SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019

Môn: TOÁN
Ngày thi thứ nhất: 14/9/2018
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề
Đề thi có 01 trang

Bài 1 (*5,0 điểm*).
Cho dãy số thực $(a_n)_{n\geq 1}$ xác định bởi: $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$ và

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 7}{a_n}$$

với mọi số nguyên dương n.

a) Chứng minh rằng a_n là số nguyên, với mọi số nguyên dương n.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{2n+2}a_{2n} + a_{2n+1}^2}{a_{2n}a_{2n+1}}$.

Bài 2 (*5,0 điểm*).
Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AD, CF với (I). Chứng minh rằng

$$\frac{MN.FD}{MF.ND} = 3.$$

Bài 3 (*5,0 điểm*).
Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) - y^2\right) = f\left(x^2\right) + y^2 f(y) - 2f(xy), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 4 (*5,0 điểm*).

Một bảng ô vuông $ABCD$ kích thước 2018×2018 gồm 2018^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được điền bởi một trong ba số $-1, 0, 1$. Một cách điền số được gọi là *đối xứng* nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được điền số -1 và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số 0 hoặc 1. Chứng minh rằng với một cách điền số *đối xứng* bất kì, luôn tồn tại hai hàng có các số trong mỗi ô vuông đơn vị lần lượt theo thứ tự từ trái sang phải là $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ ở hàng thứ nhất, $b_1, b_2, \ldots, b_{2018}$ ở hàng thứ hai sao cho $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_{2018}b_{2018}$ là một số chẵn.

--------HẾT---------

- *Họ và tên thí sinh: .... SBD: ....*
- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN-THANG ĐIỂM
ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2018 - 2019

Môn: TOÁN

Ngày thi thứ nhất: **14/9/2018**

*(Đáp án-thang điểm gồm **05** trang)*

I. Một số chú ý khi chấm bài

• Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp lô-gic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
• Thí sinh làm bài cách khác với Đáp án mà đúng thì Tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của Đáp án.
• **Điểm bài thi** là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án-thang điểm

Bài 1 (*5,0* điểm). Cho dãy số thực $(a_n)_{n\ge 1}$ xác định bởi: $a_1=a_2=1, a_3=2$ và

$$a_{n+3}=\frac{a_{n+1}a_{n+2}+7}{a_n}$$

với mọi n nguyên dương.

c) Chứng minh rằng a_n là số nguyên, với mọi n nguyên dương.

d) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{2n+2}a_{2n}+a_{2n+1}^2}{a_{2n}.a_{2n+1}}$.

Đáp án	Điểm
a) Từ hệ thức xác định dãy (a_n), dễ dàng chỉ ra được $a_4=9, a_n>0,\forall n$ và $a_{n+3}a_n=a_{n+1}a_{n+2}+7,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $a_{n+4}a_{n+1}=a_{n+2}a_{n+3}+7,\forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,5
Do đó, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $a_{n+4}a_{n+1}-a_{n+3}a_n=a_{n+2}a_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}\Rightarrow(a_{n+4}+a_{n+2})a_{n+1}=(a_{n+2}+a_n)a_{n+3},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó, do $a_n>0,\forall n$, ta được $\frac{a_{n+4}+a_{n+2}}{a_{n+3}}=\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}^*$.	1,0
Do đó, với mọi $k\in\mathbb{N}^*$, ta có $\begin{cases}\frac{a_{2k+3}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}}=\frac{a_{2k+1}+a_{2k-1}}{a_{2k}}\\ \frac{a_{2k+4}+a_{2k+2}}{a_{2k+3}}=\frac{a_{2k+2}+a_{2k}}{a_{2k+1}}\end{cases}$. Suy ra	1,0

$$\begin{cases} \dfrac{a_{2k+3}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}} = \dfrac{a_3+a_1}{a_2} = 3 \\ \dfrac{a_{2k+4}+a_{2k+2}}{a_{2k+3}} = \dfrac{a_4+a_2}{a_3} = 5 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (1).$$

Vì thế, với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{cases} a_{2k+3} = 3a_{2k+2} - a_{2k+1} \\ a_{2k+4} = 5a_{2k+3} - a_{2k+2} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad (2).$$

Từ đó, do a_1, a_2, a_3 và a_4 là các số nguyên, hiển nhiên suy ra a_n là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

---

b) Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $u_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}}$, $v_n = \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$. Từ hệ thức xác định dãy (a_n), suy ra $a_{n+3}.a_n > a_{n+1}.a_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}} > \dfrac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$u_{n+1} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} > \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = u_n \quad \text{và} \quad v_{n+1} = \frac{a_{2n+3}}{a_{2n+2}} > \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = v_n.$$

Vì thế $(u_n),(v_n)$ là các dãy số tăng (3).

