

CHUYÊN ĐỀ:

KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG

Tác giả: Trần Mạnh Tường

Nhóm giáo viên Toán tiếp sức Chinh phục kì thi THPT năm 2020

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Khoảng cách giữa điểm và mặt phẳng

Khoảng cách giữa một điểm và một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới hình chiếu vuông góc của nó lên mặt phẳng đó.

$$d(M, (P)) = MH \text{ (với } H \text{ là hình chiếu vuông góc của } M \text{ lên mặt phẳng } (\alpha)).$$

2. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng này tới mặt phẳng kia.

$$\text{Nếu } \Delta // (P) \text{ thì } d(\Delta, (P)) = d(M; (P)) \text{ với } \forall M \in \Delta$$

3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này tới mặt phẳng kia.

$$\text{Nếu } (P) // (Q) \text{ thì } d((P), (Q)) = d(M; (Q)) = d(N; (P)) \text{ với}$$

$$\forall M \in (P), \forall N \in (Q)$$

4. Các phương pháp thường dùng để tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

a. Dùng định nghĩa

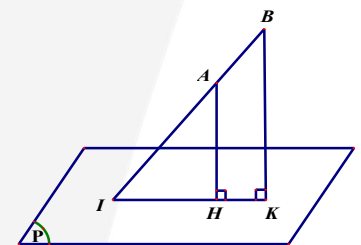
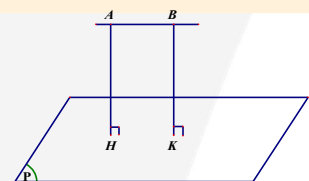
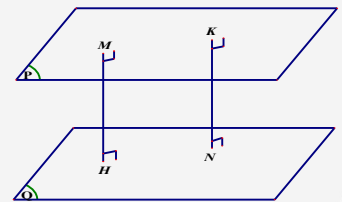
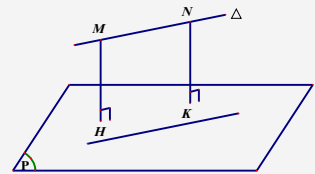
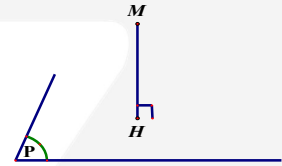
b. Phương pháp đổi điểm (dùng tỉ số khoảng cách)

* **Kiến thức cần nhớ:**

- Nếu đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) thì $d(A; (P)) = d(B; (P))$

- Nếu đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại I thì $\frac{d(A; (P))}{d(B; (P))} = \frac{AI}{BI}$

Chú ý: Khi sử dụng phương pháp này, ta nên cố gắng đưa việc tính khoảng cách từ 1 điểm đến mặt phẳng về việc **tính khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp hoặc lăng trụ đến mặt phẳng**



c. Phương pháp thể tích

* $d(M; (P)) = \frac{3V}{S}$ với V là thể tích của khối chóp có đỉnh là M , S là diện

tích của đáy nằm trên mặt phẳng (P) của khối chóp đó

* $d(M; (P)) = \frac{V}{S}$ với V là thể tích của khối lăng trụ có đỉnh là M , S là

diện tích của đáy nằm trên mặt phẳng (P) của khối lăng trụ đó

d. Một công thức thường dùng trong bài toán tính khoảng cách

Nếu $SI \perp (IAB)$ thì $d(I; (SAB)) = \frac{SI \cdot d(I; AB)}{\sqrt{SI^2 + d^2(I; AB)}}$

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Ví dụ minh họa

Câu 1. (Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng - Sử dụng phương pháp dùng định nghĩa) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC . Khoảng cách từ A đến (MNP) bằng

A. $\frac{17}{65}$.

B. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.

C. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

D. $\frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn D

- Gọi D là trung điểm của $B'C' \Rightarrow \begin{cases} MN \perp A'D \\ MN \perp DP \end{cases} \Rightarrow MN \perp (A'DPA)$

$\Rightarrow (MNP) \perp (A'DPA)$

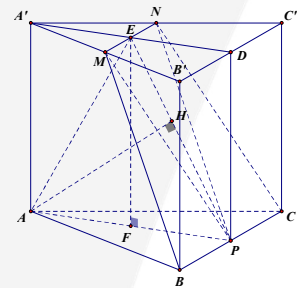
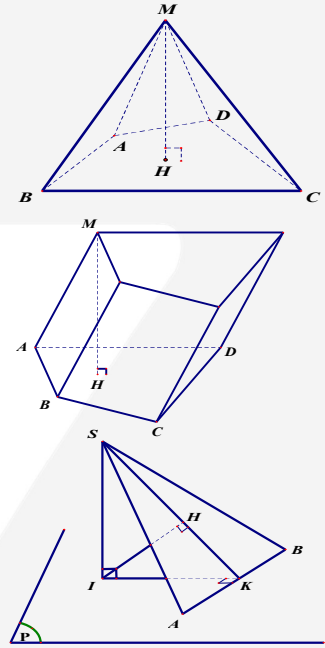
- Gọi $E = MN \cap A'D \Rightarrow EP$ là giao tuyến của (MNP) và $(A'DPA)$.

- Dựng $AH \perp EP \Rightarrow AH \perp (MNP) \Rightarrow AH = d(A; (MNP))$.

- Gọi F là trung điểm của $AP \Rightarrow EF \perp AP$ và $EF = A'A = 2$,
 $FP = \frac{AP}{2} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow EP = \sqrt{EF^2 + FP^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow AH = \frac{EF \cdot AP}{EP} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{5}{2}} = \frac{12}{5}.$$

Vậy $d(A; (MNP)) = \frac{12}{5}$.



Câu 2. (Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng - Sử dụng phương pháp đổi điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. a .

Lời giải

Chọn B

Phân tích: Gọi I là trung điểm AB , ta sẽ có SI là chân đường cao của hình chóp nên ta có ý tưởng đổi việc tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) thành khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SBD) .

* Kẻ $SI \perp AB$.

Do tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AB và $SI \perp (ABCD)$.

$$\Delta SAB \text{ đều cạnh } 2a \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

* Kẻ $IK \perp BD$ ($K \in BD$), $AH \perp BD$ ($H \in BD$)

$$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}AH$$

Kẻ $IJ \perp SK$, ($J \in SK$) (1).

$$\text{Ta có } \begin{cases} IK \perp BD \\ SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SIK) \Rightarrow BD \perp IJ \text{ (2)}.$$

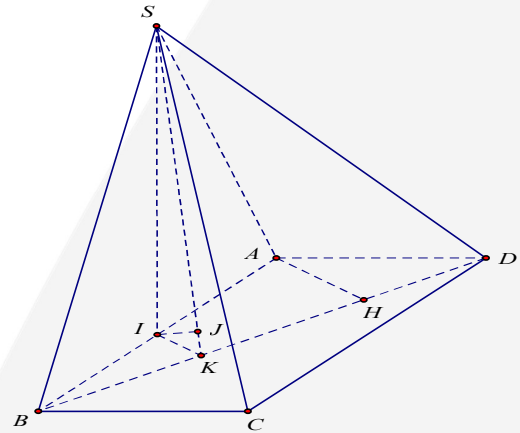
* Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp (SBD) \Rightarrow d(I, (SBD)) = IJ$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow IK = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{1}{IJ^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} \Rightarrow \frac{1}{IJ^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(I, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$I \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn B



Câu 3. (Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng - Sử dụng phương pháp thể tích) Cho hình lăng trụ

đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi K , I lần lượt là trung điểm của CC_1 , BB_1 . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (A_1BK) bằng

A. $a\sqrt{15}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích $\triangle ABC$ là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là:

$$V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 2a\sqrt{5} = a^3 \sqrt{15}$$

