ở đây câu 49 này còn kết hợp hết cái khó của bài toán góc: Cho góc giữa hai mặt bên vào giả thiết. Muốn giải quyết được bài toán này phải khai thác được giả thiết góc.

Tuy nhiên đây đã là bài toán quen, ý tưởng không có gì mới.

Nên chúng ta chỉ cần lần lượt giải quyết hai vấn đề trên. Và nắm vững cách xác định góc cơ bản.

Giải quyết vấn đề 1:

Tìm đường cao của hình: học sinh phải tìm đường cao bằng cách suy ra từ các quan hệ vuông góc giữa đường với đường để chứng minh được đường vuông góc với mặt, hay phục dựng hình ẩn để xác định đường cao.

Giải quyết vấn đề 2:

- Để khai thác được giả thiết góc ta thường làm:

+ Xác định được góc. Trong quá trình xác định góc phải tránh bẫy khi đưa về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau nó là góc không tù.

+ Cần chọn ẩn (Là chiều cao hay cạnh đáy nếu giả thiết chưa có) sau đó sử dụng giả thiết góc để tìm ẩn.

- Và có thể sử dụng nhiều phương pháp khác ngoài hai cách truyền thống để tính góc giữa hai mặt phẳng

- **Ta đi chứng minh 1 công thức tính nhanh sau**:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $SA = h, AB = a, AD = b$.

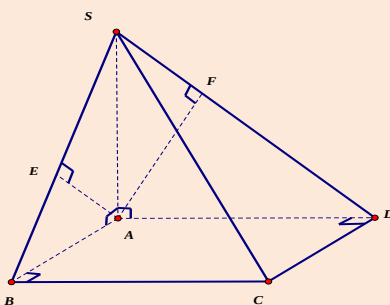
Gọi $\angle SBC = \angle SDC = \alpha$.

$$\text{Khi đó: } \cos \alpha = \frac{AB}{SB} \cdot \frac{AD}{SD} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \quad 1$$

$$\text{Đặc biệt khi } ABCD \text{ là hình vuông thì } \cos \alpha = \frac{a^2}{h^2 + a^2} \quad 2$$

Thật vậy :

Cách 1:



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD ,

khi đó ta có $AE \perp (SBC)$ và $AF \perp (SDC)$,

do đó $((SBC), (SDC)) = (AE, AF) = \alpha$.

$$\text{Khi đó } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}|}{AE \cdot AF} \quad (3).$$

$$\text{Ta có } AE = \frac{AB \cdot SA}{SB} \quad (*) \text{ và } SE = \frac{SA^2}{SB}$$

$$\text{suy ra } \overrightarrow{SE} = \frac{SA^2}{SB^2} \overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{SA^2}{SB^2} \overrightarrow{AB} + \frac{AB^2}{SB^2} \overrightarrow{AS}$$

$$\text{Tương tự, } AF = \frac{AD \cdot SA}{SD} \quad (**), \quad SF = \frac{SA^2}{SD}$$

$$\text{suy ra } \overrightarrow{SF} = \frac{SA^2}{SD^2} \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{SA^2}{SD^2} \overrightarrow{AD} + \frac{AD^2}{SD^2} \overrightarrow{AS}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{AB^2 \cdot AD^2}{SB^2 \cdot SD^2} \cdot AS^2 \quad (***)$$

Thay $(*)$, $(**)$, $(***)$ vào (3) ta được công thức (1) .

Cho $a = b$ ta được (2) .

Cách 2:

Gọi K là hình chiếu của D lên SC , khi đó

$$\sin \alpha = \frac{d(D, (SBC))}{DK} = \frac{d(A, (SBC))}{DK} = \frac{AE}{DK} = \frac{AS \cdot AB}{SB} \cdot \frac{SC}{SD \cdot DC} = \frac{AS \cdot SC}{SB \cdot SD}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1 - \frac{AS^2 \cdot SC^2}{SB^2 \cdot SD^2}} = \sqrt{\frac{SB^2 \cdot SD^2 - SA^2 (SA^2 + AB^2 + AD^2)}{SB^2 \cdot SD^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(SA^2 + AB^2) \cdot (SA^2 + AD^2) - SA^2 (SA^2 + AB^2 + AD^2)}{SB^2 \cdot SD^2}} = \frac{AD \cdot AB}{SD \cdot SB} \end{aligned}$$

Cách 3: PP Toạ độ hoá

LỜI GIẢI CÂU 49 ĐỀ THI THAM KHẢO NĂM HỌC 2019-2020

Câu 49: [ĐỀ THI THAM KHẢO - 2020] Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $SBA = SCA = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3 .

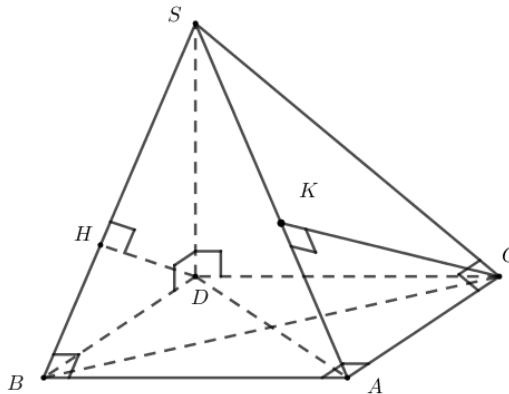
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}$.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD$.

Tương tự, ta có $AC \perp CD \Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a . Đặt $SD = x, x > 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên $SB \Rightarrow DH = \frac{DB \cdot DS}{\sqrt{DB^2 + DS^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $\begin{cases} DH \perp SB \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB) \Rightarrow d(D, (SAB)) = DH = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Lại có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DH$.

