

KỶ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG 2020
PHÁT TRIỂN ĐỀ MINH HỌA
Môn: Toán 12

CÂU 1. Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

- A. 14. B. 48. C. 6. D. 8.

Lời giải.

Cách 1. Tổng số học sinh của nhóm là: $6 + 8 = 14$.

Chọn ra một học sinh, ta có: $C_{14}^1 = 14$ (cách).

Cách 2. Để chọn một học sinh, ta có: 6 cách chọn một học sinh nam và 8 cách chọn một học sinh nữ.

Vậy có: $6 + 8 = 14$ (cách).

Chọn phương án **(A)** □

Câu 1.1. Một nhóm học sinh gồm 9 học sinh nam và x học sinh nữ. Biết rằng có 15 cách chọn ra một học sinh từ nhóm học sinh trên, khi đó giá trị của x là

- A. 24. B. 6. C. 12. D. 225.

Lời giải.

Để chọn ra một học sinh ta có 2 phương án thực hiện:

- Phương án 1: Chọn một học sinh nam, có 9 cách chọn.
- Phương án 2: Chọn một học sinh nữ, có x cách chọn.

Theo quy tắc cộng, ta có: $9 + x$ cách chọn ra một học sinh.

Theo bài ra, ta có: $9 + x = 15 \Leftrightarrow x = 6$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 1.2. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

- A. A_{30}^3 . B. 3^{30} . C. 10. D. C_{30}^3 .

Lời giải.

Chọn 3 người trong 30 người là một tổ hợp chập 3 của 30 phần tử, nên có C_{30}^3 cách chọn.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 1.3. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập hợp con gồm 2 phần tử của M là

- A. A_{10}^8 . B. A_{10}^2 . C. C_{10}^2 . D. 10^2 .

Lời giải.

Số tập hợp con gồm 2 phần tử của tập hợp 10 phần tử là C_{10}^2 .

Chọn phương án **(C)** □

Câu 1.4. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ?

- A. C_{38}^2 . B. A_{38}^2 . C. $C_{20}^2 \cdot C_{18}^1$. D. $C_{20}^1 \cdot C_{18}^1$.

Lời giải.

Chọn 1 nam trong 20 nam có C_{20}^1 cách.

Chọn 1 nữ trong 18 nữ có C_{18}^1 cách.

Theo quy tắc nhân, vậy số cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ là $C_{20}^1 \cdot C_{18}^1$ cách.

Chọn phương án **(D)**



Câu 1.5. Số vec-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác là

A. P_6 .

B. C_6^2 .

C. A_6^2 .

D. 36.

Lời giải.

Chọn hai điểm trong 6 đỉnh của lục giác sắp vào 2 vị trí điểm đầu, điểm cuối của vec-tơ là một chỉnh hợp chập 2 của 6 phần tử, nên có A_6^2 cách.

Chọn phương án **(C)**



Câu 1.6. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

A. 5^5 .

B. $5!$.

C. $4!$.

D. 5.

Lời giải.

Sắp 5 học sinh vào 5 vị trí hàng dọc có $5!$ cách.

Chọn phương án **(B)**



Câu 1.7. Số cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là

A. 6^{10} .

B. $6!$.

C. A_{10}^6 .

D. C_{10}^6 .

Lời giải.

Chọn 6 vị trí trong 10 vị trí hàng ghế để sắp 6 học sinh vào là một chỉnh hợp chập 6 của 10 phần tử, nên có A_{10}^6 cách.

Chọn phương án **(C)**



Câu 1.8. Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ. Số cách chọn 6 người trong đó có đúng 2 nữ là

A. 1078.

B. 1414.

C. 1050.

D. 1386.

Lời giải.

Chọn 2 nữ trong 6 nữ có C_6^2 cách.

Chọn 4 nam trong 8 nam có C_8^4 cách.

Theo quy tắc nhân, vậy số cách chọn 6 người, trong đó có đúng 2 nữ là $C_6^2 \cdot C_8^4 = 1050$ cách.

Chọn phương án **(C)**



Câu 1.9. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng thứ hai có 15 điểm phân biệt, có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho?

A. 1725.

B. 1050.

C. 675.

D. 1275.

Lời giải.

Trường hợp 1: Số tam giác tạo thành từ hai điểm trên đường thẳng thứ nhất và một điểm trên đường thẳng thứ hai là $C_{10}^2 \cdot C_{15}^1 = 675$.

Trường hợp 2: Số tam giác tạo thành từ một điểm trên đường thẳng thứ nhất và hai điểm trên đường thẳng thứ hai là $C_{10}^1 \cdot C_{15}^2 = 1050$.

Vậy có $675 + 1050 = 1725$ tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho.

Chọn phương án **(A)**



Câu 1.10. Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh có cả nam và nữ?

A. 120.

B. 168.

C. 288.

D. 364.

Lời giải.

- Phương án 1: Chọn 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ, có $C_6^2 \cdot C_8^1 = 120$ cách thực hiện.

- Phương án 2: Chọn 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ, có $C_6^1 \cdot C_8^2 = 168$ cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, ta có: $120 + 168 = 288$ cách chọn ra 3 học sinh có cả nam và nữ.

Chọn phương án **C**

□

Câu 1.11. Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất một học sinh nữ?

- A. 1140. B. 2920. C. 1900. D. 900.

Lời giải.

- **Cách 1:**

Để chọn ra 3 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nữ ta có các phương án sau:

- Phương án 1: Chọn 1 học sinh nữ và 2 học sinh nam, có $C_{10}^1 \cdot C_{20}^2$ cách thực hiện.
- Phương án 2: Chọn 2 học sinh nữ và 1 học sinh nam, có $C_{10}^2 \cdot C_{20}^1$ cách thực hiện.
- Phương án 3: Chọn 3 học sinh nữ, có C_{10}^3 cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, ta có: $C_{10}^1 \cdot C_{20}^2 + C_{10}^2 \cdot C_{20}^1 + C_{10}^3 = 2920$ cách chọn ra một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất một học sinh nữ.

- **Cách 2:**

Có C_{30}^3 cách chọn ra 3 học sinh từ 30 học sinh, trong đó có C_{20}^3 cách chọn ra 3 học sinh, không có học sinh nữ.

Suy ra có $C_{30}^3 - C_{20}^3 = 2920$ cách chọn ra một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất một học sinh nữ.

Chọn phương án **B**

□

CÂU 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số đã cho bằng

- A. 3. B. -4. C. 4. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Trong một cấp số nhân, ta có: $u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 2.1. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân.

- A. 24. B. 54. C. 162. D. 48.

Lời giải.

Số hạng thứ 4 của cấp số nhân là $u_4 = u_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 3^3 = 54$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 2.2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. 3. B. -4. C. 4. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

Khi đó, $u_2 = u_1 \cdot q \Leftrightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 2.3. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. $q = 21$. B. $q = \pm 4$. C. $q = 4$. D. $q = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, ta có $u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{2} = 4$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 2.4. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $u_4 = 64$. Công bội q của cấp số nhân đã cho bằng

- A. $q = 21$. B. $q = \pm 4$. C. $q = 4$. D. $q = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, ta có $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{u_4}{u_1} = \frac{64}{1} = 64 \Rightarrow q = \sqrt[3]{64} = 4$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 2.5. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và $u_2 = 8$. Giá trị của u_4 bằng

- A. $\frac{512}{25}$. B. $\frac{125}{512}$. C. $\frac{625}{512}$. D. $\frac{512}{125}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, ta có $u_2 = u_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{5}$.

Vậy $u_4 = u_1 \cdot q^3 = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^3 = \frac{512}{25}$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 2.6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_8 = 26$. Tìm công sai d .

- A. $d = \frac{11}{3}$. B. $d = \frac{10}{3}$. C. $d = \frac{3}{10}$. D. $d = \frac{3}{11}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có $u_8 = u_1 + 7d \Rightarrow d = \frac{u_8 - u_1}{7} = \frac{26 - \frac{1}{3}}{7} = \frac{11}{3}$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 2.7. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_{99} bằng

- A. 401. B. 403. C. 402. D. 404.

Lời giải.

Theo công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng, ta có

$$u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_{99} = u_1 + 98d = 11 + 98 \cdot 4 = 403.$$

Chọn phương án **B**

□

Câu 2.8. Biết bốn số 5, x , 15, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

- A. 50. B. 70. C. 30. D. 80.

Lời giải.

Bốn số 5, x , 15, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng, ta có $\begin{cases} 5 + 15 = 2x \\ x + y = 2 \cdot 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20. \end{cases}$

Vậy $3x + 2y = 70$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 2.9. Cho ba số $x, 5, 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $x, 4, 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x - 2y|$ bằng

- A. 8. B. 9. C. 6. D. 10.

Lời giải.

Ba số $x, 5, 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số $x, 4, 2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân, ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \cdot 5 \\ x \cdot 2y = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ (10 - 2y)y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Với $x = 8, y = 1$ suy ra $|x - 2y| = 6$.

Với $x = 2, y = 4$ suy ra $|x - 2y| = 6$.

Chọn phương án **C** □

Câu 2.10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tổng 16 số hạng đầu tiên bằng

- A. 100. B. 200. C. 400. D. 300.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} &= 100 \\ \Leftrightarrow (u_1 + d) + (u_1 + 7d) + (u_1 + 8d) + (u_1 + 14d) &= 100 \\ \Leftrightarrow 2u_1 + 15d &= 50. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_{16} = \frac{16}{2} [2u_1 + (16 - 1)d] = 8(2u_1 + 15d) = 8 \cdot 50 = 400.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 2.11. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_3 = 9$ và $u_6 = 243$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- A. 3. B. 27. C. $\frac{1}{27}$. D. 126.

Lời giải.

$$\text{Gọi } q \text{ là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có: } \begin{cases} u_3 = u_1 \cdot q^2 \\ u_6 = u_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{u_6}{u_3} = 27 \Rightarrow q = 3.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 2.12. Dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$ là một cấp số nhân với

- A. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1. B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.
C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2. D. Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải.

$$\text{Cấp số nhân đã cho là: } 2; 4; 8; 16; \dots \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{u_2}{u_1} = 2. \end{cases}$$

Chọn phương án **B** □

CÂU 3. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

- A. $4\pi rl$. B. $2\pi rl$. C. πrl . D. $\frac{1}{3}\pi rl$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r là:

$$S_{xq} = \pi r l.$$

Chọn phương án ☒

☐

Câu 3.1. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$ và đường kính đáy bằng $2a$. Tính độ dài đường sinh của hình nón đã cho

A. $3a$.

B. $2a$.

C. $6a$.

D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải.

Bán kính đáy $r = \frac{2a}{2} = a$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot l = 6\pi a^2 \Rightarrow l = 6a$.

Chọn phương án ☒

☐

Câu 3.2. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $2\pi a^2$.

B. $8\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

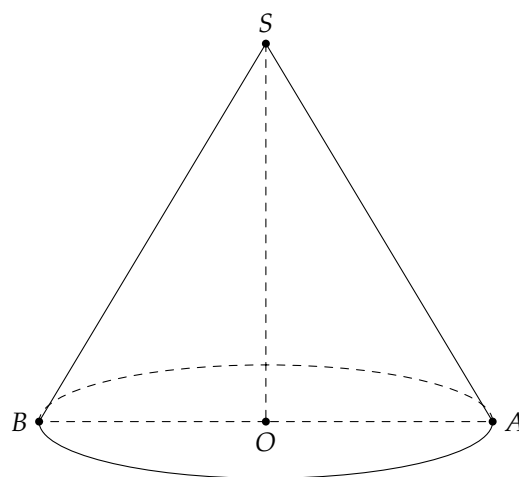
D. $\frac{2}{3}\pi a^2$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều cạnh

bằng $2a$ nên $\begin{cases} l = 2a \\ 2r = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 2a \\ r = a \end{cases}$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$.



Chọn phương án ☒

☐

Câu 3.3. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng

A. $4\pi r l$.

B. $2\pi r l$.

C. $\pi r l$.

D. $\frac{1}{3}\pi r l$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính đáy r bằng $\pi r l$.

Chọn phương án ☒

☐

Câu 3.4. Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón. Công thức nào sau đây đúng về mối liên hệ giữa chúng

A. $l^2 = h^2 + R^2$.

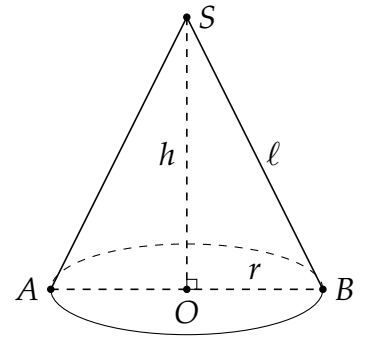
B. $h^2 = R^2 + l^2$.

C. $R^2 = h^2 + l^2$.

D. $l^2 = hR$.

Lời giải.

Theo định lý Pi-ta-go ta có $\ell^2 = h^2 + R^2$.



Chọn phương án **(A)** □

Câu 3.5. Cho hình nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và độ dài đường sinh $\ell = 4$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. 12π . B. $4\sqrt{3}\pi$. C. $\sqrt{39}\pi$. D. $8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{3}\pi$.

Chọn phương án **(B)** □

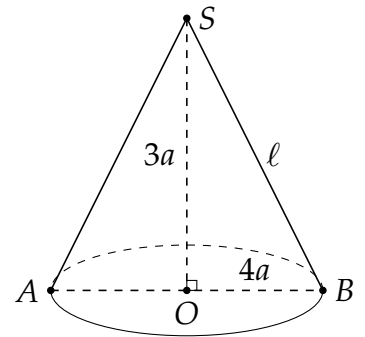
Câu 3.6. Cho hình nón có bán kính đáy $4a$ chiều cao $3a$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón

- A. $S_{xq} = 24\pi a^2$. B. $S_{xq} = 40\pi a^2$. C. $S_{xq} = 20\pi a^2$. D. $S_{xq} = 12\pi a^2$.

Lời giải.

Theo định lý Pi-ta-go ta có $\ell = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi r \ell = \pi \cdot 4a \cdot 5a = 20\pi a^2$.



Chọn phương án **(C)** □

Câu 3.7. Một khối cầu có thể tích bằng $\frac{8\pi}{3}$ thì bán kính bằng

- A. $\sqrt[3]{3}$. B. 2. C. 3. D. $\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ suy ra $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot \frac{8\pi}{3}}{4\pi}} = \sqrt[3]{2}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 3.8. Cho khối cầu (S) có thể tích bằng $36\pi \text{ cm}^3$. Diện tích mặt cầu (S) bằng

- A. $64\pi \text{ cm}^2$. B. $18\pi \text{ cm}^2$. C. $36\pi \text{ cm}^2$. D. $27\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ suy ra $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi}} = 3 \text{ (cm)}$.

Diện tích của mặt cầu (S) là $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 3.9. Một hình trụ có bán kính đáy bằng $r = 50$ cm và có chiều cao $h = 50$ cm. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ đó

- A. $S_{xq} = 2500\pi \text{ cm}^2$. B. $S_{xq} = 2500 \text{ cm}^2$. C. $S_{xq} = 5000 \text{ cm}^2$. D. $S_{xq} = 5000\pi \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi r\ell = 2\pi rh = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 = 5000\pi \text{ cm}^2$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 3.10. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 4\sqrt{2}$.

- A. $V = 128\pi$. B. $V = 64\sqrt{2}\pi$. C. $V = 32\pi$. D. $V = 32\sqrt{2}\pi$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\pi$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 3.11. Cho khối nón (N) có bán kính đáy là 3 và diện tích xung quanh là 15π . Thể tích khối (N) bằng

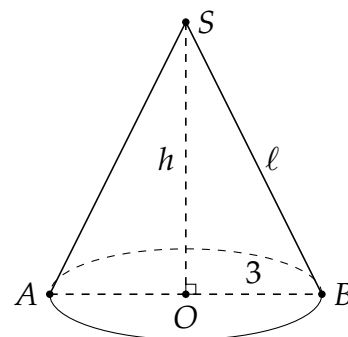
- A. 12π . B. 20π . C. 36π . D. 60π .

Lời giải.

Ta có $S_{xq} = \pi r\ell \Rightarrow \ell = \frac{S_{xq}}{\pi r} = \frac{15\pi}{3\pi} = 5$.

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Vậy thể tích của khối nón (N) là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.



Chọn phương án **(A)**

□

Câu 3.12. Cho hình nón có bán kính đáy R , góc ở đỉnh là 2α với $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính diện tích xung quanh của hình nón theo R và α .

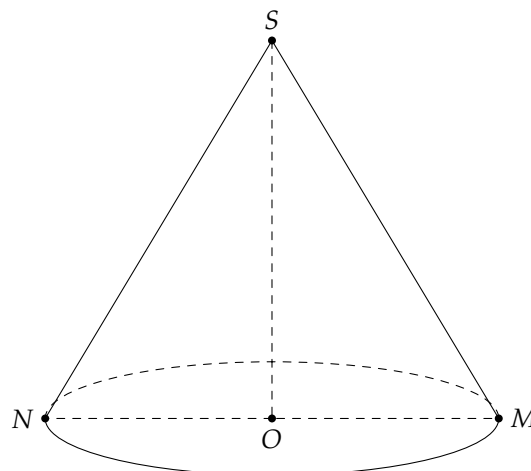
- A. $\frac{4\pi R^2}{\sin \alpha}$. B. $\frac{2\pi R^2}{\sin \alpha}$. C. $\frac{\pi R^2}{\sin \alpha}$. D. $\frac{\pi R^2}{3 \sin \alpha}$.

Lời giải.

Ta có: $l = SM = \frac{OM}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot R \cdot \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}.$$



Chọn phương án **(C)**

□

CÂU 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			2		1		2	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 4.1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		3		4	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; 3)$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 4.2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		4			
	$-\infty$			3			$-\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -4)$. B. $(-3; 5)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 4)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; 5)$.

Do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 4.3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			2	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-3; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(2; 6)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; 5)$.

Do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 4.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			
	$-\infty$			1			$-\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x) > 0$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 4.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1	4	$-\infty$

Lời giải.

Ta có đạo hàm $y' > 0, \forall x \in (-2; 3)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 4.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Khẳng định nào **sai** ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

x	-2	-1	1	3
y'	+	0	-	+
y	0	1	-2	5

Lời giải.

Ta có $y' < 0, \forall x \in (-1; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

$y' > 0, \forall x \in (-2; -1) \cup (1; 3)$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(1; 3)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 4.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào **đúng** ?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

Lời giải.

Ta có: tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Từ bảng biến thiên ta có $y' > 0, \forall x \in \mathcal{D}$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 4.8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình dưới. Mệnh đề nào **đúng** ?

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y' < 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (0; 2)$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 2)$.

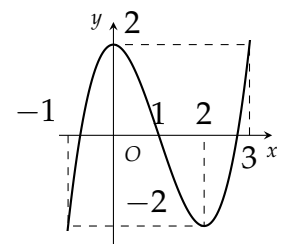
$y' > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 4.9.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(0; 1)$.
 B. $(-\infty; 1)$.
 C. $(-1; 1)$.
 D. $(-1; 0)$.



Lời giải.

Ta có: $\forall x_1, x_2 \in (-1; 0)$ thỏa mãn $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn phương án **D** □

Câu 4.10. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-2	-6	$+\infty$	

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn phương án **D** □

Câu 4.11. Cho hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2020$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x) = -4x^3 + 4x$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2021	2020	2021	$-\infty$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn phương án **C**

Câu 4.12. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến với $x \neq 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0; \forall x \in \mathcal{D}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn phương án **C**

Câu 4.13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -2		4 ↘ 2		$+\infty$ ↘ 2

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-4; -2)$.
- D. $(-2; 4)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-4; 1)$ và $(2; +\infty)$.

Do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-4; -2)$.

Chọn phương án **C**

CÂU 5. Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích khối lập phương đã cho bằng

- A. 216.
- B. 18.
- C. 36.
- D. 72.

Lời giải.

Ta có thể tích khối lập phương đã cho bằng: $6^3 = 216$.

Chọn phương án **A**

Câu 5.1. Cho khối lập phương có cạnh bằng 4. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

- A. 12.
- B. 32.
- C. 16.
- D. 64.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương đã cho là $V = 4^3 = 64$.

Chọn phương án **(D)** ☐

Câu 5.2. Cho khối lập phương có thể tích bằng V . Thể tích của khối lập phương có cạnh bằng một nửa cạnh của khối lập phương đã cho bằng

A. $\frac{V}{2}$.

B. $\frac{V}{4}$.

C. $\frac{V}{8}$.

D. $\frac{V}{16}$.

Lời giải.

Gọi cạnh của khối lập phương ban đầu là $a \Leftrightarrow V = a^3$.

Thể tích khối lập phương có cạnh bằng $\frac{a}{2}$ sẽ là: $V' = \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{8} = \frac{V}{8}$.

Chọn phương án **(C)** ☐

Câu 5.3. Cho khối lập phương có cạnh bằng a . Chia khối lập phương thành 64 khối lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Độ dài cạnh của mỗi khối lập phương nhỏ bằng

A. $\frac{a}{4}$.

B. $\frac{a}{8}$.

C. $\frac{a}{16}$.

D. $\frac{a}{64}$.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương lớn là: $V = a^3$.

Gọi chiều dài cạnh hình lập phương nhỏ là x suy ra thể tích khối lập phương nhỏ là: $V' = x^3$.

Từ giả thiết, suy ra $V = 64V' \Leftrightarrow a^3 = 64x^3 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$.

Chọn phương án **(A)** ☐

Câu 5.4. Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216.

B. 18.

C. 36.

D. 72.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương là $V = 6^3 = 216$.

Chọn phương án **(A)** ☐

Câu 5.5. Thể tích khối lập phương có cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$.

B. $2a^3$.

C. a^3 .

D. $6a^3$.

Lời giải.

Thể tích khối lập phương là $V = (2a)^3 = 8a^3$.

Chọn phương án **(A)** ☐

Câu 5.6. Tổng diện tích các mặt của của hình lập phương là 96 cm^2 . Thể tích khối lập phương đó bằng

A. 48 cm^3 .

B. 64 cm^3 .

C. 91 cm^3 .

D. 84 cm^3 .

Lời giải.

Diện tích một mặt của của hình lập phương là $\frac{96}{6} = 16 \text{ cm}^2$.

Gọi độ dài một cạnh của hình lập phương đã cho là x (với $x > 0$).

Ta có $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy thể tích khối lập phương là $V = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$.

Chọn phương án **(B)** ☐

Câu 5.7. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 3a$ bằng

A. $9a^3$.

B. $\sqrt{3}a^3$.

C. $3a^3$.

D. $3\sqrt{3}a^3$.

Lời giải.

Gọi độ dài một cạnh của hình lập phương đã cho là x (với $x > 0$).

Ta có $AC' = x\sqrt{3} = 3a \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lập phương là $V = (a\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}a^3$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 5.8. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3$, $AD = 4$ và $AA' = 5$.

A. $V = 12$.

B. $V = 20$.

C. $V = 10$.

D. $V = 60$.

Lời giải.

Thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = AB \cdot AD \cdot AA' = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 5.9. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 4a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $3a^3$.

B. $\sqrt{3}a^3$.

C. $\sqrt{2}a^3$.

D. $4a^3$.

Lời giải.

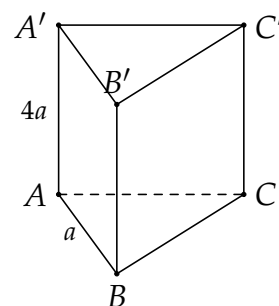
Diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$.

$\Rightarrow AA'$ là chiều cao khối lăng trụ đã cho.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = 4a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^3 \sqrt{3}.$$



Chọn phương án **(B)** □

Câu 5.10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$.

B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

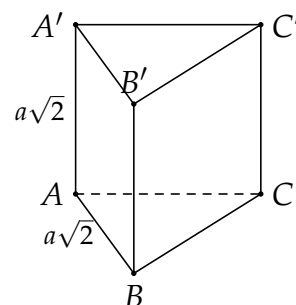
Lời giải.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên đáy ABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

Ta có diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

$$V = AA' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}.$$



Chọn phương án **(A)** □

Câu 5.11. Một khối gỗ có dạng là lăng trụ, biết diện tích đáy và chiều cao lần lượt là $0,25 \text{ m}^2$ và $1,2 \text{ m}$. Mỗi mét khối gỗ này trị giá 5 triệu đồng. Hỏi khối gỗ đó có giá bao nhiêu tiền?

A. 750000 đồng.

B. 500000 đồng.

C. 1500000 đồng.

D. 3000000 đồng.

Lời giải.

Thể tích của khối gỗ đó là $V = 0,25 \cdot 1,2 = 0,3 \text{ (m}^3\text{)}$.

Vậy khối gỗ đó có giá tiền là $5000000 \cdot 0,3 = 1500000 \text{ (đồng)}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 5.12. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, cạnh bên $AA' = 3a$ và đường chéo $AC' = 5a$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = a^3$.

B. $V = 24a^3$.

C. $V = 8a^3$.

D. $V = 4a^3$.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy của hình hộp đứng đã cho là x (với $x > 0$).

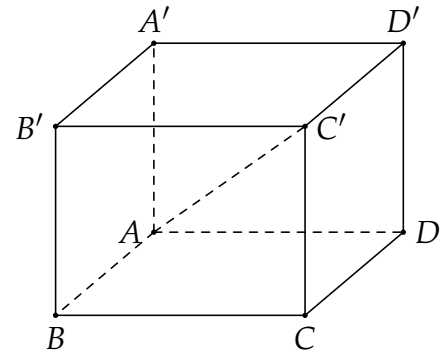
Khi đó $AC' = x\sqrt{2}$.

Xét $\triangle AA'C'$, ta có

$$\begin{aligned} AC' &= \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} \Leftrightarrow \sqrt{9a^2 + 2x^2} = 5a \\ \Leftrightarrow 9a^2 + 2x^2 &= 25a^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \\ \Leftrightarrow x &= 2a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = 3a \cdot (2a\sqrt{2})^2 = 24a^3.$$



Chọn phương án **B** □

Câu 5.13. Biết diện tích toàn phần của một khối lập phương bằng 96. Tính thể tích khối lập phương

A. 32.

B. 64.

C. 16.

D. 128.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh hình lập phương bằng $a \Leftrightarrow 6a^2 = 96 \Leftrightarrow a = 4$.

Thể tích khối lập phương: $V = 4^3 = 64$.

Chọn phương án **B** □

CÂU 6. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x - 1) = 2$ là

A. $x = 3$.

B. $x = 5$.

C. $x = \frac{9}{2}$.

D. $x = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

$$\log_3(2x - 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 5 \end{cases} \text{ (TM)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 5$.

Chọn phương án **B** □

Câu 6.1. Nghiệm của phương trình $\log_4(3x - 2) = 2$ là

A. $x = 6$.

B. $x = 3$.

C. $x = \frac{10}{3}$.

D. $x = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_4(3x - 2) = 2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 16 \Leftrightarrow x = 6$.

Chọn phương án **A** □

Câu 6.2. Nghiệm của phương trình $\log_2 \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = 2$ là

A. $x = 2$.

B. $x = 6$.

C. $x = \frac{10}{3}$.

D. $x = \frac{7}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = 4 \Leftrightarrow x-1 = 4x-8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 6.3. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x-2) = 3$ là

A. $\frac{11}{3}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \frac{2}{3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 3x-2 = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 6.4. Nghiệm của phương trình $\log(e+1) = 1$ là

A. $x = \frac{e+1}{2}$.

B. $x = \frac{e-1}{2}$.

C. $x = \frac{9}{2}$.

D. $x = \frac{11}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -\frac{1}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2x+1 = 10 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 6.5. Nghiệm của phương trình $\log_3(x-\sqrt{3})^3 = 3$ là

A. $x = 3 - \sqrt{3}$.

B. $x = 3 + \sqrt{3}$.

C. $x = 3$.

D. $x = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > \sqrt{3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})^3 = 3^3 \Leftrightarrow x-\sqrt{3} = 3 \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{3}$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 6.6. Các nghiệm của phương trình $2^{x^2-9x+16} = 4$ là

A. $x = 2, x = 7$.

B. $x = 4, x = 5$.

C. $x = 1, x = 8$.

D. $x = 3, x = 6$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 9x + 16 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7. \end{cases}$

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 6.7. Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25} \right)^{x+1} = 125^{2x}$ là

A. $x = 1$.

B. $x = 4$.

C. $x = -\frac{1}{4}$.

D. $x = -\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow (5^{-2})^{x+1} = (5^3)^{2x} \Leftrightarrow -2(x+1) = 6x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 6.8. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$

A. $S = \{1; 7\}$.

B. $S = \{7\}$.

C. $S = \{1\}$.

D. $S = \{3; 7\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 4x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (Loại)} \\ x = 7 \text{ (Thỏa mãn)}. \end{cases}$

Chọn phương án **B**

□

Câu 6.9. Nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ là

A. $x = 24$.

B. $x = 36$.

C. $x = 45$.

D. $x = 64$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 11 \Leftrightarrow \frac{11}{6} \log_2 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 6.10. Phương trình $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 6 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{6}.$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + \log_3 3 \\ &\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 6) = \log_3[3(x - 2)] \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6 = 3x - 6 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (Loại)} \\ x = 3 \text{ (Thỏa mãn)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

Chọn phương án **A**

□

Câu 6.11. Nghiệm của phương trình $\log_2(x - 1) + \log_2(x - 1)^2 = 6$ là

A. $x = 6$.

B. $x = 3$.

C. $x = \frac{10}{3}$.

D. $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} &\log_2(x - 1) + \log_2(x - 1)^2 = 6 \\ \Rightarrow &\log_2(x - 1) + 2 \log_2(x - 1) = 6 \\ \Rightarrow &\log_2(x - 1) = 2 \Rightarrow x = 5. \end{aligned}$$

Chọn phương án **D**

□

Câu 6.12. Nghiệm của phương trình $\log_4 (x^2 - 9) = 2$ là

A. $x = 5$.

B. $x = 3$.

C. $x = \pm 5$.

D. $x = -3$.

Lời giải.

Ta có: $\log_4 (x^2 - 9) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

Chọn phương án **C** ☐

Câu 6.13. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 2$; $\int_2^5 2f(x) dx = 6$; $\int_5^{10} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{10} f(x) dx$?

