

CHỦ ĐỀ 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định lý

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b] \Rightarrow$ tồn tại $\max_{[a; b]} f(x)$, $\min_{[a; b]} f(x)$.

2. Cách tìm

Bước 1: Tìm các điểm trên $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên $[a; b]$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên thì
$$\begin{cases} M = \max_{[a; b]} f(x) \\ m = \min_{[a; b]} f(x) \end{cases}.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

- A. $\min y = 0.$ B. $\min y = 3.$ C. $\min y = 5.$ D. $\min y = 7.$

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là:

- A. $\min f(x) = -50.$ B. $\min f(x) = 0.$ C. $\min f(x) = -41.$ D. $\min f(x) = 15.$

Câu 3. (Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2007)

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. $\max f(x) = 0.$ B. $\max f(x) = \frac{13}{27}.$ C. $\max f(x) = -6.$ D. $\max f(x) = 5.$

Câu 4. (Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

- A. $\max f(x) = 64.$ B. $\max f(x) = 1.$ C. $\max f(x) = 0.$ D. $\max f(x) = 9.$

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nửa khoảng $[-4; +\infty)$ là:

- A. $\min y = -8.$ B. $\min y = -11.$ C. $\min y = -17.$ D. $\min y = -9.$

Câu 6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

- A. $\min y = -3.$ B. $\min y = \frac{1}{2}.$ C. $\min y = -1.$ D. $\min y = 1.$

Câu 7. (Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là:

- A. $\min y = 6.$ B. $\min y = \frac{13}{2}.$ C. $\min y = -6.$ D. $\min y = \frac{25}{4}.$

Câu 8. (Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2008)

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

- A. $\min y = -1.$ B. $\min y = 3.$ C. $\min y = 5.$ D. $\min y = \frac{-7}{3}.$

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$ là:

- A. $\max y = -1.$ B. $\max y = 1.$ C. $\max y = 9.$ D. $\max y = 10.$

Câu 10. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ là:

A. $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$.

B. $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$.

C. $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$.

D. $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$.

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[1;5]$ là:

A. $\frac{8}{3}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. -4 .

D. $-\frac{10}{3}$.

Câu 12. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là:

Câu này nội dung lặp câu 4, đề nghị bỏ

A. 9; 0.

B. 9; 1.

C. 2; 1.

D. 9; -2 .

Câu 13. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $\frac{1}{4}$.

B. 2.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 0.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{x^2-3}{x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3;4]$:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{2}$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 6.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{13}{2}$ và giá trị nhỏ nhất bằng 6.

Câu 15. Hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ bằng:

A. 5.

B. -1 .

C. 4.

D. 1.

Câu 16. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ tại điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 17. Hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x. Giá trị của x là:

A. $x = 3$.

B. $x = 0$ hoặc $x = 2$.

C. $x = 0$.

D. $x = -2$ hoặc $x = 2$.

Câu 18. Hàm số $y = (x-1)^2 + (x+3)^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3.

B. -1 .

C. 10.

D. 8.

Câu 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1;e]$ bằng là:

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{1}{e}$.

D. e.

Câu 20. Hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;0]$ lần lượt tại $x_1; x_2$.

Khi đó $x_1 \cdot x_2$ bằng:

A. 2.

B. 0.

C. 6.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 21. Hàm số $y = \sqrt{x^2+1} + x^2$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là:

- A. $\sqrt{2}-1; 0$. B. $\sqrt{2}+1; 0$. C. $1; -1$. D. $1; 0$.

Câu 22. (Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2004)

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$ là:

- A. $\max_{[0; \pi]} y = 2$. B. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$. C. $\max_{[0; \pi]} y = 0$. D. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23. (Đề thi Tốt nghiệp THPT – 2002)

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{2} \cos 2x + 4 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

- A. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 4 - \sqrt{2}$. B. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 2\sqrt{2}$. C. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \sqrt{2}$. D. $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 0$.

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5 \cos x - \cos 5x$ với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ là:

- A. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4$. B. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{2}$. C. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 3\sqrt{3}$. D. $\min_{\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = -1$.

Câu 25. Hàm số $y = \sin x + 1$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ bằng:

- A. 2. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 0. D. 1.

Câu 26. Hàm số $y = \cos 2x - 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ bằng:

- A. -4. B. -3. C. -2. D. 0.

Câu 27. Hàm số $y = \tan x + x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng:

- A. 0. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $1 + \frac{\pi}{4}$. D. 1.

Câu 28. Hàm số $y = \sin x + \cos x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

- A. -2; 2. B. $-\sqrt{2}; \sqrt{2}$. C. 0; 1. D. -1; 1.

Câu 29. Hàm số $y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. 3; -4. B. 1; 0. C. 1; -1. D. 0; -1.

Câu 30. Hàm số $y = \sin^2 x + 2$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt bằng:

- A. 0; 2. B. 1; 3. C. 1; 2. D. 2; 3.

Câu 31. Hàm số $y = -9 \sin x - \sin 3x$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt là:

- B. 8; 0. A. 0; -8. C. 1; -1. D. 0; -1.

Câu 32. Hàm số $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. 0; -1. B. $\sqrt{3}; 0$. C. $\sqrt{3}; -1$. D. 2; -2.

Câu 33. Hàm số $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 1$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt bằng $y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{3}{4}$. B. -4. C. $\frac{3}{8}$. D. 1.

Câu 34. Hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ lần lượt là

$y_1; y_2$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ có giá trị bằng:

- A. $-\frac{1}{4}$. B. -1. C. $\frac{1}{4}$. D. 0.

- Câu 35.** Hàm số $y = \cos 2x - 4\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:
- A. $\frac{\pi}{2}; 0$. B. 5; 1. C. 5; -1. D. 9; 1.
- Câu 36.** Hàm số $y = \tan x + \cot x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ tại điểm có hoành độ là:
- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{3}$.
- Câu 37.** Hàm số $y = \cos x(\sin x + 1)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt là:
- A. ± 1 . B. ± 2 . C. $\pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$. D. 2; 0.
- Câu 38.** Hàm số $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; \pi]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Khi đó hiệu $y_1 - y_2$ có giá trị bằng:
- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 39.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x(x^2 - x - 1)$ trên đoạn $[0; 2]$ là
- A. $\min_{[0; 2]} y = -2e$. B. $\min_{[0; 2]} y = e^2$. C. $\min_{[0; 2]} y = -1$. D. $\min_{[0; 2]} y = -e$.
- Câu 40.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$
- A. $\min_{[-2; 2]} y = e^2$. B. $\min_{[-2; 2]} y = -2e$. C. $\min_{[-2; 2]} y = e^{-2}$. D. $\min_{[-2; 2]} y = -4e$.
- Câu 41.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = e^x + 4e^{-x} + 3x$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng
- A. $\max_{[1; 2]} y = e^2 + \frac{4}{e^2} + 6$. B. $\max_{[1; 2]} y = e + \frac{4}{e} + 3$.
C. $\max_{[1; 2]} y = 6e + 3$. D. $\max_{[1; 2]} y = 5$.
- Câu 42.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x.e^{-2x}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng
- A. $\max_{[0; 1]} y = 1$. B. $\max_{[0; 1]} f(x) = \frac{1}{e^2}$. C. $\max_{[0; 1]} f(x) = 0$. D. $\max_{[0; 1]} f(x) = \frac{1}{2e}$.
- Câu 43.** Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Khi đó $M + m$ bằng
- A. $\frac{17}{4} - \ln 10$. B. $\frac{17}{4} - \ln 7$. C. $\frac{17}{4} - \ln \frac{5}{2} \frac{28}{27}$. D. $\frac{15}{4} - \ln 102$.
- Câu 44.** Hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó $M - m$ bằng
- A. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$. B. 1. C. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. D. -1.
- Câu 45.** Hàm số $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ có giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Khi đó $M.m$ bằng
- A. $-3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 46.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là:
- A. Không tồn tại. B. 1. C. π . D. -1.