ΔSCA vuông tại C , có $AC = a, SC = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Kẻ $CK \perp SA \Rightarrow CK = \frac{CA \cdot CS}{\sqrt{CA^2 + CS^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}$.

Vì $(SAB) \cap (SAC) = SA \Rightarrow \sin((SAB), (SAC)) = \frac{d(C, (SAB))}{d(C, SA)} = \frac{DH}{CK}$

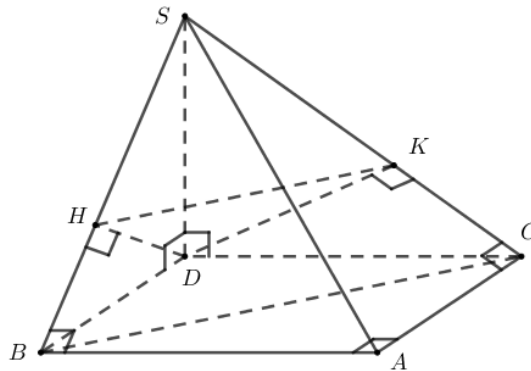
$$\Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{x^2+2a^2}}{x^2+a^2} \Leftrightarrow 3(x^2+a^2)^2 = 4x^2(x^2+2a^2) \Rightarrow x = a.$$

$$\Rightarrow DH = a. \text{ Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}.$$

Bình Luận cách 1:

Đây là cách truyền thống cả trong bài tính thể tích và một phương pháp thường gặp trong bài toán góc giữa hai mặt bên: Đó là sử dụng khoảng cách trong bài toán góc giữa hai mặt phẳng.

Cách 2:



Dựng hình vuông $ABDC \Rightarrow SD \perp (ABCD).$

Đặt $SD = x, x > 0.$

$$\text{Kẻ } DH \perp SB, (H \in SB) \Rightarrow DH \perp (SAB) \text{ và } DH = \frac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

$$\text{Kẻ } DK \perp SC, (K \in SC) \Rightarrow DK \perp (SAC) \text{ và } DK = \frac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

Ta có

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SC} = \frac{SD^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2} \Rightarrow HK \parallel BD \Rightarrow HK = \frac{x^2}{x^2+a^2} BD = \frac{x^2}{x^2+a^2} \cdot a\sqrt{2}.$$

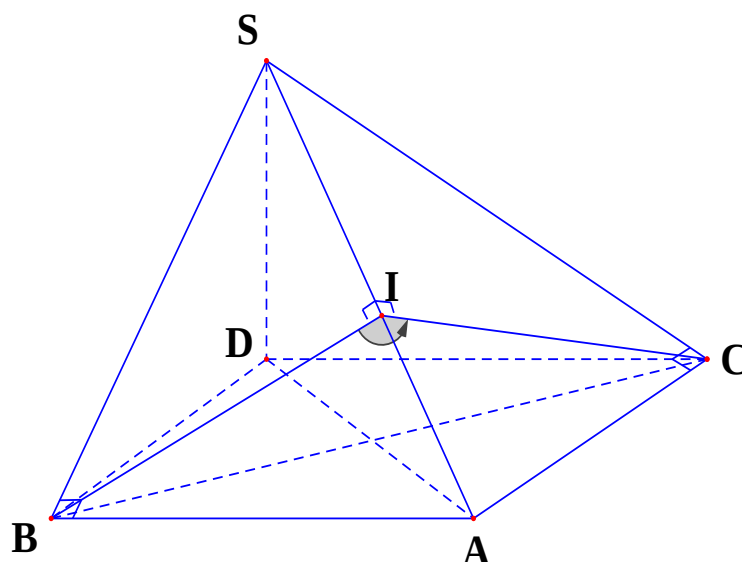
$$\text{Ta có } \cos \angle SAB, \angle SAC = |\cos \angle HDK| = \left| \frac{DH^2 + DK^2 - HK^2}{2DH \cdot DK} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left| \frac{\frac{2x^2a^2}{x^2+a^2} - \frac{2a^2x^4}{(x^2+a^2)^2}}{\frac{2x^2a^2}{x^2+a^2}} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left| \frac{a^2}{x^2+a^2} \right| \Leftrightarrow x = a. \Rightarrow SD = a.$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{a^2}{2}. \text{ Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}.$$

Bình Luận cách 2:

Đây là cách truyền thống cả trong bài tính thể tích và một phương pháp thường gặp trong bài toán góc giữa hai mặt bên: Đó là tìm được hai đường mỗi đường vuông góc với một mặt. (PP dùng định nghĩa)

Cách 3:

Ta có hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau và chung cạnh huyền SA .

Kẻ $BI \perp (SA) \Rightarrow CI \perp (SA)$

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc giữa hai đường thẳng BI và $CI \Rightarrow (BI; CI) = 60^\circ$.

Có $BC = a\sqrt{2}$, $\triangle BIC$ cân tại I .

Do $BI = CI < AC = a < a\sqrt{2} = BC$ nên $\triangle BIC$ không đều

$$\Rightarrow BIC = 120^\circ \Rightarrow BI = CI = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Từ đó } AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AB^2 = AI \cdot SA \Rightarrow SA = a\sqrt{3}.$$

Dựng hình vuông $ABDC \Rightarrow SD \perp (ABDC)$.

$$\text{Có : } SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = a; S_{\triangle ABC} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}.$$

Bình Luận cách 3:

Đây là cách truyền thống cả trong bài tính thể tích và xác định góc : Một cách cơ bản của bài toán góc. Khi vai trò đối xứng giữa hai tam giác trong hai mặt của góc tạo thành. Và khi bỏ vai trò này cách tính toán sẽ khó khăn hơn nhiều sau khi đã dựng được góc.