Để thấy $V_{ABC.A_1B_1C_1} = V_{K.A_1B_1C_1} + V_{K.ABC} + V_{K.ABB_1A_1}$

$$\text{Mà } V_{K.A_1B_1C_1} = V_{K.ABC} = \frac{1}{6} V_{ABC.A_1B_1C_1} \text{ nên } V_{K.ABB_1A_1} = \frac{2}{3} V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$\text{Ta lại có, } S_{A_1BI} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABB_1A_1} \Rightarrow V_{K.A_1BI} = \frac{1}{4} \cdot V_{K.ABB_1A_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{1}{6} \cdot a^3 \sqrt{15} = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 + (a\sqrt{5})^2} = 2a\sqrt{3}$$

$$A_1K = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1K^2} = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{5})^2} = 3a$$

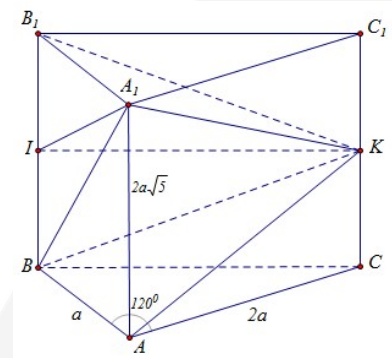
$$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = \sqrt{(2a\sqrt{5})^2 + a^2} = a\sqrt{21}$$

$$\text{Xét thấy } BK^2 + A_1A^2 = A_1B^2 = 21a^2$$

$$\text{Do đó, } \triangle A_1BK \text{ vuông tại } K \Rightarrow S_{A_1BK} = \frac{1}{2} \cdot A_1K \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 2a\sqrt{3} = 3a^2\sqrt{3}$$

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (A_1BK) là:

$$d(I, (A_1BK)) = \frac{3V_{I.A_1BK}}{S_{\triangle A_1BK}} = \frac{3V_{K.A_1BI}}{S_{\triangle A_1BK}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}}{3a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$$



Câu 4. (Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng song song - Sử dụng phương pháp thể tích)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM) .

A. $d = \frac{3a}{2}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{2a}{3}$.

D. $d = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

$$\begin{aligned} d(SB, (ACM)) &= d(B, (ACM)) \\ &= \frac{3V_{M.ABC}}{S_{\Delta ACM}} = \frac{\frac{3}{4}V_{S.ABCD}}{S_{\Delta ACM}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\bullet V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{2}{3} \quad (a=1)$$

$$\bullet AC = \sqrt{2}, AM = \frac{1}{2}\sqrt{1+2^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, MC = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{ACM} = \frac{3}{4}$$

Cách 2

Theo bài ra ta có $SB \parallel (ACM)$.

Qua B ta kẻ đường thẳng x song song với AC , qua A dựng $AE \perp Bx$ thì ta có $(SBx) \parallel (ACM)$

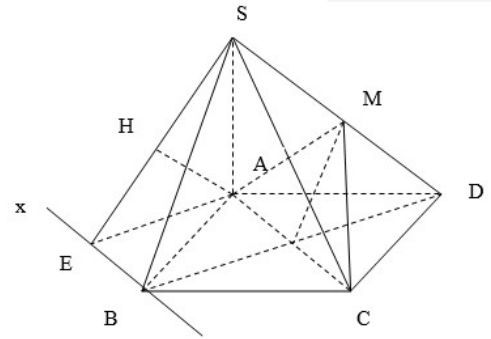
Kẻ $AH \perp SE$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} EB \perp AE \\ EB \perp SA \end{cases} \Rightarrow EB \perp AH$$

Do đó $AH \perp (SBx)$. Khi đó $d(SB, (ACM)) = d((SBx), (ACM)) = d(A, (SBx)) = AH$

$$AE = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SA = 2a \quad (O \text{ là tâm hình vuông } ABCD)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AE \cdot SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \frac{2a}{3}. \text{ Vậy } d = \frac{2a}{3}$$



Câu 5. (Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng song song - Sử dụng phương pháp đổi điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD . Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM)

A. $d = \frac{3a}{2}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{2a}{3}$.

D. $d = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi O là giao điểm của AC, BD

$$\Rightarrow MO \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (ACM)$$

$$\Rightarrow d(SB, (ACM)) = d(B, (ACM)) = d(D, (ACM)).$$

+ Gọi I là trung điểm của AD

$$\Rightarrow \begin{cases} MI \parallel SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \\ d(D, (ACM)) = 2d(I, (ACM)) \end{cases}$$

+ Trong $(ABCD)$: $IK \perp AC$ (với $K \in AC$).