A. $I = 13$.

B. $I = 10$.

C. $I = 16$.

D. $I = 4$.

Lời giải.

Ta có: $\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^{10} f(x) dx = 2 + 3 + 5 = 10$.

Chọn phương án **B** ☐

CÂU 7. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. -3 .

B. -1 .

C. 1 .

D. 3 .

Lời giải.

Ta có $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = -2 + 1 = -1$.

Chọn phương án **B** ☐

Câu 7.1. Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_5^7 f(x) dx = 9$ thì $\int_2^7 f(x) dx$ bằng

A. 3 .

B. 6 .

C. 12 .

D. -6 .

Lời giải.

Ta có $\int_2^7 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx = 3 + 9 = 12$.

Chọn phương án **C** ☐

Câu 7.2. Nếu $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 f(x) dx = -1$ thì $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{11}{2}$.

D. $\frac{17}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 4 + 3 = \frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2}$.

Chọn phương án **D** ☐

Câu 7.3. Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 2016$ và $\int_4^3 f(x) dx = 2017$ thì $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

A. 4023 .

B. 1 .

C. -1 .

D. 0 .

Lời giải.

Ta có $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_4^3 f(x)dx = 2016 - 2017 = -1$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 7.4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-3; 5]$ thỏa $f(-3) = 1$ và $f(5) = 9$. Tính $\int_{-3}^5 4f'(x)dx$.

A. 40.

B. 32.

C. 36.

D. 44.

Lời giải.

Ta có $\int_{-3}^5 4f'(x)dx = 4f(x) \Big|_{-3}^5 = 4[f(5) - f(-3)] = 4(9 - 1) = 32$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 7.5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên đoạn $[2; 4]$ thỏa $f'(2) = 1$ và $f'(4) = 5$. Tính $\int_2^4 f''(x)dx$.

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\int_2^4 f''(x)dx = f'(x) \Big|_2^4 = [f'(4) - f'(2)] = 5 - 1 = 4$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 7.6. Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $\int_0^2 f(3x)dx$.

A. 6.

B. 36.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Xét $\int_0^2 f(3x)dx$.

Ta đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 3 \Rightarrow t = 6$.

Khi đó $\int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 7.7. Biết $\int_1^2 (3x - 1)dx = 20$. Hãy tính tích phân $\int_{\frac{2}{3}}^5 f(x)dx$.

A. 20.

B. 40.

C. 10.

D. 60.

Lời giải.

Xét $\int_1^2 f(3x - 1)dx = 20$.

Ta đặt $t = 3x - 1$ suy ra $dt = 3dx$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó $\int_1^2 f(3x-1)dx = \frac{1}{3} \int_2^5 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_2^5 f(x)dx = 20$.

Suy ra $\int_2^5 f(x)dx = 20 \cdot 3 = 60$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 7.8. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 6$, $\int_0^1 xf'(x)dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

A. 1.

B. -1.

C. 11.

D. 3.

Lời giải.

Xét $K = \int_0^1 xf'(x)dx = 5$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x). \end{cases}$

$$K = \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 5.$$

Suy ra $f(1) - \int_0^1 f(x)dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 6 - 5 = 1$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 7.9. Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$?

A. $I = 32$.

B. $I = 8$.

C. $I = 16$.

D. $I = 4$.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$. Khi đó ta có

$$I = \int_0^4 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 7.10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x)dx$?

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 10$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$. Khi đó

$$4 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^3 f(t) 2 dt = 2 \int_1^3 f(t) dt \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Khi đó

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2.$$

Từ đây ta suy ra $I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4$.

Chọn phương án **C** □

Câu 7.11. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. $I = 5 + \pi$.

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$.

C. $I = 3$.

D. $I = 7$.

Lời giải.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7.$$

Chọn phương án **D** □

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-4	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2 .

B. 3 .

C. 0 .

D. -4 .

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4 .

Chọn phương án **D** □

Câu 8.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số có giá trị cực đại bằng

A. -1 .

B. 0 .

C. 2 .

D. 1 .

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Lời giải.

Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

Chọn phương án **B**

□

Câu 8.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .
 B. Hàm số cso đúng một cực trị.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	
y	$+\infty$	0	-1	$+\infty$

Lời giải.

Khi qua $x = 0$ đạo hàm không đổi dấu nên hàm số không thể đạt cực trị tại $x = 0$. Vậy khẳng định câu C là sai.

Chọn phương án **C**

□

Câu 8.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = 5$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$		1	5	$-\infty$

Lời giải.

Ta có: $y = 2f(x) + 1 \Rightarrow y' = 2f'(x)$.

Suy ra: Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ cũng là điểm cực tiểu của hàm số $y = 2f(x) + 1$.

Vậy: Hàm số $y = 2f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 8.4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số.

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$. B. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.
 C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$. D. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 8.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

Hỏi hàm số đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

A. $x = 0$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

D. $x = -2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 8.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

A. -2.

B. 2.

C. -4.

D. 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số là: $y_{CT} = 4$.

Chọn phương án **D**

□

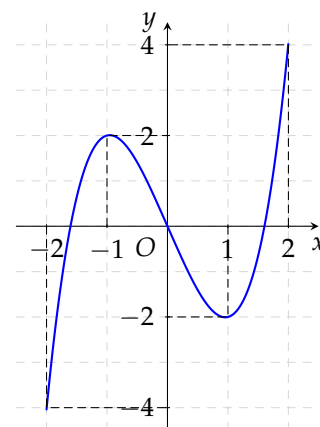
Câu 8.7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình bên. Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.



Lời giải.

Chọn phương án **B**

□

Câu 8.8. Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

A. $M(-1; 4)$.

B. $x = -1$.

C. $N(-1; 0)$.

D. $x = 1$.

Lời giải.

- Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 4)$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 8.9. Tìm điểm cực đại của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

A. $(-1; 1)$.

B. $x = -1$.

C. $(0; 2)$.

D. $x = 0$.

Lời giải.

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2			$+\infty$
		1			1		

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

Chọn phương án **D**

□

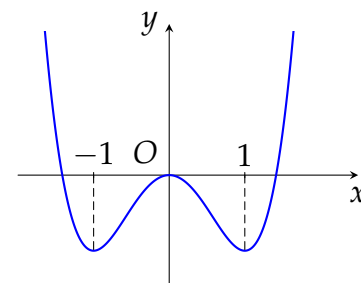
Câu 8.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

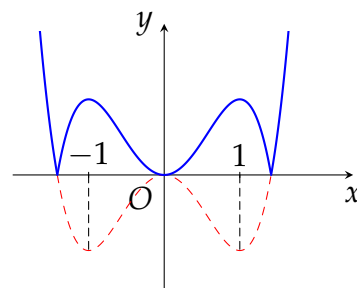
D. 5.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ như hình bên.

Suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x)|$ bằng 5.



Cách khác

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

- Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $m = 3$.
- Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox là $n = 2$.

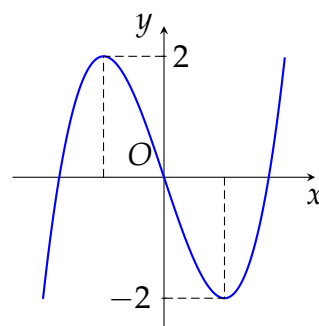
Suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số $|f(x)|$ bằng $m + n = 3 + 2 = 5$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 8.11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

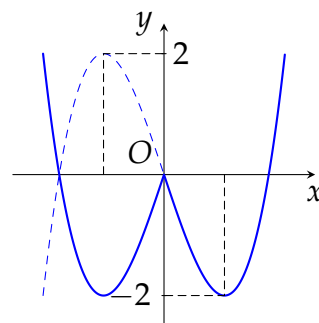
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ như hình bên.

Suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ bằng 3.



Cách khác

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy là $n = 1$.

Mà đồ thị hàm số $f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên suy ra số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(|x|)$ bằng $2n + 1 = 2 + 1 = 3$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 8.12. Số điểm cực trị của hàm số $y = |(x - 1)(x - 2)^2|$ là:

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Xét hàm số $y = (x - 1)(x - 2)^2 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 10x + 8; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{4}{27}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

Từ BBT của $y = (x - 1)(x - 2)^2$ suy ra BBT của $y = |(x - 1)(x - 2)^2|$:

x	$-\infty$	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$				
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án **A**

□

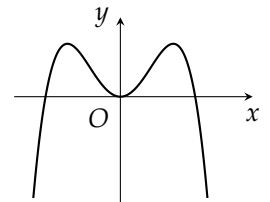
CÂU 9. Đồ thị của hàm số nào sau đây có dạng như hình cong trong hình bên?

A. $y = -x^4 + 2x^2$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = x^3 - 3x^2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2$.



Lời giải.

Dựa vào hình dạng của đồ thị đã cho trong hình vẽ, ta thấy đó là hình dạng đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) với hệ số $a < 0$.

Trong bốn hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ thỏa mãn.

Chọn phương án **A**

□

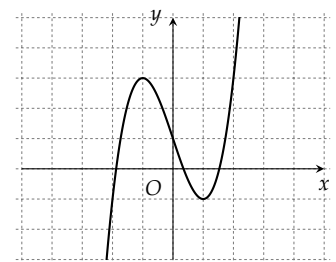
Câu 9.1. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào

A. $y = x^3 + 3x + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x - 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

D. $y = -x^4 - 4x^2 + 1$.



Lời giải.

Đây là đồ thị hàm bậc ba có hệ số dương nên loại đáp án B,D.

Đồ thị hàm bậc ba có hai điểm cực trị nên loại A.

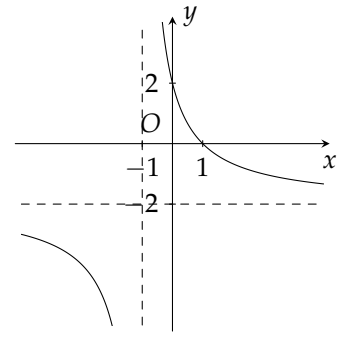
Chọn phương án **C**

□

Câu 9.2. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào

A. $y = \frac{x-2}{x+1}$.
C. $y = \frac{-x+2}{x+2}$.

B. $y = \frac{-2x+2}{x+1}$.
D. $y = \frac{2x-2}{x+1}$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số giảm, có tiệm cận ngang là $y = -2$, tiệm cận đứng là $x = -1$, giao với Ox tại điểm $(1;0)$, giao với Oy tại điểm $(0;2)$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{-2x+2}{x+1}$.

Chọn phương án **B**

□

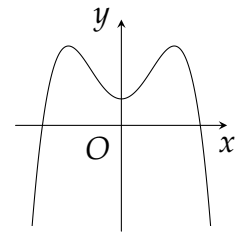
Câu 9.3. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = -x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$.

B. $y = x^4 + 2x^2$.

C. $y = x^3 - 3x^2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4 có $a < 0$ và a, b trái dấu nên ta chọn hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **A**

□

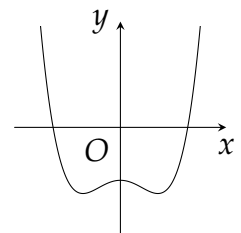
Câu 9.4. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = x^3 + x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4 với $a > 0$ và a, b trái dấu nên chọn hàm số $y = x^4 - x^2 - 1$.

Chọn phương án **B**

□

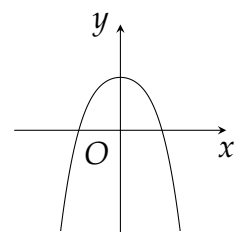
Câu 9.5. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

B. $y = 2x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4 với $a < 0$ và a, b cùng dấu nên chọn hàm số $y = -x^4 - x^2 + 1$.

Chọn phương án **D** ☐

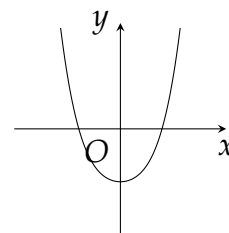
Câu 9.6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^4 2x^2 - 1$.

B. $y = 2x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm số bậc 4 với $a > 0$ và a, b cùng dấu nên chọn hàm số $y = x^4 + x^2 - 1$.

Chọn phương án **A** ☐

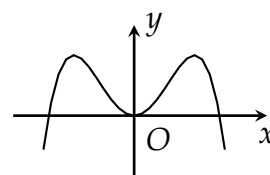
Câu 9.7. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^4 - 2x^2$.

B. $y = x^4 + 2x^2$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + 2x^2$.



Lời giải.

1. Từ dạng của đồ thị, ta suy ra $a < 0$.

2. Khi $x = 0 \Rightarrow y = 0$ nên đáp án đúng là $y = -x^4 + 2x^2$.

Chọn phương án **D** ☐

Câu 9.8.

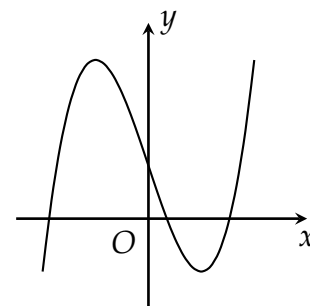
Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^3 - 3x - 1$.

B. $y = -x^3 + 3x - 1$.

C. $y = -x^4 - x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải.

1. Từ dạng của đồ thị, ta suy ra đồ thị là hàm số bậc 3 có hệ số $a > 0$ nên loại đáp án $y = -x^3 + 3x - 1$, $y = -x^4 - x^2 + 1$.

2. Khi $x = 0 \Rightarrow y > 0$ nên đáp án đúng là $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn phương án **D** ☐

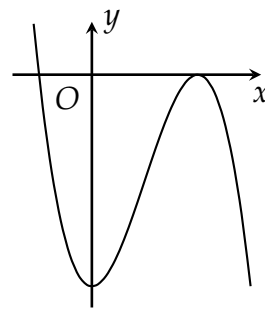
Câu 9.9. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = -x^3 - 4$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



Lời giải.

- Từ dạng của đồ thị, ta suy ra đồ thị là hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ nên loại đáp án $y = x^3 - 3x^2 - 4$.
- Khi $x = 0 \Rightarrow y = -4$ nên ta loại đáp án $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.
- Xét $y = -x^3 - 4$ có $y' = -3x^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn giảm nên loại đáp án $y = -x^3 - 4$.

Chọn phương án **C** □

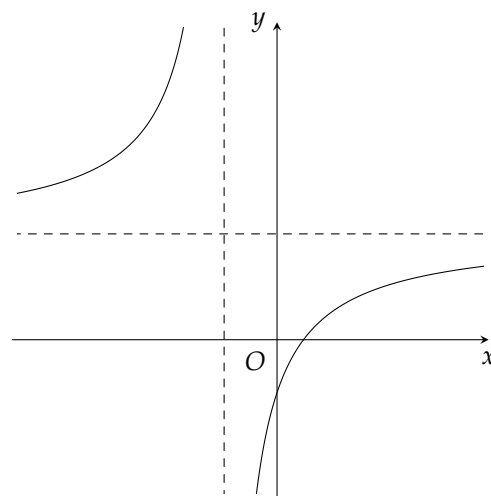
Câu 9.10. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B. $y = -x^4 - x^2 + 1$.

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.



Lời giải.

Đây là đồ thị hàm số phân thức có $y' > 0$ nên chọn $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Chọn phương án **C** □

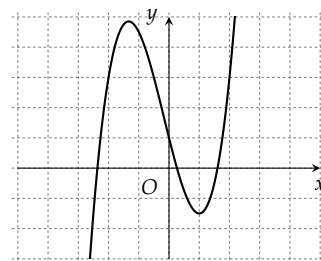
Câu 9.11. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$.

Xét $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu nên suy ra $a \cdot c < 0 \Rightarrow c < 0$.

Xét $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{3a}$, dựa vào đồ thị ta thấy hoành độ điểm uốn âm $\Rightarrow \frac{-b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn phương án **A**

□

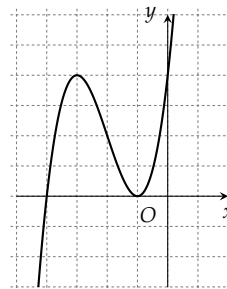
Câu 9.12. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

A. $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

C. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.

D. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.



Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ đi qua các điểm $(0; 4)$, $(-1; 0)$, $(-2; 2)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 + 4 = 0 \\ (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 = 0 \\ (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 9 \end{cases}.$$

Chọn phương án **C**

□

CÂU 10. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng

A. $2 + \log_2 a$.

B. $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

C. $2 \log_2 a$.

D. $\frac{1}{2} \log_2 a$.

Lời giải.

Với a là số thực dương tùy ý, ta có $\log_2(a^2) = 2 \log_2 a$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 10.1. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(a^4)$ bằng

A. $4 + \log_3 a$.

B. $\frac{1}{4} + \log_3 a$.

C. $4 \log_3 a$.

D. $\frac{1}{4} \log_3 a$.

Lời giải.

Ta có: $\log_3(a^4) = 4 \log_3 a$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 10.2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^2)$ bằng

A. $2 + \log_2 a$.

B. $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

C. $2 \log_2 a$.

D. $\frac{1}{2} \log_2 a$.

Lời giải.

Ta có $\log_2(a^2) = 2 \log_2 a$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 10.3. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2\left(\frac{a^2}{4}\right)$ bằng

A. $2(\log_2 a + 1)$.

B. $2(1 - \log_2 a)$.

C. $2(\log_2 a - 1)$.

D. $2 \log_2 a - 1$.

Lời giải.

Ta có $\log_2\left(\frac{a^2}{4}\right) = \log_2 a^2 - \log_2 4 = 2 \log_2 a - 2 = 2(\log_2 a - 1)$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 10.4. Với a và b là hai số thực dương và $a \neq 1$, thì $\log_{a^2} b^6 - \log_a b^2$ bằng

A. $\log_a b$.

B. $\log_b a$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} b^6 - \log_a b^2 = 3 \log_a b - 2 \log_a b = \log_a b$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 10.5. Với a và b là hai số thực dương và $a \neq 1$, thì $\log_{a^2} (ab)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} \log_a b$. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$. C. $2 + 2 \log_a b$. D. $\log_{a^2} a \cdot \log_{a^2} b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{a^2} (ab) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 10.6. Với a và b là hai số thực dương và $a \neq 1$, thì $\log_{\sqrt{a}} (a\sqrt{b})$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_a b$. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$. C. $2 + \log_a b$. D. $2 + 2 \log_a b$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt{a}} (a\sqrt{b}) = \log_{\sqrt{a}} a + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = 2 + 2 \log_a b$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 10.7. Với a là số thực dương khác 1, thì $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^4}}$ bằng

- A. $a^{\frac{5}{3}}$. B. $a^{\frac{7}{3}}$. C. $a^{\frac{7}{4}}$. D. $a^{\frac{11}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^4}} = \sqrt{a^2 \cdot a^{\frac{4}{3}}} = \sqrt{a^{2+\frac{4}{3}}} = a^{\frac{5}{3}}$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 10.8. Với a là số thực dương khác 1, thì $\frac{(a^3)^4}{a^2 \cdot a^{\frac{3}{2}}}$ bằng

- A. a^9 . B. $a^{\frac{17}{2}}$. C. $a^{\frac{23}{2}}$. D. $a^{\frac{7}{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{(a^3)^4}{a^2 \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^{3 \cdot 4}}{a^{2+\frac{3}{2}}} = a^{12-\frac{7}{2}} = a^{\frac{17}{2}}$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 10.9. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 = b$, $a \neq 1$ thì $\log_{\sqrt[3]{a}} b^3$ bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 18. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\log_{\sqrt[3]{a}} b^3 = \log_{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}} a^6 = 18 \log_a a = 18$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 10.10. Giả sử $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$ thì $\log_a (x^2 y^3)$ bằng

- A. 3. B. 10. C. -14. D. 65.

Lời giải.

Ta có $\log_a (x^2 y^3) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2 \log_a x + 3 \log_a y = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 10.11. Với a là số thực dương tùy ý, $\log (100a^3)$ bằng

- A. $6 \log a$. B. $3 + 3 \log a$. C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \log a$. D. $2 + 3 \log a$.

Lời giải.

Ta có: $\log(100a^3) = \log 10^2 + \log a^3 = 2 + 3 \log a$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 10.12. Cho các số thực $a, b \neq 0$ thỏa mãn $3^a = 4^b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\log_4 3$.

B. $\ln 12$.

C. $\ln 0,75$.

D. $\log_3 4$.

Lời giải.

Ta có: $3^a = 4^b \Rightarrow a \cdot \ln 3 = b \cdot \ln 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \log_3 4$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 10.13. Cho $\log 3 = a$. Giá trị của $\frac{1}{\log_{81} 1000}$ bằng?

A. $\frac{3a}{4}$.

B. $\frac{4a}{3}$.

C. $\frac{1}{12a}$.

D. $12a$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{1}{\log_{81} 1000} = \log_{1000} 81 = \log_{10^3} 3^4 = \frac{4}{3} \log 3 = \frac{4a}{3}$.

Chọn phương án **(B)**

□

CÂU 11. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 11.1. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \sin x$ là

A. $x^2 + \cos x + C$.

B. $x^2 - \cos x + C$.

C. $2x^2 + \cos x + C$.

D. $2x^2 - \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (2x + \sin x) dx = x^2 - \cos x + C$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 11.2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

A. $e^x + x^2 + C$.

B. $e^x + 1 + C$.

C. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

D. $\frac{e^x}{x+1} + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 11.3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 2^x$ là

A. $1 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

B. $\frac{x^2}{2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

C. $\frac{x^2}{2} + 2^x \ln 2 + C$.

D. $\frac{x^2}{2} + 2^x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (x + 2^x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 11.4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

A. $\sin x - \cos x + C$.

B. $\sin x + \cos x + C$.

C. $-\cos x - \sin x + C$.

D. $\sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 11.5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x+2}$ thỏa mãn $F(3) = 1$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = \ln 2 - \ln 5 - 1$.

B. $F(0) = \ln 2 + \ln 5 - 1$.

C. $F(0) = \ln 2 - \ln 5 + 1$.

D. $F(0) = \ln 2 + \ln 5 + 1$.

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C = \begin{cases} \ln(x+2) + C_1, & \text{nếu } x > -2 \\ \ln(-x-2) + C_2, & \text{nếu } x < -2. \end{cases}$

Do đó $F(3) = -1 \Leftrightarrow \ln 5 + C_1 = -1 \Leftrightarrow C_1 = -1 - \ln 5$.

Vậy $F(0) = \ln 2 - \ln 5 - 1$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 11.6. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

B. $2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

C. $e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

D. $e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$\int f(x) dx = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$.

Lại có $F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + 0^2 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$.

Vậy $f(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 11.7. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x + C$.

B. $\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$.

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

D. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

$\int f(x) dx = \int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \tan x + C$.

Lại có $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\cos \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow C = \sqrt{2} - 1$.

Vậy $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 11.8. Cho hàm số $f(x) = 2x + \sin x + 2 \cos x$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$.

A. $x^2 + \cos x + 2 \sin x - 2$.

B. $2 + \cos x + 2 \sin x$.

C. $x^2 - \cos x + 2 \sin x$.

D. $x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$.

Lời giải.

$\int f(x) dx = \int (2x + \sin x + 2 \cos x) dx = x^2 - \cos x + 2 \sin x + C$.

Lại có $F(0) = 1 \Leftrightarrow 0^2 - \cos 0 + \sin 0 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 11.9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 1 - 4 \sin 2x$ và $f(0) = 10$. Giá trị của $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4} + 10$. B. $\frac{\pi}{4} + 12$. C. $\frac{\pi}{4} + 6$. D. $\frac{\pi}{4} + 8$.

Lời giải.

Ta có $\int f'(x) dx = \int (1 - 4 \sin 2x) dx = x + 2 \cos 2x + C$.

Lại có $f(0) = 10 \Leftrightarrow 0 + 2 \cos 0 + C = 10 \Leftrightarrow C = 8$.

Do đó $f(x) = x + 2 \cos 2x + 8 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 8$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 11.10. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - e^x$ là

- A. $2 - e^x + C$. B. $x^2 + e^{-x} + C$. C. $x^2 - e^x + C$. D. $x^2 - e^{-x} + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (2x - e^x) dx = x^2 - e^x + C$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 11.11. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + \sin 8x$ là

- A. $\frac{3^x}{\ln 3} - \cos 8x + C$. B. $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{8} \cos 8x + C$.
C. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{8} \cos 8x + C$. D. $3^x \ln 3 - \frac{1}{8} \cos 8x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (3^x + \sin 8x) dx = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{8} \cos 8x + C$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 11.12. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + \cos 2x$ là

- A. $x^2 + \sin 2x + C$. B. $x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x + C$. C. $x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x + C$. D. $x^2 + 2 \sin 2x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (2x + \cos 2x) dx = x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 11.13. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \sin 3x$ là

- A. $3x^2 + 3 \cos 3x + C$. B. $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \cos 3x + C$. C. $x^4 - \cos 3x + C$. D. $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Lời giải.

Ta có: $\int (x^3 + \sin 3x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \cos 3x + C$.

Chọn phương án **(D)** □

CÂU 12. Môđun của số phức $1 + 2i$ bằng

- A. 5. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. 3.

Lời giải.

Ta có: $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Vậy môđun của số phức $1 + 2i$ bằng $\sqrt{5}$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 12.1. Mô-đun của số phức $4 - 3i$ bằng

- A. 25. B. $\sqrt{7}$. C. 7. D. 5.

Lời giải.

Ta có: $|4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 12.2. Cho số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(-1;3)$ trên mặt phẳng tọa độ. Mô-đun của số phức z bằng

A. 10.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{10}$.

D. 8.

Lời giải.

Số phức z bởi điểm $M(-1;3)$ suy ra $z = -1 + 3i$.

Ta có: $|z| = |-1 + 3i| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 12.3. Mô-đun của số phức $1 + 2i$ bằng

A. 5.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 12.4. Mô-đun của số phức $2 + i$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $|2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 12.5. Tính mô-đun của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$

A. $|z| = \sqrt{34}$.

B. $|z| = 34$.

C. $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$.

D. $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $z = \frac{1 - 13i}{2 - i} = 3 - 5i \Leftrightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 12.6. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $\sqrt{13}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 1.

D. 5.

Lời giải.

Ta có: $z_1 + z_2 = 1 + i + 2 - 3i = 3 - 2i = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 12.7. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$

A. $\bar{z} = 3 - i$.

B. $\bar{z} = -3 + i$.

C. $\bar{z} = 3 + i$.

D. $\bar{z} = -3 - i$.

Lời giải.

Ta có: $z = i(3i + 1) = -3 + i \Leftrightarrow \bar{z} = -3 - i$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 12.8. Cho các số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 4i$. Tìm số phức liên hợp của số phức $z_1 z_2$

A. $-14 - 5i$.

B. $-10 - 5i$.

C. $-10 + 5i$.

D. $14 - 5i$.

Lời giải.

Ta có: $z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i) = 14 + 5i \Leftrightarrow \bar{z} = 14 - 5i$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 12.9. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

- A. $b = -2$. B. $b = 2$. C. $b = 3$. D. $b = -3$.

Lời giải.

Ta có: $z = z_1 - z_2 = (1 - 3i) - (-2 - 5i) = 3 + 2i$.

Nên phần ảo b của số phức z là 2.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 12.10. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực của số phức z^2 .

- A. 9. B. 12. C. 5. D. 13.

Lời giải.

Ta có: $z^2 = (3 + 2i)^2 = 5 + 12i \Rightarrow$ phần thực của số phức z^2 là 5.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 12.11. Cho số phức $z = 2 - i$. Trên mặt phẳng tọa độ, tìm điểm biểu diễn của số phức $w = iz$

- A. $M(-1; 2)$. B. $N(2; -1)$. C. $P(2; 1)$. D. $Q(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có: $w = iz = i(2 - i) = 1 + 2i \Rightarrow$ điểm biểu diễn của số phức w trên mặt phẳng tọa độ là $Q = (1; 2)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 12.12. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Mô-đun của số phức $\bar{z}$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 13. D. $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có: $|z| = |\bar{z}| = |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 12.13. Nếu điểm $M(x; y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn $OM = 4$ thì

- A. $|z| = \frac{1}{4}$. B. $|z| = 4$. C. $|z| = 16$. D. $|z| = 2$.

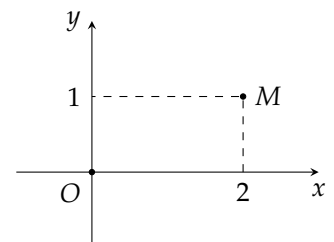
Lời giải.

Ta có: $OM = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 = |z|$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 12.14. Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn cho số phức z . Số phức z là

- A. $2 - i$. B. $1 + 2i$. C. $1 - 2i$. D. $2 + i$.



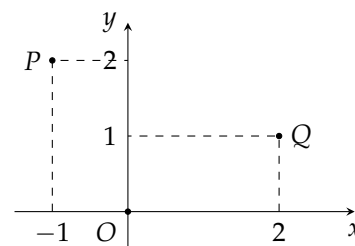
Lời giải.

Ta có: $M(2; 1)$ suy ra $z = 2 + i$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 12.15. Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn cho số phức z_1 , điểm Q biểu diễn cho số phức z_2 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $z_1 = \overline{z_2}$.
 B. $|z_1| = |z_2| = 5$.
 C. $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$.
 D. $z_1 = z_2$.



Lời giải.

Ta có: $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 2 + i$ suy ra $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 12.16. Số phức liên hợp của số phức $z = 5 + 6i$ là

- A. $\bar{z} = -5 + 6i$.
 B. $\bar{z} = -5 - 6i$.
 C. $\bar{z} = 6 - 5i$.
 D. $\bar{z} = 5 - 6i$.

Lời giải.

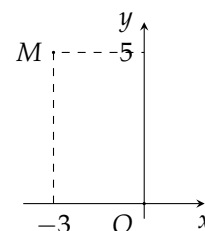
Số phức liên hợp của $z = 5 + 6i$ là $\bar{z} = 5 - 6i$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 12.17. Điểm M trong hình vẽ biểu diễn cho số phức z . Số phức $\bar{z}$ là

- A. $\bar{z} = 3 + 5i$.
 B. $\bar{z} = -3 + 5i$.
 C. $\bar{z} = 3 - 5i$.
 D. $\bar{z} = -3 - 5i$.



Lời giải.

Tọa độ điểm $M = (-3; 5)$ suy ra $\bar{z} = -3 - 5i$.