1,0

Hơn nữa, từ (1), ta có $u_n < \dfrac{a_4+a_2}{a_3} = 5, \forall n \geq 2$ và $v_n < \dfrac{a_3+a_1}{a_2} = 3, \forall n \geq 1$. Vì thế $(u_n),(v_n)$ là các dãy bị chặn (4).

Từ $(3),(4)$ suy ra các dãy $(u_n),(v_n)$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha; \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \beta$, ta có $5 \geq \alpha > u_1 = 2; 3 \geq \beta > v_1 = 2$ (5).

Từ (2), suy ra $v_n = 3 - \dfrac{1}{u_n}, \forall n \geq 2$, và $u_n = 5 - \dfrac{1}{v_n}, \forall n \geq 3$.

1,0

Do đó chuyển qua giới hạn ở các hệ thức trên, ta được

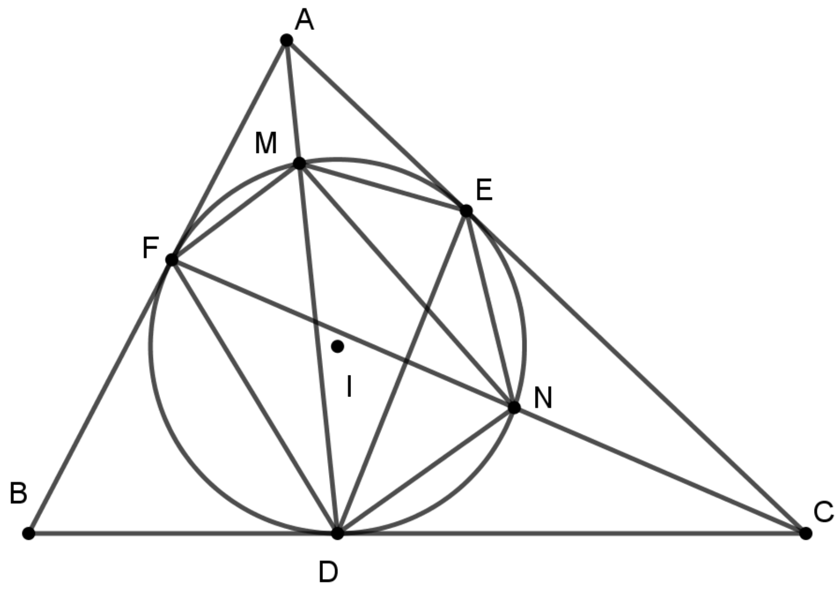
$$\begin{cases} \beta = 3 - \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha = 5 - \dfrac{1}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{15+\sqrt{165}}{6} \\ \beta = \dfrac{15+\sqrt{165}}{10} \end{cases}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{2n+2}.a_{2n} + a_{2n+1}^2}{a_{2n}.a_{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} + \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right) = \alpha + \beta = \dfrac{4}{15}\left(15+\sqrt{165}\right)$.

0,5

Bài 2 (*5,0 điểm*). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của AD, CF với (I). Chứng minh rằng $\dfrac{MN.FD}{MF.ND} = 3$.