+ Trong (MIK) : $IH \perp MK$ (với $H \in MK$) (1).

+ Ta có: $AC \perp MI, AC \perp IK \Rightarrow AC \perp (MIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2).

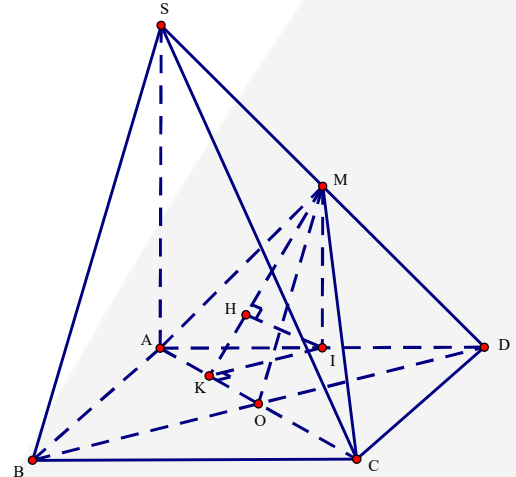
Từ (1) và (2) suy ra $IH \perp (ACM) \Rightarrow d(I, (ACM)) = IH$.

+ Tính IH ?

- Trong tam giác vuông MIK : $IH = \frac{IM \cdot IK}{\sqrt{IM^2 + IK^2}}$.

- Mặt khác: $MI = \frac{SA}{2} = a, IK = \frac{OD}{2} = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}}} = \frac{a}{3}$.

Vậy $d(SB, (ACM)) = \frac{2a}{3}$.



Câu 6. (Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song - Sử dụng phương pháp đổi điểm) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khoảng cách giữa $(AB'C)$ và $(A'DC')$ bằng :

A. $a\sqrt{3}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{a}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

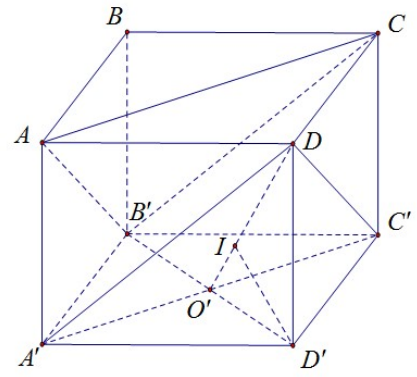
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có

$$d((AB'C), (A'DC')) = d(B', (A'DC')) = d(D', (A'DC'))$$

Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi I là hình chiếu của D' trên $O'D$, suy ra I là hình chiếu của D' trên $(A'DC')$.



$$d[(AB'C), (A'DC')] = d[D', (A'DC')] = D'I = \frac{D'O' \cdot D'D}{\sqrt{D'O'^2 + D'D^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $\widehat{BAD}$ có số đo bằng 60° . Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa $(ABCD)$ và (SAB) bằng 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{3a\sqrt{17}}{14}$.

B. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

C. $\frac{3a\sqrt{17}}{4}$.

D. $\frac{3a\sqrt{7}}{4}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC , góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a bằng

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$

B. $\frac{9a}{2\sqrt{7}}$

C. $\frac{a}{2\sqrt{7}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$.

B. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của BC . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMD) bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{30}}{12}$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$. D. $\frac{3\sqrt{14}a}{28}$.

Câu 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (AIA') và (CJC') .

- A. $d = 2a\sqrt{\frac{5}{2}}$. B. $d = 2a\sqrt{5}$. C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $d = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 12. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng a^3 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$, CC' . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMN) biết rằng BMN là tam giác đều cạnh $2a$.