Cách 4 trắc nghiệm: CÔNG THỨC TÍNH NHANH :

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD.$$

Tương tự, ta có $AC \perp CD \Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a .

Đặt $SD = h, h > 0$.

$$\cos \alpha = \frac{a^2}{h^2 + a^2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{h^2 + a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = a \Rightarrow SD = a$$

$$\text{Từ đây tiếp tục tính thể tích } \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3}{6}$$

Bình Luận cách 4:

Đây là Công thức tính nhanh rất hữu hiệu, nhưng lại đòi hỏi giả thiết đủ điều kiện để thực hiện công thức. Nên khi thay đổi đây thì công thức khó sử dụng.

Cách 5:

Sau khi đã tính được SA ta có thể tính thể tích tứ diện một cách ngắn gọn.

$$\Rightarrow BIC = 120^\circ \Rightarrow BI = CI = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Từ đó } AI = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$AB^2 = AI \cdot SA \Rightarrow SA = a\sqrt{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta IBC} \cdot (SI + AI) = \frac{1}{3} S_{\Delta IBC} \cdot SA.$$

$$\text{Với } S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2} \cdot IB \cdot IC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{6}.$$

Bình Luận cách 5:

Đây là ý tưởng đặc sắc trong bài toán thể tích: Đó là chọn đường cao và đáy phù hợp xác định và tính toán được.

Cách 6:

Sau khi đã tính được

$$\Rightarrow BIC = 120^\circ \Rightarrow BI = CI = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Từ đó } AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AB^2 = AI \cdot SA \Rightarrow SA = a\sqrt{3}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3} \frac{S_{SAC} \cdot S_{SAB}}{SA} \cdot \sin \alpha = \frac{2}{3SA} \left(\frac{1}{2} CI \cdot SA \right)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6a^2}{9} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{6}$$

Bình Luận cách 6:

Đây là một công thức tính nhanh cho bài toán thể tích khi cho góc.

Phát triển 1:

Phát triển đáy từ tam giác vuông cân thành tam giác vuông không cân. Sử dụng CT khoảng cách để tính góc – Ngoài ra áp dụng CT tính nhanh.

Câu 1: [PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO] Cho hình chóp S.ABC, có $SAB = ABC = SCB = 90^\circ$, $AB = \sqrt{10}a$, $BC = \sqrt{3}a$ và góc giữa hai mặt phẳng SAB và SBC bằng 45° . Tính thể tích khối chóp S.ABC.

A. $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

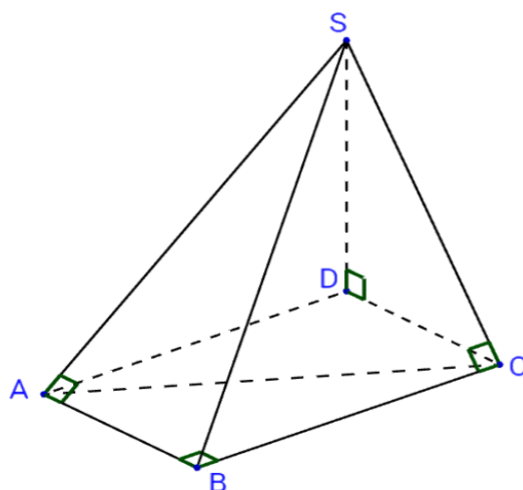
B. $\frac{2\sqrt{15}a^3}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{15}a^3}{6}$.

D. $P = \frac{\sqrt{15}a^3}{2}$.

Tác giả: Dung Ngô – Phân biện: Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải.



Chọn A

Gọi góc cần tìm là $\alpha = \angle SAB, \angle SBC$. Ta sẽ phục dựng hình ảnh là chóp $S.ABCD$:

Giả sử gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) .

Ta có $\left. \begin{matrix} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{matrix} \right\} AB \perp AD$. Tương tự, ta có $BC \perp CD \Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Nên $S.ABCD$ là hình chóp có $SD \perp ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Đặt $SD = h, h > 0$. Coi $a = 1$ để tiện tính toán.

Cách 1: Áp dụng phương pháp khoảng cách để tính góc:

$$\sin \alpha = \frac{d(A, SBC)}{d(A, SB)} = \frac{d(D, SBC)}{d(A, SB)} \Leftrightarrow \frac{d(D, SBC)}{d(A, SB)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có: } d(D, SBC) = \frac{SD \cdot CD}{\sqrt{SD^2 + CD^2}} = \frac{\sqrt{10}h}{\sqrt{h^2 + 10}} = \sqrt{\frac{10h^2}{h^2 + 10}}$$

$$d(A, SB) = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{\sqrt{h^2 + 3} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{h^2 + 3 + 10}} = \sqrt{\frac{10(h^2 + 3)}{h^2 + 13}}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{h^2 + 3} \cdot \frac{h^2 + 13}{h^2 + 10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h^4 + 13h^2 - 30 = 0 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$

Ta được $SD = \sqrt{2}a$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}a^3 = \frac{\sqrt{15}a^3}{3}$$

Cách 2: Chứng minh CT tính nhanh. Áp dụng vào bài, ta có:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 3}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{h^2 + 10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h^4 + 13h^2 - 30 = 0.$$

Kết quả tính toán như trên.

Bình Luận: Rõ ràng CT tính nhanh giúp giải trắc nghiệm rất hiệu quả.

Phát triển 2 :

Phát triển đáy thành hình thang cân.

Phục dựng hình ẩn, Đưa về bài toán gốc – áp dụng CT tính nhanh.