- Câu 47.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là:
- A. -1 . B. 1 . C. $\frac{\pi}{2}$. D. Không tồn tại.
- Câu 48.** Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{1-x^2}$. Khi đó $M + m$ bằng
- A. 2 . B. 1 . C. 0 . D. -1 .
- Câu 49.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng
- A. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$. B. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$. C. $\min_{\mathbb{R}} y = 3 + \sqrt{5}$. D. $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.
- Câu 50.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ bằng
- A. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\min_{\mathbb{R}} y = 0$. C. $\min_{\mathbb{R}} y = 1$. D. $\min_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2}$.
- Câu 51.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - 4\sqrt{(x+4)(4-x)} + 5$ bằng
- A. $\max_{[-4;4]} y = 10$. B. $\max_{[-4;4]} y = 5 - 2\sqrt{2}$. C. $\max_{[-4;4]} y = -7$. D. $\max_{[-4;4]} y = 5 + 2\sqrt{2}$.
- Câu 52.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ bằng
- A. $\max_{\mathbb{R}} y = 4$. B. $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3}{2}$. C. $\max_{\mathbb{R}} y = 3$. D. $\max_{\mathbb{R}} y = -1$.
- Câu 53.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^4 x + \cos^2 x + 3$ bằng
- A. $\min_{\mathbb{R}} y = 5$. B. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$. C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$. D. $\min_{\mathbb{R}} y = \frac{31}{8}$.
- Câu 54.** Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$. Khi đó $M + m$ bằng
- A. $\frac{28}{27}$. B. 4 . C. $\frac{82}{27}$. D. 2 .
- Câu 55.** Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$. Khi đó $M.m$ bằng
- A. $\frac{1}{512}$. B. 1 . C. 0 . D. $\frac{513}{512}$.
- Câu 56.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x+1}$ là:
- A. không có giá trị nhỏ nhất. B. có giá trị nhỏ nhất bằng 1 .
C. có giá trị nhỏ nhất bằng -1 . D. có giá trị nhỏ nhất bằng 0 .
- Câu 57.** Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:
- A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; không có giá trị lớn nhất.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$; không có giá trị nhỏ nhất.
- Câu 58.** Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:
- A. $\sqrt{2}; 1$. B. $1; 0$. C. $2; \sqrt{2}$. D. $2; 1$.
- Câu 59.** Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$. Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.
B. Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{3}$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$.

Câu 60. Gọi y_1, y_2 lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 4]$. Khi đó tích $y_1 \cdot y_2$ là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Câu 61. Hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-5; -3]$ bằng:

A. $-\frac{13}{12}$.

B. $\frac{11}{6}$.

C. $-\frac{47}{60}$.

D. $-\frac{11}{6}$.

Câu 62. Cho hàm số $y = x - \sqrt{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và không có giá trị lớn nhất.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

C. Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 1$ và giá trị lớn nhất bằng 1.

Câu 63. Hàm số $y = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất lần lượt tại hai điểm có hoành độ:

A. 0.

B. ± 1 .

C. $\pm\sqrt{2}$.

D. 2.

Câu 64. Hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất lần lượt là:

A. -2; 1.

B. 0; 2.

C. $\frac{1}{2}$; 1.

D. 0; 1.

Câu 65. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. Không tồn tại.

Câu 66. Hàm số $y = \sqrt{1+2\sin x \cdot \cos x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ là:

A. $x = \frac{\pi}{4}$.

B. $x = \frac{\pi}{6}$.

C. $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 67. Hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

A. 1; -1.

B. 2; 0.

C. $\frac{1}{4}$; -1.

D. 1; $\frac{1}{4}$.

Câu 68. Hàm số $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 2)$ có giá trị lớn nhất là:

A. có giá trị lớn nhất là 0.

B. có giá trị lớn nhất là -8.

C. có giá trị lớn nhất là 2.

D. không có giá trị lớn nhất.

Câu 69. Hàm số $y = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ có giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng:

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. -2.

Câu 70. Hàm số $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 3]$ là:

A. 10; $-\frac{9}{4}$.

B. 120; 1.

C. 10; -1.

D. 120; -1.

Câu 71. Hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x+3}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là:

A. $2\sqrt{2} - 2$; 2.

B. $2\sqrt{2} + 2$; 2.

C. $2\sqrt{2}$; 2.

D. 2; 0.

- Câu 72.** Hàm số $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ là:
A. $2\sqrt{2} + 4; 2$. **B.** $2\sqrt{2} - 2; 2$. **C.** $2\sqrt{2}; 2$. **D.** $4; 2$.
- Câu 73.** Hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 63]$ là:
A. $2; 12$. **B.** $1; 2$. **C.** $0; 2$. **D.** $0; 12$.
- Câu 74.** Hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + 3}$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tại điểm có hoành độ bằng
A. $x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$. **B.** $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{2}$. **C.** $x = \frac{\pi}{6}; x = -\frac{\pi}{2}$. **D.** $x = 0; x = \frac{\pi}{2}$.
- Câu 75.** Hàm số $y = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2}$ có giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ là:
A. $3; \frac{112}{9}$. **B.** $1; 4$. **C.** $1; \frac{112}{9}$. **D.** $4; \frac{112}{9}$.
- Câu 76.** Hàm số $y = x^8 + (x^4 - 1)^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 2]$ lần lượt tại hai điểm có hoành độ $x_1; x_2$. Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ có giá trị bằng
A. 1. **B.** 2. **C.** 15. **D.** 0.
- Câu 77.** Hàm số $y = x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ giá trị nhỏ nhất lần lượt bằng:
A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.
- Câu 78.** Hàm số $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 4]$ lần lượt là:
A. $\frac{8}{3}; 0$. **B.** $\frac{8}{3}; -\frac{8}{3}$. **C.** $0; -\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{24}{5}; 0$.
- Câu 79.** Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:
A. 64 cm^2 . **B.** 4 cm^2 . **C.** 16 cm^2 . **D.** 8 cm^2 .
- Câu 80.** Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:
A. $16\sqrt{3} \text{ cm}$ **B.** $4\sqrt{3} \text{ cm}$ **C.** 24 cm **D.** $8\sqrt{3} \text{ cm}$
- Câu 81.** Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng
A. $5; -8$. **B.** $1; -12$. **C.** $-\frac{13}{2}; \frac{13}{2}$. **D.** $6; -7$.
- Câu 82.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc $v \text{ (m/s)}$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t \text{ (s)}$ bằng
A. 2 (s) **B.** 12 (s) **C.** 6 (s) **D.** 4 (s)
- Câu 83.** Tam giác vuông có diện tích lớn nhất là bao nhiêu nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $a \text{ (} a > 0 \text{)}$?
A. $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^2}{9}$. **C.** $\frac{2a^2}{9}$. **D.** $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$.
- Câu 84.** Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n \text{ (gam)}$. Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất?
A. 12. **B.** 24. **C.** 6. **D.** 32.

Câu 85. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng

- A. 100 mg. B. 20 mg. C. 30 mg. D. 0 mg.

Câu 86. Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng

- A. 6 km/h. B. 8 km/h. C. 7 km/h. D. 9 km/h.

Câu 87. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất?

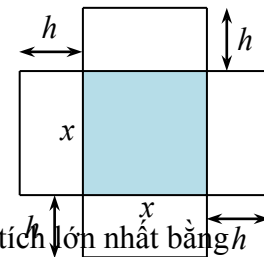
- A. Ngày thứ 19. B. Ngày thứ 5. C. Ngày thứ 16. D. Ngày thứ 15.