Chọn phương án **D**

□

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$.
 B. $(2; -2; 0)$.
 C. $(0; -2; 1)$.
 D. $(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0; y_0; 0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2; -2; 0)$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 13.1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$.
 B. $(2; -2; 0)$.
 C. $(0; -2; 1)$.
 D. $(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là $(0; -2; 1)$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 13.2. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$.
 B. $(2; -2; 0)$.
 C. $(0; -2; 1)$.
 D. $(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0; y_0; 0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2; -2; 0)$.

Chọn phương án **(B)** ☐

Câu 13.3. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $A(3; -1; 1)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $M(3; 0; 3)$.

B. $N(0; -1; 1)$.

C. $P(0; -1; 0)$.

D. $Q(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $M'(0; y_0; z_0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $A(3; -1; 1)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0; -1; 1)$.

Chọn phương án **(B)** ☐

Câu 13.4. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $A(3; -1; 1)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $A'(x; y; z)$. Khi đó $x - y - z =$ bằng

A. -4 .

B. 2 .

C. 4 .

D. 3 .

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M'(x_0; 0; z_0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $A(3; -1; 1)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $A'(3; 0; 1)$.

Suy ra : $x - y - z = 2$

Chọn phương án **(B)** ☐

Câu 13.5. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ H là hình chiếu của điểm $M(4; 5; 6)$ trên trục Oz

A. $H(0; 5; 6)$.

B. $H(4; 5; 0)$.

C. $H(4; 0; 0)$.

D. $H(0; 0; 6)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên trục Oz là điểm $M'(0; 0; z_0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(4; 5; 6)$ trên trục Oz là điểm $H(0; 0; 6)$

Chọn phương án **(D)** ☐

Câu 13.6. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ H là hình chiếu của điểm $M(1; -1; 2)$ trên trục Oy

A. $H(0; -1; 0)$.

B. $H(1; 0; 0)$.

C. $H(0; 0; 2)$.

D. $H(0; 1; 0)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên trục Oy là điểm $M'(0; y_0; 0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(1; -1; 2)$ trên trục Oy là điểm $H(0; -1; 0)$

Chọn phương án **(A)** ☐

Câu 13.7. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ H là hình chiếu của điểm $M(1; 2; -4)$ trên trục Oz

A. $H(0; -2; 0)$.

B. $H(1; 0; 0)$.

C. $H(0; 0; -4)$.

D. $H(1; 2; -4)$.

Lời giải.

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên trục Oz là điểm $M'(0; 0; z_0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(1; 2; -4)$ trên trục Oz là điểm $H(0; 0; -4)$

Chọn phương án **(C)** ☐

Câu 13.8. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(3; 2; 1)$ trên trục Ox

A. $M'(3; -2; -1)$.

B. $M'(-3; 2; 1)$.

C. $M'(-3; -2; -1)$.

D. $M'(3; -2; 1)$.

Lời giải.

Ta có điểm đối xứng của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ qua trục Ox là điểm $M(x_0; -y_0; -z_0)$.

Do đó điểm đối xứng của điểm $M(3; 2; 1)$ qua trục Ox là điểm $M'(3; -2; -1)$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 13.9. Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ M' là điểm đối xứng của điểm $M(1; 2; 5)$ qua mặt phẳng (Oxy) .

- A. $M'(-1; -2; 5)$. B. $M'(1; 2; 0)$. C. $M'(1; -2; 5)$. D. $M'(1; 2; -5)$.

Lời giải.

Ta có điểm đối xứng của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ qua mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0; y_0; -z_0)$.

Do đó điểm đối xứng của điểm $M(1; 2; 5)$ qua mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(1; 2; -5)$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 13.10. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1; -2; -3)$ đến mặt phẳng (Oxz) .

- A. $d = 1$. B. $d = 2$. C. $d = 3$. D. $d = 4$.

Lời giải.

Ta có khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức:

$$d_{(M,(\alpha))} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Do đó khoảng cách d từ điểm $M(1; -2; -3)$ đến mặt phẳng $(Oxz) : y = 0$ là: $d_{(M,(Oxz))} = |-2| = 2$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 13.11. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của điểm $M(2; -2; 1)$ qua mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(-2; -2; 1)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Điểm đối xứng của điểm $M(2; -2; 1)$ qua mặt phẳng (Oyz) là điểm có tọa độ $(-2; -2; 1)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 13.12. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A. $(2; 0; 1)$. B. $(2; 0; 0)$. C. $(0; -2; 1)$. D. $(0; 0; 1)$.

Lời giải.

Hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên trục Ox là điểm có tọa độ $(2; 0; 0)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 13.13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 1; 2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

- A. $(-3; -1; 2)$. B. $(3; 1; -2)$. C. $(3; -1; -2)$. D. $(3; -1; 2)$.

Lời giải.

Gọi M là hình chiếu của điểm A lên trục Oy suy ra $M(0; 1; 0)$.

Ta có A' đối xứng với điểm A qua trục Oy nên điểm M là trung điểm của AA' .

Khi đó:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A \\ y_{A'} = 2y_M - y_A \\ z_{A'} = 2z_M - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 0 + 3 = 3 \\ y_{A'} = 2 - 1 = 1 \\ z_{A'} = 0 - 2 = -2. \end{cases}$$

Vậy $A'(3; 1; -2)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 13.14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 6)$, $B(5; -4; 2)$, đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M và $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$. Tính k .

- A. $k = -\frac{1}{2}$. B. $k = \frac{1}{2}$. C. $k = 2$. D. $k = -2$.

Lời giải.

Ta nhận thấy hai điểm A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxz) : $y = 0$.

Suy ra điểm M nằm trong đoạn AB nên $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $k < 0$.

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{d(A, (Oxz))}{d(B, (Oxz))} = \frac{2}{|-4|} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $k = -\frac{1}{2}$.

Chọn phương án **(A)** □

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Lời giải.

Từ phương trình của mặt cầu (S) , suy ra tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1; -2; 3)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 14.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(-1; 2; -3)$. D. $(1; 2; -3)$.

Lời giải.

Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $(1; 2; -3)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 14.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 3 = 0$ có tâm và bán kính là

- A. $I(2; -1; 1), r = 9$. B. $I(-2; 1; -1), r = 3$. C. $I(-2; -1; 1), r = 3$. D. $I(-2; 1; -1), r = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; -1)$ và bán kính $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 - (-3)} = 3$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 14.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tâm I và bán kính r của mặt cầu (S) .

- A. $I(1; 0; -3), r = 4$. B. $I(-1; 0; 3), r = 2$. C. $I(-1; 0; 3), r = 4$. D. $I(1; 0; -3), r = 2$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 3)$ và bán kính $r = 2$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 14.4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 1 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 9 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = \sqrt{2}$.

Đây là phương trình của mặt cầu có tâm tại gốc tọa độ $(0; 0; 0)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 14.5. Trong không gian $Oxyz$, tìm điều kiện của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y + 2mz + m^2 + 5m = 0$ là phương trình mặt cầu.

- A. $m < 4$. B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 4 \end{cases}$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y + 2mz + m^2 + 5m = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 + (y + 2)^2 + (z + m)^2 = m^2 - 5m + 4$.

Theo yêu cầu bài toán thì $m^2 - 5m + 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 4 \end{cases}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 14.6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - m = 0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m .

- A. $m = 25$. B. $m = 11$. C. $m = 16$. D. $m = -16$.

Lời giải.

Theo đề bài $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 - (-m)} = 5 \Leftrightarrow m = 16$.

Chọn phương án **(C)** □

CÂU 15. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_4 (3; 2; -4)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 15.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z - 2x + 3 = 0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

- A. $\vec{u} = (0; 1; -2)$. B. $\vec{v} = (1; -2; 3)$. C. $\vec{n} = (2; 0; -1)$. D. $\vec{w} = (1; -2; 0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P): 2x - z - 3 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 15.2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sao đây nhận $\vec{n} = (1; 2; 3)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

- A. $x - 2y + 3z + 1 = 0$. B. $2x + 4y + 6z + 1 = 0$.
C. $2x - 4z + 6 = 0$. D. $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có mặt phẳng $2x + 4y + 6z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; 4; 6) \Rightarrow \vec{n} = (1; 2; 3)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng đã cho.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 15.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 2; -4)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 15.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$. B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. D. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 15.5. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) ? Biết $\vec{u} = (1; -2; 0)$, $\vec{v} = (0; 2; -1)$ là cặp véc-tơ chỉ phương của (P) .

- A. $\vec{n} = (1; 2; 0)$. B. $\vec{n} = (2; 1; 2)$. C. $\vec{n} = (0; 1; 2)$. D. $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = (2; 1; 2)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 15.6. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$.

- A. $\vec{n}_1 = (2; 1; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (1; -3; 0)$. C. $\vec{n}_3 = (2; -1; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 3; 0)$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) vuông góc với $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$ nên (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{u}_d = (2; 1; -1)$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 15.7. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ là

- A. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u} = (2; 1; 0)$. C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 15.8. Trong không gian $Oxyz$, một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ là

- A. $\vec{u} = (1; 0; -2)$. B. $\vec{u} = (1; 2; 0)$. C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 0; -2)$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 15.9. Trong không gian $Oxyz$, gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M(2; 5; 4)$ lên trục Ox và mặt phẳng Oyz . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

- A. $\vec{u}_3 = (2; 0; 4)$. B. $\vec{u}_2 = (-2; 5; 4)$. C. $\vec{u}_4 = (0; -3; 4)$. D. $\vec{u}_1 = (-2; 0; 4)$.

Lời giải.

Ta có $M_1(2;0;0)$ và $M_2(0;5;4)$.

Đường thẳng M_1M_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-2;5;4)$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 15.10. Trong không gian $Oxyz$, Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 3 = 0$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1;1;0)$. B. $\vec{u} = (1;-2;1)$. C. $\vec{u} = (1;1;-3)$. D. $\vec{u} = (1;-1;-3)$.

Lời giải.

$$\text{Vì } d = (P) \cap (Q) \text{ nên } \begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_Q \end{cases}$$

Do đó đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (1;-1;-3)$.

Chọn phương án **(D)**

□

Câu 15.11. Trong không gian $Oxyz$, gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M(1;2;3)$ lên các trục Ox, Oy . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

- A. $\vec{u}_2 = (1;2;0)$. B. $\vec{u}_3 = (1;0;0)$. C. $\vec{u}_4 = (-1;2;0)$. D. $\vec{u}_1 = (0;2;0)$.

Lời giải.

Ta có $M_1(1;0;0)$ và $M_2(0;2;0)$.

Đường thẳng M_1M_2 có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-1;2;0)$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 15.12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-3;2)$ và chứa trục Oz . Gọi $\vec{n} = (a;b;c)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) . Tính $M = \frac{b+c}{a}$.

- A. $M = -\frac{1}{3}$. B. $M = 3$. C. $M = \frac{1}{3}$. D. $M = -3$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-3;2)$ và chứa trục Oz nên chứa giá của hai véc-tơ $\vec{k} = (0;0;1)$, $\overrightarrow{OA} = (1;-3;2)$.

Khi đó, véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = [\vec{k}, \overrightarrow{OA}] = (3;1;0)$.

Vậy $a = 3, b = 1, c = 0$ nên $M = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 15.13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;2;0)$ và chứa đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ và có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;a;b)$. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 2$. B. $a + b = 0$. C. $a + b = -3$. D. $a + b = 3$.

Lời giải.

Lấy điểm $B(-1;0;0) \in d$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-2;0)$, $\vec{u}_d = (2;3;1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua A và chứa d nên mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d] = (-2;2;-2)$.

Khi đó véc-tơ $\vec{n}_1 = (1;-1;1)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (P) . Suy ra $a = -1, b = 1$.

Vậy $a + b = -1 + 1 = 0$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 15.14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 10$. B. $a + b + c = 3$. C. $a + b + c = 5$. D. $a + b + c = 7$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -3; 2)$ và véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = (1; -3; 2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P] = (0; 8; 12)$. Suy ra $\vec{n} = (0; 2; 3)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của (Q) .

Phương trình mặt phẳng (Q) : $0(x - 2) + 2(y - 4) + 3(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2y + 3z - 11 = 0$.

Theo đề bài: $a = 0, b = 2, c = 3$. Do đó $a + b + c = 0 + 2 + 3 = 5$.

Chọn phương án **C** □

CÂU 16. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1; 2; 1)$. B. $Q(1; -2; -1)$. C. $N(-1; 3; 2)$. D. $M(1; 2; 1)$.

Lời giải.

Cách 1 : Vì phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $P(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$ là $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ nên dễ dàng thấy điểm $P(-1; 2; 1)$ thuộc đường thẳng d .

Cách 2 : Thay tọa độ 4 điểm M, N, P, Q vào phương trình đường thẳng d ta thấy điểm P thỏa mãn.

Chọn phương án **A** □

Câu 16.1. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-1}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $A(-1; 2; 0)$. B. $B(-1; -3; 1)$. C. $C(3; -1; -1)$. D. $D(1; -2; 0)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $A(-1; 2; 0)$ vào phương trình đường thẳng ta có $\frac{-1-1}{2} \neq \frac{2+2}{-1} \neq \frac{0}{-1}$.

Vậy điểm A không thuộc Δ .

Chọn phương án **A** □

Câu 16.2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $K(1; -1; 1)$. B. $H(1; 2; 0)$. C. $E(1; 1; 2)$. D. $F(0; 1; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $F(0; 1; 2)$.

Chọn phương án **D** □

Câu 16.3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(1; 1; 1)$. B. $M(2; -1; 0)$. C. $N(0; -3; 0)$. D. $Q(-1; 2; -3)$.

Lời giải.

Giả sử giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là một đường thẳng đi qua điểm I .

Khi đó $\begin{cases} I \in (P) \\ I \in (Q) \end{cases}$

Kiểm tra các điểm M, N, P, Q . Ta thấy chỉ có điểm $P(1; 1; 1)$ cùng thuộc hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Vậy $P(1; 1; 1)$ là điểm cần tìm.

Chọn phương án **A** □

Câu 16.4. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

- A. $P(-1; 2; 1)$. B. $Q(1; -2; -1)$. C. $N(-1; 3; 2)$. D. $M(1; 2; 1)$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ các điểm mỗi phương án vào phương trình đường thẳng ta thấy điểm $P(-1; 2; 1)$ thỏa mãn $\frac{-1+1}{-1} = \frac{2-2}{3} = \frac{1-1}{3} = 0$.

Vậy điểm $P(-1; 2; 1)$ thuộc đường thẳng yêu cầu.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 16.5. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$?

- A. $Q(1; 0; 2)$. B. $N(1; -2; 0)$. C. $P(1; -1; -3)$. D. $M(-1; 2; 0)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình đường thẳng ta thấy điểm $M(-1; 2; 0)$ thỏa

$$\frac{-1+1}{1} = \frac{2-2}{-1} = \frac{0}{3} = 0.$$

Vậy điểm $M(-1; 2; 0)$ thuộc đường thẳng yêu cầu.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 16.6. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

- A. $M(-1; 2; 3)$. B. $N(3; 2; 1)$. C. $P(1; 2; 3)$. D. $Q(0; 0; 0)$.

Lời giải.

Lần lượt cho t các giá trị phù hợp với hoành độ của các điểm trong mỗi phương án. Ta được $t = 0$ thỏa mãn đề bài, điểm nằm trên d là điểm $P(1; 2; 3)$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 16.7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2; m; n)$.

Giá trị của $m + n$ bằng

- A. -1 . B. 7 . C. 3 . D. 1 .

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(2; m; n)$ và phương trình của Δ ta được:

$$\frac{2}{1} = \frac{m+2}{-1} = \frac{n-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = -2 \\ n-1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ n = 7 \end{cases} \Rightarrow m + n = 3.$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 16.8. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z = 5$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $Q(2; -1; 5)$. B. $N(0; 0; -5)$. C. $P(-5; 0; 0)$. D. $M(1; 1; 6)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình của mặt phẳng (P) ta thấy $M(1; 1; 6)$ thỏa mãn.

Vậy điểm $M(1; 1; 6)$ thuộc (P) .

Chọn phương án **D** □

Câu 16.9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(m; 1; 6)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm M thuộc (P) khi m bằng

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Thay tọa độ $M(m; 1; 6)$ vào $(P): x - 2y + z - 5 = 0$ ta được $m - 2 + 6 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn phương án **A** □

Câu 16.10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ và điểm $M(1; 1; 1)$. Tìm khẳng định đúng?

A. M nằm bên ngoài (S) .

B. M nằm bên trong (S) .

C. M thuộc mặt cầu (S) .

D. Đường kính bằng 5.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$. Ta có:

$$IM = \sqrt{(1 + 1)^2 + (1 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = 3 < 5 = R.$$

Vậy M nằm bên trong (S) .

Chọn phương án **B** □

Câu 16.11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$ và điểm $M(2; 2; 4)$. Tìm khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm bên ngoài (S) .

B. Điểm M nằm bên trong (S) .

C. Điểm M thuộc mặt cầu (S) .

D. Đường kính bằng 6.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$. Ta có:

$$IM = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{6} = R.$$

Vậy M thuộc (S) .

Chọn phương án **C** □

Câu 16.12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$, mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 3$. Gọi d_1 là khoảng cách ngắn nhất từ A đến một điểm thuộc (S) và d_2 là khoảng cách dài nhất từ điểm A đến một điểm thuộc (S) . Giá trị của $d_1 + d_2$ bằng

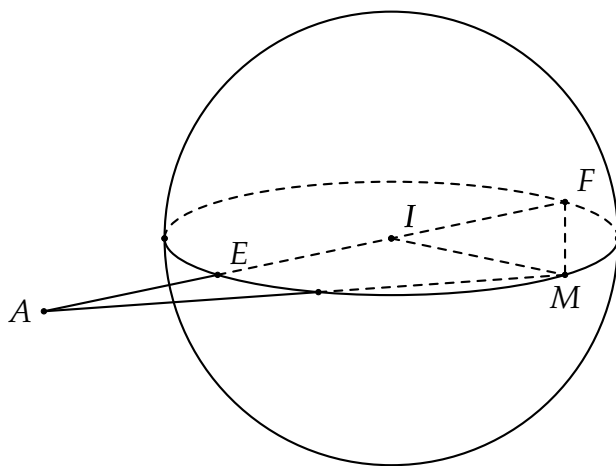
A. $4\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $8\sqrt{3}$.

Lời giải.



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 4)$, bán kính $R = \sqrt{3}$. Ta có:

$$AI = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{3} = 2R > R$$

$\Rightarrow A$ nằm ngoài (S).

Lấy điểm M bất kì trên (S) thì $IM = R = \sqrt{3}$ và ta có:

- $AM \geq AI - IM = \sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M nằm giữa A và I .
- $AM \leq AI + IM = 3\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I nằm giữa A và M .

Suy ra $d_1 = \sqrt{3}$, $d_2 = 3\sqrt{3}$. Vậy $d_1 + d_2 = 4\sqrt{3}$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 16.13. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và điểm $M(1; 2; m)$.

Tìm tất cả các giá trị của m để điểm M thuộc đường thẳng d .

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

Điểm $M(1; 2; m)$ thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 + 2t = 1 \\ 2 - t = 2 \\ -2 + 2t = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ m = -2. \end{cases}$

Chọn phương án **(C)** □

CÂU 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải.

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SCA}$.

Xét $\triangle SCA$ vuông tại A : $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ$.

Chọn phương án **(B)** □

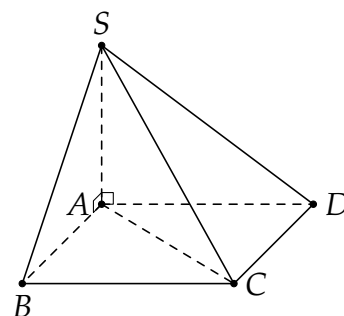
Câu 17.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\tan \alpha$. Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α . Suy ra $\alpha = \widehat{SCA}$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \sqrt{2}$.



Chọn phương án **A** □

Câu 17.2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a . Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° ?

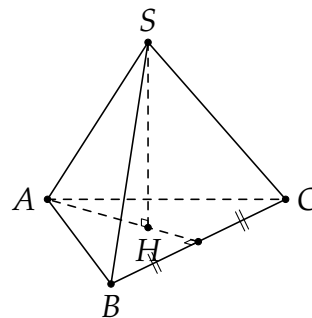
- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải.

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC , $\Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) là AH suy ra góc giữa cạnh bên SA và đáy là góc $\widehat{SAH}$.

Xét tam giác vuông SAH ta có $\cos 60^\circ = \frac{AH}{SA} \Rightarrow SA = \frac{AH}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.



Chọn phương án **A** □

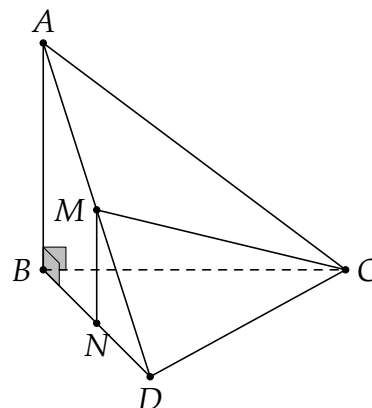
Câu 17.3. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a , AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) , $AB = 2a$. M là trung điểm đoạn AD . Gọi φ là góc giữa CM và mặt phẳng (BCD) . Khi đó

- A. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\tan \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\tan \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Gọi N là trung điểm BD , suy ra $MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp (BCD)$, do đó góc giữa CM với mp (BCD) bằng góc $\widehat{MCN}$.

$MN = \frac{AB}{2} = a, CN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{MN}{CN} = a \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.



Chọn phương án **(B)**



Câu 17.4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

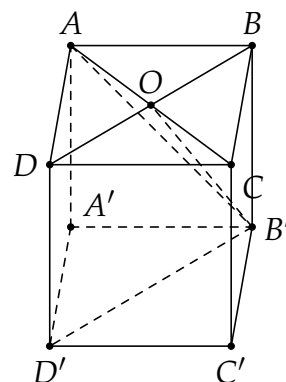
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO \perp BD$ (1).

Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO \perp (BDD'B') \Rightarrow (AB', (ABCD)) = (AB', B'O) = \widehat{AB'O}$.

Xét tam giác vuông $AB'O$ ta có $\sin \widehat{AB'O} = \frac{AO}{AB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30^\circ$.



Chọn phương án **(D)**



Câu 17.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ A \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow A$ là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.

Suy ra AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = \alpha$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$ nên

$AC = a\sqrt{6}, SA = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

Chọn phương án **(B)**



Câu 17.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Cho $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa cạnh SC với mặt đáy.

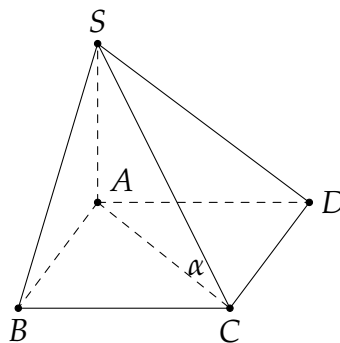
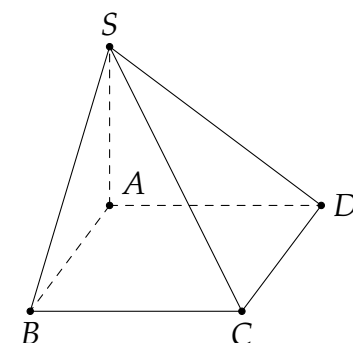
A. 45° .

B. 60° .

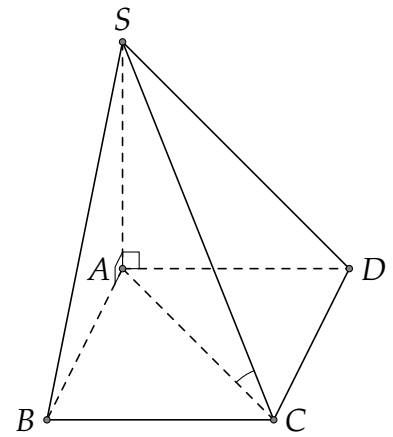
C. 90° .

D. 30° .

Lời giải.



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ là AC . Suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SCA}$. Tam giác SAC vuông tại A nên ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$. Vậy góc cần tính bằng 45° .



Chọn phương án **A** ☐

Câu 17.7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

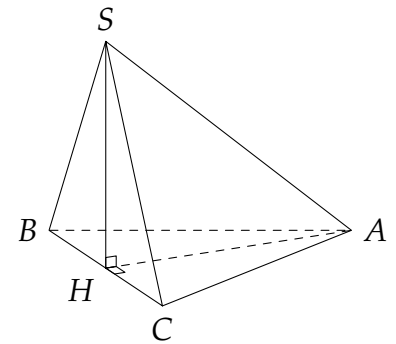
Lời giải.

SA có hình chiếu vuông góc lên (ABC) là HA .

Vậy góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$ (vì $\widehat{SAH} < 90^\circ$).

Tam giác SAH vuông tại H có $SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên là tam giác vuông cân tại H .

Vậy góc giữa SA và (ABC) có số đo là 45° .



Chọn phương án **C** ☐

Câu 17.8. Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC vuông tại B , SA vuông góc với (ABC) , $SA = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải.

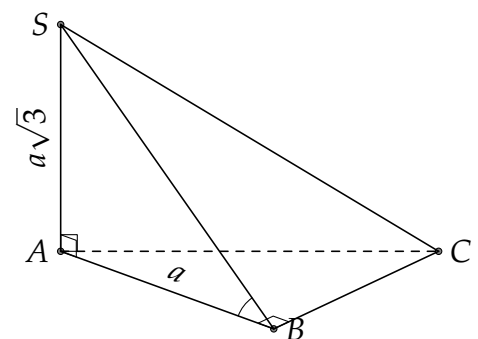
Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

Xét tam giác vuông SAB , ta có

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .



Chọn phương án **A** ☐

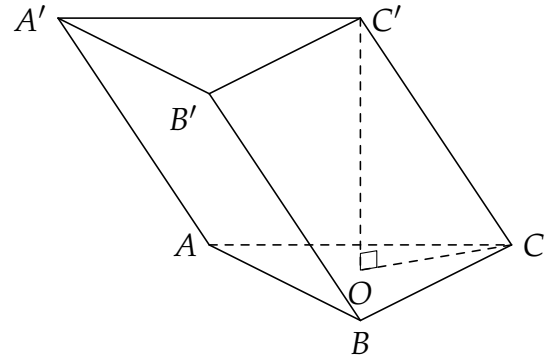
Câu 17.9. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a . Hình chiếu của C' trên (ABC) trùng với tâm của đáy. Biết $OC' = a\sqrt{2}$. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của lăng trụ bằng

A. 60° .B. $\arctan 3$.C. 30° .D. $\arctan \sqrt{6}$.**Lời giải.**

Vì tam giác ABC đều nên $OC = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là góc $\alpha = \widehat{C'CO}$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{OC'}{OC} = \sqrt{6} \Rightarrow \alpha = \arctan \sqrt{6}.$$



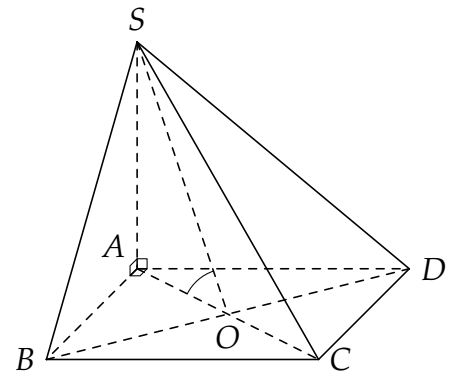
Chọn phương án **(D)**

Câu 17.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{5}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Gọi α là góc giữa SO và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\sqrt{10}$.B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.D. $\sqrt{5}$.**Lời giải.**

Do $SA \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $ABCD$. Vậy $\alpha = \widehat{SOA}$.

$$\text{Suy ra } \tan \alpha = \frac{SA}{OA} = \frac{a\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5}.$$



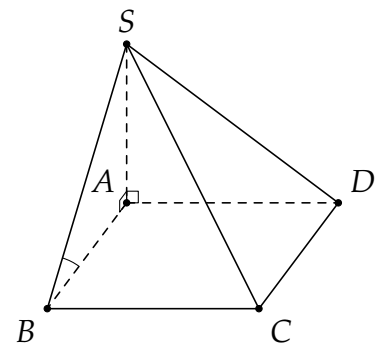
Chọn phương án **(D)**

Câu 17.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa cạnh SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 60° .B. 90° .C. 30° .D. 45° .**Lời giải.**

Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ từ đó suy ra $(SB; (ABCD)) = \widehat{SBA}$.

Theo giả thiết ta có $SA = AB$ suy ra tam giác SAB vuông cân tại A , từ đó ta có $(SB; (ABCD)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.



Chọn phương án **(D)**

Câu 17.12. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Các cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng α . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

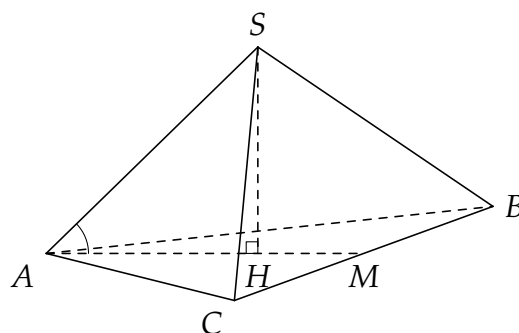
D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ABC là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow$

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Mà } \widehat{SAH} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Chọn phương án **(A)**

□

Câu 17.13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = a$ và $SA \perp (ABC)$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Tính SA .

A. $SA = 2a$.

B. $SA = a\sqrt{3}$.

C. $SA = a\sqrt{2}$.

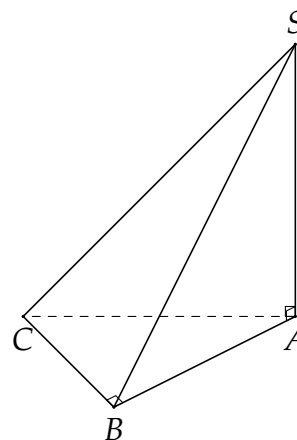
D. $SA = a$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A có $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên tam giác SAC cân tại A .

Do đó, $SA = AC = a\sqrt{2}$.