Đáp án	Điểm

(Xét thế hình như hình vẽ) 	
Dễ thấy tứ giác $DEMF$ là tứ giác điều hòa nên $DE.MF = DF.ME$	1,0
Theo định lý Ptolemy thì $DE.MF + DF.ME = DM.EF \Rightarrow DM.EF = 2DE.MF \Rightarrow \dfrac{DM}{MF} = 2.\dfrac{DE}{EF}.$	1,0
Tương tự, ta cũng có $\dfrac{DE}{EF} = 2.\dfrac{DN}{NF}$. Suy ra $\dfrac{DM}{MF} = 4.\dfrac{DN}{NF} \Leftrightarrow DM.NF = 4DN.MF.$	1,0
Ta có $DM.NF = DN.MF + MN.DF \Rightarrow MN.FD = 3MF.ND.$	1,0

Bài 3 (*5,0 điểm*). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) - y^2\right) = f\left(x^2\right) + y^2 f(y) - 2f(xy), \quad \text{với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp án	Điểm
Kí hiệu $P(x,y)$ là khẳng định $f\left(f(x)-y^2\right) = f\left(x^2\right) + y^2 f(y) - 2f(xy) \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1). Với $P(x,1) \Rightarrow f\left(f(x)-1\right) = f\left(x^2\right) + f(1) - 2f(x)$ (2). Với $P(x,-1) \Rightarrow f\left(f(x)-1\right) = f\left(x^2\right) + f(-1) - 2f(-x)$ (3). Từ (2) và (3) suy ra $f(1) - 2f(x) = f(-1) - 2f(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$	1,0
Từ đây, nếu $x = 1$ thì $f(1) = f(-1)$ và vì vậy $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ hay f là hàm chẵn. Với $P(1,1) \Rightarrow f\left(f(1)-1\right) = 0,$ nói cách khác là tồn tại số thực b sao cho $f(b) = 0.$ Thay $x = b$ vào (3) thì	1,0

$f\left(f\left(b\right)-1\right)=f\left(b^2\right)+f\left(1\right)\Rightarrow f\left(-1\right)=f\left(b^2\right)+f\left(1\right)\Rightarrow f\left(b^2\right)=0.$	
Với $P\left(b,0\right)\Rightarrow f\left(f\left(b\right)\right)=f\left(b^2\right)-2f\left(0\right)\Rightarrow 3f\left(0\right)=f\left(b^2\right)=0.$ Với $P\left(0,y\right)\Rightarrow f\left(y^2\right)=y^2f\left(y\right)$ $\left(4\right)$. Ta có hai trường hợp sau:	1,0
Trường hợp 1 : Tồn tại $b\in\mathbb{R},b\neq 0$ sao cho $f\left(b\right)=0.$ Như trên, ta có $f\left(b^2\right)=0.$ $P\left(b,y\right)\Rightarrow f\left(f\left(b\right)-y^2\right)=f\left(b^2\right)+y^2f\left(y\right)-2f\left(by\right)\Rightarrow f\left(y^2\right)=y^2f\left(y\right)-2f\left(by\right)$ $\Rightarrow f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}\ \left(\text{do}\left(4\right)\right).$	1,0
Trường hợp 2 : $f\left(b\right)=0\Leftrightarrow b=0.$ $P\left(x,x\right)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)-x^2\right)=f\left(x^2\right)+x^2f\left(x\right)-2f\left(x^2\right)=x^2f\left(x\right)-f\left(x^2\right)=0$ $\Rightarrow f\left(x\right)-x^2=0\Rightarrow f\left(x\right)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}.$ Thử lại, dễ thấy $f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R};f\left(x\right)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn bài toán.	1,0

Bài 4 (*5,0 điểm*). Một bảng ô vuông $ABCD$ kích thước 2018×2018 gồm 2018^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được điền bởi một trong ba số $-1;0;1$. Một cách điền số được gọi là *đối xứng* nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được điền số -1 và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số 0 hoặc 1. Chứng minh rằng với một cách điền số *đối xứng* bất kì, luôn tồn tại hai hàng có các số trong mỗi ô vuông đơn vị lần lượt theo thứ tự từ trái sang phải là $a_1,a_2,\ldots,a_{2018}$ ở hàng thứ nhất, $b_1,b_2,\ldots,b_{2018}$ ở hàng thứ hai sao cho $S=a_1b_1+a_2b_2+\ldots a_{2018}b_{2018}$ là một số chẵn.