- A. $\frac{a}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Trên AA', BB' lấy lần lượt các điểm M, N

sao cho $AM = \frac{3a}{4}, BN = \frac{a}{2}$. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng (MNC) là

- A. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$. B. $\frac{2a\sqrt{21}}{63}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$. D. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. D. $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4, AC = BD = 5, AD = BC = 6$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $\widehat{BAD}$ có số đo bằng 60° . Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa $(ABCD)$ và (SAB) bằng 60° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{3a\sqrt{17}}{14}$.

B. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

C. $\frac{3a\sqrt{17}}{4}$.

D. $\frac{3a\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là trọng tâm $\triangle ABC$

Dựng $HK \perp AB, HE \perp CD, HF \perp SE$

Ta có $AB \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ$

Do đó $SH = HK \tan 60^\circ$

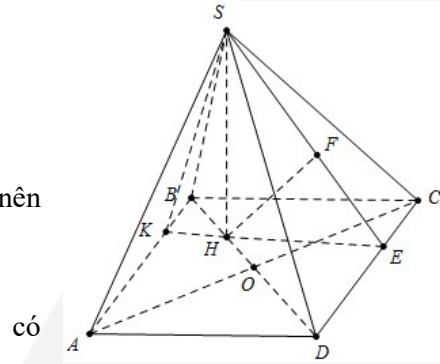
Mặt khác $HK = HB \sin 60^\circ$ (Do $\triangle ABD$ là tam giác đều nên

$\widehat{ABD} = 60^\circ$) suy ra $HK = \frac{a}{3} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$

Lại

$$HE = HD \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HF = \frac{a}{\sqrt{7}} = d(H; (SCD))$$

$$\text{Do đó } \frac{BD}{HD} = \frac{3}{2} \Rightarrow d_B = \frac{3}{2} d_H = \frac{3a\sqrt{17}}{14}.$$



có

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC , góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a bằng

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$

B. $\frac{9a}{2\sqrt{7}}$

C. $\frac{a}{2\sqrt{7}}$

D. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$

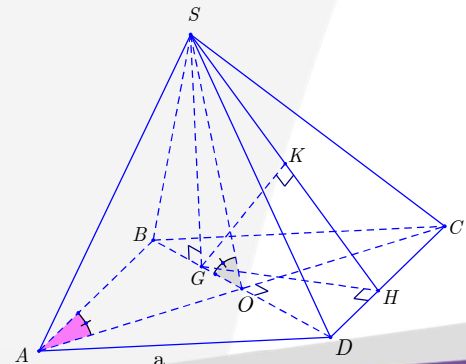
Lời giải

Chọn A

$$\bullet d(B; (SCD)) = \frac{3}{2} d(G; (SCD))$$

$$\bullet \text{ Tính được: } GH = \frac{a\sqrt{3}}{3}; SG = \frac{a}{2}; GK = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } d(B; (SCD)) = \frac{3}{2} d(G; (SCD)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{3a}{2\sqrt{7}}.$$



Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (SAC) .

A. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$.

B. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$.

C. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp: Đưa khoảng cách từ M đến (SAC) về khoảng cách từ H đến (SAC) .

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có $(SC, (ABCD)) = (SC, HC) = \widehat{SCH} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \triangle SHC \text{ vuông cân tại } H \Rightarrow SH = HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow d(M; (SAC)) = \frac{1}{2} d(D; (SAC)) = \frac{1}{2} d(B; (SAC)) = d(H; (SAC))$$

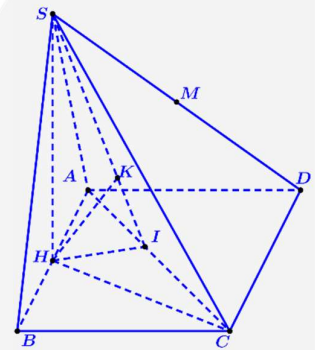
Trong $(ABCD)$ kẻ $HI \perp AC$

Trong (SHI) kẻ $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H; (SAC))$

Ta có

$$\triangle AHI \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{HI}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow HI = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}} = \frac{a\sqrt{1513}}{89}.$$



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB và M là trung điểm của BC . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SMD) bằng:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{30}}{12}$.

C. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

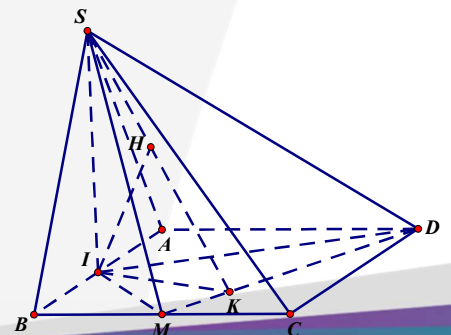
D. $\frac{3\sqrt{14}a}{28}$.

Lời giải

Chọn D

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SI \perp AB, SI \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD).$$

Kẻ $IK \perp MD$ ($K \in MD$), $IH \perp SK$ ($H \in SK$).



Ta có: $SI \perp (ABCD)$, $MD \subset (ABCD) \Rightarrow SI \perp MD$. Vậy $MD \perp (SIK)$ mà $IH \subset (SIK) \Rightarrow MD \perp IH$. Vậy $IH \perp (SMD) \Rightarrow d(I, (SMD)) = IH$.

$$S_{\Delta IMD} = S_{ABCD} - S_{\Delta BIM} - S_{\Delta AID} - S_{\Delta CMD} = a^2 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{8}a^2.$$

$$MD = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta IMD} = \frac{1}{2}IK.MD \Leftrightarrow IK = \frac{2S_{\Delta IMD}}{MD} = \frac{3\sqrt{5}}{10}a.$$

Tam giác SAB vuông cân tại S nên $SI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$.

Xét tam giác SIK vuông tại I có:

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{20}{9a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{56}{9a^2} \Rightarrow IH = \frac{3\sqrt{14}}{28}a. \text{ Vậy } d(I, (SMD)) = \frac{3\sqrt{14}}{28}a.$$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (AIA') và (CJC') .

A. $d = 2a\sqrt{\frac{5}{2}}$.

B. $d = 2a\sqrt{5}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

D. $d = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

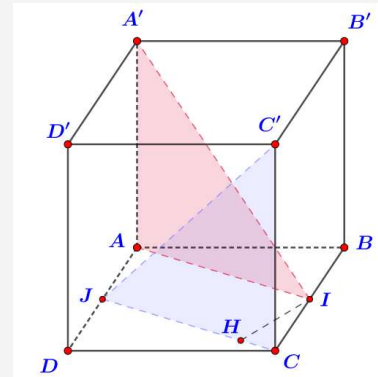
Gọi O là giao điểm của AB và AC .

Ta có:

$$(AIA') \parallel (CJC') \Rightarrow d((AIA'), (CJC')) = d(I, (CJC')) = IH, \text{ với}$$

H là hình chiếu vuông góc của I lên JC . Thật vậy, ta có:

$$\begin{cases} (JCC') \perp (ABCD) \\ (JCC') \cap (ABCD) = JC \Rightarrow IH \perp (JCC'). \\ IH \subset (ABCD), IH \perp JC \end{cases}$$



$$\text{Xét tam giác } JIC \text{ vuông tại } I, \text{ có: } \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IJ^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 12: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng a^3 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', CC'$,. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BMN) biết rằng BMN là tam giác đều cạnh $2a$.