Chọn phương án **(C)**

□

CÂU 18. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần tại $x = -1$ và $x = 1$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 18.1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Do hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm đổi dấu ba lần tại $x_1; x_2; x_3$ nên hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

Chọn phương án **A**

□

Câu 18.2. Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần tại $x = -1$ và $x = 1$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn phương án **B**

□

Câu 18.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần tại $x = -3$ và $x = 2$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Chọn phương án **A**

□

Câu 18.4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ không đổi dấu tại $x = 1$ nên tại $x = 1$ không là điểm cực trị của hàm số.

Chọn phương án **C**

□

Câu 18.5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	-1	3	2

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. Có một điểm. B. Có hai điểm. C. Có ba điểm. D. Có bốn điểm.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị tại $x = -1$ và $x = 1$.

Tại $x = 0$ không phải là cực trị vì hàm số $y = f(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 18.6. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng** ?

- A. Hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có một điểm cực trị.
 B. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có ba điểm cực trị.
 C. Hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số $y = x^3 + 3x - 4$ có hai điểm cực trị.

Lời giải.

Ta có

- Hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ không có cực trị.
- Hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ có một cực trị vì $a.b > 0$.
- Hàm số $y = x^3 + 3x - 4$ không có cực trị vì $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có ba điểm cực trị vì $a.b < 0$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 18.7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = 2$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = -3$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 0$ có ba nghiệm là $x = -2, x = 0, x = 1$.

Ta có bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 18.8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (e^x - 1)(x^2 - x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có: $y' = 0$ có ba nghiệm là $x = -1, x = 0, x = 2$.

Ta có bảng xét dấu của hàm số $f'(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bản biến thiên ta thấy hàm số có hai điểm cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 2$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 18.9.

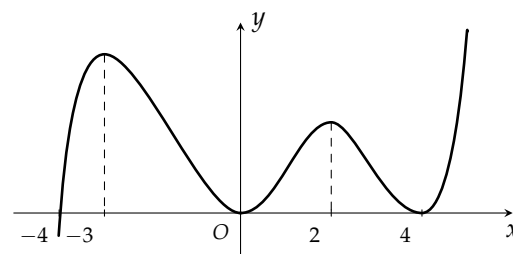
Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm là $x = -4, x = 0$ và $x = 4$.

- Tại $x = 0$ và $x = 4$ là nghiệm bội chẵn của $f'(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ không đạt cực trị tại đó.
- Tại $x = -4$ là nghiệm bội lẻ của $f'(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại đó.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

Chọn phương án **A**

□

Câu 18.10.

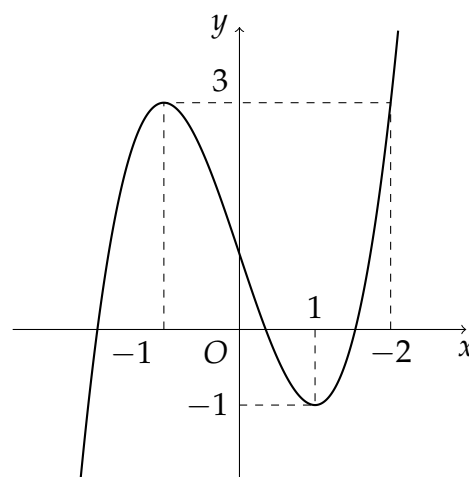
Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x) - 3x + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



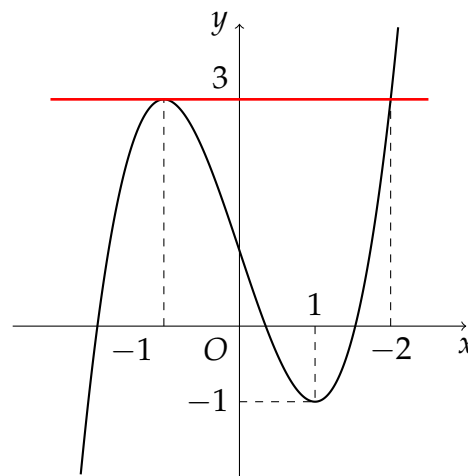
Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x) - 3x + 2020$ khi đó $g'(x) = f'(x) - 3$.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $g'(x) = 0$ hay $f'(x) = 3$.

- Vì $x = -1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $g'(x) = 0$ nên không là cực trị của hàm số $y = g(x)$.
- Vì $x = 2$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $g'(x) = 0$ nên là cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x) - 3x + 2020$ là một điểm cực trị.



Chọn phương án **A** ☐

Câu 18.11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - \sqrt{2})x^2(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $f'(x)$ có 4 nghiệm phân biệt là $\pm\sqrt[4]{2}; 0; -2$.

Tuy nhiên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $\pm\sqrt[4]{2}$ và -2 nên hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Chọn phương án **C** ☐

Câu 18.12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải.

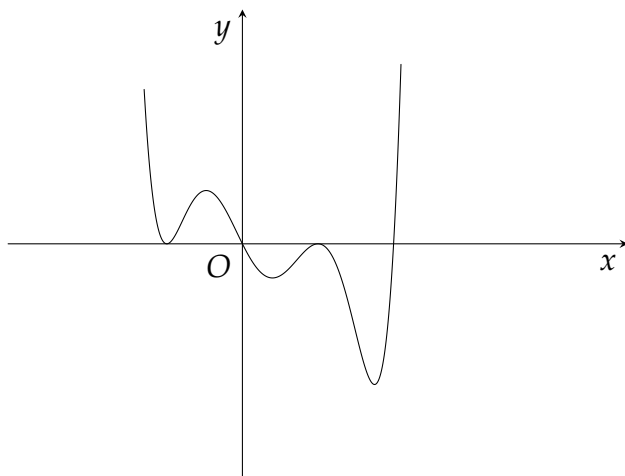
Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2-2)^2(x^2+2)$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm là $-1, \pm\sqrt{2}$ nhưng $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x = -1$.

Nên hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị.

Chọn phương án **C** ☐

Câu 18.13. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $f'(x)$



Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy $f'(x) = 0$ và đổi dấu tại đúng hai điểm nên hàm số có hai điểm cực trị.

Chọn phương án **(D)** ☐

Câu 18.14. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ trên $[1;5]$.

A. $\max_{x \in [1;5]} f(x) = 3\sqrt{2}$. B. $\max_{x \in [1;5]} f(x) = \sqrt{2}$. C. $\max_{x \in [1;5]} f(x) = 2\sqrt{2}$. D. $\max_{x \in [1;5]} f(x) = 2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên $[1;5]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-1}}{2 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{5-x}}.$$

$$\text{Do đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 3 \in [1;5].$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = 2 = f(5), f(3) = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } \max_{x \in [1;5]} f(x) = 2\sqrt{2}.$$

Chọn phương án **(C)** ☐

Câu 18.15. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ liên tục trên $[-1;2]$.

$$f'(x) = -4x^3 + 24x.$$

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$$

Ta xét trên $[-1;2]$ nên nhận $x = 0$.

$$\text{Ta có } f(-1) = 12, f(0) = 1, f(2) = 33.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [-1;2]} f(x) = f(2) = 33.$$

Chọn phương án **(C)** ☐

CÂU 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

$$f'(x) = -4x^3 + 24x = 4x(-x^2 + 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1;2) \\ x = -\sqrt{6} \notin (-1;2) \\ x = \sqrt{6} \notin (-1;2) \end{cases}$$

$$f(-1) = 12; f(2) = 33; f(0) = 1.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;2]} f(x) = 33.$$

Chọn phương án **(C)** ☐

Câu 19.1. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$ trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{7}{3}$. C. 0. D. -1.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$ liên tục trên $[0;2]$.

$$f'(x) = x^2 + x - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Ta xét trên $[0; 2]$ nên nhận $x = 1$.

$$\text{Ta có } f(0) = -1, f(1) = -\frac{13}{6}, f(2) = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 2]} f(x) = f(2) = -\frac{1}{3}.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 19.2. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. -5 .

D. 5 .

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ liên tục trên $[0; 2]$.

$$f'(x) = -\frac{8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in (0; 2).$$

$$\text{Ta có } f(0) = \frac{1}{3}, f(2) = -5.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 2]} f(x) = f(0) = \frac{1}{3}.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 19.3. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ bằng

A. 1 .

B. 0 .

C. $\sqrt{3}$.

D. 2 .

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ liên tục trên $[0; 2]$.

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x^2 + 2x}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Ta có } f(0) = 0, f(2) = 0, f(1) = 1.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 2]} f(x) = f(1) = 1.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 19.4. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ bằng

A. $\frac{58}{27}$.

B. 3 .

C. 2 .

D. -2 .

Lời giải.

$$f(x) = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x = \cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x + 2. \text{ Đặt } t = \cos x, t \in [-1; 1].$$

Hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2$ liên tục trên $[-1; 1]$.

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f(-1) = -2, f(1) = 2, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}.$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [-1; 1]} f(t) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 19.5. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

A. $\frac{1+m^2}{2}$.

B. $-m^2$.

C. $\frac{1-m^2}{2}$.

D. $\frac{m^2-1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+1}$ liên tục trên $[0; 1]$.

$$f'(x) = \frac{m^2+1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (0; 1).$$

Ta có $f(0) = -m^2, f(1) = \frac{1-m^2}{2}$.

Vậy $\max_{x \in [0; 1]} f(x) = f(1) = \frac{1-m^2}{2}$.

Chọn phương án **C** □

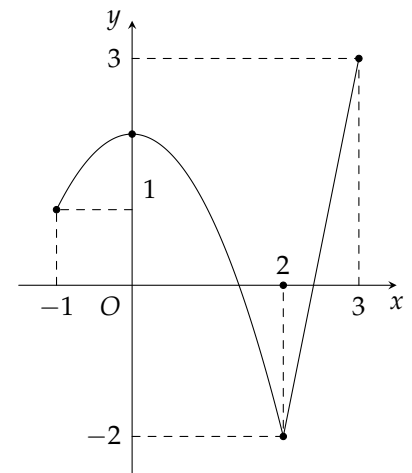
Câu 19.6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị $M - m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có $M = 3$ và $m = -2$ nên $M - m = 3 - (-2) = 5$.

Chọn phương án **D** □

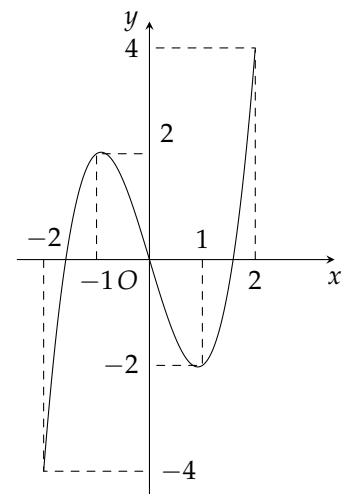
Câu 19.7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị $M - m$ bằng

A. 0.

B. 8.

C. 4.

D. 2.



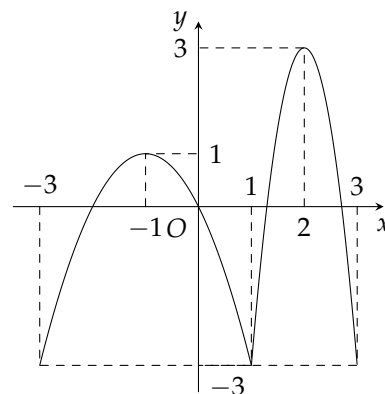
Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có $M = 4$ và $m = -4$ nên $M - m = 4 - (-4) = 8$.

Chọn phương án **B** □

Câu 19.8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 0]$. Giá trị $M - m$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 6.



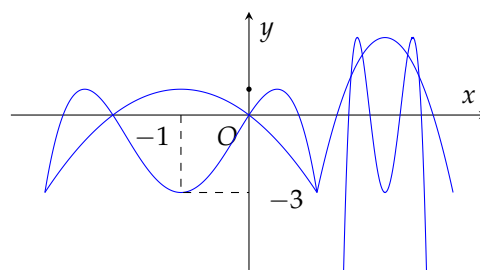
Lời giải.

Ta có $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & (-3 \leq x \leq -1) \\ -6x^2 + 24x - 21 & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$

$f(f(x)) = \begin{cases} -x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x & (-3 \leq x \leq -1) \\ -36x^4 + 288x^3 - 828x^2 + 1008x - 339 & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases}$

Đồ thị của hàm số $f(f(x))$ như hình vẽ

Do đó $M = 0$ và $m = -3$ nên $M - m = 0 - (-3) = 3$.



Chọn phương án **B** □

Câu 19.9. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x - 3|\sqrt{x + 1}$ trên $[0; 4]$. Khi đó $M + 2N$ bằng

- A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$. B. $\frac{256}{27}$. C. 3. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \sqrt{(x - 3)^2(x + 1)}$. Xét hàm số $g(x) = (x - 3)^2(x + 1)$ trên $[0; 4]$.

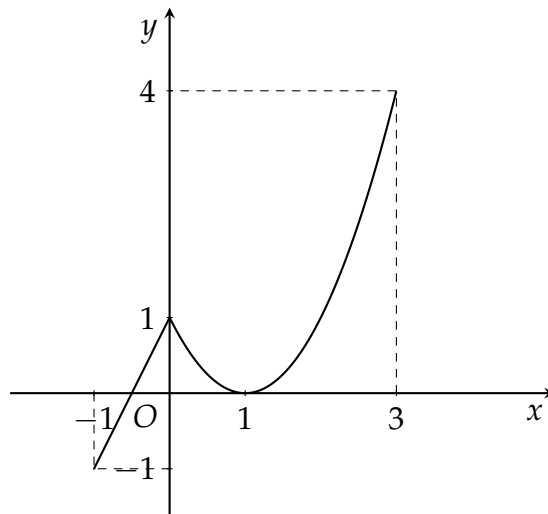
Ta có $g'(x) = 2(x - 3)(x + 1) + (x - 3)^2 = (x - 3)(3x - 1)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in (0; 4) \\ x = \frac{1}{3} \in (0; 3) \end{cases}; g(0) = 9, g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{256}{27}, g(3) = 0, g(4) = 5.$

Khi đó $\min_{[0; 4]} g(x) = 0; \max_{[0; 4]} g(x) = \frac{256}{27}$. Hay $M = \frac{16\sqrt{3}}{9}, N = 0$. Vậy $M + 2N = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Chọn phương án **A** □

Câu 19.10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 3]$. Tính $M - m$.



A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-1; 3]$ là -1 tại $x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất trên $[-1; 3]$ là 4 tại điểm $x = 3$. Do đó $M = 4, m = -1$ nên $M - m = 5$.

Chọn phương án **(B)** □

CÂU 20. Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8 (ab)$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. $a = b^2$.

B. $a^3 = b$.

C. $a = b$.

D. $a^2 = b$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 a = \log_8 (ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \frac{1}{3} \log_2 (ab) \Leftrightarrow 3 \log_2 a = \log_2 (ab) \Leftrightarrow \log_2 a^3 = \log_2 (ab)$.
 $\Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 20.1. Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a^2 = \log_4 (ab^2)$. Mệnh đề nào **đúng** ?

A. $2a = b$.

B. $a^2 = b^3$.

C. $a^3 = b^2$.

D. $a = b$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 a^2 = \log_4 (ab^2) \Leftrightarrow \log_2 a^2 = \frac{1}{2} \log_2 (ab^2) \Leftrightarrow 2 \log_2 a^2 = \log_2 (ab^2)$.
 $\Leftrightarrow \log_2 a^4 = \log_2 (ab^2) \Leftrightarrow a^4 = ab^2$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 20.2. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3 b^2 = 32$. Giá trị của $3 \log_2 a + 2 \log_2 b$ bằng

A. 5.

B. 2.

C. 32.

D. 4.

Lời giải.

Ta có: $3 \log_2 a + 2 \log_2 b = \log_2 a^3 + \log_2 b^2 = \log_2 (a^3 b^2) = \log_2 32 = 5$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 20.3. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_4 a + \log_2 b = -\frac{1}{2}$. Giá trị của $a^2 b^4$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 2.

D. -4 .

Lời giải.

Ta có: $\log_4 a + \log_2 b = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 a + \log_2 b = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{a} + \log_2 b = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{ab} = -\frac{1}{2}$.
 $\Leftrightarrow \sqrt{ab} = 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a^2 b^4 = \frac{1}{4}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 20.4. Cho $\log_2(a+1) = 3$. Giá trị của biểu thức $3^{\log_4(a-3)}$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Ta có: $\log_2(a+1) = 3 \Leftrightarrow a+1 = 8 \Leftrightarrow a = 7$.

Suy ra $3^{\log_4(a-3)} = 3^{\log_4(7-3)} = 3$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 20.5. Cho a và b là các số thực dương thỏa mãn $\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Tìm khẳng định đúng.

- A. $a = b \log_6 2$. B. $a = b \log_6 3$. C. $a = 36b$. D. $2a + 3b = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{\log_3 5 \cdot \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_3 a}{\log_3 3 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$.

$\Leftrightarrow \frac{\log_3 a}{\log_3 6} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 a - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 \frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 36 \Leftrightarrow a = 36b$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 20.6. Cho $a > 0; a \neq 1$ và $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_a 3 = x, \log_a 2 = y$. Khi đó $(x+y) \log_6 a$ bằng

- A. $(x+y)^2$. B. $2(x+y)$. C. $x+y$. D. 1.

Lời giải.

Ta có: $\log_a 3 = x \Leftrightarrow a^x = 3$.

$\log_a 2 = y \Leftrightarrow a^y = 2$.

Suy ra $(x+y) \log_6 a = \log_6 a^{x+y} = \log_6 (a^x \cdot a^y) = \log_6 (3 \cdot 2) = 1$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 20.7. Cho $a > 0; a \neq 1$ và $b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}$ và $\log_2 a = \frac{16}{b}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 16. B. 12. C. 10. D. 18.

Lời giải.

Ta có: $\log_a b \cdot \log_2 a = \frac{b}{4} \cdot \frac{16}{b}$.

$\Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 16$

Suy ra $\log_2 a = \frac{16}{16} \Leftrightarrow \log_2 a = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Tổng $a + b = 16 + 2 = 18$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 20.8. Cho a và b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ năm của cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2 \left(\frac{b-a}{d} \right)$ bằng

- A. $\log_2 5$. B. 3. C. 2. D. $\log_2 3$.

Lời giải.

Ta có: $\log_2 \left(\frac{b-a}{d} \right) = \log_2 \left(\frac{a+4d-a}{d} \right) = \log_2 4 = 2$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 20.9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-1	0	2	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\sin x| - 1)$.

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Đặt $t = 3|\sin x| - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3|\sin x| \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 3|\sin x| - 1 \leq 2$.

Vậy $t \in [-1; 2]$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\sin x| - 1)$ chính là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có ngay $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{t \in [-1; 2]} f(t) = f(0) = 2$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 20.10. Cho $a > 0, b > 0$ và $\ln \frac{a+b}{3} = \frac{2\ln a + \ln b}{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $a^3 + b^3 = 8a^2b - ab^2$.

B. $a^3 + b^3 = 3(8a^2b + ab^2)$.

C. $a^3 + b^3 = 3(a^2b - ab^2)$.

D. $a^3 + b^3 = 3(8a^2b - ab^2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{a+b}{3} &= \frac{2\ln a + \ln b}{3} \\
 \Leftrightarrow 3\ln \frac{a+b}{3} &= 2\ln a + \ln b \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{(a+b)^3}{27} &= \ln(a^2b) \\
 \Leftrightarrow \frac{(a+b)^3}{27} &= a^2b \\
 \Leftrightarrow (a+b)^3 &= 27a^2b \\
 \Leftrightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= 27a^2b \\
 \Leftrightarrow a^3 + b^3 &= 3(8a^2b - ab^2)
 \end{aligned}$$

Chọn phương án **D**

□

Câu 20.11. Cho $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} \right) = \frac{m}{n}$ với $a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 32$.

B. $m^2 + n^2 = 543$.

C. $m^2 - n^2 = -312$.

D. $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải.

Đặt $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{5}{7}}} = \frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$, suy ra $\log_a A = \log_a a^{\frac{19}{7}} = \frac{19}{7}$.

Từ đó suy ra $m = 19, n = 7 \Rightarrow m^2 - n^2 = 312$.

Chọn phương án (A) ☐

Câu 20.12. Cho $a > 0, b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \frac{b}{4}, \log_2 a = \frac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.
 A. 12. B. 18. C. 16. D. 10.

Lời giải.

Ta có $\log_2 a = \frac{16}{b} \Leftrightarrow a = 2^{\frac{16}{b}}$ suy ra $\log_a b = \log_{2^{\frac{16}{b}}} b = \frac{b}{16} \log_2 b = \frac{b}{4}$.

Từ đó suy ra $\log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 16 \Rightarrow a = 2$.

Vậy $a + b = 18$.

Chọn phương án (B) ☐

Câu 20.13. Nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của $\frac{a}{b}$ là

A. 2. B. 2^{18} . C. 8. D. 2^9 .

Lời giải.

Điều kiện: $a > 0, b > 0$.

Ta có

$$\begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \frac{1}{3} \log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3. \end{cases}$$

Vậy $\frac{a}{b} = 2^3 = 8$.

Chọn phương án (C) ☐

CÂU 21. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$.

A. $[-2; 4]$. B. $[-4; 2]$.
 C. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. D. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

$5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$.

Chọn phương án (A) ☐

Câu 21.1. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq 4$.

A. $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[3; +\infty)$. D. $[0; 3]$.

Lời giải.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [0; 3]$.

Chọn phương án (D) ☐

Câu 21.2. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 \geq 0$.

A. $[4; +\infty)$. B. $[2; 4]$. C. $(0; 2] \cup [4; +\infty)$. D. $(0; 2]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$.

$\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \log_2 x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; 4]$.

Chọn phương án **(B)**



Câu 21.3. Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

A. $[-2; 4]$.

B. $[-4; 2]$.

C. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

D. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } 5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} &\Leftrightarrow x-1 \geq x^2-x-9 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2.\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-4; 2]$.

Chọn phương án **(B)**



Câu 21.4. Hỏi bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } 2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10} &\Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \leq 2^{-(2x-10)} \\ &\Leftrightarrow x^2-3x+4 \leq -(2x-10) \\ &\Leftrightarrow x^2-x-6 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3.\end{aligned}$$

Vì x nguyên dương nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

Do đó bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên dương.

Chọn phương án **(D)**



Câu 21.5. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.

C. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } \left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x} &\Leftrightarrow 9x^2-17x+11 \leq 7-5x \\ &\Leftrightarrow 9x^2-12x+4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Chọn phương án **(C)**



Câu 21.6. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{x-1}$ là

A. $(-\infty; 1]$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{x-1} &\Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-1} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}+2)^{-(x-1)} \\ &\Leftrightarrow x-1 \geq -(x-1) \\ &\Leftrightarrow x \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[1; +\infty)$.

Câu 21.7. Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0$ có tập nghiệm là

- A.** $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
C. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. **D.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: $2x^2 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0 &\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 > 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn phương án **D**

Câu 21.8. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}} [\log_3(x-2)] > 0$ là $(a; b)$. Giá trị của $b - a$ bằng

- A. 2.** **B. 4.** **C. 3.** **D. 5.**

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x-2 > 0 \\ \log_3(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x-2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$ Khi đó

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \log_{\frac{\pi}{6}} [\log_3(x-2)] > 0 &\Leftrightarrow \log_3(x-2) < 1 \\ &\Leftrightarrow x-2 < 3 \\ &\Leftrightarrow x < 5. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x > 3$, suy ra nghiệm của bất phương trình là $3 < x < 5$.

Do đó tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = (3; 5) = (a; b)$.

Suy ra $a = 3, b = 5 \Rightarrow b - a = 2$.

Chọn phương án **A**

Câu 21.9. Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2\ln(4x + 4)$ là

- A. $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$. B. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. C. $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. D. $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 4x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \ln x^2 < 2 \ln(4x + 4) &\Leftrightarrow \ln x^2 < \ln(4x + 4)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 < (4x + 4)^2 \\ &\Leftrightarrow 15x^2 + 32x + 16 > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{3} \\ x > -\frac{4}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \end{cases}$, suy ra nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{4}{5}$ và $x \neq 0$.

Do đó tập nghiệm bất phương trình đã cho là $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 21.10. Biết $S = [a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$. Giá trị của $b - a$ bằng

A. $\frac{8}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{10}{3}$.

D. 2.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x, t > 0$ ta được bất phương trình:

$$3t^2 - 10t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

$$\text{Vì } t = 3^x, t > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Do đó tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = [-1; 1] = [a; b]$.

Suy ra $a = -1, b = 1 \Rightarrow b - a = 2$.

Chọn phương án **D** □

Câu 21.11. Giải bất phương trình $\log_3^2 x - 2 \log_3(3x) - 1 < 0$ được tập nghiệm $S = (a; b)$, với a, b là hai số thực và $a < b$. Giá trị của biểu thức $3a + b$ bằng

A. -3.

B. 3.

C. 11.

D. 28.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \log_3^2 x - 2 \log_3(3x) - 1 < 0 &\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2(\log_3 x + 1) - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \log_3^2 x - 2 \log_3 x - 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow -1 < \log_3 x < 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 27. \end{aligned}$$

Do đó tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S = \left(\frac{1}{3}; 27\right) = (a; b)$.

Suy ra $a = \frac{1}{3}, b = 27 \Rightarrow 3a + b = 28$.

Chọn phương án **D** □

Câu 21.12. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x + 4) > \log_{0,8}(13x + 8)$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \log_{0,8}(15x + 4) > \log_{0,8}(13x + 8) &\Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 4 < 13x + 8 \\ 15x + 4 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 4 \\ 15x > -4. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -\frac{4}{15} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{15} < x < 2. \end{aligned}$$

Nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $x \in \{0; 1\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 21.13. Tổng tất cả các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $2^{x^2-x-1} \cdot 3^{x^2-x} \leq 18$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2-x-1} \cdot 3^{x^2-x} \leq 18 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} \cdot 3^{x^2-x} \leq 36 \Leftrightarrow 6^{x^2-x} \leq 6^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Như vậy các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình là $x \in \{0; 1; 2\}$.

Do đó tổng tất cả các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình đã cho bằng 3.

Chọn phương án **(A)** □

CÂU 22. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

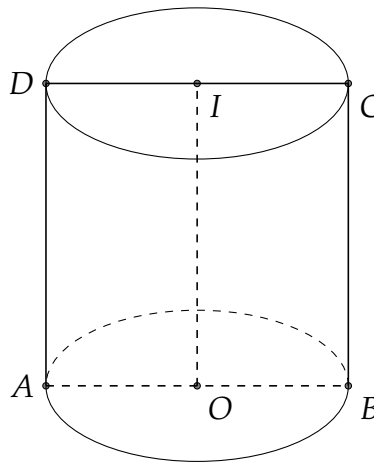
A. 18π .

B. 36π .

C. 54π .

D. 27π .

Lời giải.



Thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$.

Theo đề bán kính đáy là $r = 3$ nên $l = BC = 2r = 6$.

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi r l = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 36\pi$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 22.1. Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , bán kính $R = 3$, góc ở đỉnh của hình nón là $\varphi = 120^\circ$. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB , trong đó A, B thuộc đường tròn đáy. Diện tích của tam giác SAB bằng

A. $6\sqrt{3}$.

B. 6.

C. $3\sqrt{3}$.

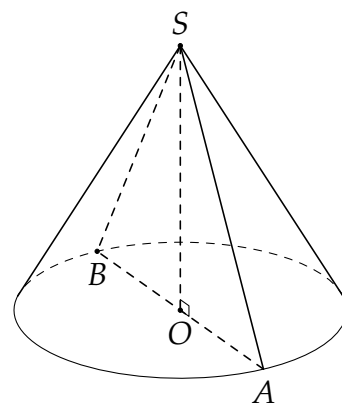
D. 3.

Lời giải.

Do góc ở đỉnh của hình nón $\varphi = 120^\circ$, gọi l là độ dài đường sinh ta có

$$l = \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = SA$$

Khi đó, diện tích của tam giác SAB bằng $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot SA^2 = 3\sqrt{3}$.



Chọn phương án **C**

Câu 22.2. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông cạnh $2a$. Thể tích khối trụ tương ứng bằng

A. $2\pi a^3$.

B. πa^3 .

C. $\frac{8\pi a^3}{3}$.

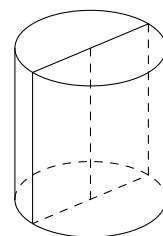
D. $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Do khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh bằng $2a$ nên $h = 2R = 2a \Rightarrow$

$$\begin{cases} h = 2a \\ R = a \end{cases}$$

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2 \cdot h = 2\pi a^3$.



Chọn phương án **A**

Câu 22.3. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $3a$. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối trụ.

A. $S_{tp} = \frac{27\pi a^2}{2}$.

B. $S_{tp} = \frac{13\pi a^2}{6}$.

C. $S_{tp} = a^2\pi\sqrt{3}$.

D. $S_{tp} = \frac{a^2\pi\sqrt{3}}{2}$.

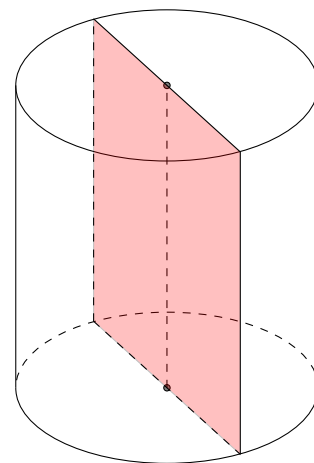
Lời giải.

Hình vuông có cạnh bằng $3a$, nghĩa là $2r = 3a$ và $h = 3a$.

$$\text{Vậy } r = \frac{3a}{2}, h = 3a.$$

Diện tích toàn phần của khối trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{27\pi a^2}{2}.$$



Chọn phương án **A**

Câu 22.4. Hình trụ có bán kính đáy bằng a , chu vi của thiết diện qua trục bằng $10a$. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V = 4\pi a^3$.

B. $V = 3\pi a^3$.

C. $V = \pi a^3$.

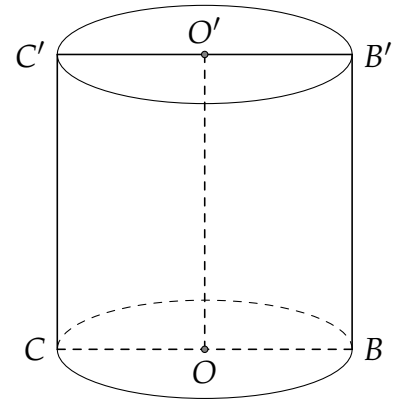
D. $V = 5\pi a^3$.