Câu 88. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Người ta dựng một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên BC , hai đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất?

- A. $BM = \frac{2a}{3}$. B. $BM = \frac{3a}{4}$. C. $BM = \frac{a}{3}$. D. $BM = \frac{a}{4}$.

Câu 89. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 . Giá trị của x để diện tích của mảnh các tông nhỏ nhất bằng

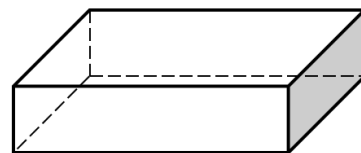
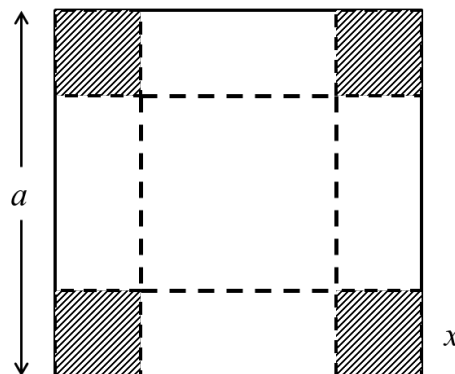
- A. 100. B. 300.
C. 10. D. 1000.



Câu 90. Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R , hình trụ có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{4\pi R^3}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. C. $\frac{\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{4\pi R^3}{3}$.

Câu 91. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của khối hộp là lớn nhất?



- A. $\frac{5a}{6}$. B. $\frac{a}{6}$. C. $\frac{a}{12}$. D. $\frac{a}{9}$.

Câu 92. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ là:

- A. $M = -1; m = \frac{-3}{2}$. B. $M = 3; m = -1$. C. $M = 3; m = \frac{-3}{2}$. D. $M = \frac{3}{2}; m = -3$.

Câu 93. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\cos 2x + 2\sin x$ là:

A. $M = \frac{9}{4}; m = -4$. **B.** $M = 4; m = 0$. **C.** $M = 0; m = -\frac{9}{4}$. **D.** $M = 4; m = -\frac{9}{4}$.

Câu 94. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 5$ là:

A. $M = 2; m = -5$. **B.** $M = 5; m = 2$. **C.** $M = 5; m = -2$. **D.** $M = -2; m = -5$.

Câu 95. Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$ là:

A. $M = 3; m = -\frac{11}{4}$. **B.** $M = \frac{11}{4}; m = -3$. **C.** $M = 3; m = \frac{11}{4}$. **D.** $M = -\frac{11}{4}; m = -3$.

Câu 96. Cho hàm số $y = \frac{2 \cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Khi đó $M+m$ bằng

A. -4 . **B.** -5 . **C.** -6 . **D.** 3 .

Câu 97. Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

A. $M = m + \frac{2}{3}$. **B.** $M = m + 1$. **C.** $M = \frac{3}{2}m$. **D.** $M = m + \frac{3}{2}$.

Câu 98. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$ là:

A. $-\frac{21}{3}$. **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** 3 .

Câu 99. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ là:

A. 2 . **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** 3 .

Câu 100. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là:

A. -2 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** -3 .

Câu 101. Hàm số $y = 2 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 1$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 3 . **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** 4 .

Câu 102. Hàm số $y = x + \sqrt{18 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. 5 . **B.** -6 . **C.** 6 . **D.** -5 .

Câu 103. Hàm số $y = 2 \cos^3 x - \frac{7}{2} \cos^2 x - 3 \cos x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 1 .

Câu 104. Hàm số $y = -2 \sin^3 x + 3 \cos 2x - 6 \sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. -6 . **B.** -7 . **C.** 8 . **D.** 9 .

Câu 105. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 1; x + y = 3$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng:

A. 20 và 18 . **B.** 20 và 15 . **C.** 18 và 15 . **D.** 15 và 13 .

Câu 106. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + \sqrt{1 + 9x^2}}{8x^2 + 1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 107. Hàm số $y = \sqrt{45 + 20x^2} + |2x - 3|$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. -9 . **B.** 8 . **C.** 9 . **D.** -8 .

Câu 108. (Đề thi Đại học Khối B – 2003)

Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. $-2\sqrt{2}$. B. -2 . C. 0 . D. 2 .

Câu 109. (Đề thi Đại học Khối D – 2003)

Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt bằng:

- A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 0 . B. $\sqrt{5}$; 0 .
C. $\sqrt{2}$; 0 . D. $\sqrt{5}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 110. (Đề thi Đại học Khối B – 2004)

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$ là :

- A. 0 . B. $\frac{9}{e^3}$. C. $\frac{4}{e^2}$. D. $\frac{4}{e}$.

Câu 111. (Đề thi Đại học Khối D – 2011)

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là:

- A. $\frac{17}{3}$; 3 B. $\frac{17}{3}$; -5 .
C. 3 ; -5 . D. -3 ; 5 .

Câu 112. (Đề thi ĐH Khối D – 2009)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$.

Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là:

- A. $M = \frac{25}{2}$; $m = \frac{191}{16}$. B. $M = 12$; $m = \frac{191}{16}$.
C. $M = \frac{25}{2}$; $m = 12$. D. $M = \frac{25}{2}$; $m = 0$.

Câu 113. (Đề thi ĐH Khối D – 2012)

Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32$.

Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2)$ là :

- A. $m = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$. B. $m = 16$. C. $m = 398$. D. $m = 0$.

Câu 114. (Đề thi ĐH Khối A– 2006).

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Giá trị

lớn nhất M của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ là:

- A. $M = 0$. B. $M = 0$. C. $M = 1$. D. $M = 16$.

Câu 115. (Đề thi ĐH Khối B– 2011).

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$. Giá trị nhỏ nhất

m của biểu thức $P = 4\left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3}\right) - 9\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ là:

- A. $m = -10$. B. $m = \frac{85}{4}$. C. $m = \frac{-23}{4}$. D. $m = 0$.

Câu 116. (Đề thi ĐH Khối D– 2014).

Cho hai số thực dương thỏa mãn $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

A. $m = 0$.

B. $m = \frac{85}{4}$.

C. $m = -10$.

D. $m = \frac{7}{8}$.

A. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**I – ĐÁP ÁN**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D	D	D	A	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	D	C	A	A	A	A	B	C	D	B	D	B	A	C	C	C	D	D	B

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	D	A	B	A	D	B	C	B	A	D	C	D	C	A	D	B	C	B	C

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	B	C	B	C	D	D	D	D	B	A	A	C	D	B	A	A	C	A

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	A	A	A	B	D	D	D	C	B	B	C	A	B	C	D	B	D	C	A

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116
B	C	B	D	B	C	A	B	C	C	A	A	A	D	C	D

II – HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1.** Chọn B.Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0;2) \\ x = -1 \notin (0;2) \end{cases}$$

$$y(1) = 3; y(0) = 5; y(2) = 7. \text{ Do đó } \min_{[0;2]} y = y(1) = 3$$

Câu 2. Chọn C.Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4;4]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-4;4) \\ x = 3 \in (-4;4) \end{cases}$$

$$f(-4) = -41; f(-1) = 40; f(3) = 8; f(4) = 15. \text{ Do đó } \min_{x \in [-4;4]} f(x) = f(-4) = -41$$

Câu 3. Chọn B.Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;3]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 16x + 16; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \notin (1;3) \\ x = \frac{4}{3} \in (1;3) \end{cases}$$

$$f(1) = 0; f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}; f(3) = -6. \text{ Do đó } \max_{x \in [1;3]} f(x) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}$$

Câu 4. Chọn D.Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

$$\text{Xét trên } (0;2). \text{ Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; \text{ Khi đó } f(1) = 0; f(0) = 1; f(2) = 9$$

$$\text{Do đó } \max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 9$$

Câu 5. Chọn B.Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-4; +\infty)$

$$\text{Ta có: } y = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 5. \text{ Đặt } t = x^2 + 6x. \text{ Khi đó } y = t^2 + 8t + 5$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 6x$ với $x \geq -4$. Ta có $g'(x) = 2x + 6$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$
$g'(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$g(x)$		-8	-9	$+\infty$

Suy ra $t \in [-9; +\infty)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = h(t) = t^2 + 8t + 5$ với $t \in [-9; +\infty)$. Ta có $h'(t) = 2t + 8$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-9	-4	$+\infty$
$h(x)$			$- \quad 0 \quad +$	
$h(x)$		14	-11	$+\infty$

Vậy $\min_{[-4; +\infty)} y = -11$

Câu 6.