Câu 2: **[PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang cân có $BC \parallel AD$, $BC = 2AD = 2a$, $AB = CD = \frac{\sqrt{2}a}{2}$. Biết $SBA = SCD = 90^\circ$, và góc giữa hai mặt phẳng SAB và SCD bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

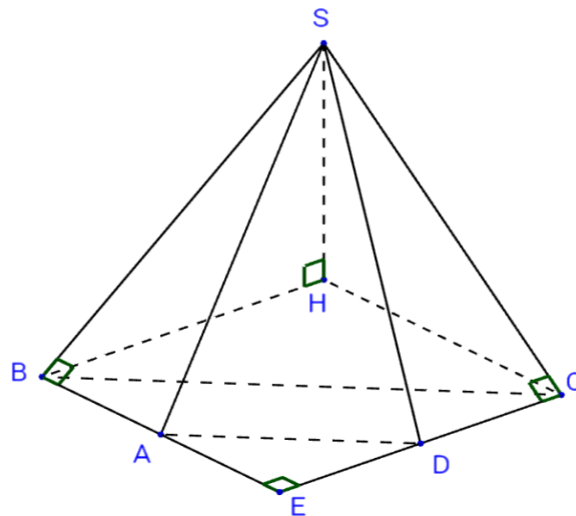
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Tác giả : Dung Ngô – Phân biện : Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải



Chọn D

Gọi $\alpha = \angle SAB, \angle SBC$

Gọi $E = AB \cap CD \Rightarrow BE = CE = a\sqrt{2} \Rightarrow BE^2 + CE^2 = BC^2 \Rightarrow \triangle BEC$ vuông cân đỉnh E .
 $\Rightarrow \alpha = \angle SBE, \angle SCE$. Ta đưa về bài toán gốc.

Gọi H là hình chiếu của S trên $ABCD$, thì $\left. \begin{matrix} EB \perp SB \\ EB \perp SH \end{matrix} \right\} \Rightarrow EB \perp BH$.

Tương tự $EC \perp CH$. Từ đây ta suy ra tứ giác $HBEC$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$.
 Gọi $SH = h, h > 0$. Áp dụng công thức tính nhanh :

$$\frac{a\sqrt{2}^2}{h^2 + a\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^2 = 2a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{2}.$$

$$S_{ABCD} = 3S_{AED} = \frac{3}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

Phát triển 3 :

Phát triển hình đáy là nửa lục giác đều :

- Phục dựng hình ẩn để xác định đường cao
- Áp dụng CT tính nhanh để tìm đường cao .

Câu 3: [PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $AB // CD$, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$. Biết $SAD = SBD = 90^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng SAD và SBD bằng α , sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

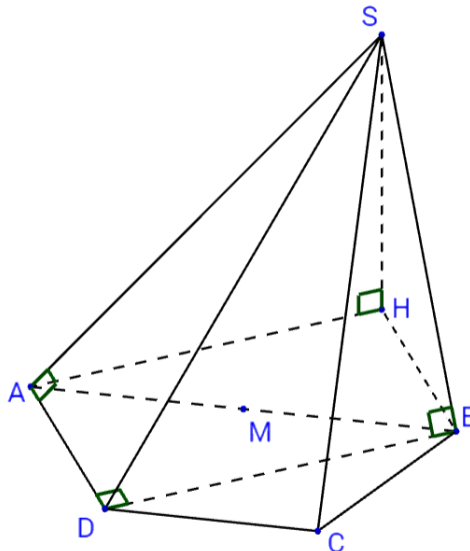
B. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{12}$.

Tác giả: Dung Ngô – Phản biện : Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải.



Chọn B

Gọi M là trung điểm AB , Ta có $MA = MB = MC = MD = a$

Suy ra tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm M , đường kính AB .

Suy ra tam giác ABD vuông tại D . Đưa về bài toán có thể sử dụng công thức tính nhanh.

Gọi H là hình chiếu của S trên $ABCD$ thì $\left. \begin{array}{l} BD \perp SB \\ BD \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BD \perp SAH \Rightarrow BD \perp BH$.

Nên $ADBH$ là hình chữ nhật và H là điểm đối xứng với D qua M .

Ta có $HB = AD = a$; $HA = BD = \sqrt{2a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Gọi $SH = h$. Cho $a = 1$. Áp dụng công thức tính nhanh ta có :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow h^4 + 4h^2 - 12 = 0 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{2}a$$

$$\text{Và tam giác } AMD \text{ đều cạnh } a \Rightarrow S_{ABCD} = 3S_{AMD} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{4}$$

Phát triển 4* - VDC :

Phát triển cả hai ý tưởng :

Phục dựng hình ẩn tìm đường cao

Xác định góc trong giả thiết. Dùng tính chất đối xứng của điểm

Câu 4: [PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO - VDC - Ngô Tú Hoa] Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BD = DA = 2a$, $BC = \sqrt{3}a$, $AC = \sqrt{7}a$. Gọi M là trung điểm AB . N là điểm đối xứng với M qua trung điểm của cạnh AC , biết góc giữa hai mặt phẳng DMN và DBN bằng 60° , tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

B. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{9}$.