Đáp án	Điểm
Bổ đề Trong một nhóm 2018 người bất kì $X_1;X_2;...;X_{2018}$, luôn tồn tại hai người có số người quen chung trong nhóm là số chẵn. Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng phản chứng. Giả sử hai người bất kì trong nhóm đều có số người quen chung là lẻ **TH1.** Tồn tại một người có số người quen là lẻ; giả sử là X_1. Không mất tính tổng quát, giả sử X_1 quen $X_2;X_3;...;X_{1+k}$ với k lẻ. Áp dụng bổ đề bắt tay, trong một nhóm lẻ người $X_2;X_3;...;X_{1+k}$ luôn tồn tại một người có số người quen trong nhóm là chẵn, giả sử là X_2. Khi đó X_1 và X_2 có số người quen chung chẵn, mâu thuẫn. Ta có đpcm. **TH2.** Tất cả mọi người đều có số người quen là chẵn. Gọi A là tập người quen của $X_1;B$ là tập người X_1 không quen. Khi đó $\left\|A\right\|+\left\|B\right\|=2017$ và $\left\|A\right\|$ chẵn, $\left\|B\right\|$ lẻ. Sử dụng giả thiết phản chứng, do mỗi bạn trong A có số người quen chung với X_1 là lẻ, do đó với $X_i\in A$ bất kì đều có lẻ người quen trong A và lẻ người quen trong B. Lập luận tương tự, $X_j\in B$ bất kì đều có lẻ người quen trong A và lẻ người quen trong B.	3,0

Gọi M là số cặp $\left(X_i;X_j\right)$ với $X_i \in A, X_j \in B$ và X_i quen X_j. Do $X_i \in A$ bất kì đều có lẻ người quen trong B và $\lvert A\rvert$ chẵn, nên M chẵn. Do $X_j \in B$ bất kì đều có lẻ người quen trong A và $\lvert B\rvert$ lẻ, nên M lẻ. Mâu thuẫn. Vậy bổ đề được chứng minh.	
Quay trở lại bài toán. Ta gọi n_{ij} là số được điền ở ô vuông đơn vị hàng i và cột j (tính từ trên xuống và trái sang). Từ giả thiết bài toán ta có $n_{ii} = -1 \forall i = 1,2,...,2018$ và $n_{ij} = n_{ji} \in \{0;1\} \forall i \neq j \in \{1,2,...,2018\}$. Yêu cầu bài toán là chứng minh tồn tại hai chỉ số $k;k' \in \{1,2,...,2018\}$. phân biệt sao cho $S = \sum_{i=1}^{2018} n_{ki}n_{k'i} \vdots 2$. Do $n_{kk} = n_{k'k'} = -1$ và $n_{k'k} = n_{kk'}$ nên $n_{kk}n_{k'k} + n_{kk'}n_{k'k'} = 2n_{kk}n_{k'k} \vdots 2$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh $S' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,k'}}^{2018} n_{ki}n_{k'i} \vdots 2$.	1,0
Từ 2018^2 số n_{ij} như trên, bây giờ ta xét 2018 người $X_1;X_2;...;X_{2018}$ có mối quan hệ như sau: - Nếu $n_{ij} = 0\left(i \neq j\right)$ thì X_i không quen X_j. - Nếu $n_{ij} = 1\left(i \neq j\right)$ thì X_i quen X_j.	0,5
Khi đó tổng $S' = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,k'}}^{2018} n_{ki}n_{k'i}$ chính là số người quen chung trong nhóm 2018 người đang xét của X_k và $X_{k'}$. Áp dụng bổ đề trên, ta có điều phải chứng minh.	0,5

.... **HẾT** ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2018 - 2019

Môn: TOÁN
Ngày thi thứ hai: 15/9/2018
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề
Đề thi có 01 trang

Bài 5 (*6,0 điểm*).

Chứng minh rằng

a) Tồn tại 2018 số nguyên dương liên tiếp là hợp số.

b) Tồn tại 2018 số nguyên dương liên tiếp chứa đúng 2 số nguyên tố.

Bài 6 (*7,0 điểm*).

Cho dãy số thực $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $x_n = 0$ khi và chỉ khi $n = 0$;
b) $x_{n+1} = x^2_{\left[\frac{n+3}{2}\right]} + \left(-1\right)^n x^2_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ với mọi $n \geq 0$.

(Kí hiệu $\left[x\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.

Bài 7 (*7,0 điểm*).

Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại P. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB, CPD cắt cạnh BC theo thứ tự tại E, F. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABE, CDF; hai đoạn thẳng BJ và CI cắt nhau tại Q. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB cắt đoạn thẳng BD tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DJC cắt đoạn thẳng AC tại N.

a) Chứng minh $BIJC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Ch□ng minh ba □□□ng th□ng IM, JN, PQ □□ng quy.

--------HẾT--------

- *Họ và tên thí sinh: .... SBD: ....*
- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ THỌ **ĐỀ CHÍNH THỨC**	**ĐÁP ÁN-THANG ĐIỂM** **ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2018-2019** **Môn: TOÁN** Ngày thi thứ hai: **15/9/2018** *(Đáp án-thang điểm gồm **04** trang)*

I. Một số chú ý khi chấm bài

• Đáp án chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp lô-gic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
• Thí sinh làm bài cách khác với Đáp án mà đúng thì Tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của Đáp án.
• **Điểm bài thi** là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án-thang điểm

Bài 5 (*6,0 điểm*). Chứng minh rằng

c) Tồn tại 2018 số nguyên dương liên tiếp là hợp số.

d) Tồn tại 2018 số nguyên dương liên tiếp chứa đúng 2 số nguyên tố.

Đáp án	Điểm
a) Xét 2018 số $2019!+2; 2019!+3; \ldots; 2019!+2019$. Ta thấy $2019!+k \,\vdots\, k \ \forall k=2,3,...,2019$ và $2019!+k>k$ nên $2019!+k$ là hợp số $\forall k=2,3,...,2019$. Do đó 2018 số nguyên dương liên tiếp $2019!+2; 2019!+3; \ldots; 2019!+2019$ là hợp số.	2,0
b) Ta sẽ chứng minh bài toán bằng phản chứng. Giả sử không tồn tại 2018 số nguyên dương liên tiếp chứa đúng 2 số nguyên tố. Đặt $A_n=\{i\in\mathbb{N}; n\le i\le n+2017\}$; A_n là tập 2018 số nguyên dương liên tiếp bắt đầu từ n. Gọi $f(n)$ là số các số nguyên tố trong tập A_n. Từ định nghĩa A_n ta có $\left\|A_{n+1}\setminus A_n\right\|=\left\|A_n\setminus A_{n+1}\right\|=1\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó $\left\|f(n+1)-f(n)\right\|\le 1\ \forall n\in\mathbb{N}^*.(1)$ Từ giả thiết phản chứng, không tồn tại n sao cho $f(n)=2$.	2,0

Đặt $B=\left\{n\in\mathbb{N}^*;f(n)<2\right\}$; theo phần a) ta có $f(2019!+2)=0$ hay $2019!+2\in B$. Ta có tập B khác rỗng, theo nguyên lí cực hạn, tồn tại số nguyên dương $n_0\in B$ nhỏ nhất. Khi đó $f(n_0)<2$.	1,0
Hơn nữa dễ thấy $f(1)>2$ nên $n_0>1$. Suy ra n_0-1 là số nguyên dương và $f(n_0-1)>2$; $\left\|f(n_0)-f(n_0-1)\right\|\geq 2$ (mâu thuẫn với (1)). Vậy ta có điều phải chứng minh.	1,0

Bài 6 (*7,0 điểm*). Cho dãy số thực $(x_n)_{n\geq 0}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

c) $x_n=0$ khi và chỉ khi $n=0$;

d) $x_{n+1}=x^2_{\left[\frac{n+3}{2}\right]}+(-1)^n x^2_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ với mọi $n\geq 0$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, nếu x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.