Lời giải.

Xét hình trụ như hình vẽ bên.

Ta có $2 \times (BC + BB') = 10a \Leftrightarrow 2 \times (2a + BB') = 10a \Leftrightarrow BB' = 3a$.

Vậy $V = \pi r^2 h = \pi \times a^2 \times 3a = 3\pi a^3$.



Chọn phương án **(B)**

□

Câu 22.5. Thiết diện qua trục của một khối trụ là hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4a$, $AC = 5a$ (AB và CD thuộc hai đáy của khối trụ). Tính thể tích khối trụ đã cho.

A. $16\pi a^3$.

B. $8\pi a^3$.

C. $12\pi a^3$.

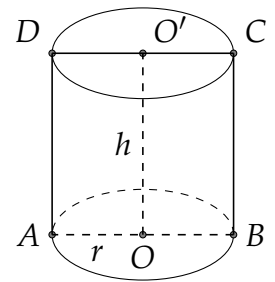
D. $4\pi a^3$.

Lời giải.

Vì thiết diện qua trục nên

$AB = 2r = 4a \Rightarrow r = 2a$ và $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 3a \Rightarrow h = 3a$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4a^2 \cdot 3a = 12\pi a^3$.



Chọn phương án **(C)**

□

Câu 22.6. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích bằng 9. Tính thể tích V của khối trụ (T).

A. $V = \frac{27\pi}{2}$.

B. $V = \frac{27\pi}{4}$.

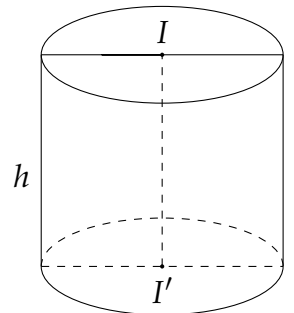
C. $V = \frac{81\pi}{4}$.

D. $V = \frac{9\pi}{2}$.

Lời giải.

Diện tích của hình vuông thiết diện bằng 9 nên độ dài cạnh của nó bằng 3. Từ giả thiết ta suy ra chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy bằng 3.

$V = \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27\pi}{4}$.



Chọn phương án **(B)**

□

Câu 22.7. Cho một hình trụ có bán kính $R = a$. Mặt phẳng (P) đi qua trục và cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $6a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ lần lượt là

A. $6\pi a^2, 3\pi a^3$.

B. $8\pi a^2, 3\pi a^3$.

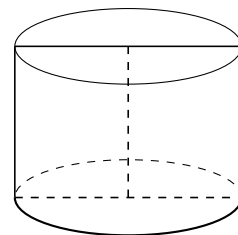
C. $6\pi a^2, 9\pi a^3$.

D. $6\pi a^2, 6\pi a^3$.

Lời giải.

Gọi chiều cao hình trụ là $h \Rightarrow 6a^2 = h.2a \Rightarrow h = 3a$.

$$S_{xq} = 2\pi.a.3a = 6\pi a^2 \text{ và } V_{\text{trụ}} = \pi a^2.3a = 3\pi a^3.$$



Chọn phương án **A**



Câu 22.8. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón là

A. $\pi\sqrt{3}$.

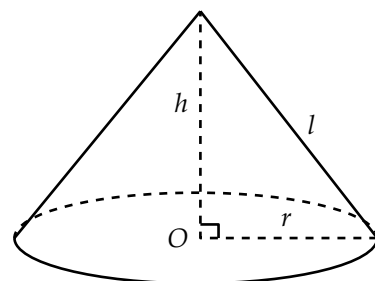
B. $3\pi\sqrt{3}$.

C. 3π .

D. $3\pi\sqrt{2}$.

Lời giải.

Cạnh huyền bằng $2\sqrt{3} \Rightarrow h = r = \sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi\sqrt{3}$.



Chọn phương án **A**



Câu 22.9. Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh có độ dài $2a$. Thể tích của khối nón là:

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$.

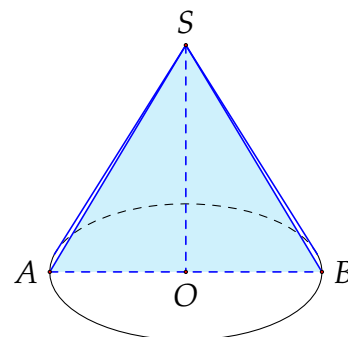
Lời giải.

Giả sử hình nón có đỉnh là S , tâm đáy là O , thiết diện qua trục là SAB .

Ta có: SAB đều cạnh $2a \Rightarrow R = a$.

Tam giác SOA vuông tại O có: $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3}a$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}h\pi R^2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot \pi a^2 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.



Chọn phương án **B**



Câu 22.10. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $ABCD$ tạo với đáy hình trụ góc 45° . Tính diện tích xung quanh hình trụ?

A. $S_{xq} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{5}$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{3}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{4}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi P, Q, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, OO' .

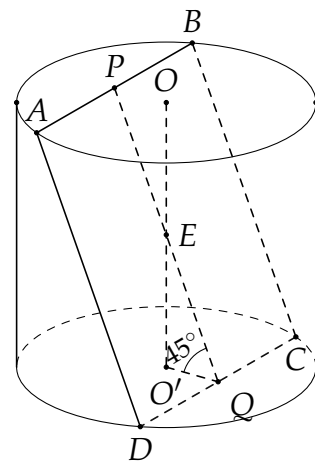
Góc giữa $(ABCD)$ và mặt đáy là $\widehat{O'QE} = 45^\circ$.

Ta có $EQ = \frac{a}{2}$, do đó $O'Q = EO' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $h = OO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $r = OC' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là

$$S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{3}}{2}.$$



Chọn phương án **(D)** □

Câu 22.11. Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$, BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60° . Tính theo a diện tích S của tam giác IBC .

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

B. $S = \frac{a^2}{3}$.

C. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

D. $S = \frac{2a^2}{3}$.

Lời giải.

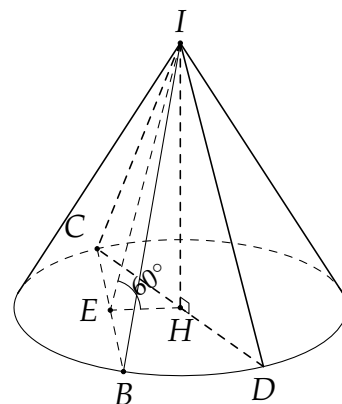
Tam giác IDC vuông cân có $DC = a\sqrt{2} \Rightarrow IH = HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IC = a$.

Gọi E là trung điểm cạnh BC , góc giữa mặt phẳng (IBC) và (BCD) là $\widehat{IEH} = 60^\circ$.

Trong tam giác IHE có $IE = \frac{IH}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tam giác IEC có $CE = \sqrt{IC^2 - IE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

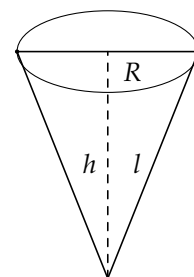
Vậy $S = EI \cdot EC = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.



Chọn phương án **(C)** □

Câu 22.12.

Khi sản xuất cái phễu hình nón (không có nắp) bằng nhôm, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm phễu ít nhất, tức là diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất. Hỏi nếu ta muốn sản xuất cái phễu có thể tích là 2 dm^3 thì diện tích xung quanh của cái phễu sẽ có giá trị nhỏ nhất gần với giá trị nào sau đây nhất?



A. $6,85 \text{ dm}^2$.

B. $6,75 \text{ dm}^2$.

C. $6,65 \text{ dm}^2$.

D. $6,25 \text{ dm}^2$.

Lời giải.

Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và độ dài đường sinh của cái phễu.

Khi đó $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{6}{\pi R^2}$ và $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{\frac{36}{\pi^2 R^4} + R^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi R \cdot l = \pi R \sqrt{\frac{36}{\pi^2 R^4} + R^2} = \sqrt{\frac{36}{R^2} + \pi^2 R^4}$.

Ta có $\frac{36}{R^2} + \pi^2 R^4 = \frac{18}{R^2} + \frac{18}{R^2} + \pi^2 R^4 \geq 3\sqrt[3]{(18\pi)^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{18}{R^2} = \pi^2 R^4 \Leftrightarrow R = \sqrt[6]{\frac{18}{\pi^2}}$.

Suy ra min $S_{xq} = \sqrt{3\sqrt[3]{(18\pi)^2}} \approx 6,65 \text{ dm}^2$.

Chọn phương án **C**

□

CÂU 23. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Nhận xét. Dạng toán ở mức độ thông hiểu. Học sinh cần kĩ năng quan sát và đọc bảng biến thiên, từ đó biện luận được số nghiệm phương trình thông qua sự tương giao giữa hai đồ thị.

Chọn phương án **C**

□

Câu 23.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	+	0	-
y	$-\infty$	$+\infty$	3	$-\infty$

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (1;3)$.

B. $m \in (1;3]$.

C. $m \in [1;3]$.

D. $m \in [1;3)$.

Lời giải.

Dựa vào biến thiên, phương trình có ba nghiệm thực phân biệt khi $m \in (1;3)$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 23.2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

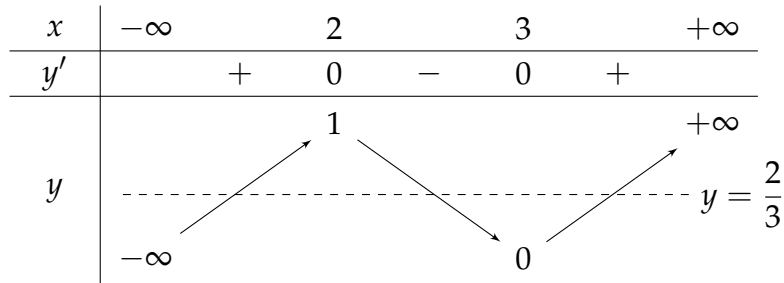
C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$.

Mà số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.



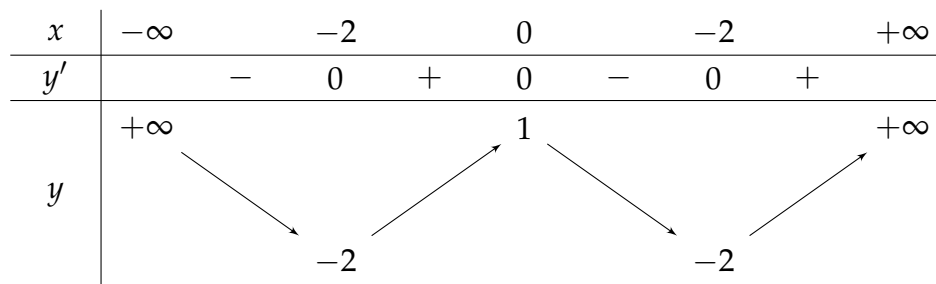
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm.

Vậy phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Chọn phương án **C**

□

Câu 23.3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A. 2.

B. 4.

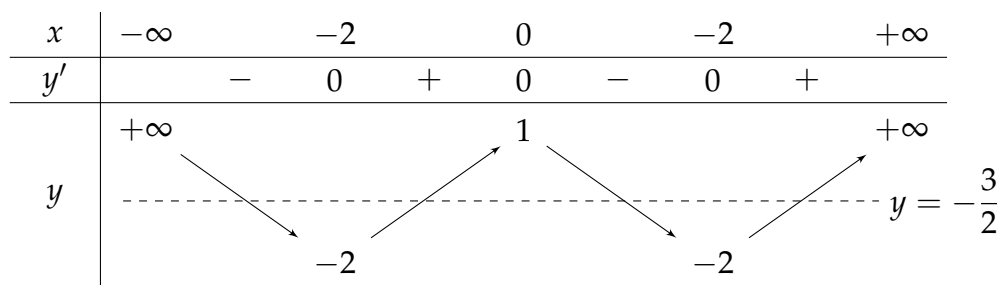
C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Phương trình $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

Mà số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ có 4 nghiệm.
 Vậy phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
 Chọn phương án **(B)** □

Câu 23.4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		-	+
y	1	3	$\frac{1}{3}$	1

Số nghiệm thực của phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ là

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải.

Từ phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & (1) \\ f(x) = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Mà số nghiệm của phương trình (1) và (2) chính là số giao điểm của đường thẳng $y = 1$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		-	+
y	1	3	$\frac{1}{3}$	1

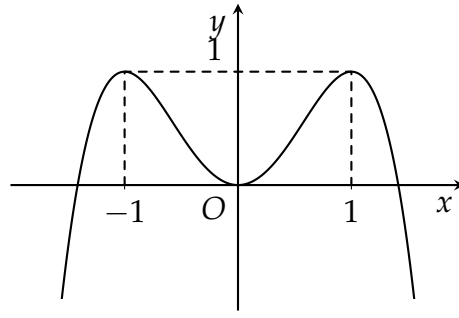
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 1 nghiệm.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 23.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới



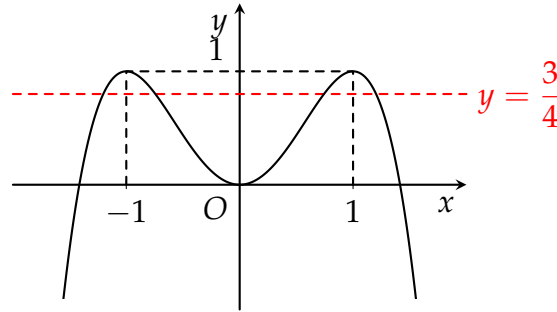
Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Từ phương trình $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4}$.

Mà số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = \frac{3}{4}$ có 4 nghiệm.

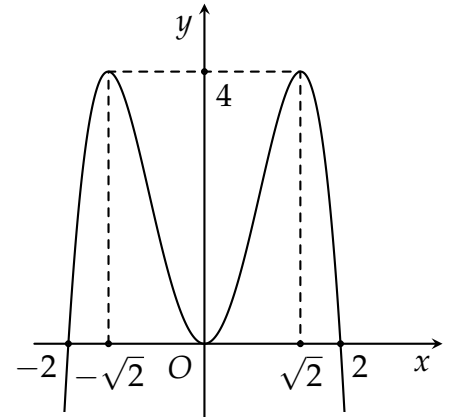
Vậy phương trình $4f(x) - 3 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Chọn phương án **C**

□

Câu 23.6. Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ có đồ thị hàm số như hình dưới. Tìm m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt?

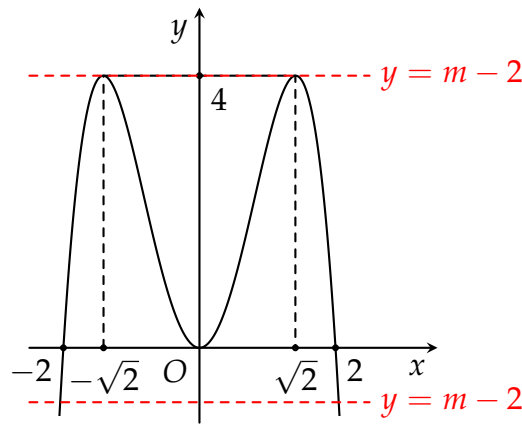
- A. $m < 0$ hoặc $m = 4$. B. $m < 0$.
C. $m < 2$ hoặc $m = 6$. D. $m < 2$.



Lời giải.

Từ phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 = m - 2$.

Mà số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m - 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^4 + 4x^2$.



Dựa vào đồ thị, để phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi $m - 2 = 4$ hoặc $m - 2 < 0$.

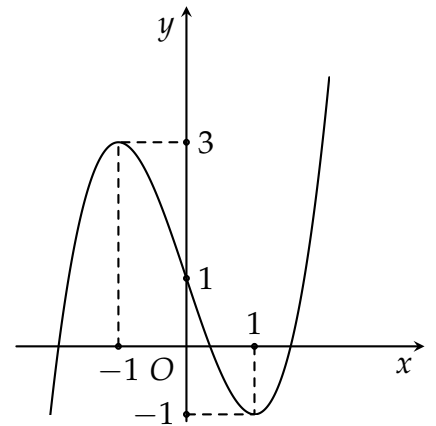
Do đó $m < 2$ hoặc $m = 6$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 23.7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị hàm số như hình dưới. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

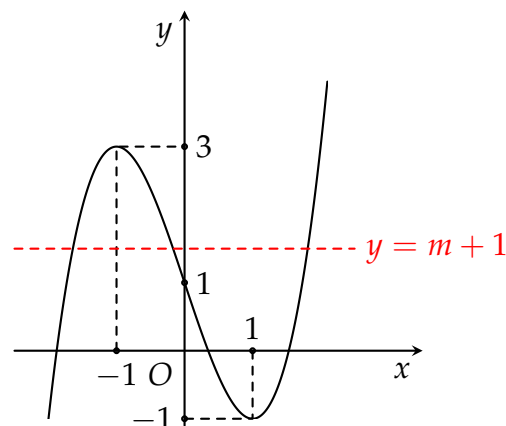
- A. $-2 < m < 3$. B. $-2 < m < 2$.
C. $-2 \leq m < 3$. D. $-1 < m < 3$.



Lời giải.

Từ phương trình $x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = m + 1$.

Mà số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.



Dựa vào đồ thị, để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng

$y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m + 1 < 3$.

Do đó $-2 < m < 2$.

Chọn phương án **(B)** □

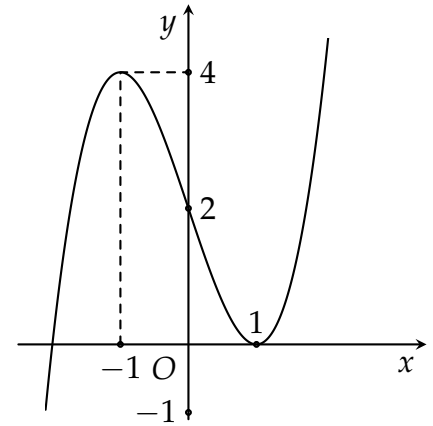
Câu 23.8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hình vẽ bên dưới. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $f(x) + 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. $0 < m < 2$.

B. $1 < m < 5$.

C. $-1 < m < 4$.

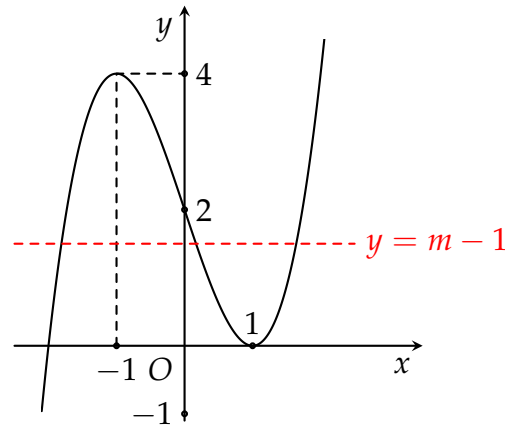
D. $0 < m < 4$.



Lời giải.

Từ phương trình $x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = m + 1$.

Mà số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.



Dựa vào đồ thị, để phương trình $f(x) = m - 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m - 1 < 4$.

Do đó $1 < m < 5$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 23.9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

A. $[-1; 2]$.

B. $(-1; 2)$.

C. $(-1; 2]$.

D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ đồ thị hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

$y = m$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 2$.

Chọn phương án **B**

□

Câu 23.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

Tìm tập hợp tất cả tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$.

A. $-2 < m < 4$.

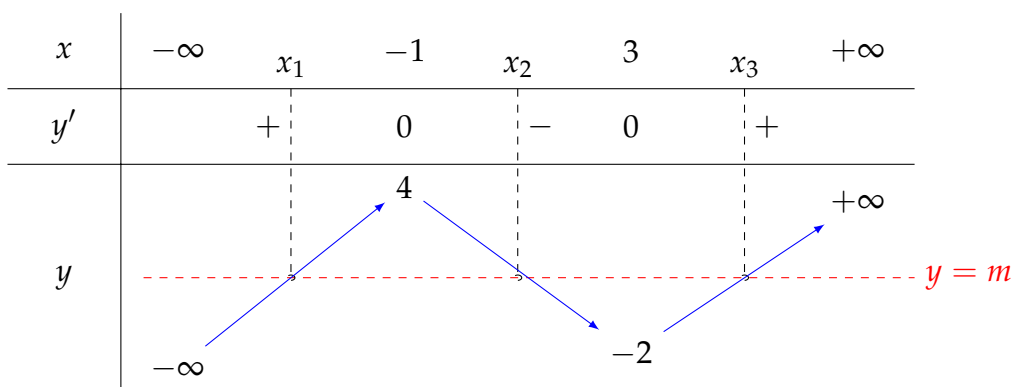
B. $-2 < m < 1$.

C. $-2 < m \leq 1$.

D. $-2 < m \leq 4$.

Lời giải.

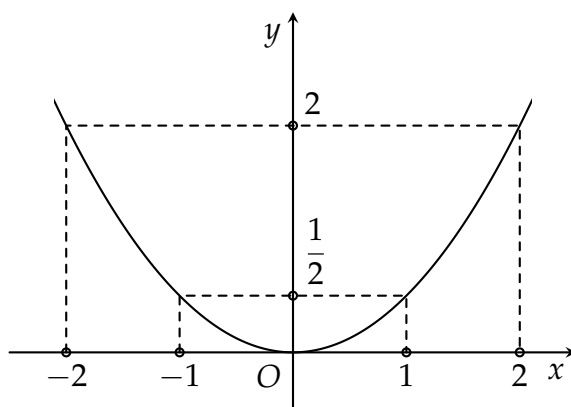
Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ đồ thị hàm số $y = f(x)$.



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$ khi và chỉ khi $-2 < m < 4$.

Chọn phương án **C**

□



Câu 23.11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - m - \sqrt{9 - x^2} = 0$ có đúng 1 nghiệm dương?

A. $m \in (-3; 3]$.

B. $m \in [-3; 3] \cup \{-3\sqrt{2}\}$.

C. $m \in [0; 3]$.

D. $m = \pm 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq 3$. Phương trình tương đương với $x - \sqrt{9 - x^2} = m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ và đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ với $-3 \leq x \leq 3$. Ta có $y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{\sqrt{9 - x^2} + x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

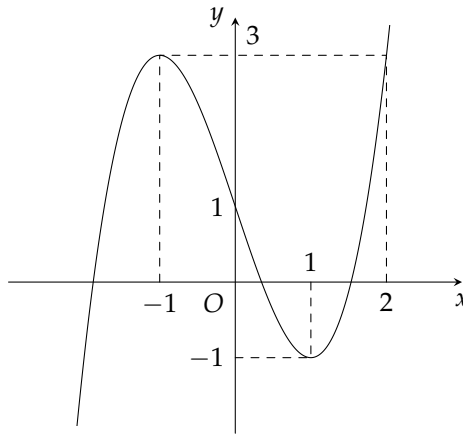
$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 9 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \in [-3; 3].$$

Bảng biến thiên

x	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	3
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	-3	$-3\sqrt{2}$	-3	3

Dựa vào bảng biến thiên phương trình có đúng một nghiệm khi $-3 < m \leq 3$.
 Chọn phương án **A** □

Câu 23.12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(7^{x+1}) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 6.

B. 4.

C. 7.

D. 5.

Lời giải.

Từ đồ thị ta suy ra hàm số $y = f(x)$ có phương trình $y = x^3 - 3x + 1$.

Đặt $t = 7^{x+1}$, ($t > 0$). Khi đó ta có phương trình

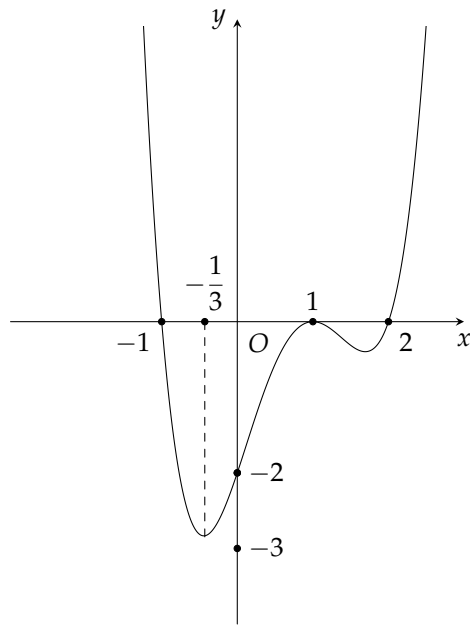
$$f(t) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m^2 - 1}{8}, (t > 0)$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Với $t > 0$ để phương trình $f(t) = \frac{m^2 - 1}{8}$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $-1 < \frac{m^2 - 1}{8} < 1 \Leftrightarrow -8 < m^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Rightarrow m \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **D** □

Câu 23.13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$.
 Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 3.
Lời giải.

B. 4.

C. 9.

D. 8.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ và $x = a$ ($1 < a < 2$).

Do đó $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ và $x = a$ ($1 < a < 2$).

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(f(x) - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có ba nghiệm $x = -\frac{1}{3}$, $x = 1$ và $x = a$ ($1 < a < 2$).

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = -\frac{1}{3} \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{3} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2 & (4) \end{cases} \quad \text{Nghiệm của phương trình}$$

$$\begin{cases} f(x) = a + 1 & (5) \end{cases}$$

$f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta vẽ thêm các đường thẳng $y = \frac{2}{3}$, $y = 2$, và $y = a + 1$ (với $2 < a + 1 < 3$) như sau.

Từ đồ thị trên, ta thấy các đường thẳng $y = \frac{2}{3}$, $y = 2$, và $y = a + 1$ (với $2 < a + 1 < 3$) lần lượt cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khác nhau và khác với $-\frac{1}{3}$, 1 , a .

Do đó các phương trình (3),(4),(5) lần lượt có hai nghiệm phân biệt khác nhau và khác với $-\frac{1}{3}$, 1 , a .

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Chọn phương án **C**

□

CÂU 24. Cho họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $x + 3 \ln(x-1) + C.$

B. $x - 3 \ln(x-1) + C.$

C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

D. $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

Lời giải.

Xét trên $(1; +\infty)$ thì $f(x) = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ và $x-1 > 0$ nên họ nguyên hàm của $f(x)$ là $x + 3 \ln(x-1) + C.$

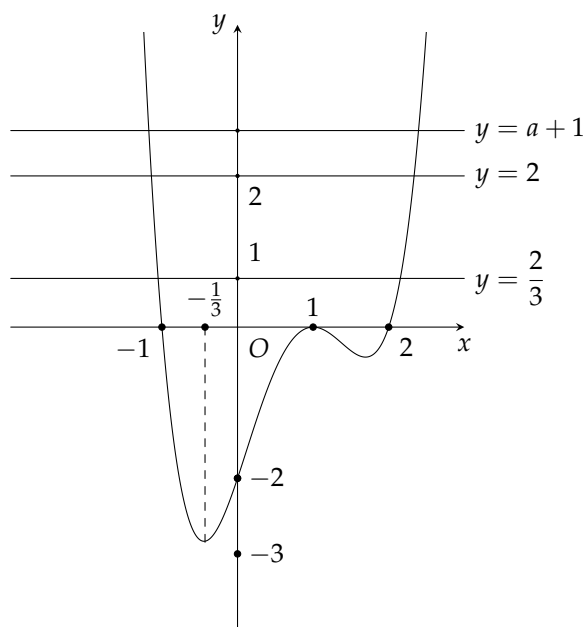
Chọn phương án **A**

□

Câu 24.1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4+3}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$



$$\text{C. } \int f(x) dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2x^4 + 3}{x^2} dx = \int \left(2x^2 + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 24.2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

$$\text{A. } x + 3 \ln(x-1) + C.$$

$$\text{B. } x - 3 \ln(x-1) + C.$$

$$\text{C. } x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$$

$$\text{D. } x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x+2}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)+3}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1} \right) dx = x + 3 \ln|x-1| + C = x + 3 \ln(x-1) + C \text{ (do } x \in (1; +\infty)).$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 24.3. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

$$\text{A. } 3x - 4 \ln(x+1).$$

$$\text{B. } 3x - 4 \ln(x+1) + C.$$

$$\text{C. } 3x - \frac{4}{(x+1)^2} + C.$$

$$\text{D. } 3x + \frac{4}{(x+1)^2} + C.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{3x-1}{x+1} dx = \int \frac{3(x+1)-4}{x+1} dx = \int 3 dx - \int \frac{4}{x+1} dx = 3x - 4 \ln(x+1) + C \text{ do } (x \in (-1; +\infty))$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 24.4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ trên khoảng $(-\infty; 2)$ là

$$\text{A. } 3x - 7 \ln(2-x) + C.$$

$$\text{B. } x + 2 \ln(2x-3) + 1.$$

$$\text{C. } x + 2 \ln|2x-3| + 1.$$

$$\text{D. } x + 2 \ln|2x-3| - 1.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{3x+1}{x-2} dx = \int \frac{3(x-2)+7}{x-2} dx = \int 3 dx + \int \frac{7}{x-2} dx = 3x - 7 \ln(2-x) + C$$

do $(x \in (-\infty; 2))$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 24.5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$ thỏa mãn $F(2) = 3$. Hàm số $F(x)$ là

$$\text{A. } x + 4 \ln|2x-3| + 1.$$

$$\text{B. } x + 2 \ln(2x-3) + 1.$$

$$\text{C. } x + 2 \ln|2x-3| + 1.$$

$$\text{D. } x + 2 \ln|2x-3| - 1.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{2x-3} dx = \int \frac{(2x-3)+4}{2x-3} dx = \int dx + \int \frac{4}{2x-3} dx = x + 2 \ln|2x-3| + C$$

$$F(2) = 3 \Leftrightarrow 2 + 2 \ln|1| + C = 3 \Leftrightarrow C = 1.$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 24.6. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{3}{(x+1)^2} dx \\ &= 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C \text{ (do } x \in (-1; +\infty)). \end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 24.7. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2-2x-1}{x-1}$ thỏa mãn $F(0) = -1$. Giá trị của $F(-1)$ bằng

A. $-\ln 2.$

B. $-2 + \ln 2.$

C. $\ln 2.$

D. $2 + \ln 2.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{2x(x-1)-1}{x-1} dx = \int 2x dx - \int \frac{1}{x-1} dx = x^2 - \ln|x-1| + C \\ F(0) = -1 &\Leftrightarrow -\ln(1) + C = -1 \Leftrightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = x^2 - \ln|x-1| - 1 \Rightarrow F(-1) = -\ln 2. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 24.8. Cho $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1} dx = a - \ln b$ với a, b nguyên dương. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 4.