Chọn C.

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 3]$

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với $\forall x \in [0; 3]$. $y(0) = -1$; $y(3) = \frac{1}{2}$. Do đó $\min_{x \in [0; 3]} y = y(0) = -1$

Câu 7.

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đã cho liên tục trên $[2; 4]$

Ta có $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \notin (2; 4) \\ x = 3 \in (2; 4) \end{cases}$

Ta có $y(2) = \frac{13}{2}$; $y(3) = 6$; $y(4) = \frac{25}{4}$. Do đó $\min_{x \in [2; 4]} y = y(3) = 6$

Câu 8.

Chọn B.

Hàm số xác định với $\forall x \in (1; +\infty)$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(1; +\infty)$

Ta có $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\min_{x \in (1; +\infty)} f(x) = f(2) = 3$

Câu 9.

Chọn C.

Hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có $y' = \frac{8x^2 - 12x - 8}{(x^2 + 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x = -\frac{1}{2}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	1	$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Vậy $\max_R y = 9 = y(-\frac{1}{2})$

Câu 10. Chọn C.

Điều kiện xác định: $5 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$. Suy ra hàm số xác định với $\forall x \in [-1; 1]$

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

Ta có $y' = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0, \forall x \in [-1; 1]$. Do đó $\max_{[-1; 1]} y = y(-1) = 3$; $\min_{[-1; 1]} y = y(1) = 1$

Câu 11. Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Khi đó: $y(1) = -\frac{8}{3}$; $y(3) = -4$; $y(5) = \frac{8}{3} \Rightarrow$ giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{8}{3}$

Câu 12. Chọn A.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = 0$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y(1) = 0$; $y(2) = 9 \Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là 9; 0

Câu 13. Chọn A.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0; \forall x \in D$.

Khi đó: $y(0) = -\frac{1}{2}$; $y(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 14. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ta có: $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} > 0; \forall x \in [3; 4] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[3; 4]$.

Vậy $\min_{[3; 4]} y = y(3) = 6$ và $\max_{[3; 4]} y = y(4) = \frac{13}{2}$.

Câu 15. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 2x + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [0; 1]$. $y(0) = 1$; $y(1) = 4$ suy ra $y_1 \cdot y_2 = 4$.

Câu 16. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = x^2 - 5x + 6$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 3$

Khi đó: $y(1) = \frac{29}{6}$; $y(2) = \frac{17}{3}$; $y(3) = \frac{11}{2} \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$

Câu 17. Chọn D.

TXĐ: $D = [-2; 2]$. Ta có: $y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó: $y(-2) = 0$; $y(0) = 2$; $y(2) = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ $x = \pm 2$

Câu 18. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = (x-1)^2 + (x+3)^2 = 2x^2 + 4x + 10$.

Ta có: $y' = 4x + 4$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		0	
	$-$	$+$	
y	$+\infty$	8	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8.

Câu 19. Chọn A.

TXĐ: $D = (0; +\infty)$. Ta có: $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

Khi đó: $y(1) = 0$; $y(e) = \frac{1}{e} \Rightarrow$ Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Câu 20. Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = \frac{x+2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Khi đó: $y(-3) = -\frac{4\sqrt{11}}{11}$; $y(-1) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $y(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 0$

Câu 21. Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 2x = 0 \Leftrightarrow x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó: $y(-1) = \sqrt{2} + 1$; $y(0) = 1$; $y(1) = \sqrt{2} + 1$.

Câu 22. Chọn D.

Ta có $y' = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cdot \cos x = 2 \cos x (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \cos x \cdot \cos 2x$

Nên $y' = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

Trên $(0; \pi)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$

$y(0) = 0$; $y(\pi) = 0$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\max_{[0; \pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 23. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y = -2\sqrt{2} \sin^2 x + 4 \sin x + \sqrt{2}$

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = g(t) = -2\sqrt{2}t^2 + 4t + \sqrt{2}$ trên đoạn $[0; 1]$

$$g'(t) = -4\sqrt{2}t + 4 = 4(1 - \sqrt{2}t); \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow 4(1 - \sqrt{2}t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0; 1)$$

$$g(0) = \sqrt{2}; \quad g(1) = 4 - \sqrt{2}; \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } \min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \sqrt{2}; \quad (y = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = 0, \sin 0 = 0)$$

Câu 24. Chọn A.

$$\text{Ta có } y = 5 \cos x - \cos 5x \text{ nên } y' = -5 \sin x + 5 \sin 5x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Trên } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right], \quad y' = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$$

$$y(0) = 4; \quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}; \quad y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]} y = 4 = y(0)$$

Câu 25. Chọn A.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có } y' = \cos x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow \text{giá trị lớn nhất của hàm số bằng } 2.$$

Câu 26. Chọn A.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y' = -2 \sin 2x; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi] \Rightarrow x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}. \text{ Do đó: } y(0) = -2; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \Rightarrow \min y = -4$$

Câu 27. Chọn A.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}. \text{ Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} + 1 > 0; \quad \forall x \in D$$

$$\Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên } D \Rightarrow \min y = 0.$$

Câu 28. Chọn B.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow \min y = -\sqrt{2}; \quad \max y = \sqrt{2}$$

Câu 29. Chọn C.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x \Rightarrow \min y = -1; \quad \max y = 1.$$

Câu 30. Chọn D.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sin^2 x + 2 \leq 3 \Rightarrow \min y = 2; \quad \max y = 3.$$

Câu 31. Chọn B.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có: } y' = -9 \cos x - 3 \cos 3x = -9 \cos x - 12 \cos^3 x + 9 \cos x = -12 \cos^3 x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Vì: } x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Do đó: } y(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8; y(\pi) = 0 \Rightarrow \min y = -8; \max y = 0$$

Câu 32. Chọn D.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \Rightarrow \min y = -2; \max y = 2$$

Câu 33. Chọn B.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y' = -2 \sin x \cos x + 2 \sin x = -2 \sin x (\cos x - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi] \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pi.$$

$$\text{Khi đó: } y(0) = -2; y(\pi) = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = -4.$$

Câu 34. Chọn A.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y' = -2 \sin 2x + 2 \cos x = -2 \cos x (2 \sin x - 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2 \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \\ y_2 = 1 \end{cases}.$$

Câu 35. Chọn C.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y' = -2 \sin 2x - 4 \cos x = -4 \cos x (\sin x + 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}. \text{ Khi đó } y(0) = 5; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Câu 36. Chọn C.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}. \text{ Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}. \text{ Vì } x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 37. Chọn C.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

Ta có: $y' = -\sin x(\sin x + 1) + \cos^2 x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\text{Vì } x \in [0; \pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Khi đó: } y(0) = 1; y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}; y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}; y(\pi) = -1$$

Câu 38. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3\cos x \sin^2 x - 3\sin x \cos^2 x = 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y(\pi) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1; y_2 = -1 \Rightarrow y_1 - y_2 = 2$$

Câu 39. Chọn D.