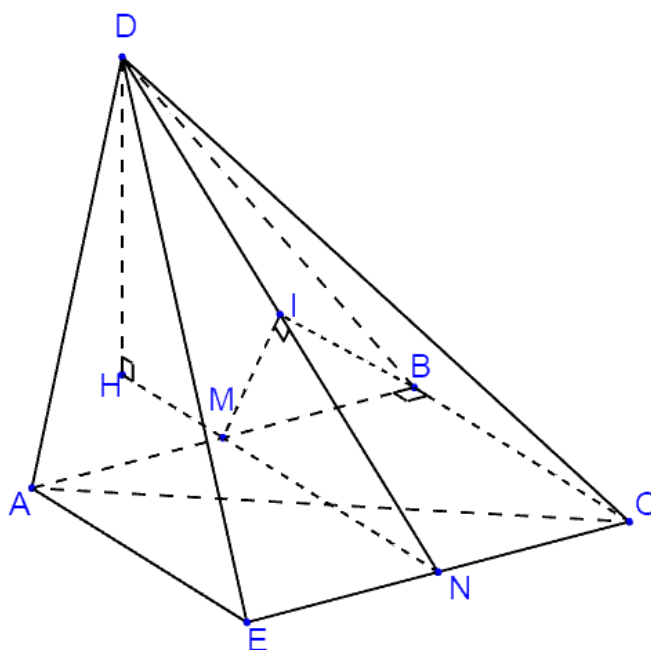
C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Tác giả : Ngô Tú Hoa – Phản biện : Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải

Chọn B.



Cách 1 :

Gọi góc giữa hai mặt phẳng DMN và DBN là $\alpha \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC$. $MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp AB$

Phục dựng hình chóp $D.ABCE$ như sau :

Dựng hình chữ nhật $ABCE$.

Do đó ta có hình chóp $D.ABCE$ đáy hình chữ nhật $ABCE$.

Từ giả thiết $DA = DB$ ta có được hình chiếu H của D trên đáy thuộc mặt phẳng trung trực đoạn AB và đó cũng chính là mặt phẳng trung trực của CE .

Nên $H \in MN$ và $MN \perp AB \Rightarrow DN \perp AB$.

Tính được $DM = \sqrt{DA^2 - MA^2} = a\sqrt{3} = BC = MN$.

Nên tam giác DMN cân đỉnh M ,

Gọi I là trung điểm $DN \Rightarrow MI \perp DN$ và do $BM \perp DMN$

$\Rightarrow DN \perp IB$.

$\alpha = \angle IM, IB = \angle MIB \Rightarrow \angle MIB = 60^\circ$ (Do tam giác IMB vuông tại M).

$$\Rightarrow MI = MA \cdot \cot 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow DI = \sqrt{DM^2 - MI^2} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}.$$

$$V_{D.ABC} = V_{D.ABN} = 2V_{D.AMN} = 4V_{D.AMI} = \frac{4}{3} \cdot DI \cdot S_{AMI} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} a^3 = \frac{4\sqrt{2}a^3}{9}.$$

Bình luận :

Phục dựng hình ảnh. Tìm mặt phẳng chứa đường cao, xác định góc để sử dụng giả thiết góc giữa hai mặt phẳng. Qua phương pháp xác định góc chuyển về chóp có đường cao và diện tích tìm được. hoàn thành bài toán tính thể tích khối chóp.

Cách 2 :

Từ giả thiết $DA = DB$ ta có được hình chiếu H của D trên đáy thuộc mặt phẳng trung trực đoạn AB .

Ta có $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow MN \perp AB$ Hay $BM \perp MN$.

Do M là trung điểm AB . N là điểm đối xứng với M qua trung điểm của cạnh AC nên $AB \perp DMN \Rightarrow BM \perp DMN$.

Tính được $DM = \sqrt{DA^2 - MA^2} = a\sqrt{3} = BC = MN$.

Nên tam giác DMN cân đỉnh M ,

Gọi I là trung điểm DN

$\Rightarrow MI \perp DN$ và do $BM \perp DMN \Rightarrow DN \perp IB$.

$\alpha = \angle IM, IB = \angle MIB \Rightarrow \angle MIB = 60^\circ$ (Do tam giác IMB vuông tại M).

$$\Rightarrow MI = MA \cdot \cot 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow DI = \sqrt{DM^2 - MI^2} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

$$S_{DMN} = 2S_{DMI} = MI \cdot DI = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}a^2}{3}.$$

Do $S_{\triangle ABC} = S_{\square BMNC}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = V_{D.ABC} = V_{D.BMNC} = 2V_{D.BMN} = 2V_{B.DMN} = \frac{2}{3} BM \cdot S_{DMN} = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{2\sqrt{2}a^2}{3} = \frac{4\sqrt{2}a^3}{9}.$$

Bình luận :

Từ giả thiết quy hình đã cho về chóp có đường cao, để dựng góc của giả thiết.

Phát triển 5* :

Phát triển thành bài toán tính thể tích khối lăng trụ chưa có đường cao
và giả thiết là góc giữa hai mặt bên.

Rèn kỹ năng tìm góc và tính thể tích lăng trụ theo khối tứ diện nằm trong
lăng trụ.

Câu 5: [PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO - VDC - Ngô Tú Hoa] Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi, biết $A'AC = 60^\circ$ và góc giữa hai mặt phẳng $A'ACC'$ và $A'BC'$ bằng 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$.