B. 5.

C. 10.

D. 13.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1} dx &= \int_0^1 2 dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1} + \int_0^1 \frac{2}{(x+1)^2} dx = (2x) \Big|_0^1 - (\ln|x+1|) \Big|_0^1 - \left(\frac{2}{x+1} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2 \Rightarrow a = 3 \text{ và } b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 13. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 24.9. Biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Mệnh đề nào **đúng**?

A. $a + 2b = 8.$

B. $a + b = 8.$

C. $2a - b = 8.$

D. $a - b = 8.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{12}{(x+1)(x-2)} dx \\ &= \ln|x-2| + \ln|x+1| + 12 \cdot \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} \right) dx = 5\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + C \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = 5 \text{ và } b = -3 \Rightarrow a - b = 5 - (-3) = 8$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 24.10. Biết hàm số e^{2x} là một nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$. Khi đó họ các nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)+1}{e^x}$

A. $e^x - e^{-x} + C.$

B. $2e^x - e^{-x} + C.$

C. $2e^x + e^{-x} + C.$

D. $\frac{1}{2}e^x - e^{-x} + C.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } F(x) &= \int f(x) dx = e^{2x} \Rightarrow f(x) = 2e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{f(x)+1}{e^x} = \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}} = 2e^x + \frac{1}{e^x} \\ \Rightarrow \int g(x) dx &= \int \frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}} = \int \left(2e^x + \frac{1}{e^x} \right) dx = 2e^x - e^{-x} + C \end{aligned}$$

Chọn phương án **C**

□

Câu 24.11. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0; \pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4.$

B. $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$

D. $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2 \cos x - 1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{2 \cos x}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 2 \int \frac{1}{\sin^2 x} d(\sin x) - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \int f(x) dx = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C.$$

$$\text{Ta có } F'(x) = f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \in (0; \pi).$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$F'(x)$		+	0
$F(x)$			

Hàm $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Suy ra } -\frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} + \cot \frac{\pi}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3} \text{ nên } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4.$$

Chọn phương án **A**

□

Câu 24.12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(-1; +\infty)$. Biểu thức $2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$ được thỏa mãn $\forall x \in (-1; +\infty)$. Tính giá trị $f(0)$.

A. $3 - \sqrt{3}.$

B. $2 - \sqrt{3}.$

C. $-\sqrt{3}.$

D. $\sqrt{3}.$

Lời giải.

$$\text{Vì } 2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}} \text{ được thỏa mãn } \forall x \in (-1; +\infty) \text{ nên } f(1) = 1.$$

Trên khoảng $(-1; +\infty)$ ta có

$$\begin{aligned} 2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) &= \frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}} \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}f(x) + \frac{x-1}{x+1}f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) \right)' = \left(\sqrt{x^2+3} \right)' \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) \right) = \sqrt{x^2+3} + C.$$

Khi $x = 1$ ta có $\frac{0}{2} \cdot f(1) = \sqrt{3} + C \Rightarrow C = -2$. Vậy $f(0) = 2 - \sqrt{3}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 24.13. Cho hàm số $F(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx =$

7 và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x f(\sin x) dx = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{7}{5}$. B. 4. C. $\frac{7}{4}$. D. 1.

Lời giải.

Xét tích phân $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x f(\sin x) dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Ta có $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có $I_1 = \int_0^1 t^2 f(t) dt = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

Ta có $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$.

Ta có $\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 14 \int_0^1 x^3 f'(x) dx + 49 \int_0^1 x^6 dx = 7 - 14 + 7 = 0$.

Do đó $f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

Theo giả thiết $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{5}$.

Chọn phương án **(A)** □

CÂU 25. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93 671 600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

- A. 109 256 100. B. 108 374 700. C. 107 500 500. D. 108 311 100.

Lời giải.

Ta có $S = Ae^{nr} = 93\,671\,600 \cdot e^{18 \cdot 0,81\%} \approx 108\,374\,700$ (người).

Vậy năm 2035, nước Việt Nam có khoảng 108 374 700 người.

Chọn phương án **(B)**



Câu 25.1. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ gia tăng dân số hằng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,79%, dự báo dân số Việt Nam năm 2040 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

- A. 112.336.100. B. 112.336.075. C. 112.336.080. D. 112.366.100.

Lời giải.

Từ năm 2017 đến năm 2040 có 23 năm.

Áp dụng công thức $S = A \cdot e^{nr} = 93.671.600 \cdot e^{23 \cdot 0,79\%} \approx 112.336.100$.

Chọn phương án **(A)**



Câu 25.2. Số lượng của một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm tăng lên theo công thức $S = A \cdot e^t$, trong đó A là số lượng ban đầu, t là thời gian (tính bằng giờ), r là tỉ lệ tăng trưởng, S là số lượng sau t giờ. Biết rằng $A = 1000$ (con), $r = 10\%$, hỏi cần khoảng mấy giờ để đạt được 20000 con?

- A. 29 giờ. B. 30 giờ. C. 31 giờ. D. 32 giờ.

Lời giải.

Từ công thức $S = A \cdot e^t \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{S}{A}\right)}{r}$, thay số ta được

$$t = \frac{\ln\left(\frac{20000}{1000}\right)}{10\%} = \frac{\ln 20}{0,1} \approx 29,96, \text{ hay cần khoảng } 30 \text{ giờ để đạt được số lượng cần thiết.}$$

Chọn phương án **(B)**



Câu 25.3. Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất là 7%/ năm. Biết rằng nếu không rút ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian là ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền và lãi suất không thay đổi).

- A. 12 năm. B. 15 năm. C. 14 năm. D. 13 năm.

Lời giải.

Gọi n là số năm cần gửi, bài toán thuộc lãi kép gửi một lần tính theo công thức

$T = M(1 + r)^n$ với M, r là số tiền ban đầu và lãi suất định kì.

Thế thì ta có $250 = 100(1 + 0,07)^n$.

suy ra $n \approx 13,5$ nên người đó gửi ít nhất là 14 năm mới đủ số tiền.

Chọn phương án **(C)**



Câu 25.4. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số thế giới hàng năm là 1,32%, nếu tỉ lệ tăng dân số không thay đổi thì dân số được tính theo công thức tăng trưởng liên tục $S = A \cdot e^{Nr}$, trong đó A là dân số tại thời điểm mốc, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Năm 2013 dân số thế giới vào khoảng 7095 triệu người. Hỏi năm 2020 dân số thế giới gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 7879 triệu người. B. 7680 triệu người. C. 7782 triệu người. D. 7777 triệu người.

Lời giải.

Theo giả thiết ta được $A = 7095$, $r = 1,32\%$, $N = 2020 - 2013 = 7$.

Áp dụng công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ ta được dân số thế giới năm 2020 là

$$S = 7095 \cdot e^{7 \cdot \frac{1,32}{100}} \approx 7781,82 \text{ triệu người.}$$

Chọn phương án **C** ☐

Câu 25.5. Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t phút, r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 giờ.

B. 45 giờ.

C. 25 giờ.

D. 15 giờ.

Lời giải.

Đổi 5 giờ = 300 phút.

Theo giả thiết ta được $S(300) = 500 \cdot e^{r \cdot 300} = 1500 \Rightarrow e^{r \cdot 300} = 3 \Rightarrow 300 \cdot r = \ln 3 \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{300}$.

Thời gian để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con là

Áp dụng công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$ ta được

$$121500 = 500 \cdot e^{t \cdot \frac{\ln 3}{300}} \Rightarrow e^{t \cdot \frac{\ln 3}{300}} = 243 \Rightarrow t \cdot \frac{\ln 3}{300} = \ln 243 \Rightarrow t = 1500 \text{ (phút) hay } t = 25 \text{ giờ.}$$

Chọn phương án **C** ☐

Câu 25.6. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

A. 1000 con.

B. 850 con.

C. 800 con.

D. 900 con.

Lời giải.

Vì số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con nên ta có

$$300 = 100 \cdot e^{r \cdot 5} \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{5}.$$

Vậy số con vi khuẩn sau 10 giờ là $S = 100 \cdot e^{\frac{\ln 3}{5} \cdot 10} = 900$ con.

Chọn phương án **D** ☐

Câu 25.7. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.424.000 đồng.

B. 102.423.000 đồng.

C. 102.016.000 đồng.

D. 102.017.000 đồng.

Lời giải.

Theo giả thiết $A = 100.000.000$, lãi kép $r = 0,4\%/tháng$, $n = 6$ tháng.

Sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) là

$$S = A(1 + r)^n \Rightarrow S = 100.000.000(1 + 0,4\%)^6 \approx 102.424.000 \text{ đồng.}$$

Chọn phương án **A** ☐

Câu 25.8. Một người đầu tư một số tiền vào công ty theo thể thức lãi kép, kỳ hạn một năm với lãi suất 7,6%/năm. Giả sử lãi suất không đổi. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả vốn và lãi) số tiền gấp 5 lần số tiền ban đầu?

A. 23 năm.

B. 24 năm.

C. 21 năm.

D. 22 năm.

Lời giải.

Gọi A_0 là số tiền ban đầu người đó gửi vào công ty.

Sau n năm, số tiền người đó có được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A(n) = A_0 \cdot (1 + r)^n.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} 5A_0 &= A_0(1 + r)^n \Leftrightarrow (1 + r)^n = 5 \\ \Leftrightarrow 1,076^n &= 5 \Leftrightarrow n = \log_{1,076} 5 \approx 21,97. \end{aligned}$$

Vậy $n = 22$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 25.9. Một chất điểm chuyển động với phương trình $s(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, trong đó t được tính bằng giây (s) và $s(t)$ được tính bằng mét (m). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bằng 0.

- A. 6 m/s^2 . B. 8 m/s^2 . C. 12 m/s^2 . D. 9 m/s^2 .

Lời giải.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t - 9$.

Suy ra gia tốc của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi $a(t) = v'(t) = 6t + 6$.

Khi $v(t) = 0$, ta có $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (do $t \geq 0$).

Vậy $a(1) = 6 \cdot 1 + 6 = 12 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 25.10. Một ô tô đang chuyển động đều với vận tốc 20 m/s rồi hãm phanh chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20 \text{ m/s}$, trong đó t là khoảng thời gian được tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối cùng trước khi dừng hẳn bằng

- A. 100 m . B. 200 m . C. 75 m . D. 25 m .

Lời giải.

Khi ô tô dừng hẳn, ta có $v(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 10$.

Suy ra, quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu giảm phanh ($t = 0$) đến lúc dừng hẳn ($t = 10$) là

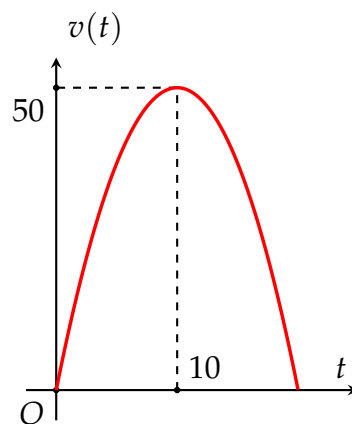
$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (-2t + 20) dt = 100 \text{ (m)}.$$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 15 giây cuối trước khi dừng hẳn là $20 \cdot 5 + 100 = 200 \text{ (m)}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 25.11. Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên. Biết rằng sau 10 giây thì xe đạt đến vận tốc lớn nhất 50 m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu phóng nhanh đến lúc đạt vận tốc lớn nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

- A. $\frac{1000}{3}$ m. B. 110 m. C. 300 m. D. $\frac{1400}{3}$ m.



Lời giải.

Gọi $v(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$), là vận tốc của ô tô tại thời điểm t giây.

Dựa vào đồ thị, ta có $a < 0$; đồ thị đi qua O và có đỉnh $(10; 50)$ nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 50 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 10 \\ c = 0. \end{cases}$$

Suy ra $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$ (thỏa mãn đồ thị).

Quãng đường ô tô đi được từ lúc bắt đầu ($t = 0$) đến lúc đạt vận tốc lớn nhất ($t = 10$) là

$$\int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 10t \right) dt = \frac{1000}{3} \text{ (m)}.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 25.12. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng (1 quý), lãi suất 6% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó lại gửi thêm 100 triệu đồng với hình thức và lãi suất như trên. Hỏi sau 1 năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận số tiền gần với kết quả nào nhất?

- A. 224,7 triệu đồng. B. 234,5 triệu đồng. C. 236,2 triệu đồng. D. 238,6 triệu đồng.

Lời giải.

Sau 6 tháng đầu thì người đó gửi được hai kì hạn nên tổng cả vốn và lãi lúc đó là $A = 100 \cdot (1,06)^2$ triệu đồng.

Người đó gửi thêm 100 triệu thì số tiền gửi là $B = 100 + A$ triệu.

Vậy sau một năm thì được số tiền là $B(1,06)^2 = 100 \cdot (1,06)^4 + 100 \cdot (1,06)^2 \approx 238,6$ triệu đồng.

Chọn phương án **D** □

CÂU 26. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BD = a\sqrt{3}$, $AA' = 4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{BAD} &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{-1}{2} \implies \widehat{BAD} = 120^\circ \implies S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ \implies V_{ABCD.A'B'C'D'} &= AA' \cdot S_{ABCD} = 4a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a^3. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 26.1. Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường chéo $A'C = 2a$.

A. a^3 .

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $a^3\sqrt{2}$.

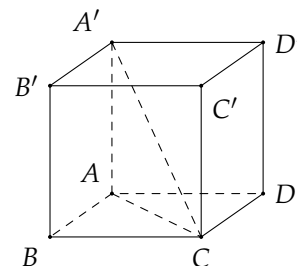
D. $2a^3$.

Lời giải.

Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.



Chọn phương án **(C)**

□

Câu 26.2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích của khối lăng trụ đó

A. $3a^3\sqrt{3}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

C. $a^3\sqrt{6}$.

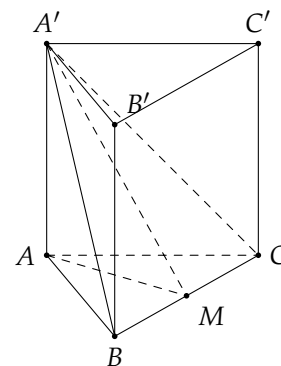
D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC . Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$, vì AA' là đường cao lăng trụ nên $BC \perp AA'$. Do đó $BC \perp (AA'M)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{AMA'} = 60^\circ$.

Suy ra $AA' = AM \cdot \tan AMA' = a\sqrt{3} \cdot \tan 60^\circ = 3a$.

Vậy thể tích cần tìm là $V = AA' \cdot S_{ABC} = 3a \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^3\sqrt{3}$.



Chọn phương án **(A)**

□

Câu 26.3. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa cạnh $A'B$ và mặt phẳng $(A'ACC')$ bằng 30° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3$.

B. $V = a^3\sqrt{3}$.

C. $V = a^3\sqrt{2}$.

D. $V = 2a^3$.

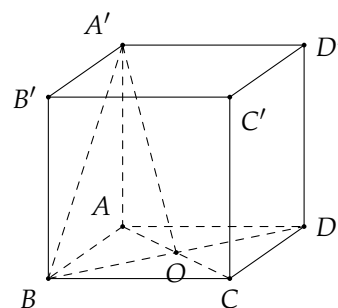
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BO \perp (ACC'A')$.

Do đó góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(A'ACC')$ bằng $\widehat{BA'O} = 30^\circ$.

Suy ra $\tan 30^\circ = \frac{BO}{A'O} \Rightarrow A'O = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow A'A = \sqrt{A'O^2 - AO^2} = a$.

Vậy thể tích khối đã cho là $V = AA' \cdot S_{ABCD} = a \cdot a^2 = a^3$.



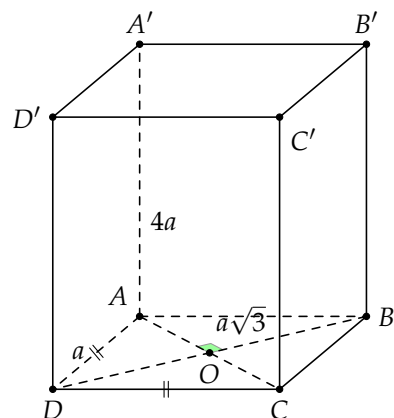
Chọn phương án **(A)**

□

Câu 26.4.

Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BD = a\sqrt{3}$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$.
 B. $4\sqrt{3}a^3$.
 C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.
 D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.



Lời giải.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Do $ABCD$ là hình thoi nên $\triangle AOD$ vuông tại O có $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow OA^2 = AD^2 - OD^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}, \text{ suy ra } AC = 2 \cdot \frac{a}{2} = a.$$

Thể tích hình lăng trụ

$$V = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot AA' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} \cdot 4a = 2\sqrt{3}a^3.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 26.5. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

- A. $V = \frac{3a^3}{2}$.
 B. $V = \frac{2a^3}{3}$.
 C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
 D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $BC = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$$\text{Suy ra diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là } V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 26.6. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy bằng 60° . Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
 B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
 C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
 D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'A \perp (ABC) \\ AB \perp BC. \end{cases}$$

$\Rightarrow A'B \perp BC$ (Định lý ba đường vuông góc).

Suy ra $((A'BC), (ABC)) = \widehat{A'BA}$. Do đó $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = a\sqrt{2}$ nên $BA = BC = a$.

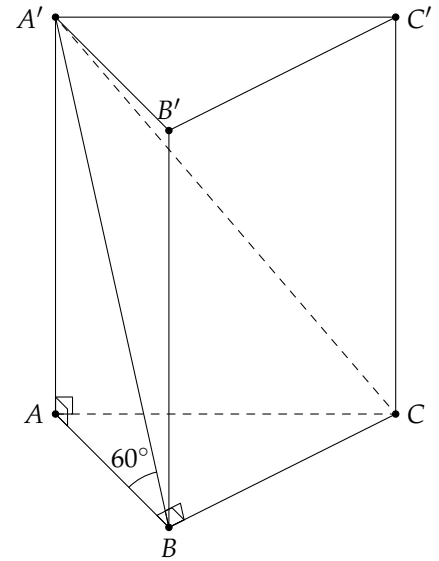
Suy ra diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}.$$

Tam giác $A'AB$ vuông tại A có $\widehat{A'BA} = 60^\circ$ nên $A'A = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$



Chọn phương án **A**

□

Câu 26.7. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$, AB' hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° . Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A. $V = \frac{a^3}{2}$.

B. $V = \frac{3a^3}{2}$.

C. $V = \frac{a^3}{6}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều cạnh a .

Suy ra diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

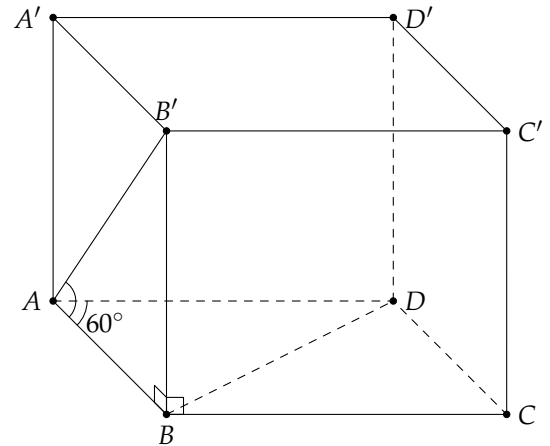
Ta có $B'B \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của AB' trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow (AB', (ABCD)) = (AB', AB) = \widehat{B'AB}$. Do đó $\widehat{B'AB} = 30^\circ$.

Tam giác ABB' vuông tại B có $\widehat{B'AB} = 30^\circ$ nên $B'B = AB \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = S_{ABCD} \cdot B'B = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{2}.$$



Chọn phương án **A**

□

Câu 26.8. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 4, diện tích tam giác $A'BC$ bằng 8. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

- A. $V = 2\sqrt{3}$. B. $V = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. C. $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V = 8\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC , ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'H. \end{cases}$
Tam giác ABC đều cạnh bằng 4 nên có diện tích

$$S_{\triangle ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

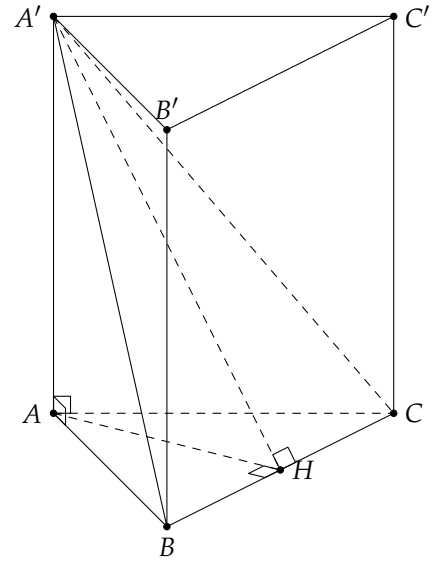
Ta có $A'H = \frac{2S_{\triangle A'BC}}{BC} = \frac{2 \cdot 8}{4} = 4$.

Tam giác $A'AH$ vuông tại A nên ta có

$$A'A = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = 4\sqrt{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3}.$$



Chọn phương án **D** □

Câu 26.9. Tính thể tích V của khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, biết độ dài cạnh đáy của lăng trụ bằng 2, đồng thời góc tạo bởi $A'C$ và đáy $(ABCD)$ bằng 30° .

- A. $V = \frac{8\sqrt{6}}{3}$. B. $V = 24\sqrt{6}$. C. $V = \frac{8\sqrt{6}}{9}$. D. $V = 8\sqrt{6}$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2 nên có diện tích $S_{ABCD} = 4$.

Ta có $A'A \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$.

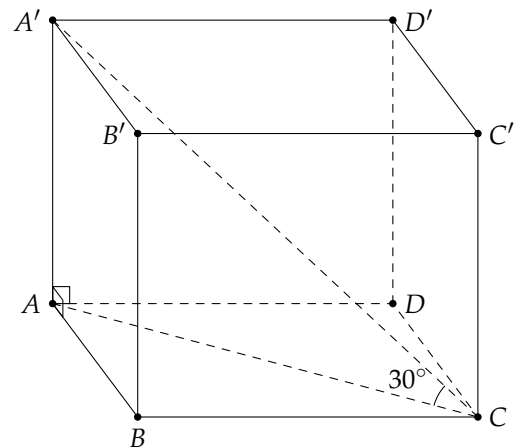
$\Rightarrow (A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$. Do đó $\widehat{A'CA} = 30^\circ$.

Tam giác $A'CA$ vuông tại A có $\widehat{A'CA} = 30^\circ$ nên

$$A'A = AC \tan 30^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = S_{ABCD} \cdot A'A = 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$



Chọn phương án **A** □

Câu 26.10. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $B'C'$, ta có $\begin{cases} B'C' \perp A'I' \\ B'C' \perp A'A. \end{cases}$
 $\Rightarrow B'C' \perp (AA'I) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'I)$ theo giao tuyến AI .
 Trong mặt phẳng $(AA'I)$, kẻ $A'H \perp AI$ tại H , ta có

$$A'H \perp (AB'C') \Rightarrow A'H = d(A', (AB'C')) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

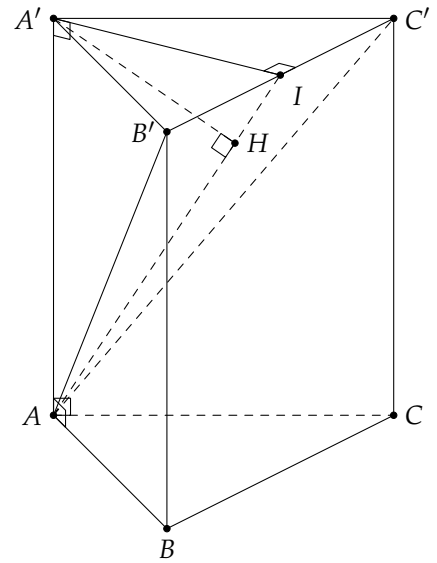
Tam giác ABC đều cạnh a nên có diện tích $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
 Tam giác $AA'I$ vuông tại A' có $A'H$ là đường cao nên ta có

$$\frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{19}{12a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{1}{4a^2}.$$

Suy ra $A'A = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$



Chọn phương án **C**

□

Câu 26.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với đáy một góc 60° . Khi đó thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{51}}{3}$.

B. $V = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{17}}{9}$.

D. $V = \frac{a^3\sqrt{17}}{6}$.

Lời giải.

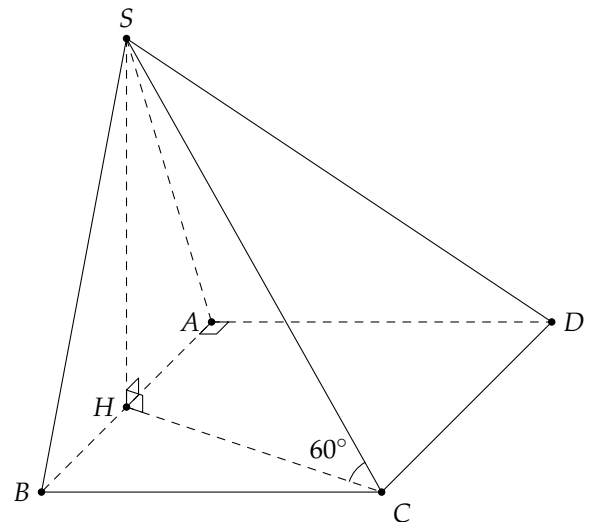
Gọi H là trung điểm của AB , ta có $SH \perp AB$.
 Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB
 $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
 $\Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.
 $\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, HC) = \widehat{SCH}$.
 Do đó $\widehat{SCH} = 60^\circ$.
 $ABCD$ là hình chữ nhật nên có diện tích

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2.$$

Tam giác BHC vuông tại B nên ta có

$$HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + 4a^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2}.$$

Tam giác SHC vuông tại H và có $\widehat{SCH} = 60^\circ$ nên $SH = HC \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{17}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{51}}{2}$.



Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{51}}{2} = \frac{a^3\sqrt{51}}{3}$.

Chọn phương án (A) □

Câu 26.12. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đường chéo $AC = 2a$, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $V = a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{a^3}{2}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của BC , ta có

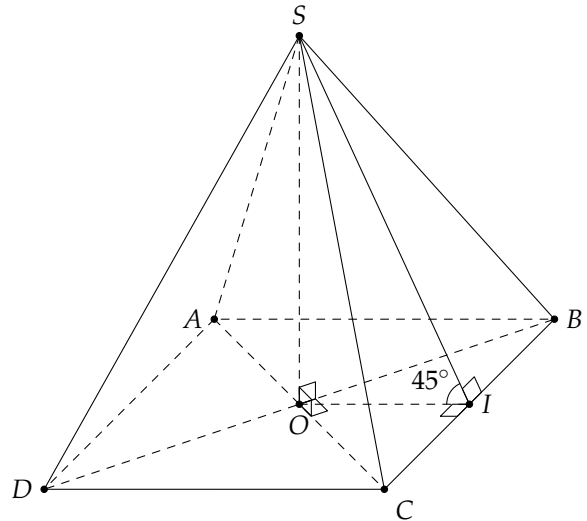
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ SO \perp (ABCD) \\ OI \perp BC. \end{cases}$$

$\Rightarrow SI \perp BC$ (Định lý ba đường vuông góc).

$\Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = \widehat{SIO}$. Do đó $\widehat{SIO} = 45^\circ$.

$\Rightarrow \triangle SOI$ vuông cân tại O

$$\Rightarrow SO = OI = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



$ABCD$ là hình vuông có đường chéo $AC = 2a$ nên có diện tích là $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2 = 2a^2$.

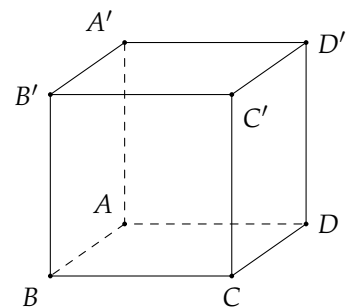
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án (A) □

Câu 26.13.

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $AA' = 2a$, góc giữa cạnh $B'D$ và mặt đáy bằng 30° . thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.



Lời giải.

Vì BD là hình chiếu của $B'D$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{B'DB} = 30^\circ$ là góc giữa $B'D$ và mặt đáy.

Suy ra $BD = BB' \cot 30^\circ = 2a\sqrt{3}$.

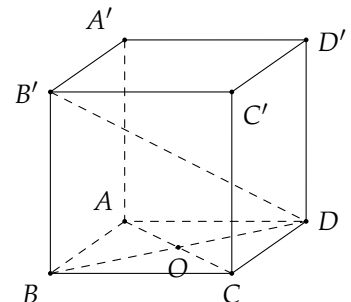
Xét hình thoi $ABCD$ cạnh $2a$ có đường chéo $BD = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra $AC = 2 \cdot AO = 2 \cdot \sqrt{AB^2 - BO^2} = 2a$.

Do đó $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 2a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V = AA' \cdot S_{ABCD} = 4a^3\sqrt{3}$.

Chọn phương án (B) □



CÂU 27. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ Trên D ta có, $y = \frac{5x^2-4x-1}{x^2-1} = \frac{(5x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x+1}{x+1}$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{5x+1}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+1}{x+1} = 5 \Rightarrow y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận.

Chọn phương án **C** □**Câu 27.1.** Tìm tổng đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2}}$

A. 5.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \neq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > 2 \end{cases}$. Suy ra tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = (2; +\infty) \setminus \{3\}$.Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 8}{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\sqrt{x-3}} = 0$.Suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 0$.Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 6x + 8}{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-4)}{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-4)\sqrt{x-2}}{(x^2 - 4x + 3)} = 0$.Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 8}{(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-4)\sqrt{x-2}}{(x^2 - 4x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{1}{x-3} \cdot \frac{(x-4)\sqrt{x-2}}{(x-1)} \right] = -\infty$.Suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng: $x = 3$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Chọn phương án **B** □**Câu 27.2.** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

• Tiệm cận ngang:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1.$$

Vậy đồ thị hàm số y có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

- Tiệm cận đứng:

$$\text{Ta có } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1. \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x-1) \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x-3} = -2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x-1) \cdot (x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{x-3} = -2.$$

Suy ra $x = 1$ không phải tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty.$$

Suy ra $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 2.