Hàm số $y = e^x(x^2 - x - 1)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$

Ta có $y' = (e^x)'(x^2 - x - 1) + e^x(x^2 - x - 1)' = e^x(x^2 - x - 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x - 2)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 2) \\ x = -2 \notin (0; 2) \end{cases}$$

Ta có, $f(1) = -e$; $f(0) = -1$; $f(2) = e^2$. Vậy: $\min_{x \in [0; 2]} y = y(1) = -e$

Câu 40. Chọn B.

Hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$

Ta có $y' = (e^x)'(x^2 - 3) + e^x(x^2 - 3)' = e^x(x^2 - 3) + e^x \cdot 2x = e^x(x^2 + 2x - 3)$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (-2; 2) \\ x = -3 \notin (-2; 2) \end{cases}$$

Ta có, $f(1) = -2e$; $f(-2) = e^{-2}$; $f(2) = e^2$. Vậy, $\min_{x \in [-2; 2]} y = y(1) = -2e$

Câu 41. Chọn A.

Hàm số $y = e^x + 4e^{-x} + 3x$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$

Ta có: $y' = e^x - 4e^{-x} + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} + 3 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + 3e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin [1; 2]$$

Ta có, $y(1) = e + \frac{4}{e} + 3$; $y(2) = e^2 + \frac{4}{e^2} + 6$. Vậy: $\max_{x \in [1; 2]} y = y(2) = e^2 + \frac{4}{e^2} + 6$

Câu 42. Chọn D.

Hàm số $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$

Ta có: $f'(x) = e^{-2x}(1-2x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0;1)$

$$f(0) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}; f(1) = \frac{1}{e^2}. \text{ Vậy } \max_{x \in [0;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$$

Câu 43. Chọn A.

Hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1-2x)$ liên tục trên đoạn $[-2;0]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x + \frac{2}{1-2x} = \frac{-2(2x+1)(x-1)}{1-2x}$$

$$\text{Suy ra trên khoảng } (-2;0): f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } f(0) = 0; f(-2) = 4 - \ln 5; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2$$

$$M = \max_{x \in [-2;0]} f(x) = f(-2) = 4 - \ln 5; m = \min_{x \in [-2;0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2$$

$$\text{Vậy: } M + m = \frac{17}{4} - \ln 10$$

Câu 44. Chọn B.

$$\bullet f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \left(x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6} \right] \right)$$

$$\bullet f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2. \text{ Vậy } \max_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 2, \min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]} f(x) = 1.$$

Câu 45. Chọn A.

$$\bullet f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x = 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = \frac{\pi}{3} \end{cases} \left(x \in \left[0; \frac{3\pi}{2} \right] \right)$$

$$\bullet f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, f(\pi) = 0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \min_{\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = -2.$$

Câu 46. Chọn D.

$$\bullet y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pi \left(x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right)$$

• Bảng biến thiên:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	
y'		+	0	-
y			-1	
		$-\infty$		$-\infty$

$$\bullet \text{ Vậy } \max_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y = -1 \text{ và } \min_{\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)} y \text{ không tồn tại.}$$

Câu 47. Chọn B.

- $y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} (x \in (0; \pi))$

- Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y'		- 0 +	
y		$+\infty$	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		1	

- Vậy $\min_{(0;\pi)} y = 1$ và $\max_{(0;\pi)} y$ không tồn tại.

Câu 48. Chọn C.

TXĐ: $D = [-1; 1]$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ với } -1 < x < 1. \quad y' = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y(\pm 1) = 0; y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } M = \max_{[-1;1]} y = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}; m = \min_{[-1;1]} y = y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow M + m = 0$$

Câu 49. Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		5		$+\infty$

$$\text{Do đó } \min_{\mathbb{R}} y = y(1) = 5$$

Câu 50. Chọn A.

TXĐ $D = \mathbb{R}$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } y' = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$

Vậy $\min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ khi $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Câu 51. Chọn D.

Điều kiện $-4 \leq x \leq 4$. Nhận xét: Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$

Đặt $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} \Rightarrow t^2 = x+4+4-x+2\sqrt{(x+4)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+4)(4-x)} = \frac{t^2-8}{2}$

Ta có $y = t - 4\left(\frac{t^2-8}{2}\right) + 5 = -2t^2 + t + 21 = f(t)$

Tìm điều kiện của t : Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ với $x \in [-4; 4]$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $g(-4) = 2\sqrt{2}$; $g(0) = 4$; $g(4) = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \min_{x \in [-4; 4]} g(x) = 2\sqrt{2}$; $\max_{x \in [-4; 4]} g(x) = 4 \Rightarrow t \in [2\sqrt{2}; 4]$

$f'(t) = -4t + 1 < 0 \forall t \in [2\sqrt{2}; 4] \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[2\sqrt{2}; 4]$

$\max_{[-4; 4]} y = f(2\sqrt{2}) = 5 + 2\sqrt{2}$

Câu 52. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

Ta tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$. Đó cũng là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 4t + 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in (-1; 1)$; $f(-1) = -1$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$; $f(1) = 3$

$\max_{t \in [-1; 1]} f(t) = f(1) = 3$. Do đó $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 3$

Câu 53. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Biến đổi $y = 2\sin^4 x - \sin^2 x + 4$. Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1$

Xét hàm số $f(t) = 2t^4 - t^2 + 4$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$. $f'(t) = 8t^3 - 2t = 2t(4t^2 - 1)$

Trên khoảng $(0; 1)$ phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

Ta có: $f(0) = 4$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{8}$; $f(1) = 5$

Vậy $\min_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{31}{8}$ tại $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \min_R y = \frac{31}{8}$ khi $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Câu 54. Chọn C.

Do $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ nên ta có

$S = y = 2\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^4 + \cos^4 2x = \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)^4 + \cos^4 2x$

Đặt $t = \cos 2x$, $-1 \leq t \leq 1$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $S = g(t) = \frac{1}{8}(1-t)^4 + t^4$, với $-1 \leq t \leq 1$

Ta có $g'(t) = -\frac{1}{2}(1-t)^3 + 4t^3$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow (1-t)^3 = 8t^3 \Leftrightarrow 1-t = 2t \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

$g(1) = 1$; $g(-1) = 3$; $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

Vậy $m = \min S = \frac{1}{27}$; $M = \max S = 3$ nên $M + m = 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27}$

Câu 55. Chọn A.

Nhận xét: Ta quy về hết $\sin^2 x$

Đặt $t = \sin^2 x$ ($0 \leq t \leq 1$). Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t) = t^{10} + (1-t)^{10}$ với $t \in [0;1]$

$$f'(t) = 10t^9 - 10(1-t)^9; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^9 = (1-t)^9 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 1; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{512}; f(1) = 1.$$

$$\text{Vậy } m = \min y = \frac{1}{512}; M = \max y = 1 \text{ nên } M.m = \frac{1}{512}$$

Câu 56. Chọn D.

$$\text{TXĐ: } D = [-1; +\infty). \text{ Ta có: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$+\infty$
y'	0	$+$
y	0	$+\infty$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $x = -1$

Câu 57. Chọn B.

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Ta có: } y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}; y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 58. Chọn C.

$$\text{TXĐ: } D = [-1;1]. \text{ Ta có: } y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Khi đó: } y(-1) = \sqrt{2}; y(0) = 2; y(1) = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2, giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Câu 59. Chọn B.

$$\text{TXĐ: } D = [2; +\infty). \text{ Ta có: } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}} < 0; \forall x \in [2; +\infty)$$

BBT:

x	2	$+\infty$
y'		-
y	$\sqrt{3}$	0

Từ BBT ta thấy hàm số đã cho có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 60. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0; \forall x \in D$

BBT:

x	3	4
y'		-
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{6}$

Từ BBT ta thấy hàm số có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là $y_1 = \frac{3}{2}; y_2 = \frac{5}{6} \Rightarrow y_1 \cdot y_2 = \frac{5}{4}$.