Đáp án	**Điểm**
Với $n=0, n=1$ thì $x_1=x_1^2, x_2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2=1$. Từ điều kiện đã cho ta được	0,5
$x_{2n+1}=x_{n+1}^2+x_n^2,\ x_{2n}=x_{n+1}^2-x_{n-1}^2\Rightarrow x_{2n+1}-x_{2n}=x_n^2+x_{n-1}^2=x_{2n-1}\Rightarrow x_{2n+1}=x_{2n}+x_{2n-1},\forall n\geq 1\ (1)$ Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_{2n}=x_{2n-1}+x_{2n-2},\forall n\geq 1\ (2)$ Thật vậy, $x_2=x_1+x_0$ và giả sử (2) đúng đến (n). Khi đó $x_{2n+2}-x_{2n}=x_{n+2}^2-x_n^2-x_{n+1}^2+x_{n-1}^2=(x_{n+1}+x_n)^2-x_n^2-x_{n+1}^2+(x_{n+1}-x_n)^2=x_{n+1}^2+x_n^2=x_{2n+1}$. Vậy (2) được chứng minh xong. Từ $(1),(2)$ suy ra $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\forall n\geq 0$. Vì $x_0=0, x_1=1$ nên $(x_n)_{n\geq 0}$ là dãy Fibonacci.	3,0
Sử dụng kết quả quen thuộc sau: Với dãy số Fibonacci $(x_n)_{n\geq 0}$, nếu $n\,\vdots\, m$ thì $x_n\,\vdots\, x_m$. **Chú ý: Thí sinh phải chứng minh tính chất này, nếu không bị trừ điểm** Giả sử x_n là số nguyên tố với $n\in\mathbb{N}^*$ có ước nguyên tố lẻ. Khi đó n có dạng pq, p là số nguyên tố lẻ, $q\in\mathbb{N}^*, q>1$.	2,0
Do đó $x_{pq}\,\vdots\, x_p$. Mặt khác dễ thấy (x_n) tăng kể từ $n=1$ nên $x_p\geq x_3=2$. Do đó x_{pq} là hợp số, mâu thuẫn. Vậy với $n\geq 1$ để x_n là số nguyên tố thì n là số nguyên tố hoặc n không có ước nguyên tố lẻ.	1,5

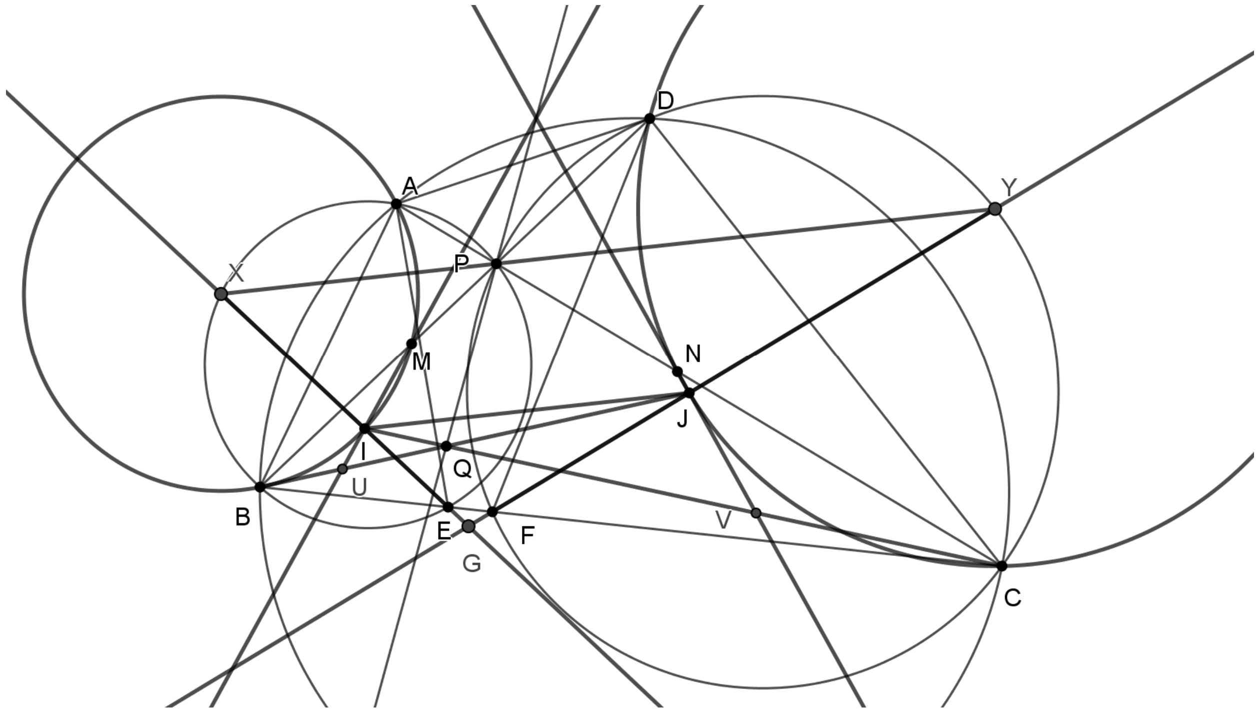
Bài 7 (*7,0 điểm*). Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại P. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB, CPD cắt cạnh BC theo thứ tự tại E, F. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABE, CDF; hai đoạn thẳng BJ và CI cắt nhau tại Q. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB cắt cạnh BD tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DJC cắt cạnh AC tại N.