Chọn phương án **C**

□

Câu 27.3. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

- Tiệm cận ngang:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1.$$

Vậy $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Tiệm cận đứng:

$$\text{Ta có } x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x+1) \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x+1) \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty.$$

Suy ra $x = -1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{x+1} = 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} y = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x+1} = 2.$$

Suy ra $x = 3$ không phải đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2.

Chọn phương án **A**

□

Câu 27.4. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

- Tiệm cận ngang:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{f(x) \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = 0.$$

Vậy $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số:

- Tiệm cận đứng:

$$\text{Ta có } x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-2)} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-2)} = -\infty.$$

Suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x(x-2)} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x(x-2)} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x(x-2)} = -\infty.$$

Suy ra $x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án **C**

□

Câu 27.5. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2+3x-4}$, số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

- Tiệm cận ngang:

$$\text{ĐKXD: } 16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4.$$

Vậy suy ra hàm số không có tiệm cận ngang.

- Tiệm cận đứng:

$$\text{Ta có } x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{(x-1) \cdot (x+4)} = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{(x-1) \cdot (x+4)} = -\infty.$$

Suy ra $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -4^+} y &= \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{(x-1) \cdot (x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\sqrt{(4-x) \cdot (4+x)}}{(x-1) \cdot (x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\sqrt{4-x}}{(x-1) \cdot \sqrt{4+x}} = -\infty. \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -4^-} y &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{(x-1) \cdot (x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{(4-x) \cdot (4+x)}}{(x-1) \cdot (x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{(x-1) \cdot \sqrt{4+x}} = +\infty. \end{aligned}$$

Suy ra $x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là 2

Chọn phương án **C** □

Câu 27.6. Cho hàm số $y = \frac{ax+4}{bx-1}$. Biết rằng đồ thị của hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và đường tiệm cận đứng là $x = 1$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Vì $x = 1$ là tiệm cận đứng nên ta có $b \cdot (1) - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

$y = 2$ là tiệm cận ngang nên ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+4}{bx-1} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a + \frac{4}{x}}{b - \frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} b = 1 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$.

Chọn phương án **B** □

Câu 27.7. Biết rằng $x = 1$ và $y = 0$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(a-2b)x^2 + bx + 1}{x^2 + x - b}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 10.

Lời giải.

Vì $x = 1$ là tiệm cận đứng nên $(1)^2 + 1 - b = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

$y = 0$ là tiệm cận ngang nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a - 2b + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{b}{x^2}} = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} b = 2 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6$.

Chọn phương án **A** □

Câu 27.8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2	3	-1	$+\infty$

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta có:

- Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $y \rightarrow 2$ nên đồ thị hàm số nhận $y = 2$ là đường tiệm cận ngang.
- Khi $x \rightarrow -1^-$ thì $y \rightarrow -5$, $x \rightarrow -1^+$ thì $y \rightarrow 3$ nên đồ thị hàm số không nhận $x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 27.9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 0.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+		+
y	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta có

- Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $y \rightarrow \frac{3}{2}$ nên đồ hàm số nhận $y = \frac{3}{2}$ là đường tiệm cận ngang.
- Khi $x \rightarrow -\frac{1}{2}^-$ thì $y \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\frac{1}{2}^+$ thì $y \rightarrow -\infty$ nên đồ hàm số nhận $x = -\frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 27.10. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = -\infty$.

Suy ra $x = 1$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

$$\text{Mặt khác: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = -1.$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 1$; $y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 27.11. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1.$$

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1, y = -1$.

$$\text{Ta lại có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty \text{ do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x-2) = -4 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{x^2-4} = 0 \\ \sqrt{x^2-4} > 0; \forall x < -2. \end{cases}$$

Suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn phương án **C** □

Câu 27.12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2020}{3-2f(x)}$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = \frac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt và tử số là hằng số nên đồ thị hàm số đã có luôn có 4 đường tiệm cận đứng.

Chọn phương án **C** □

CÂU 28.

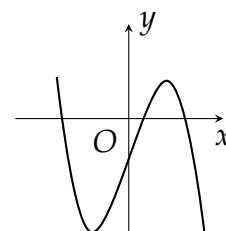
Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0; d > 0$.

B. $a < 0; d > 0$.

C. $a > 0; d < 0$.

D. $a < 0; d < 0$.



Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số có dạng đi xuống suy ra $a < 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = d$ đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm nằm phía dưới trục hoành suy ra $d < 0$.

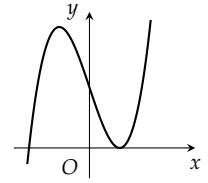
Vậy $a < 0, d < 0$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 28.1. Cho hàm số $y = ax^3 - 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $a > 0; d > 0$. B. $a < 0; d > 0$. C. $a > 0; d < 0$. D. $a < 0; d < 0$.



Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ suy ra $a > 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = d$ đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm nằm phía trên trục hoành suy ra $d > 0$.

Vậy $a > 0, d > 0$.

Chọn phương án **A**

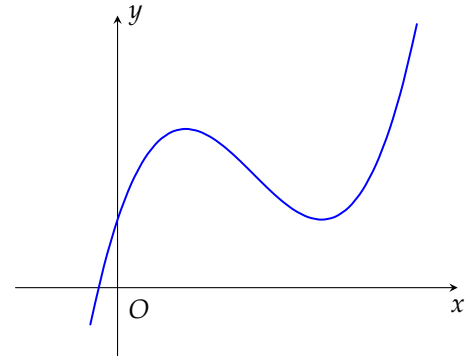
□

Câu 28.2.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $a > 0; b > 0; c < 0; d < 0$. B. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$.
C. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$. D. $a > 0; b < 0; c < 0; d < 0$.



Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị, ta suy ra $a > 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; d)$. Theo đề bài, đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Trong 4 phương án, chỉ có một phương án cho ta kết quả $a > 0; d > 0$.

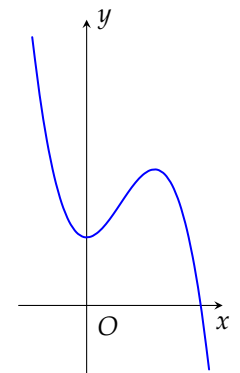
Chọn phương án **C**

□

Câu 28.3.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$. B. $a < 0; b < 0; c = 0; d > 0$.
C. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$. D. $a < 0; b > 0; c = 0; d > 0$.



Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị, ta suy ra $a < 0$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; d)$. Từ hình vẽ ta suy ra $d > 0$.

Hàm số có $x_{CT} = 0$ và $x_{CD} > 0$ nên ta có:

$$\begin{cases} x_{CT} + x_{CD} = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_{CT}x_{CD} = \frac{c}{3a} = 0 \end{cases}.$$

Kết hợp với $a < 0$ ta suy ra $b > 0$ và $c = 0$.

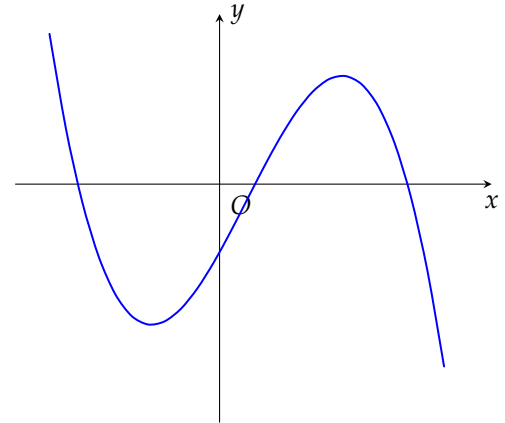
Chọn phương án **D** ☐

Câu 28.4.

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.
- B. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$.
- C. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.
- D. $a < 0; b > 0; c < 0; d < 0$.



Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị, ta suy ra $a < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; d)$. Theo đề bài, đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Dựa vào đồ thị, ta có:

$$\begin{cases} x_{CT} + x_{CD} = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_{CT} \cdot x_{CD} = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases}.$$

Kết hợp với $a < 0$ ta suy ra $b > 0$ và $c > 0$.

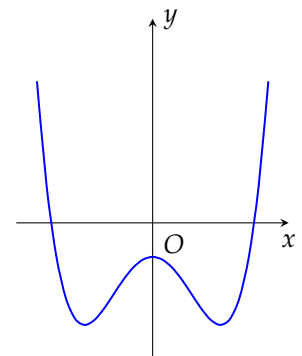
Chọn phương án **A** ☐

Câu 28.5.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $a > 0; b < 0; c > 0$.
- B. $a > 0; b > 0; c < 0$.
- C. $a > 0; b < 0; c < 0$.
- D. $a < 0; b > 0; c < 0$.



Lời giải.

Từ hình dáng đồ thị, ta suy ra $a > 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0$. Mà $a > 0$ nên suy ra $b < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$. Theo đề bài, đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Chọn phương án **C** ☐

Câu 28.6.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

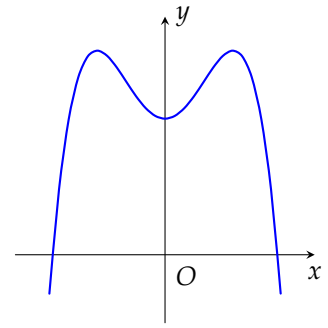
Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a < 0; b > 0; c > 0$.

B. $a < 0; b > 0; c < 0$.

C. $a > 0; b < 0; c < 0$.

D. $a < 0; b < 0; c < 0$.

**Lời giải.**

Từ hình dáng đồ thị, ta suy ra $a < 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0$. Mà $a < 0$ nên suy ra $b > 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$. Theo đề bài, đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Chọn phương án **A** ☐

Câu 28.7.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

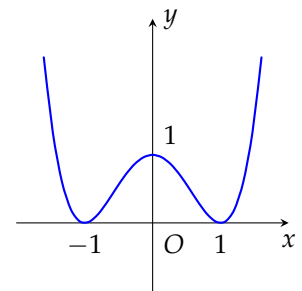
Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a > 0; b < 0; c = 1$.

B. $a > 0; b > 0; c = 1$.

C. $a < 0; b > 0; c = 1$.

D. $a > 0; b > 0; c > 0$.

**Lời giải.**

Từ hình dáng đồ thị, ta suy ra $a > 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0$. Mà $a > 0$ nên suy ra $b < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$. Theo đề bài, đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 1 nên $c = 1$.

Chọn phương án **A** ☐

Câu 28.8.

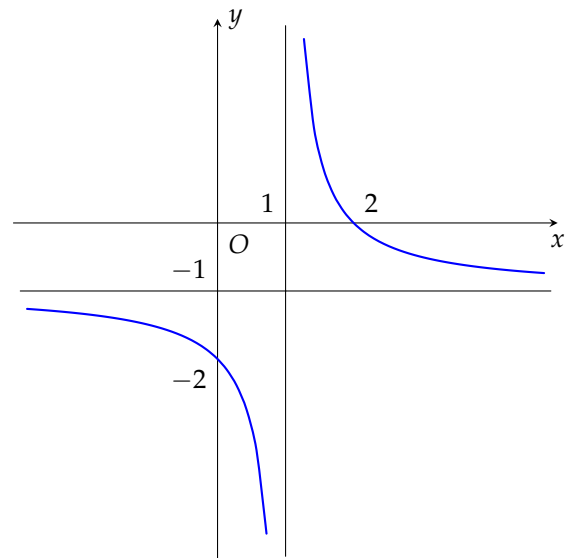
Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $b < 0 < a$.

B. $0 < b < a$.

C. $b < a < 0$.

D. $0 < a < b$.

**Lời giải.**

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; b)$. Từ hình vẽ, ta có $b = -2$. Vậy $b < 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$. Từ hình vẽ ta có $a = -1$. Vậy $a < 0$.

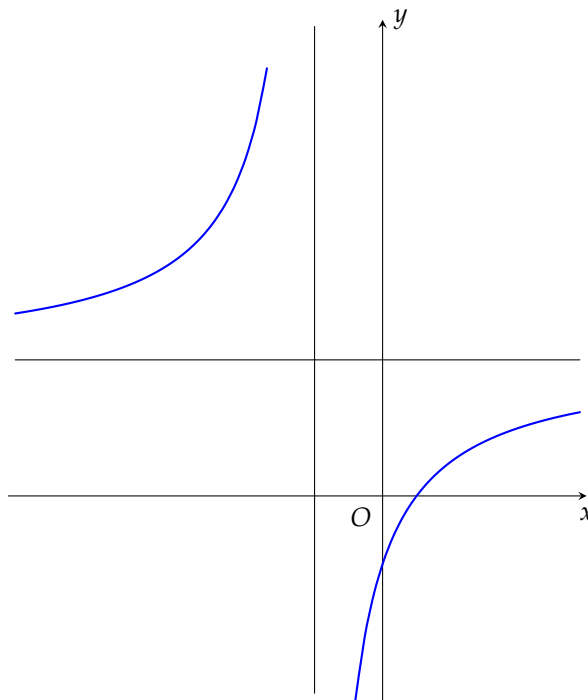
Chọn phương án **C**

□

Câu 28.9.

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x - c}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < 0; b > 0; c > 0$. B. $a > 0; b < 0; c > 0$.
C. $a > 0; b > 0; c < 0$. D. $a > 0; b < 0; c < 0$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$. Từ hình vẽ ta suy ra $a > 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = c$. Từ hình vẽ ta có $c < 0$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; -\frac{b}{c})$. Từ hình vẽ ta có $-\frac{b}{c} < 0 \Rightarrow b < 0$.

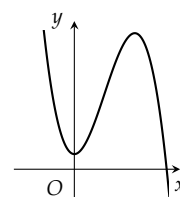
Chọn phương án **D**

□

Câu 28.10.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $a < 0; b < 0; c = 0; d > 0$. B. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$.
C. $a < 0; b > 0; c > 0; d > 0$. D. $a < 0; b > 0; c = 0; d > 0$.



Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ suy ra $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy là điểm nằm bên trên trục hoành nên $x = 0; y = d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực tiểu đạt cực tiểu tại $x = 0$ và một điểm cực đại đạt cực đại tại điểm $x > 0$.

Suy ra phương trình $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0 < x_2$.

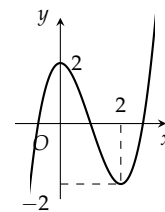
$$\text{Khi đó } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{3a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a < 0 \\ b > 0. \end{cases}$$

Chọn phương án **D**

□

Câu 28.11.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính tổng của $S = a + b + c + d$.



- A. $S = 0$. B. $S = 6$. C. $S = -4$. D. $S = 2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ và đồ thị hàm số nhận hai điểm cực trị là $(2; -2)$ và $(0; 2)$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ d = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Vậy $S = a + b + c + d = 0$.

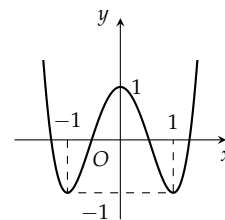
Chọn phương án **A**.

□

Câu 28.12.

Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tính giá trị của $f(3a + 2b + c)$.

- A. -1 . B. 0 . C. 2 . D. 1 .



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0; 1)$, $(1; -1)$ và có điểm cực trị tại $(1; -1)$ nên ta có hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \\ b = -4. \end{cases}$$

Ta có hàm số $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Khi đó $f(3a + 2b + c) = f(-1) = -1$

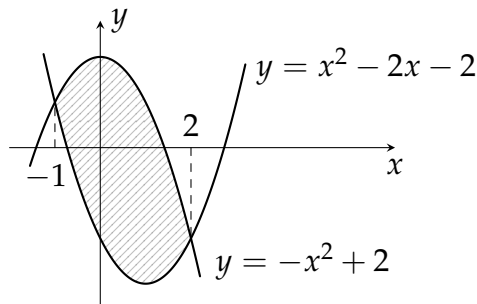
Chọn phương án **A**.

□

CÂU 29.

Diện tích phần hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

- A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$. B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$.
C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx$. D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx$.



Lời giải.

Nhìn vào hình, thấy trên đoạn $[-1; 2]$ thì đồ thị hàm $y = -x^2 + 2$ nằm trên đồ thị hàm $y = x^2 - 2x - 2$ nên

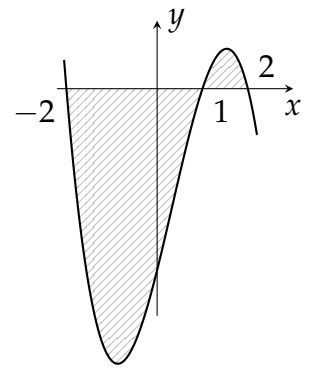
$$S_{\text{gạch chéo}} = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Chọn phương án **A**.

□

Câu 29.1.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng được gạch chéo được xác định bởi công thức



- A. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$ B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$
 C. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$ D. $S = \int_{-2}^2 f(x) dx.$

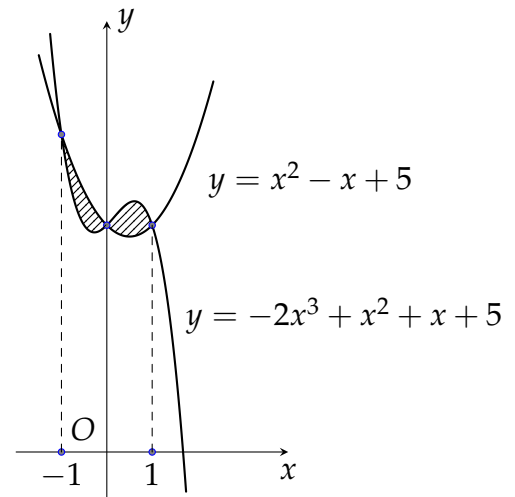
Lời giải.

Diện tích cần tính là $S = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = - \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

Chọn phương án **A** □

Câu 29.2.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



- A. $\int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx + \int_0^1 (2x - 2x^3) dx.$
 B. $\int_{-1}^1 (2x^3 - 2x) dx.$
 C. $\int_{-1}^1 (2x - 2x^3) dx.$
 D. $\int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx - \int_0^1 (2x - 2x^3) dx.$

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2 - x + 5$; $g(x) = -2x^3 + x^2 + x + 5$. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$$S = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx + \int_0^1 (2x - 2x^3) dx.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 29.3.

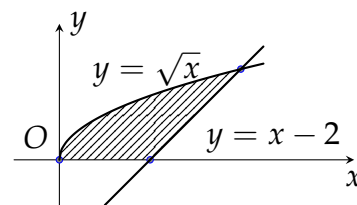
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\int_0^2 (\sqrt{x} - x + 2) dx.$

B. $\int_0^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx.$

C. $\int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx.$

D. $\int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (x - 2 - \sqrt{x}) dx.$



Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Ta có:

$$\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx.$

Chọn phương án **C**

□

Câu 29.4.

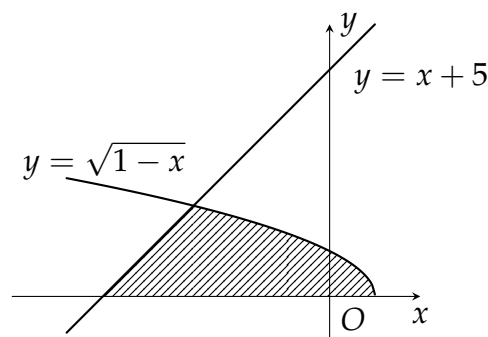
Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\int_{-5}^{-3} (x + 5) dx - \int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx.$

B. $\int_{-5}^1 [(x + 5) - \sqrt{1-x}] dx.$

C. $\int_{-5}^{-3} (x + 5) dx + \int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx.$

D. $\int_{-5}^1 [\sqrt{1-x} - (x + 5)] dx.$



Lời giải.

Điều kiện: $x \leq 1$.

Ta có:

$$\sqrt{1-x} = x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x^2 + 11x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

$$\sqrt{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-5}^{-3} (x + 5) dx + \int_{-3}^1 \sqrt{1-x} dx.$

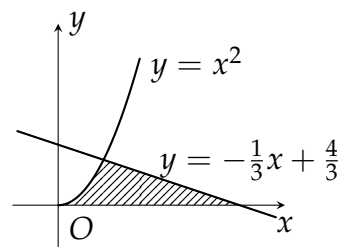
Chọn phương án **C**

□

Câu 29.5.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên bằng

- A. $\frac{11}{6}$. B. $\frac{61}{3}$. C. $\frac{343}{162}$. D. $\frac{39}{2}$.



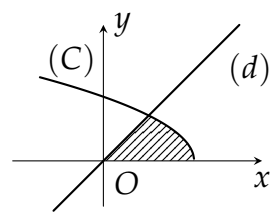
Lời giải.

Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \right) dx = \frac{11}{6}$.

Chọn phương án **A** ☐

Câu 29.6.

Cho hàm số $y = \sqrt{2-x}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d) : $y = x$. Công thức tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành là



A. $\pi \int_0^1 (2-x) dx + \pi \int_1^2 x^2 dx$.

B. $\pi \int_0^2 (2-x) dx$.

C. $\pi \int_0^2 x^2 dx + \pi \int_2^4 (2-x) dx$.

D. $\pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \leq 2$.

Ta có:

$$\sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\sqrt{2-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

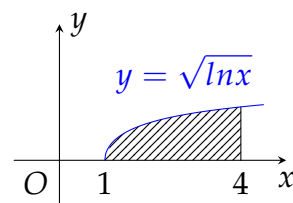
Thể tích cần tìm là $V = \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x) dx$.

Chọn phương án **D** ☐

Câu 29.7.

Thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục hoành bằng

- A. $4\pi \ln 4 - 3$. B. $\pi(4 \ln 2 - 3)$. C. $\pi(4 \ln 4 - 3)$. D. $4\pi \ln 2 - 3\pi$.



Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có: $\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích cần tìm là $V = \pi \int_1^4 \ln x dx = \pi (x \ln x - x) \Big|_1^4 = \pi(4 \ln 4 - 3)$.

Chọn phương án **C** ☐

Câu 29.8. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $32 + 2\sqrt{15}$.

B. $(32 + 2\sqrt{15})\pi$.

C. $\frac{124}{3}$.

D. $\frac{124}{3}\pi$.

Lời giải.

Thể tích cần tìm là $V = \int_1^3 (3x\sqrt{3x^2 - 2}) dx = \frac{124}{3}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 29.9.

Miền phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và parabol $y = x^2 - 2x$. Biết $\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{3}{4}$. Khi đó diện tích hình phẳng được

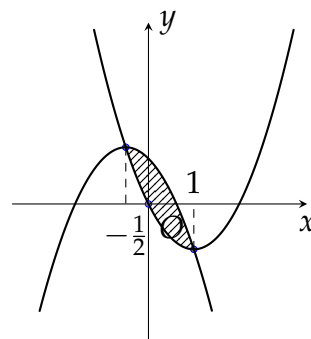
tô trong hình vẽ bằng

A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{8}{3}\pi$.



Lời giải.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (f(x) - x^2 + 2x) dx$.

Mà $\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{3}{4}$ nên $S = \frac{3}{4} + \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2x - x^2)dx = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$.

Chọn phương án **A** □

Câu 29.10.

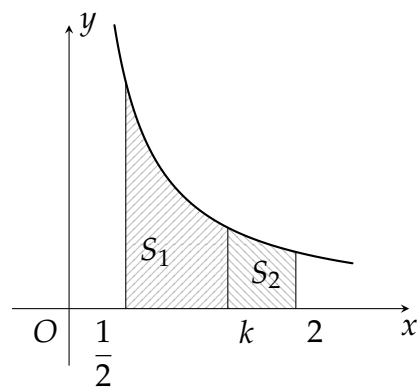
Cho hình thang cong (H) giới hạn như bởi các đường $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ và trục hoành. Đường thẳng $x = k$ với $k \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của k sao cho $S_1 = 3S_2$.

A. $k = \sqrt{2}$.

B. $k = 1$.

C. $k = \frac{7}{5}$.

D. $k = \sqrt{3}$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = 3S_2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^k \frac{1}{x} dx = 3 \int_k^2 \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^k = 3 \ln x \Big|_k^2$

$\Leftrightarrow \ln k - \ln \frac{1}{2} = 3(\ln 2 - \ln k)$

$\Leftrightarrow 4 \ln k = 3 \ln 2 - \ln 2$

$\Leftrightarrow \ln k = \frac{1}{2} \ln 2$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{2}.$$

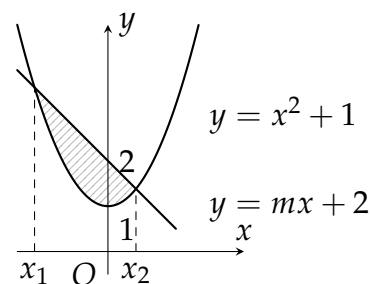
Chọn phương án **A**

□

Câu 29.11.

Với mọi m thì đường thẳng $d: y = mx + 2$ luôn cắt $(P): y = x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 . Tìm m để diện tích của hình phẳng giới hạn bởi d và (P) là nhỏ nhất.

- A. $m = 0$. B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = \frac{3}{4}$. D. $m = 4$.



Lời giải.

Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $-x^2 + mx + 1 = 0$. Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_1}^{x_2} (mx + 2 - x^2 - 1) dx \\ &= \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= (x_2 - x_1) \left[-\frac{1}{3} ((x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2) + \frac{m}{2} (x_1 + x_2) + 1 \right] \\ &= -\frac{1}{6} \sqrt{m^2 + 4} [2(m^2 + 1) - 3m^2 - 6] \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{m^2 + 4} (m^2 + 4) \geq \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $S_{\min} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow m = 0$.

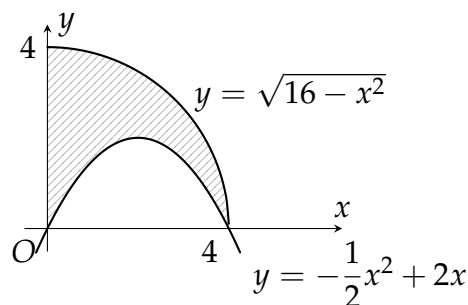
Chọn phương án **A**

□

Câu 29.12.

Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$ với $0 \leq x \leq 4$, trục tung (phần tô đậm trên hình vẽ). Tính diện tích của hình D .

- A. $8\pi - \frac{16}{3}$. B. $2\pi - \frac{16}{3}$. C. $4\pi + \frac{16}{3}$. D. $4\pi - \frac{16}{3}$.



Lời giải.

Diện tích hình phẳng D có $S = \int_0^4 \left(\sqrt{16 - x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) dx$.

Xét tích phân $I = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$.

Đặt $x = 4 \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

Khi đó ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 16 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$.

Mặt khác $J = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - x^2 \right) \Big|_0^4 = -\frac{16}{3}.$

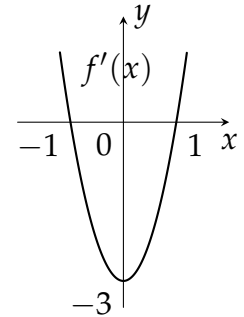
Vậy $S = 4\pi - \frac{16}{3}.$

Chọn phương án **D**

□

Câu 29.13.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị cho bởi hình vẽ bên. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.



- A. $S = 9.$ B. $\frac{21}{4}.$ C. $\frac{5}{4}.$ D. $S = \frac{27}{4}.$

Lời giải.

Ta có đồ thị hàm số $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ đi qua các điểm $(-1; 0)$, $(1; 0)$ và $(0; -3)$ nên

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -3. \end{cases}$$

Do đó $f'(x) = 3x^2 - 3$. Mà $f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C$.

Do đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Vậy $f(-1) = 4$ nên ta có $C = 2$. Do đó phương trình đường cong đã cho là $y = x^3 - 3x + 2$.

Xét phương trình $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1. \end{cases}$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}.$

Chọn phương án **D**

□

CÂU 30. Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \bar{z}_2$ bằng

- A. $-2.$ B. $2i.$ C. $2.$ D. $-2i.$

Lời giải.

Ta có $z_1 + \bar{z}_2 = (-3 + i) + (1 + i) = -2 + 2i$

Phần ảo của số phức $z_1 + \bar{z}_2$ bằng 2 .

Chọn phương án **C**

□

Câu 30.1. Cho hai số phức $z_1 = 5 - i$ và $z_2 = 7 + 2i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \bar{z}_2$ bằng

- A. $3.$ B. $3i.$ C. $-3.$ D. $-3i.$

Lời giải.

Ta có $z_1 + \bar{z}_2 = 5 - i + 7 - 2i = 12 - 3i$. Do đó phần ảo của số phức này là -3 .

Chọn phương án **C**

□

Câu 30.2. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 4i$ và $z_2 = 1 - 3i$. Phần ảo của số phức $z_1 + i \cdot \bar{z}_2$ bằng

- A. $5.$ B. $-5i.$ C. $-3.$ D. $3i.$

Lời giải.

Ta có $z_1 + i \cdot \overline{z_2} = 2 - 4i + i(1 + 3i) = -1 - 3i$. Do đó phần ảo của số phức này là -3 .

Chọn phương án **C** ☐

Câu 30.3. Cho hai số phức $z_1 = 5 + 6i$ và $z_2 = 1 + 8i$. Phần ảo của số phức liên hợp $w = z_1 - i \cdot \overline{z_2}$ bằng

A. $-5i$.

B. -5 .

C. $5i$.

D. 5 .

Lời giải.

Ta có $w = z_1 - i \cdot \overline{z_2} = 5 + 6i - i(1 - 8i) = -3 + 5i \Rightarrow \overline{w} = -3 - 5i$. Do đó phần ảo của số phức liên hợp là -5 .

Chọn phương án **B** ☐

Câu 30.4. Cho hai số phức $z_1 = 2019 + 2020i$ và $z_2 = 2002i$. Phần ảo của số phức $iz_1 + \overline{z_2}$ bằng

A. 2020 .

B. -4021 .

C. -2020 .

D. 4021 .

Lời giải.

Ta có $iz_1 + \overline{z_2} = i(2019 + 2020i) + 2002i = -2020 + 4021i$. Do đó phần ảo của số phức này là 4021 .

Chọn phương án **D** ☐

Câu 30.5. Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng

A. -2 .

B. $2i$.

C. 2 .

D. $-2i$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{z_2} = 1 + i$.

Suy ra $z_1 + \overline{z_2} = -3 + i + 1 + i = -2 + 2i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng 2 .