Câu 61. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}$

Ta có: $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} < 0; \forall x \in D$

BBT:

x	-5	-3
y'		-
y	$-\frac{47}{60}$	$-\frac{11}{6}$

Từ BBT ta thấy, hàm số có giá trị lớn nhất bằng $-\frac{47}{60}$.

Câu 62. Chọn B.

TXĐ: $D = [1; +\infty)$. Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$

BBT:

x	1	$\frac{5}{4}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	1				0

$\swarrow$ $\searrow$

$\frac{3}{4}$

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ và giá trị lớn nhất bằng 1

Câu 63. Chọn B.

TXĐ: $D = [-1; 1]$.

Ta có: $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = x \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Khi đó: $y(-1) = \sqrt{2}$; $y(0) = 2$; $y(1) = \sqrt{2}$.

Câu 64. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Mà $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 1$.

Câu 65. Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x$

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos 2x \leq 1 \Rightarrow \max y = 1$.

Câu 66. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sqrt{1 + 2\sin x \cdot \cos x} = \sqrt{1 + \sin 2x}$; $y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Khi đó: $y(0) = 1$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Câu 67. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$
 $= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

Mà: $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow \min y = \frac{1}{4}$; $\max y = 1$.

Câu 68. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = x^2 + 2x + 3$ ($t \geq 2$), Khi đó hàm số trở thành: $y = t(t-5) = t^2 - 5t$

Ta có: $y' = 2t - 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên:

x	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'		- 0 +	
y	-6	$-\frac{25}{4}$	$+\infty$

Từ BBT, ta thấy hàm số không có giá trị lớn nhất.

Câu 69. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đặt: $t = \sqrt{x^2 + 1} (t \geq 1) \Rightarrow x^2 = t^2 - 1$. Khi đó hàm số trở thành: $y = t - \frac{3}{t} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{t^2} > 0 \Rightarrow$

Hàm số luôn đồng biến với mọi $t \geq 1 \Rightarrow \min y = y(1) = -2$.

Câu 70. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6)$

Đặt: $t = x^2 - 5x + 4 \left(-\frac{9}{4} \leq t \leq 10 \right)$

Khi đó hàm số trở thành: $y = f(t) = t(t+2) = t^2 + 2t \Rightarrow f'(t) = 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

BBT:

t	$-\frac{9}{4}$	-1	10
$f'(t)$		- 0 +	
$f(t)$	$\frac{9}{16}$	-1	120

Từ BBT ta thấy: Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 120 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

Câu 71. Chọn B.

TXĐ: $D = [-3; 1]$. Đặt: $t = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} (2 \leq t \leq 2\sqrt{2}) \Rightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{3+x} = \frac{t^2 - 4}{2}$

Khi đó phương trình trở thành: $y = \frac{t^2}{2} + t - 2 \Rightarrow y' = t + 1 > 0; \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Rightarrow \min y = y(2) = 2; \max y = y(2\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$.

Câu 72. Chọn A.

TXĐ: $D = [-2; 2]$.

Đặt: $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} (2 \leq t \leq 2\sqrt{2}) \Rightarrow 2\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{2-x}\sqrt{2+x} = t^2 - 4$

Khi đó hàm số trở thành: $y = f(t) = t^2 + t - 4 \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 > 0; \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t \in [2; 2\sqrt{2}]$

$\Rightarrow \min y = f(2) = 2; \max y = f(2\sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$.

Câu 73. Chọn A.

TXĐ: $D = [-1; +\infty)$. Đặt $t = \sqrt[6]{x+1} (1 \leq t \leq 2)$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^3 + t^2 \Rightarrow y' = 3t^2 + 2t > 0; \forall t \in [1; 2]$

$\Rightarrow \min y = y(1) = 2; \max y = y(2) = 12.$

Câu 74. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đặt $t = \sin x; (-1 \leq t \leq 1)$. Khi đó hàm số trở thành:

$$y = \frac{t+1}{t^2+3} \Rightarrow y' = \frac{-t^2-2t+3}{(t^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3(l) \end{cases}. \text{ Do đó } y(-1) = 0; y(1) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2}$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Câu 75. Chọn D.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x} \left(2 \leq t \leq \frac{10}{3} \right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \in \left[2; \frac{10}{3} \right]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\forall t \in \left[2; \frac{10}{3} \right]$. (chỗ này còn thiếu)

Câu 76. Chọn B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = x^4 - 1 (0 \leq t \leq 15)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = (t+1)^2 + t^2 = 2t^2 + 2t + 1 \Rightarrow y' = 4t + 2 > 0; \forall t \in [0; 15]$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 15]$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = 15 \Leftrightarrow x = 2$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 77. Chọn A.

TXĐ: $D = (-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x + 2} (t \geq 0)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = t^2 + t - 2 \Rightarrow y' = 2t + 1 > 0; \forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến với mọi $t \geq 0 \Rightarrow \min y = y(0) = -2$.

Câu 78. Chọn A.

TXĐ: $D = [0; +\infty)$. Đặt $t = \sqrt{x}; (x \in [0; 4] \Rightarrow 0 \leq t \leq 2)$.

Khi đó hàm số trở thành: $y = t + \frac{t}{t+1} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{(t+1)^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến

$$\forall t \in [0; 2] \Rightarrow \min y = y(0) = 0; \max y = y(2) = \frac{8}{3}.$$

Câu 79. Chọn C.

Cách 1: Gọi cạnh của hình chữ nhật: $a, b; 0 < a, b < 8$.

Ta có: $2(a+b) = 16 \Leftrightarrow a+b = 8 \Leftrightarrow b = 8-a$

Diện tích: $S(a) = a(8-a) = -a^2 + 8a; S'(a) = -2a + 8; S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$

Bảng biến thiên:

a	0	4	8	
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$	0	$\nearrow$ 16	$\searrow$ 0	

Cách 2

Áp dụng Côsi: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 4$

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 16 khi cạnh bằng 4

Câu 80. Chọn A.

Cách 1

Gọi cạnh của hình chữ nhật: a, b ; $0 < a, b \leq 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \frac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \frac{48}{a}\right)$

$P'(a) = 2\left(1 - \frac{48}{a^2}\right)$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0	$4\sqrt{3}$	48	
$P'(a)$		-	0	+
$P(a)$			$16\sqrt{3}$	

Cách 2

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow$ chu vi nhỏ nhất: $2(a + b) = 16\sqrt{3}$
- Hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 81. Chọn C.

Gọi một trong hai số phải tìm là x , số còn lại: $x + 13$.

Tích hai số $P(x) = x(x + 13) = x^2 + 13x$. $P'(x) = 2x + 13$, $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{-13}{2}$	$+\infty$
$P'(x)$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+\infty$	$\frac{-169}{4}$	$+\infty$

Tích của chúng bé nhất bằng $\frac{-169}{4}$ khi hai số là $\frac{13}{2}$ và $\frac{-13}{2}$.

Câu 82. Chọn A.

Vận tốc của chuyển động là $v = s'$ tức là $v(t) = 12t - 3t^2$, $t > 0$

$v'(t) = 12 - 6t$, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bảng biến thiên:

t	0	2	$+\infty$	
$v'(t)$		+	0	-
$v(t)$			12	

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$\Leftrightarrow \text{Max } v(t) = 12$ khi $t = 2$. Vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 12 khi $t = 2$.

Câu 83. Chọn A.