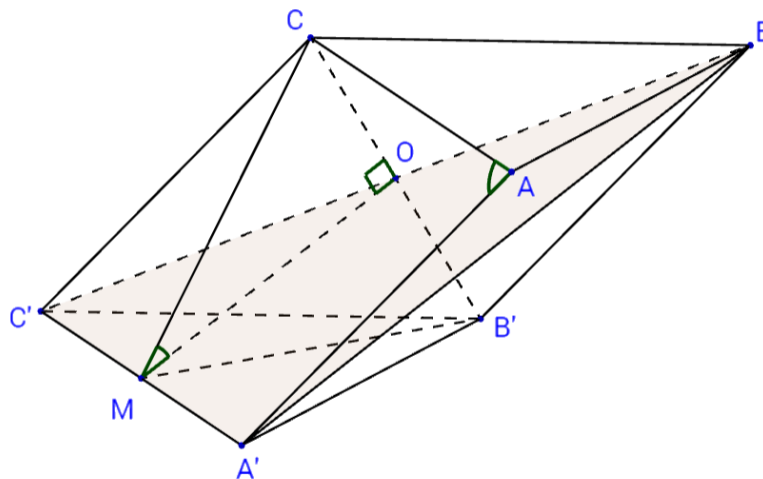
B. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

D. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Tác giả : Ngô Tú Hoa – Phản biện : Nguyễn Thị Hồng Gấm

Lời giải



Chọn A

Do đáy lăng trụ là tam giác đều, một mặt bên là hình thoi nên tất cả các mặt của lăng trụ đều là hình thoi. Do $A'AC = 60^\circ \Rightarrow A'C'C = 60^\circ$ nên $\triangle A'CC'$ đều. Gọi M là trung điểm $A'C'$.

Thì ta có :

$$\left. \begin{array}{l} A'C' \perp CM \\ A'C' \perp B'M \end{array} \right\} \Rightarrow A'C' \perp B'MC.$$

Gọi $\alpha = \angle A'BC'$, $\angle A'ACC'$. Gọi $O = B'C \cap BC' \Rightarrow OM \subset A'BC'$, $OM \perp A'C'$.

Rõ ràng $A'C' = A'BC' \cap A'ACC'$

$$\Rightarrow \alpha = \angle MO, MC \Rightarrow \begin{cases} \angle OMC = 30^\circ \\ \angle OMC = 150^\circ \end{cases}$$

$$\text{Do } B'M = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \triangle B'MC$ là tam giác cân đỉnh $M \Rightarrow MOC = 90^\circ \Rightarrow OMC = 30^\circ$.

$$\Rightarrow OM = MC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B'C = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \triangle B'MC \text{ đều có diện tích } S_{\triangle B'MC} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{16}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{C.A'B'C'} = A'C' \cdot S_{\triangle B'MC} = \frac{a \cdot 3\sqrt{3}a^2}{16} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$$

Phát triển 6 :

Phát triển góc : Giả thiết là cho góc giữa hai mặt bên không bằng nhau cùng tạo với đáy một góc, kết luận tìm góc giữa hai mặt bên

Câu 6: [PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO – Chuyên KHTN Lần 2] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$; $AC = 2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Tính $\tan \alpha$.

A. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

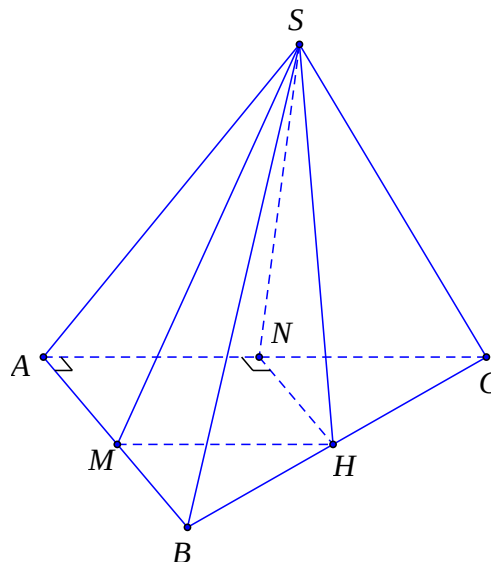
B. $\frac{\sqrt{51}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$.

D. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $SH \perp BC$ tại H .

TH1: H nằm giữa B, C

Vì mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HM \perp AB$ tại M ; $HN \perp AC$ tại N .

Khi đó tứ giác $AMHN$ là hình vuông và $\angle SAB, \angle ABC = \angle SMH = 60^\circ$;

$\angle SAC, \angle ABC = \angle SNH = 60^\circ$. Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$).

$$\text{Vì } MH \parallel AC \text{ nên } \frac{x}{2a} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow x = \frac{2a}{3}.$$

$$\Rightarrow SH = \tan 60^\circ \cdot HM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}. SM = \frac{4a}{3}, SB = \frac{\sqrt{17}a}{3}$$

Cách 1: Phương pháp khoảng cách

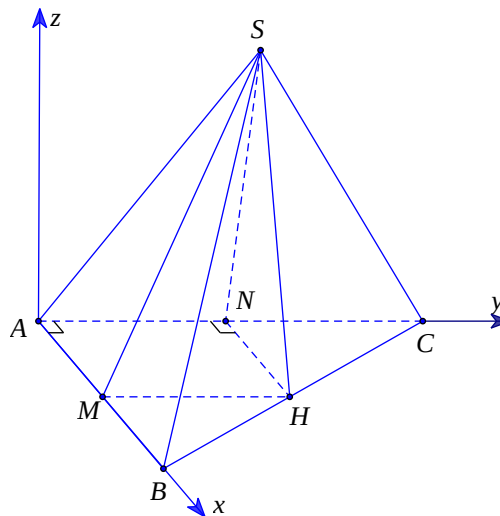
$$d(A, SBC) = \frac{SH \cdot S_{ABC}}{S_{SBC}} = \frac{SH \cdot AB \cdot AC}{SH \cdot BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$$

$$d(A, SB) = \frac{SM \cdot AB}{SB} = \frac{SM \cdot AB}{\sqrt{SM^2 + MB^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}a$$

$$\sin \alpha = \frac{d(A, SBC)}{d(A, SB)} = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

Cách 2: Tọa độ hóa

Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc tọa độ $O \equiv A$ như hình vẽ.