a) Chứng minh $BIJC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh ba đường thẳng IM, JN, PQ đồng quy.

<table>
<tr><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>

(Xét thế hình như hình vẽ)



</td><td></td></tr>
<tr><td>

a) Kí hiệu (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm thứ hai của EI và (ABE), FJ và (CDF). Khi đó X, Y lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABI, CDJ và PX, PY lần lượt là phân giác của hai góc đối đỉnh APB, CPD nên P, X, Y thẳng hàng.

Gọi G là giao điểm của XE và YF. Ta có $\Delta BPC \backsim \Delta XGY$ (g.g) và $\Delta BPA \backsim \Delta CPD$.

Suy ra $\dfrac{XG}{YG} = \dfrac{BP}{CP} = \dfrac{AB}{CD}$. Mặt khác $\widehat{AEB} = \widehat{APB} = \widehat{DPC} = \widehat{DFC}$ nên $\widehat{AIB} = \widehat{DJC}$. Áp dụng định lí hàm số sin ta có $\dfrac{XG}{YG} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{XI}{YJ}$ hay $IJ \parallel XY$.

</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>

Ta có $\widehat{EAP} = \widehat{EBP} = \widehat{PAD}$ nên AP là phân giác góc EAD. Biến đổi góc ta có

</td><td>1,0</td></tr>
</table>

$\widehat{BIJ}+\widehat{JCB}=\widehat{BIE}+\widehat{EIJ}+\frac{\widehat{DCB}}{2}=90^\circ+\frac{\widehat{BAE}}{2}+\widehat{EXY}+\frac{\widehat{DCB}}{2}$ $=90^\circ+\frac{\widehat{BAE}}{2}+\widehat{EAP}+\frac{\widehat{DCB}}{2}=90^\circ+\frac{\widehat{BAE}}{2}+\frac{\widehat{EAD}}{2}+\frac{\widehat{DCB}}{2}=180^\circ.$ Do đó $BIJC$ là tứ giác nội tiếp.	
b) Gọi U,V lần lượt là giao điểm của MI và BJ, NJ và CI. Ta có $\widehat{AMD}=180^\circ-\widehat{AMB}=180^\circ-\widehat{AIB}=180^\circ-\widehat{DJC}=180^\circ-\widehat{DNC}=\widehat{AND}$, hay $AMND$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{DMN}=\widehat{DAN}=\widehat{DBC}$ hay $MN \parallel BC$. Ta có $\widehat{IBQ}=\widehat{JCQ}$ và $\widehat{BIU}=\widehat{BAM}=180^\circ-\widehat{ABM}-\widehat{AMB}=180^\circ-\widehat{ABD}-\widehat{AIB}=180^\circ-\widehat{ACD}-\widehat{DJC}=\widehat{CDN}=\widehat{CJV}$ nên $\Delta BIU \backsim \Delta CJV; \Delta BIQ \backsim \Delta CJQ$ (g.g). Suy ra $\frac{BU}{CV}=\frac{BQ}{CQ}$ hay $UV \parallel BC$.	3,0
Ta có $MN \parallel UV \parallel BC$. Áp dụng định lí Desargues cho hai tam giác $BUM; CVN$ và gọi H là giao điểm của IM, JN; P là giao điểm của BM, CN; Q là giao điểm của BU, CV; khi đó H,P,Q thẳng hàng. Vậy IM, JN, PQ đồng quy tại H. Ta có điều phải chứng minh.	1,0

.... **HẾT** ....