Cạnh góc vuông x , $0 < x < \frac{a}{2}$; cạnh huyền: $a - x$

Cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(a-x)^2 - x^2}$

Diện tích tam giác $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - 2ax}$. $S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	

Tam giác có diện tích lớn nhất bằng $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi cạnh góc vuông $\frac{a}{3}$, cạnh huyền $\frac{2a}{3}$.

Câu 84. Chọn A.

Sau một vụ, trung bình số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ cân nặng:

$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$ (gam). $f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12$

Bảng biến thiên:

n	0	12	$+\infty$
$f'(n)$	+	0	-
$f(n)$	$f(12)$		

Trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, cần thả 12 con cá thì sau một vụ thu hoạch được nhiều gam cá nhất.

Câu 85. Chọn B.

Ta có: $G(x) = 0.75x^2 - 0.025x^3$, $x > 0$; $G'(x) = 1.5x - 0.075x^2$; $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 20$

Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$	
$G'(x)$		+	0	-
$G(x)$			100	

Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg, độ giảm là 100.

Câu 86. Chọn D.

Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 6$ (km/h)

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t = \frac{300}{v-6}$ ($v > 6$)

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300km là: $E(v) = cv^3 \frac{300}{v-6} = 300c \frac{v^3}{v-6}$

$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2}$; $E'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 9$ do ($v > 6$)

Bảng biến thiên:

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$	-	0	+
$E(v)$	$E(9)$		

Cá phải bơi với vận tốc 9 (km/h) thì ít tiêu hao năng lượng nhất.

Câu 87. Chọn D.

$$f'(t) = 90t - 3t^2; f''(t) = 90 - 6t, f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

Bảng biến thiên

t	0	15	25	
$f''(t)$		+	0	-
$f'(t)$			675	

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là vào ngày thứ 15.

Câu 88. Chọn D.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{2}$.

Đặt $BM = x \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$

Ta có: $MN = 2MH = a - 2x$, $QM = BM \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$S(x) = (a - 2x)x\sqrt{3} = a\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$$

$$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x), S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	
$S'(x)$		+	0	-
$S(x)$			$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$	

Vị trí điểm M : $BM = \frac{a}{4}$

Câu 89. Chọn C.

Thể tích của hộp là: $V = x^2h = 500(\text{cm}^3)$. Do đó $h = \frac{500}{x^2}$, $x > 0$.

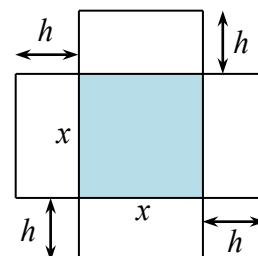
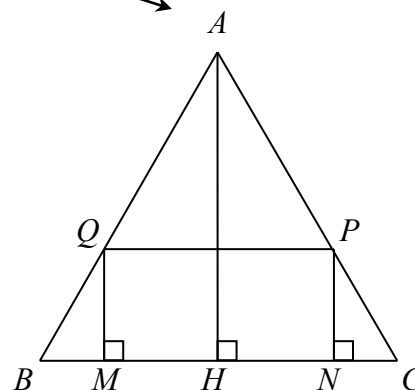
Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là:

$$S(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$$

$$S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}, S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$	
$S'(x)$		-	0	+
$S(x)$			300	



Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất, ta lấy độ dài cạnh đáy hình hộp là $x = 10$ (cm).

Câu 90. Chọn B.

Gọi chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h , r và V . Khi

đó, $V = \pi r^2 h$. Vì $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ nên $V = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right)$.

$$V(h) = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4} \right), h \in (0; 2R); V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3h^2}{4} \right); V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

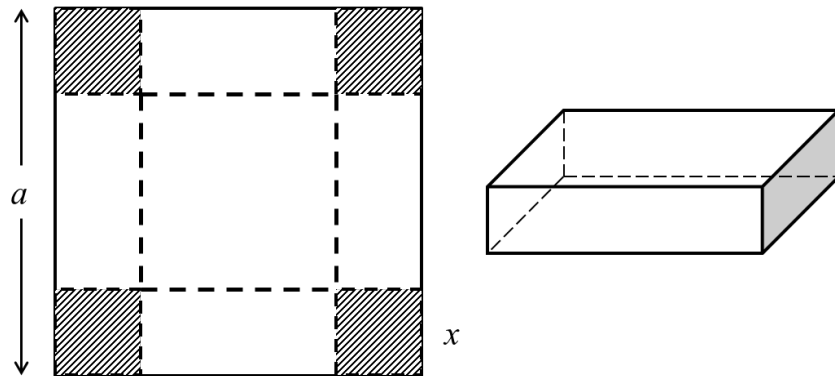
Bảng biến thiên:

h	0	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$2R$	
$V'(h)$		+	0	-
$V(h)$	0	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	0	

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích hình trụ là $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 91. Chọn B.



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a - 2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2} \right)$.

$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 6x); V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \left(0 < x < \frac{a}{2} \right).$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	$\frac{2a^3}{27}$	0	

Vậy trong khoảng $\left(0; \frac{a}{2} \right)$ có 1 điểm cực đại duy nhất là $x = \frac{a}{6}$ tại đó $V(x) = \frac{2a^3}{27}$.

Câu 92. Chọn C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$. Khi đó $y = f(t) = 2t^2 + 2t - 1$

$$f'(t) = 4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \in [-1; 1] \Rightarrow f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-3}{2}; f(-1) = -1; f(1) = 3$$

Vậy $\min_R y = \frac{-3}{2}, \max_R y = 3.$

Câu 93. Chọn A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y = 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x = -4\sin^2 x + 2\sin x + 2$$

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$, khi đó $y = f(t) = -4t^2 + 2t + 2$

$$f'(t) = -8t + 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}; f(-1) = -4; f(1) = 0$$

Vậy $\min_R y = -4, \max_R y = \frac{9}{4}$

Câu 94. Chọn B.

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t + 5. f'(t) = 2t - 4; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \notin [0; 1]$

$f(0) = 5; f(1) = 2.$ Vậy $\min_R y = 2, \max_R y = 5$

Câu 95. Chọn C.

$y = \sin^4 x - \sin^2 x + 3.$ Đặt $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = t^2 - t + 3$

$$f'(t) = 2t - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in [0; 1] \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4}; f(0) = 3; f(1) = 3$$

Vậy $\min_R y = \frac{11}{4}, \max_R y = 3$

Câu 96. Chọn D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$ Đặt $t = |\cos x|, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{2t^2 + t + 1}{t + 1}, 0 \leq t \leq 1$

$$f'(t) = \frac{2t^2 + 4t}{(t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \notin [0; 1] \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1, f(1) = 2$$

Vậy $\min_R y = 1, \max_R y = 2$

Câu 97. Chọn B.

Đặt $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1 \Rightarrow y = f(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 1}, f'(t) = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [-1; 1] \\ t = -2 \notin [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow f(0) = 1, f(-1) = 0, f(1) = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } M = 1, m = 0$$

Câu 98. Chọn D.

Ta có $y' = x^2 - x - 6 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y(0) = 3, y(4) = -\frac{23}{3}, y(3) = -\frac{21}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$ là 3.

Câu 99. Chọn C.

Hàm số $y = (x + 3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ có tập xác định $D = [-3; 1]$

$$y' = \frac{-2x^2 - 6x}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (-3; 1) \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y(-3) = 0, y(1) = 0, y(0) = 3\sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x + 3)\sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ là 0

Câu 100. Chọn B.

Hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ có tập xác định $D = [2; 4]$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (2; 4) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y(2) = \sqrt{2}, y(3) = 2, y(4) = \sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ là 2

Câu 101. Chọn C.

$$y = 2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1 = \frac{3\cos 2x + 5}{2} \Rightarrow 1 \leq y \leq 4$$

Vậy hàm số $y = 2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1$ có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 102. Chọn C.