Chọn $a = 1$.

$$\text{Khi đó } A(0;0;0); B(1;0;0); C(0;2;0); H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right); S\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ cùng phương với vector } \vec{u} = (1; 1; \sqrt{3})$$

$$\text{Vector pháp tuyến của } (SAB) \text{ là } \vec{n}_1 = [\vec{i}, \vec{u}] = (0; -\sqrt{3}; 1).$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1; 2; 0); \overrightarrow{BS} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ cùng phương với vector } \vec{v} = (-1; 2; 2\sqrt{3}).$$

$$\text{Vector pháp tuyến của } (SBC) \text{ là } \vec{n}_2 = [\overrightarrow{BC}, \vec{v}] = (4\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; 0).$$

$$\cos \alpha = \cos((SAB); (SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|-6|}{2 \cdot \sqrt{60}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{85}}{10} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

Cách 3: Phương pháp thể tích

N
H
Ó
M
T
O
Á
N
V
D
-

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = \frac{2\sqrt{3}}{9} a^3.$$

$$S_{SBC} = \frac{1}{2} SH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}a}{3} \cdot a\sqrt{5} = \frac{\sqrt{15}}{3} a^2. S_{SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdot a = \frac{2}{3} a^2.$$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(SBC), (SAB)$.

$$\text{Từ công thức } V_{SABC} = \frac{2S_{SBC} \cdot S_{SAB} \cdot \sin \alpha}{3 \cdot SB} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{17}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}. \text{ Vậy } \tan \alpha = \frac{\sqrt{51}}{3}.$$

TH2: H nằm ngoài B, C (làm tương tự trên, yếu tố thay đổi, đáp số không đổi)

Phát triển 7 :

Phát triển góc trong bài toán cực trị

Câu 7: [PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO – Phát triển Chuyên TN] Cho Cho hình chóp $S.ABCD$ đều cạnh a , chiều cao b thỏa mãn $6a + b = 9$. Biết O là tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$. Khi thể tích khối chóp lớn nhất thì $\cos((OAB), (OBC))$ bằng bao nhiêu?

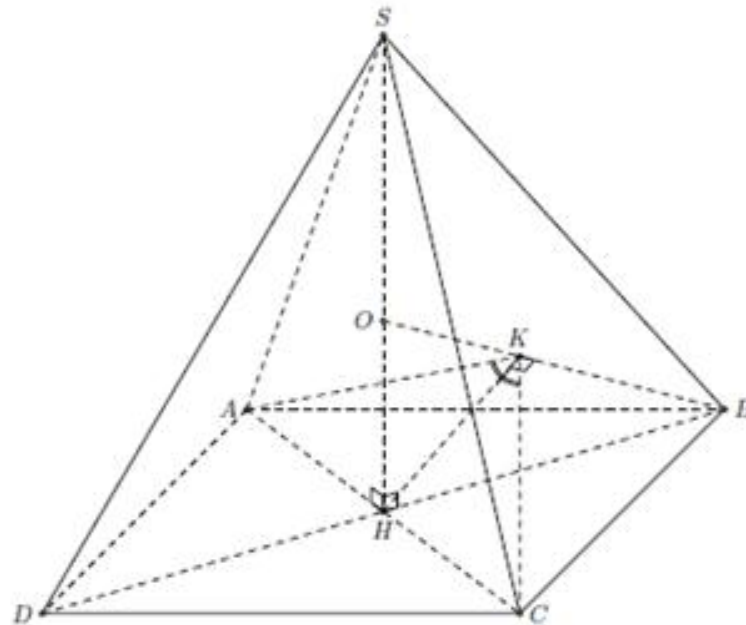
A. $\frac{36}{325}$

B. $-\frac{36}{325}$

C. $\frac{72}{325}$

D. $-\frac{72}{325}$

Lời giải



$$\text{Ta có thể tích khối chóp } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot (9 - 6a) = -2a^3 + 3a^2 \text{ với } a \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Từ đây ta tìm được } AB = 1, SH = 3, SB = \frac{\sqrt{38}}{2}. \text{ Từ đó tính được } SO = R = \frac{SB^2}{2SH} = \frac{19}{12}.$$

Từ H kẻ $HK \perp OB$ tại K

suy ra góc giữa hai mặt phẳng (OAB) với mặt phẳng (OBC) là góc KA, KC .

$$\text{Ta có } HK = \frac{17\sqrt{2}}{38}, KA = KC = \frac{5\sqrt{13}}{19},$$

$$\Rightarrow \cos AKC = -\frac{36}{325} \Rightarrow \cos((OAB), (OBC)) = \frac{36}{325}.$$

Phát triển 8 :

Bài toán góc hay trong đề thi ĐH - 2003 Đề thi tham khảo

Đề ĐH - 2003 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $BA'C$ và $DA'C$.

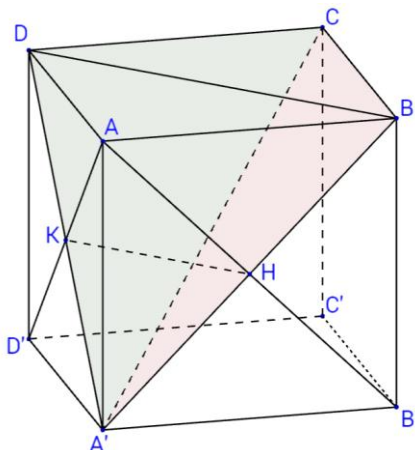
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải



Chọn A

Gọi $\varphi = \angle BA'C, \angle DA'C$. Gọi cạnh hình lập phương bằng a

Gọi $H = A'B \cap AB' \Rightarrow H$ là trung điểm $A'B$. ta có $\left. \begin{matrix} AH \perp A'B \\ AH \perp A'B \end{matrix} \right\} \Rightarrow AH \perp BA'C$.