A. $\frac{a}{3}$.

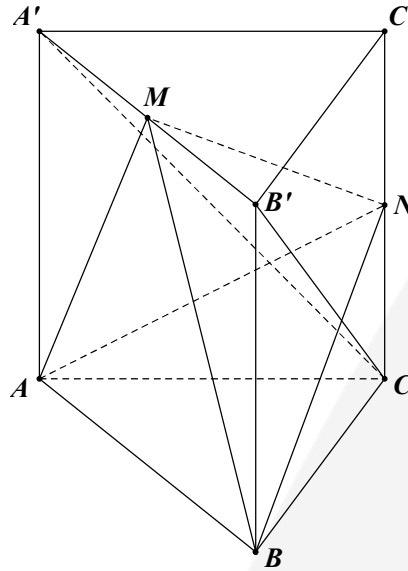
B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $V_{C.AA'B'B} + V_{C.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'}$

$$\Leftrightarrow V_{C.AA'B'B} + \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = V_{ABC.A'B'C'}$$

$$\Leftrightarrow V_{C.AA'B'B} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$$

Ta có: $V_{N.ABM} = \frac{1}{3}.d(N;(ABM)).S_{ABM} = \frac{1}{3}.d(C;(AA'B'B)).\frac{1}{2}.S_{AA'B'B}$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.d(C;(AA'B'B)).S_{AA'B'B} = \frac{1}{2}.V_{C.AA'B'B} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3}{3}.$$

Ta có:

$$V_{A.BMN} = \frac{1}{3}.d(A;(BMN)).S_{BMN} = \frac{1}{3}.d(A;(BMN)).\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.d(A;(BMN)).$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.d(A;(BMN)) = \frac{a^3}{3} \Leftrightarrow d(A;(BMN)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Trên AA' , BB' lấy lần lượt các điểm M, N

sao cho $AM = \frac{3a}{4}, BN = \frac{a}{2}$. Khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng (MNC) là

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

B. $\frac{2a\sqrt{21}}{63}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

D. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

Lời giải

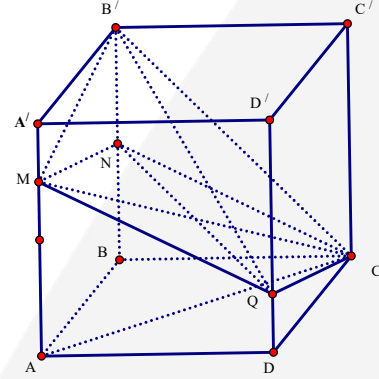
Chọn A

Cách 1:

+Tính $d(B', (MNC))$.

Mặt phẳng (MNC) cắt các cặp mặt đối của hình hộp theo các cặp giao tuyến song song.

Nên thiết diện tạo bởi $mp(MNC)$ và hình hộp là hình bình hành $MNCQ$.



$$V_{B'.MNCQ} = V_{Q.MNB'} + V_{Q.B'NC}.$$

$$\text{Có } V_{Q.MNB'} = \frac{1}{3} d(Q, (ABB'A')) \cdot S_{MNB'} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}.$$

$$\text{Có } V_{Q.B'NC} = \frac{1}{3} d(Q, (CNB')) \cdot S_{CNB'} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}.$$

$$\Rightarrow V_{B'.MNCQ} = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} d(B', (MNCQ)) \cdot S_{MNCQ}.$$

$$\text{Có } MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}, NC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, MC = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + 2a^2} = \frac{a\sqrt{41}}{4}.$$

$$\Rightarrow S_{MNCQ} = 2S_{MNC} = 2\sqrt{p(p-MN)(p-NC)(p-MC)}, p = \frac{MN+NC+MC}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S_{MNCQ} = 2a^2 \frac{\sqrt{21}}{8} = \frac{a^2\sqrt{21}}{4}.$$

$$\Rightarrow d(B', (MNCQ)) = \frac{3V}{S_{MNCQ}} = 3 \frac{a^3}{6} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{21}} = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

$$\text{Vậy } d(B', (MNCQ)) = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Cách 2