Hàm số $y = x + \sqrt{18-x^2}$ có tập xác định $D = [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

$$y' = \frac{\sqrt{18-x^2} - x}{\sqrt{18-x^2}} \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ x \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow y(-3\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}, y(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}, y(3) = 6$$

Vậy hàm số $y = x + \sqrt{18-x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng 6.

Câu 103. Chọn B.

Đặt $t = \cos x (-1 \leq t \leq 1)$. Xét hàm $y = 2t^3 - \frac{7}{2}t^2 - 3t + 5$ trên đoạn $[-1; 1]$

$$y' = 6t^2 - 7t - 3 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ t \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}; y(-1) = \frac{5}{2}, y(1) = \frac{1}{2}, y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{299}{54}.$$

Vậy hàm số $y = 2\cos^3 x - \frac{7}{2}\cos^2 x - 3\cos x + 5$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 104. Chọn D.

$$y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4 = -2\sin^3 x - 6\sin^2 x - 6\sin x + 7$$

Đặt $t = \sin x (-1 \leq t \leq 1)$. Xét hàm $y = -2t^3 - 6t^2 - 6t + 7$ trên đoạn $[-1; 1]$

$$y' = -6t^2 - 12t - 6 \Rightarrow y' = 0 \text{ vô nghiệm. Ta có: } y(-1) = 9, y(1) = -7$$

Vậy hàm số $y = -2\sin^3 x + 3\cos 2x - 6\sin x + 4$ có giá trị lớn nhất bằng 9.

Câu 105. Chọn B.

$$\text{Ta có } y = 3 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in [0; 2]$$

$$\text{Khi đó } P = x^3 + 2(3-x)^2 + 3x^2 + 4x(3-x) - 5x = x^3 + x^2 - 5x + 18$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 18$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(0) = 18, f(1) = 15, f(2) = 20$$

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 + 3x^2 + 4xy - 5x$ lần lượt bằng 20 và 15.

Câu 106. Chọn C.

$$\text{Ta có: } y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} - x}. \text{ Hàm số } y \text{ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng } (0; +\infty)$$

khi hàm số $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - x$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = \frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}} - 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$\min_{(0;+\infty)} f(x) = f\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \max_{(0;+\infty)} y = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Câu 107. Chọn C.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\sqrt{45+20x^2} = \sqrt{5(9+4x^2)} = \sqrt{(2^2+1^2)(3^2+(2x)^2)} \geq |2 \cdot 3 + 1 \cdot 2x| = |6+2x|$$

Suy ra $y \geq |6+2x| + |2x-3|$. Áp dụng bất đẳng thức $|a|+|b| \geq |a+b|$ ta được:

$$|6+2x| + |2x-3| = |6+2x| + |3-2x| \geq |6+2x+3-2x| = 9 \Rightarrow y \geq 9$$

Vậy hàm số $y = \sqrt{45+20x^2} + |2x-3|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 9.

Câu 108. Chọn B.

TXĐ: $D = [-2; 2]$. Hàm số $y = f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

$$y(-2) = -2; y(2) = 2; y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } \min_{[-2;2]} y = y(-2) = -2$$

Câu 109. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Do } y(-1) = 0, y(1) = \sqrt{2}, y(2) = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ nên}$$

$$\max_{[-1;2]} y = y(1) = \sqrt{2}, \min_{[-1;2]} y = y(-1) = 0$$

Câu 110. Chọn C.

Hàm số xác định với $\forall x \in [1; e^3]$

Hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ liên tục trên đoạn $[1; e^3]$. Ta có $y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (1; e^3) \\ x = e^2 \in (1; e^3) \end{cases}. \text{ Khi đó } y(1) = 0; y(e^2) = \frac{4}{e^2}; y(e^3) = \frac{9}{e^3}$$

$$\text{So sánh các giá trị trên, ta có } \max_{[1; e^3]} y = y(e^2) = \frac{4}{e^2}$$

Câu 111. Chọn A.

Hàm số xác định, liên tục trên đoạn $[0; 2]$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0; 2) \\ x = -2 \notin (0; 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(0) = 3; y(2) = \frac{17}{3}. \text{ Vậy } \max_{x \in [0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}; \min_{x \in [0;2]} y = y(0) = 3$$

Câu 112. Chọn A.

$$\begin{aligned} \text{Do } x+y=1 \text{ nên } S &= 16x^2y^2 + 12(x+y)(x^2-xy+y^2) + 34xy \\ &= 16x^2y^2 + 12[(x+y)^2 - 3xy] + 34xy, \text{ do } x+y=1 \Rightarrow S = 16x^2y^2 - 2xy + 12 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = xy. \text{ Do } x \geq 0; y \geq 0 \text{ nên } 0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow t \in [0; \frac{1}{4}]$$

Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên $[0; \frac{1}{4}]$. Ta có $f'(t) = 32t - 2$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$		
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	12		$\frac{191}{16}$		$\frac{25}{2}$

Từ bảng biến thiên ta có:

$$\min_{[0; \frac{1}{4}]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}; \max_{[0; \frac{1}{4}]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{25}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{191}{16}$ đạt được khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right) \\ (x,y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$

Câu 113. Chọn A.

Ta có $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2) = (x+y)^3 - 3(x+y) - 6xy + 6$$

$$\Rightarrow K \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$$

Đặt $t = x+y$. Do $0 \leq x+y \leq 8$ nên $t \in [0; 8]$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6$ trên $[0; 8]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

$$f(0) = 6; f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}; f(8) = 398. \text{ Suy ra } A \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$$

Khi $x = y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ thì dấu bằng xảy ra. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17-5\sqrt{5}}{4}$

Câu 114. Chọn D.

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2.$$

Đặt $x = ty$. Từ giả thiết ta có: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow (t+1)ty^3 = (t^2 - t + 1)y^2$

$$\text{Do đó } y = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t}; x = ty = \frac{t^2 - t + 1}{t + 1}. \text{ Từ đó } A = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1}\right)^2.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - t + 1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-3t^2 + 3}{(t^2 - t + 1)^2}.$$

Lập bảng biến thiên ta tìm giá trị lớn nhất của A là: 16 đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 115. Chọn C.

Với a, b là các số thực dương, ta có:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) + ab &= (a+b)(ab+2) \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) + ab = a^2b + ab^2 + 2(a+b) \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 &= (a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$(a+b) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)}$$

$$\text{Suy ra: } 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 \geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq \frac{5}{2}.$$

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, $t \geq \frac{5}{2}$. Ta được: $P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$.

Xét hàm số: $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ với $t \geq \frac{5}{2}$

$$f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0, \forall t \geq \frac{5}{2}. \text{ Suy ra } \min_{\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \min P &= -\frac{23}{4} \text{ đạt được khi và chỉ khi } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \text{ và } a+b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &\Leftrightarrow (a;b) = (2;1) \text{ hoặc } (a;b) = (1;2) \end{aligned}$$

Câu 116. Chọn D.

Do $1 \leq x \leq 2$; $1 \leq y \leq 2$ nên $(x-1)(x-2) \leq 0$, nghĩa là $x^2 + 2 \leq 3x$. Tương tự $y^2 + 2 \leq 3y$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{x+2y}{3x+3y+3} + \frac{y+2x}{3y+3x+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

Đặt $t = x+y$ suy ra $2 \leq t \leq 4$. Xét $f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$, với $2 \leq t \leq 4$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

Mà $f(2) = \frac{11}{12}$; $f(3) = \frac{7}{8}$; $f(4) = \frac{53}{60}$ nên $f(t) \geq f(3) = \frac{7}{8}$. Do đó $P \geq \frac{7}{8}$

Khi $x=1, y=2$ thì $P = \frac{7}{8}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{7}{8}$.