Tương tự $K = A'D \cap AD' \Rightarrow AK \perp DA'C \Rightarrow \varphi = \angle AH, AK$.

$$\text{Do } HK = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ và } AH = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

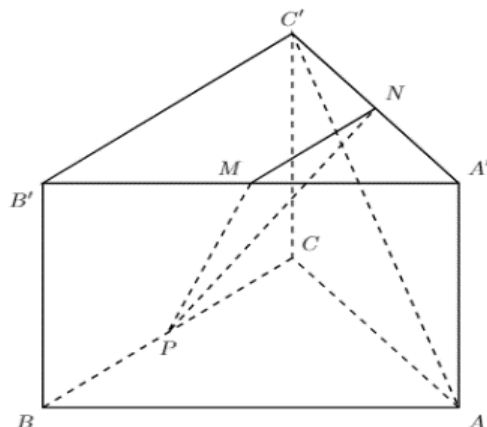
$$\Rightarrow \triangle AHK \text{ đều} \Rightarrow \angle AH, AK = \angle AHK = 60^\circ \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Bình luận : Đây là bài toán góc cổ điển và mang đủ độ khó của bài toán góc. Và để có thể kết thúc nhanh gọn ta cần có cái nhìn quen thuộc về hình lập phương. Có rất nhiều cách giải khác nhau, nhưng nhanh gọn nhất là sự kết hợp bài toán góc tính bằng định nghĩa, được sử dụng nhuần nhuyễn trong hình lập phương.

Phát triển 9 :

Bài toán góc hay trong Đề thi tham khảo – 2018 của BGD

[ĐỀ THI THAM KHẢO 2017-2018] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên).



Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

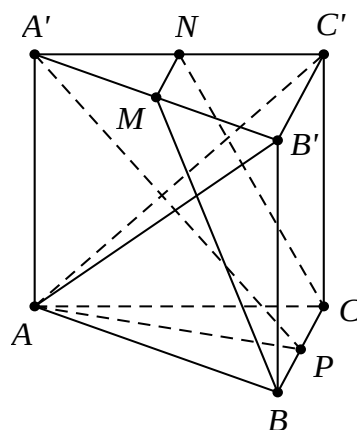
B. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải.

Chọn B



$$\begin{aligned} &\text{Để thấy } AB'C' ; MNP = AB'C' ; MNCB \\ &= 180^\circ - AB'C' ; A'B'C' - MNBC ; A'B'C' \\ &= 180^\circ - A'BC ; ABC - MNBC ; ABC . \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } A'BC ; ABC = A'P; AP = A'PA = \arctan \frac{2}{3}.$$

$$\text{Và } MNBC ; ABC = SP; AP = SPA = \arctan \frac{4}{3}, \text{ với } S \text{ là điểm đối xứng với } A \text{ qua } A', \text{ thì } SA = 2AA' = 4.$$

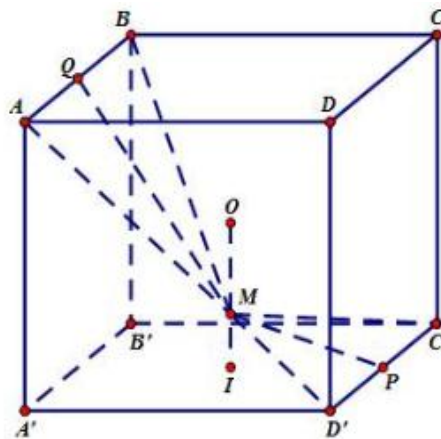
$$\text{Suy ra } \cos \angle AB'C' ; MNP = \cos \left(180^\circ - \arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{4}{3} \right) = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Bình luận : Vẫn là bài toán giả thiết có đường cao và yêu cầu tính góc, nhưng cách hỏi góc đòi hỏi người làm toán phải biết **mở rộng mặt phẳng để góc cần tìm được nhìn thấy rõ ràng hơn**. Mặt khác bám vào tính chất đặc trưng của lăng trụ tam giác đều, kết hợp kiến thức cơ bản về góc rất sâu thì mới giải quyết được nhanh bài toán này.

Phát triển 10 :

Bài toán góc trong Đề thi THPTQG – 2018 của BGD

Câu 37: [Mã 101- THPTQG-2018] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng



A. $\frac{6\sqrt{85}}{85}$.

B. $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các cạnh của hình lập phương bằng 6.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $D'C'$ và AB . Khi đó ta có

$$MP = \sqrt{IM^2 + IP^2} = \sqrt{10}, MQ = \sqrt{34}, PQ = 6\sqrt{2}.$$

Áp dụng định lý côsin ta được

$$\cos \angle PMQ = \frac{MP^2 + MQ^2 - PQ^2}{2MP \cdot MQ} = \frac{-14}{\sqrt{340}}.$$

Góc α là góc giữa hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) ta có

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{340}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}$$

Bình luận : Gắn kết quan hệ : Từ đề tham khảo đến đề thật : Ta thấy con đường và ý tưởng vẫn vậy, nhưng góc thì lạ hơn rất nhiều. Rõ ràng vẫn là phải hiểu rất sâu về hình lập phương : Bản chất vẫn là lăng trụ đều – nghĩa là bài toán có đường cao, có chút đặc biệt là các cạnh bằng nhau, dẫn đến lời giải ngắn gọn súc tích. Và một lần nữa lại khẳng định : nắm vững kiến thức cơ sở của bài toán góc thì học sinh mới có thể giải nổi bài toán lạ nhưng rất quen này.