$$\text{Có } d(B', (CMN)) = d(B, CMN)$$

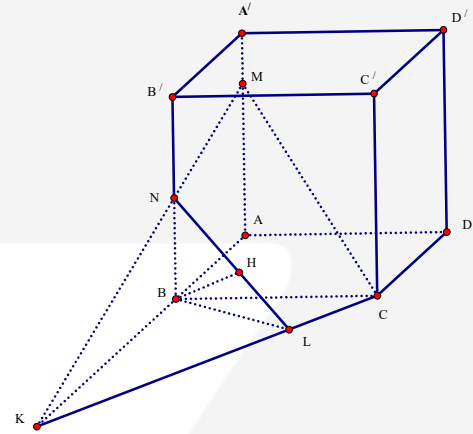
$$\text{Gọi } K = MN \cap AB \Rightarrow (ABCD) \cap (CMN) = CK$$

$$\text{Kẻ } BL \perp CK, L \in CK,$$

$$\text{Kẻ } BH \perp NL, H \in NL \Rightarrow d(B, (CMN)) = BH.$$

$$\text{Có } \frac{BN}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{2}{3} \Rightarrow KB = 2BA = 2a$$

$$\text{Có } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BK^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BN^2} \Rightarrow BH = \frac{2a}{\sqrt{21}}$$



Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

C. $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$.

D. $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , M là trung điểm AB

Ta có tam giác ABD là tam giác đều $\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BD = a$

Kẻ $HK \perp AB \Rightarrow HK \parallel DM$

$$\Rightarrow \frac{HK}{DM} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow HK = DM \cdot \frac{BH}{BD} = \frac{1}{3} DM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

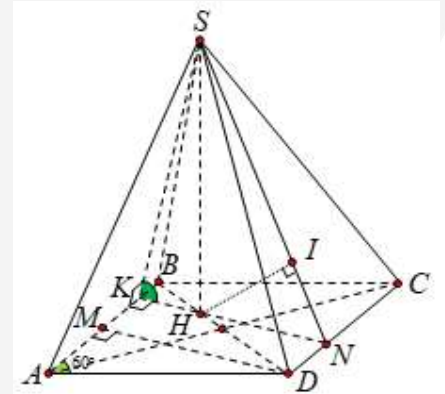
$(SAB) \cap (ABCD) = AB$, $AB \perp HK$, $AB \perp SK$ (định lý ba đường vuông góc)

$$\Rightarrow \widehat{((SAB), (ABCD))} = \widehat{SKH}$$

Tam giác SHK vuông tại H có $SH = HK \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2}$.

Gọi N là giao điểm của HK và CD

Ta có $\begin{cases} HN \perp CD \\ SH \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHN); CD \subset (SCD) \Rightarrow (SCD) \perp (SHN) \text{ và } (SHN) \cap (SCD) = SN$



Trong mặt phẳng (SHN) kẻ $HI \perp SN$ thì $HI \perp (SCD) \Rightarrow HI = d(H, (SCD))$

Tam giác SHN vuông tại H có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2}$, với $HN = \frac{2}{3}DM = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \frac{BD}{HD} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2}d(H, (SCD))$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4$, $AC = BD = 5$, $AD = BC = 6$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$.

C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xây dựng bài toán tổng quát

Từ giả thiết ta có: $MNDC$ là hình thoi; các tam giác CAN , DAM là các tam giác cân, suy ra: $AI \perp NC$, $AI \perp DM$
 $\Rightarrow AI \perp (CDMN)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2}.4V_{A.IMN} = 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA.IM.IN = \frac{1}{3}h.m.n$$

$$\text{Từ } \begin{cases} h^2 + m^2 = c^2 \\ h^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + n^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ n^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ h^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-4^2 + 5^2 + 6^2)(4^2 - 5^2 + 6^2)(4^2 + 5^2 - 6^2)} = \frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

$$p = \frac{BC + CD + DB}{2} = \frac{4 + 5 + 6}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow S_{\triangle BCD} = \sqrt{p(p-4)(p-5)(p-6)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Ta có } d(A, (BCD)) = \frac{3V_{A.BCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot \frac{15\sqrt{6}}{4}}{\frac{15\sqrt{7}}{4}} = \frac{3\sqrt{42}}{7}.$$