Chọn phương án **C** ☐

Câu 30.6. Cho hai số phức $z_1 = 5 + i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng

A. 6 .

B. -6 .

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải.

Ta có: $\overline{z_2} = 1 - 2i$.

Suy ra $z_1 + \overline{z_2} = 5 + i + 1 - 2i = 6 - i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$ bằng -1 .

Chọn phương án **C** ☐

Câu 30.7. Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z_1 + \overline{z_2}$.

A. Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1 .

B. Phần thực bằng -2 và phần ảo bằng 1 .

C. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng -1 .

D. Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 1 .

Lời giải.

Ta có: $\overline{z_2} = 1 - 2i$.

Suy ra $z_1 + \overline{z_2} = -3 + i + 1 - 2i = -2 - i$.

Vậy số phức $z_1 + \overline{z_2}$ có phần thực bằng -2 và phần ảo bằng -1 .

Chọn phương án **A** ☐

Câu 30.8. Cho hai số phức $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z_1 \cdot z_2$.

A. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 7 .

B. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng 7 .

C. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -7 .

D. Phần thực bằng 7 và phần ảo bằng 1 .

Lời giải.

Ta có: $z_1 \cdot z_2 = (3 + i) \cdot (1 + 2i) = 1 + 7i$.

Vậy số phức $z_1 \cdot z_2$ có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 7.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 30.9. Cho hai số phức $z_1 = 3i$ và $z_2 = 3 - i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z_1} \cdot z_2$.

- A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -9 . B. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng 9 .
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -9 . D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 9 .

Lời giải.

Ta có: $\overline{z_1} \cdot z_2 = -3i \cdot (3 - i) = -3 - 9i$.

Vậy số phức $\overline{z_1} \cdot z_2$ có phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -9 .

Chọn phương án **(A)** □

Câu 30.10. Cho hai số phức $z_1 = 3i$ và $z_2 = 3 - i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\frac{z_1}{z_2}$.

- A. Phần thực bằng $-\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{9}{10}$. B. Phần thực bằng $\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $-\frac{9}{10}$.
C. Phần thực bằng $\frac{9}{10}$ và phần ảo bằng $-\frac{3}{10}$. D. Phần thực bằng $-\frac{9}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{3}{10}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3i}{3 - i} = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$.

Vậy số phức $\frac{z_1}{z_2}$ có phần thực bằng $-\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{9}{10}$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 30.11. Cho hai số phức $z_1 = 3i$ và $z_2 = 3 - i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = z_1 + \frac{1}{z_2}$.

- A. Phần thực bằng $-\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{31}{10}$. B. Phần thực bằng $\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $-\frac{31}{10}$.
C. Phần thực bằng $\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{31}{10}i$. D. Phần thực bằng $\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{31}{10}$.

Lời giải.

Ta có: $w = z_1 + \frac{1}{z_2} = 3i + \frac{1}{3 - i} = \frac{3}{10} + \frac{31}{10}i$.

Vậy số phức w có phần thực bằng $\frac{3}{10}$ và phần ảo bằng $\frac{31}{10}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 30.12. Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z = 3 + 4i$. Tìm phần ảo b của số phức $w = 2 - \overline{z}$.

- A. $b = -\frac{11}{5}i$. B. $b = -\frac{11}{5}$. C. $b = \frac{11}{5}i$. D. $b = \frac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có: $(2 - i)z = 3 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{3 + 4i}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Suy ra $w = 2 - \overline{z} = 2 - \left(\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i\right) = \frac{8}{5} + \frac{11}{5}i$.

Vậy số phức w có phần ảo $b = \frac{11}{5}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 30.13. Cho số phức z thỏa mãn $5iz + 1 - 4i = 3 + i$. Tìm phần thực a của số phức $w = \frac{1}{z}$.

A. $a = -\frac{2}{5}$.

B. $a = 1$.

C. $a = \frac{10}{29}$.

D. $a = \frac{25}{29}$.

Lời giải.

Ta có: $5iz + 1 - 4i = 3 + i \Leftrightarrow z = \frac{3 + i - 1 + 4i}{5i} \Leftrightarrow z = 1 - \frac{2}{5}i$.

Suy ra $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}i} = \frac{25}{29} + \frac{10}{29}i$.

Vậy số phức w có phần thực $a = \frac{25}{29}$.

Chọn phương án **(D)** ☐**Câu 30.14.** Nếu số phức $z \neq 1$ thoat mãn $|z| = 1$ thì phần thực của số phức $\frac{1}{1-z}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $z \neq 1$. Vì $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Ta có: $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-x-yi} = \frac{1-x+yi}{(1-x)^2+y^2} = \frac{1-x+yi}{1-2x+x^2+y^2} = \frac{1-x}{2-2x} + \frac{y}{2-2x} \cdot i = \frac{1}{2} + \frac{y}{2-2x} \cdot i$.

Vậy phần thực của số phức đã cho là $\frac{1}{2}$.

Chọn phương án **(A)** ☐**CÂU 31.** Trong mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$.

B. $Q(5;4)$.

C. $N(4;-3)$.

D. $M(4;5)$.

Lời giải.

Ta có $z = (1+2i)^2 = -3+4i$ có điểm biểu diễn là $P(-3;4)$.

Chọn phương án **(A)** ☐**Câu 31.1.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = i(3+2i)$ là điểm nào dưới đây?

A. $M(3;2)$.

B. $N(3;-2)$.

C. $P(-2;3)$.

D. $Q(2;-3)$.

Lời giải.

Ta có $z = i(3+2i) = 3i+2i^2 = -2+3i$. Vậy điểm biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng phức là điểm tọa độ $(-2;3)$

Chọn phương án **(C)** ☐**Câu 31.2.** Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z = 3+4i$. Tìm phần thực của số phức $w = 2-iz+3\bar{z}$

A. 9.

B. -5.

C. 1.

D. 6.

Lời giải.

Từ giả thiết $z = \frac{3+4i}{2+i} = 2+i$. Suy ra $w = 2-iz+3\bar{z} = 2-i(2+i)+3(2-i) = 9-5i$. Vậy phần thực của số phức w là 9.

Chọn phương án **(A)** ☐**Câu 31.3.** Trong mặt phẳng tọa độ A, B, C là ba điểm biểu diễn lần lượt cho ba số phức $z_1 = 5-i, z_2 = (4+i)^2$ và $z_3 = (2i)^3$. Diện tích của tam giác ABC là kết quả nào dưới đây?

A. 25.

B. $\frac{25}{2}$.

C. $\frac{185}{2}$.

D. 185.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 5 - i \Rightarrow A(5; -1)$

$z_2 = (4 + i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i \Rightarrow B(15; 8)$

$z_3 = (2i)^3 = -8i \Rightarrow C(0; -8)$

Diện tích tam giác ABC khi biết tọa độ 3 đỉnh là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |5(8 + 8) + 15(-8 + 1) + 0(-1 - 8)| = \frac{25}{2}$$

Chọn phương án **(B)** ☐

Câu 31.4. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3; 4)$.

B. $Q(5; 4)$.

C. $N(4; -3)$.

D. $M(5; 4)$.

Lời giải.

Ta có $z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$. Suy ra điểm biểu diễn số phức z là $P(-3; 4)$

Chọn phương án **(A)** ☐

Câu 31.5. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $w = z + i\bar{z}$.

A. $M(1; -5)$.

B. $N(5; -5)$.

C. $P(1; 1)$.

D. $Q(5; 1)$.

Lời giải.

Ta có $w = (3 - 2 \cdot i) + i \cdot (3 + 2 \cdot i) = (3 - 2) + (3 \cdot i + 2 \cdot i^2) = (3 - 2 \cdot i) + i \cdot (3 \cdot i - 2) = 1 + i$.

Vậy điểm biểu diễn w là $P(1; 1)$.

Chọn phương án **(C)** ☐

Câu 31.6. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy điểm nào sau biểu diễn cho số phức z , biết $i\bar{z} = (2 + i)^2$.

A. $M_1(4; -3)$.

B. $M_2(-4; 3)$.

C. $M_3(-4; -3)$.

D. $M_4(4; 3)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \bar{z} = \frac{(2 + i)^2}{i} = \frac{3 + 4 \cdot i}{i} = \frac{-3 \cdot i - 4 \cdot i^2}{1} = 4 - 3 \cdot i$$

$\Rightarrow z = 4 + 3 \cdot i$. Vậy điểm biểu diễn z là $M_4(4; 3)$

Chọn phương án **(D)** ☐

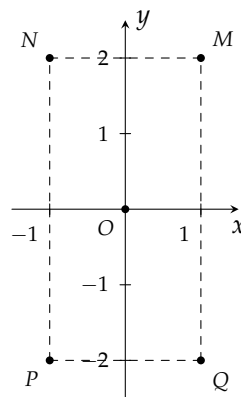
Câu 31.7. Cho số phức z thỏa mãn $(1 + i)z = 3 - i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

A. Điểm P .

B. Điểm Q .

C. Điểm M .

D. Điểm N .



Lời giải.

$$\text{Ta có } z = \frac{3 - i}{1 + i} = \frac{(3 - i) \cdot (1 - i)}{2} = \frac{2 - 4 \cdot i}{2} = 1 - 2 \cdot i$$

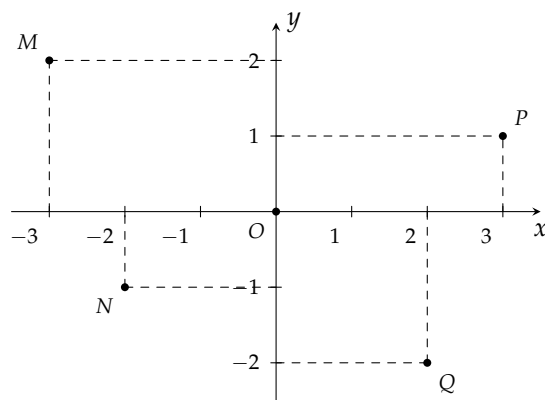
Vậy điểm biểu diễn z là điểm Q .

Chọn phương án **(B)** ☐

Câu 31.8. Các điểm M, N, P, Q trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn lần lượt của các số phức z_1, z_2, z_3, z_4 .

Khi đó $w = 3z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ bằng

- A. $w = -6 + 4i$. B. $w = 3 - 4i$.
C. $w = 6 + 4i$. D. $w = 4 - 3i$.



Lời giải.

Ta có $z_1 = -3 + 2 \cdot i$, $z_2 = -2 - i$, $z_3 = 3 + 1 \cdot i$, $z_4 = 2 - 2 \cdot i$.

Suy ra $w = -6 + 4 \cdot i$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 31.9. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| = |z + 2i|$ là đường thẳng có phương trình là

- A. $x - y + 1 = 0$. B. $x + 3y + 1 = 0$. C. $x - 2y + 2 = 0$. D. $x + 2y + 2 = 0$.

Lời giải.

Đặt $z = x + i \cdot y$ và điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z .

Ta có $|z - 1 - i| = |z + 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} \Leftrightarrow x + 3y + 1 = 0$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 31.10. Cho z thỏa $|z - 2i| = |z + 1|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + i)z$ là đường thẳng có phương trình là

- A. $x - y + 3 = 0$. B. $x - 3y + 3 = 0$. C. $x + y + 3 = 0$. D. $x - 3y - 3 = 0$.

Lời giải.

Đặt $w = x + y \cdot i$ và điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức w .

Ta có $w = (1 + i)z \Leftrightarrow z = \frac{w}{1 + i} = \frac{x + y \cdot i}{1 + i} = \frac{(x + y) + (-x + y) \cdot i}{2}$.

Thay vào $|z - 2i| = |z + 1|$ ta được

$$\left| \frac{(x + y) + (-x + y) \cdot i}{2} - 2i \right| = \left| \frac{(x + y) + (-x + y) \cdot i}{2} + 1 \right|$$

$$\Leftrightarrow |(x + y) + (-x + y - 4) \cdot i| = |(x + y + 2) + (-x + y) \cdot i|$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (-x + y - 4)^2 = (x + y + 2)^2 + (-x + y)^2$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 3 = 0.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 31.11. Cho số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Đặt $z = x + i \cdot y$ và điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z .

Ta có $(\bar{z} - 2i)(z + 2) = (x^2 + y^2 + 2x + 2y) + (-2x - 2y - 4) \cdot i$.

Để $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo thì $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

Vậy tập hợp M điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 31.12. Cho các số phức z thỏa $|z - 1| = 2$. Biết tập hợp biểu diễn số phức $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 16.

Lời giải.

Đặt $w = x + y \cdot i$ và điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức w .

Ta có $w = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow z = \frac{w - 2}{1 + i \cdot \sqrt{3}}$, thay vào $|z - 1| = 2$ ta được

$$\left| \frac{w - 2}{1 + i \cdot \sqrt{3}} - 1 \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w - 3 - i \cdot \sqrt{3}}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow |w - 3 - i \cdot \sqrt{3}| = 4.$$

Vậy tập hợp M điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có bán kính bằng 4.

Chọn phương án **(C)**

□

Câu 31.13. Cho số phức $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) và số phức liên hợp của nó là $\bar{z}$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức là A và D . Số phức $(2 + 5i)z$ và liên hợp của nó có điểm biểu diễn là B và C . Biết rằng tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và $|z + 3 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tích $a.b$.

A. $-\frac{80}{169}$.

B. $\frac{80}{169}$.

C. $-\frac{16}{169}$.

D. $\frac{16}{169}$.

Lời giải.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow A(a; b); \bar{z} = a - bi \Rightarrow D(a; -b)$.

$(2 + 5i)z = (2 + 5i)(a + bi) = (2a - 5b) + (5a + 2b)i \Rightarrow B(2a - 5b; 5a + 2b)$.

Điểm biểu diễn cho số phức liên hợp của số phức $(2 + 5i)z$ là $C(2a - 5b; -5a - 2b)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (a - 5b; 5a + b), \overrightarrow{AD} = (0; -2b), \overrightarrow{DC} = (a - 5b; -5a - b)$.

$$\text{Để tứ giác } ABCD \text{ là hình chữ nhật thì } \begin{cases} a, b \neq 0 \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \neq 0 \\ a - 5b = a - 5b \\ -2b(5a + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \neq 0 \\ b = -5a \end{cases}$$

Khi đó số phức $z = a + bi = a - 5ai$.

Xét

$$|z + 3 - i| = |a - 5ai + 3 - i| = \sqrt{(a + 3)^2 + (5a + 1)^2} = \sqrt{26a^2 + 16a + 10} = \sqrt{26 \left(a + \frac{4}{13} \right)^2 + \frac{98}{13}} \geq \sqrt{\frac{98}{13}}.$$

Vậy $|z + 3 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{\frac{98}{13}}$ đạt được khi $a = -\frac{4}{13}, b = \frac{20}{13}$ (thỏa mãn).

Do đó $z = -\frac{4}{13} + \frac{20}{13}i$, suy ra $a.b = -\frac{80}{169}$.

Chọn phương án **(A)**

□

CÂU 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

A. 25.

B. 23.

C. 27.

D. 29.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8)$.

Suy ra $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 32.1. Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; 7; -3)$, $\vec{b} = (2; 1; 4)$. Tính tích vô hướng $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b})$ bằng.

A. 21.

B. 63.

C. 53.

D. 52.

Lời giải.

$$\vec{a} - \vec{b} = (0; 6; -7).$$

$$\text{Vậy } \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 2 \cdot 0 + 7 \cdot 6 - 3 \cdot (-7) = 63.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 32.2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(-1; 4; 3)$ và $C(m; 2m - 3; 1)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .

A. -7.

B. 4.

C. 7.

D. -4.

Lời giải.

$$\vec{BA} = (3; -4; -2), \vec{BC} = (m + 1; 2m - 7; -2)$$

Để tam giác ABC vuông tại B thì

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow 3(m + 1) - 4(2m - 7) + 4 = 0 \Leftrightarrow -5m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = 7.$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 32.3. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng

A. 25.

B. 23.

C. 27.

D. 29.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8), \text{ suy ra}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 32.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-2; 2; 5)$, $\vec{v} = (0; 1; 2)$. Tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

A. 12.

B. 13.

C. 10.

D. 14.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 12.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 32.5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-1; 3; -1)$ và $C(5; -3; 4)$. Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ bằng

A. 40.

B. -48.

C. 52.

D. -52.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{AB} = (-3; 4; -2) \text{ và } \vec{BC} = (6; -6; 5), \text{ suy ra}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -3 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = -52.$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 32.6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (x; -2; 1)$. Nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ thì độ dài của $\vec{v}$ bằng

- A. 2. B. 3. C. $\sqrt{21}$. D. 5.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \Leftrightarrow -1 \cdot x - 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow x = -2.$$

Do đó, $\vec{v} = (-2; -2; 1)$, suy ra $|\vec{v}| = 3$.

Chọn phương án **(B)** □

Bài tập mở rộng

Câu 32.7. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 0; -3)$ và $\vec{v} = (-1; -2; 0)$. Giá trị của $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 32.8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Nếu $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ thì giá trị $m+n$ bằng

- A. $\frac{25}{4}$. B. 1. C. $\frac{17}{3}$. D. 2.

Lời giải.

Nếu $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ thì tồn tại số thực t sao cho $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$. Suy ra

$$\begin{cases} 2 = 1 \cdot t \\ m-1 = 3 \cdot t \\ 3 = -2n \cdot t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Do đó, $m+n = \frac{25}{4}$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 32.9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$ và $C(x; y; 6)$. Nếu ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng $x+y$ bằng

- A. 14. B. 6. C. 7. D. 16.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (x-2; y-5; 3)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 11. \end{cases}$$

Suy ra $x+y = 16$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 32.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$ và $C(-2; 3; 3)$. Biết $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2 - c^2$ bằng

- A. 42. B. 43. C. 44. D. 45.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$ và $\overrightarrow{MC} = (-2 - a; 3 - b; 3 - c)$.

Vì $ABCM$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2 - a \\ -3 = 3 - b \\ 4 = 3 - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = 7. \end{cases}$$

Suy ra $a^2 + b^2 - c^2 = (-3)^2 + 6^2 - (-1)^2 = 44$.

Chọn phương án **C** □

Câu 32.11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-2; 5; 3)$, $\vec{v} = (-4; 1; -2)$. Giá trị của $||[\vec{u}, \vec{v}]||$ bằng

- A. $\sqrt{216}$. B. $\sqrt{405}$. C. $\sqrt{749}$. D. $\sqrt{703}$.

Lời giải.

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (-13; -16; 18)$, suy ra $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = \sqrt{13^2 + 16^2 + 18^2} = \sqrt{749}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 32.12. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 4)$ và $B(0; -6; 0)$, M là một điểm bất kỳ thỏa mãn $3MA^2 + 2MB^2 = \frac{561}{280}AB^2$. Khi đó M thuộc mặt cầu có bán kính là giá trị nào sau đây ?

- A. 3. B. 9. C. $\sqrt{56}$. D. 56.

Lời giải.

Xét điểm $I(x; y; z)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2 - x) + 2(0 - x) = 0 \\ 3(0 - y) + 2(-6 - y) = 0 \\ 3(4 - z) + 2(0 - z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{12}{5} \\ z = \frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{6}{5}; -\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

Mà $AB^2 = 2^2 + 6^2 + 4^2 = 56$.

$$\text{Xét } 3MA^2 + 2MB^2 = \frac{561}{5} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = \frac{561}{5}.$$

$$3(MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2) + 2(MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2) = \frac{561}{5}.$$

$$\Leftrightarrow 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}) + 3IA^2 + 2IB^2 = \frac{561}{5} \Leftrightarrow 5MI^2 + \frac{672}{25} + \frac{1008}{25} = \frac{561}{5} \Leftrightarrow MI^2 = 9.$$

Vậy M luôn chạy trên mặt cầu tâm $I\left(\frac{6}{5}; -\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$ và có bán kính là 3.

Chọn phương án **A** □

Câu 32.13. Trong không gian $Oxyz$, trên các tia Ox, Oy, Oz lấy ba điểm không trùng O là A, B, C . Biết $OA + OB + OC = 1$ và biểu thức $\frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

A. 1.

B. $\frac{5}{6}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{9}$.**Lời giải.**

Vì A, B, C thuộc các tia Ox, Oy, Oz nên gọi tọa độ các điểm là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

Suy ra $\overrightarrow{OA} = (a; 0; 0), \overrightarrow{OB} = (0; b; 0), \overrightarrow{OC} = (0; 0; c), a, b, c > 0$.

Theo giả thiết $OA + OB + OC = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1$.

$$\text{Xét } \frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC} \geq \frac{(1+2+3)^2}{OA+OB+OC} = \frac{36}{a+b+c} = 36.$$

$$\text{Biểu thức } \frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là 36 xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{6}; 0; 0\right), \overrightarrow{OB} = \left(0; \frac{1}{3}; 0\right), \overrightarrow{OC} = \left(0; 0; \frac{1}{2}\right); \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right).$$

Chọn phương án **(D)** □

CÂU 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Lời giải.

Ta có: $IM = 5$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ đi qua điểm $M(4; 0; 0)$ có bán kính là $R = IM = 5$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 33.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(8; 0; 0)$ và đi qua điểm $M(0; -6; 0)$.

Phương trình của (S) là

A. $(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 100$.

B. $(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 10$.

C. $(x+8)^2 + y^2 + z^2 = 100$.

D. $(x+8)^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải.

Vì $M \in (S)$ nên bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{(8-0)^2 + (0+6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{100} = 10$. Vậy phương trình mặt cầu có phương trình là $(x-8)^2 + y^2 + z^2 = 100$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 33.2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) . Phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 10$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$. Vậy bán kính mặt cầu (S) là $R = d(I, (Oxy)) = \frac{|-4|}{1} = 4$.

Phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+4)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 33.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $d: \frac{x-4}{2} = \frac{y}{1} =$

$\frac{z+3}{-1}$ và (S) đi qua hai điểm $A(-3;0;5)$ và $B(1;4;-1)$. Khi đó bán kính mặt cầu (S) là giá trị nào dưới đây ?

A. $\sqrt{290}$.

B. 3.

C. $2\sqrt{17}$.

D. $\sqrt{299}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB, tọa độ của điểm $M(-1;2;2)$.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AB, khi đó $M \in (\alpha)$ và một vectơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{MA} = (-2; -2; -2)$

Phương trình mặt phẳng $(\alpha) : -2(x+1) - 2(y-2) - 3(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 3z - 8 = 0$.

Mà $I \in d$ suy ra tọa độ $I(4+2t; t; -3-t), t \in \mathbb{R}$. $I \in (\alpha)$ suy ra $2(4+2t) + 2t + 3(-3-t) - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow I(10;3;-6)$

Vậy bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{(-3-10)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{5+6} = \sqrt{299}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 33.4. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$.

Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

C. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

D. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Lời giải.

Ta có : $\overrightarrow{IM} = (4;0;-3) \Rightarrow R = IM = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = 5$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(0;0;-3)$ và $R = 5$ có dạng là $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 33.5. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và đi qua điểm $A(2;2;-3)$.

Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2 + (-3+1)^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 33.6. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có $A(2;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(0;4;4)$. Mặt cầu (S) có tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.

B. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$.

C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \sqrt{5}$.

D. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.

Lời giải.

Tam giác ABC có trọng tâm $G(1;2;2)$.

Mặt cầu (S) có bán kính là $R = AG = \sqrt{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;2;0)$, bán kính $R = \sqrt{5}$ là $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 33.7. Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A(4;-3;5)$, $B(2;1;3)$ là

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 8z - 26 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 20 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 8z - 20 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 26 = 0$.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(2-4)^2 + (1+4)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{6}$. Gọi I, R là tâm và bán kính của mặt cầu (S) suy ra $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$ và $I(3; -1; 4)$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 20 = 0.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 33.8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích bằng 36π . Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 3.$

B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 9.$

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 3.$

D. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9.$

Lời giải.

Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R = 3.$

Phương trình mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9.$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 33.9. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(3; -1; 2)$, $B(1; 1; -2)$ và có tâm I thuộc trục Oz là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0.$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 11.$

C. $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 11.$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 11 = 0.$

Lời giải.

Vì $I \in Oz$ nên $I(0; 0; z)$.

Mặt khác

$$AI = BI \Leftrightarrow \sqrt{(0-3)^2 + (0+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + (z+2)^2} \Leftrightarrow z = 1.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$ bán kính $R = AI = \sqrt{11}$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 33.10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với trục hoành có dạng

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 13.$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5.$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25.$

Lời giải.

Hình chiếu vuông góc của $I(1; 2; 3)$ trên trục hoành là $M(1; 0; 0)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và có bán kính $R = IM = \sqrt{13}$ có phương trình

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 13.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 33.11. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 8 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) có bán kính

$$R = d(A, (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3.$$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Chọn phương án **C** □

Câu 33.12. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2; 1; 0), B(-2; 3; 2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B .

A. $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$.

B. $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 17$.

C. $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$.

D. $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 33$.

Lời giải.

Gọi tâm mặt cầu là $I(1+2t; t; -2t)$. Từ $IA = IB$ ta suy ra

$$(2t-1)^2 + (t-1)^2 + (-2t)^2 = (2t+3)^2 + (t-3)^2 + (-2t-2)^2 \Leftrightarrow t = -1.$$

Suy ra $I(-1; -1; 2)$ và $AI^2 = 17$. Vậy mặt cầu cần tìm là $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$.

Chọn phương án **A** □

Câu 33.13. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và tam giác BCD với tọa độ các đỉnh là $B(3; 1; -2), C(0; -2; -2), D(0; 1; 1)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $A(-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}; -2-\sqrt{3})$.

B. $A(\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}; -2+\sqrt{3})$.

C. $A(0; 2; -2-2\sqrt{2})$.

D. $A(0; 2; -2+2\sqrt{2})$.

Lời giải.

Để thấy ba điểm B, C, D đều thuộc mặt cầu (S) . Để $A \in (S)$ mà thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì A là một trong 2 giao điểm của đường thẳng Δ với mặt cầu; trong đó Δ là đường thẳng đi qua tâm I của mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng (BCD) .

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-3; -3; 0), \overrightarrow{BD} = (-3; 0; 3)$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0; 1; -2)$.

Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-9; -9; -9)$.

Vì Δ vuông góc với (α) nên 1 vector chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $A \in \Delta \Rightarrow A(t; 1+t; -2+t)$ mà $A \in (S) \Rightarrow t^2 + (1+t-1)^2 + (-2+t+2)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} \Rightarrow A_1(\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}) \\ t = -\sqrt{3} \Rightarrow A_2(-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}) \end{cases}.$$

Phương trình mặt phẳng $(BCD): 1(x-0) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0$.

$$\text{Xét } A_1: d(A_1; (BCD)) = \frac{|\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} - 2|}{\sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Xét } A_2: d(A_2, (BCD)) = \frac{|-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 2|}{\sqrt{3}} = 3 + \sqrt{3}.$$

Để thấy $d(A_2, (BCD)) > d(A_1, (BCD)) \Rightarrow A(-\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}; -2-\sqrt{3})$ là điểm cần tìm.

Chọn phương án **(A)** □

CÂU 34. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 1 - 1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x + 2y + z + 3 = 0$.

B. $x - 2y - z = 0$.

C. $2x + 2y + z - 3 = 0$.

D. $x - 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Vì (α) vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ nên (α) nhận véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(2; 2; 1)$ của Δ là véc-tơ pháp tuyến.

Lại có, (α) đi qua $M(1; 1 - 1)$.

Do đó, phương trình (α) có dạng:

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + (z + 1) = 0 \iff 2x + 2y + z - 3 = 0$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 34.1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -3); B(2; -2; 1); C(-1; 3; 4)$ mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với BC có phương trình là

A. $3x - 5y - 3z - 2 = 0$.

B. $x - 4y + 4z - 3 = 0$.

C. $3x - 5y - 3z + 2 = 0$.

D. $2x - y - 7z + 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{BC} = (-3; 5; 3)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(1; 2; -3)$, nhận $\vec{n} = (3; -5; -3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $3(x - 1) - 5(y - 2) - 3(z + 3) = 0 \iff 3x - 5y - 3z - 2 = 0$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 34.2. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 2; 1); B(-1; 3; 1); C(3; 4; 3)$ có phương trình là

A. $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

B. $x + 2y - 3z - 2 = 0$.

C. $x - 2y - 3z + 6$.

D. $x - 2y - 3z + 10 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (-2; 1; 0); \vec{BC} = (4; 1; 2) \Rightarrow [\vec{AB}; \vec{BC}] = (2; 4; -6) = 2(1; 2; -3)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua ba điểm $A(1; 2; 1)$ nhận $\vec{n} = (1; 2; -3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $(x - 1) + 2(y - 2) - 3(z - 1) = 0 \iff x + 2y - 3z - 2 = 0$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 34.3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 3; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$?

A. $3x - 2y + z - 2 = 0$.

B. $3x - 2y + z + 2 = 0$.

C. $3x + 2y - z + 10 = 0$.

D. $3x + 2y - z - 10 = 0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{u} = (3; -2; 1)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d . Do $d \perp (P)$ nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{u}$ là một véc-tơ pháp tuyến.

Suy ra $(P): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 3; 1) \\ \text{Có một véc-tơ pháp tuyến } \vec{n}_P = \vec{u} = (3; -2; 1) \end{cases}$ có dạng

$$\begin{aligned} & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(x - 1) - 2(y - 3) + z - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x - 2y + z + 2 = 0. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 34.4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 5)$, $B(1; -2; 3)$, $C(0; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với đường thẳng BC có dạng là

- A. $x + 4y + 2z + 3 = 0$. B. $x + 4y + 2z - 3 = 0$.
C. $x - 4y + 2z - 11 = 0$. D. $x - 4y + 2z + 11 = 0$.

Lời giải.

Ta có tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G(1; -1; 3)$.

Theo giả thiết, (P) : $\begin{cases} \text{Qua } G(1; -1; 3) \\ \text{Một véc-tơ pháp tuyến là } \overrightarrow{BC} = (-1; 4; -2) \end{cases}$ có dạng

$$\begin{aligned} & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ \Leftrightarrow & -1(x - 1) + 4(y + 1) - 2(z - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & x - 4y + 2z - 11 = 0. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 34.5. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB , với $A(1; 2; 3)$ và $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - \vec{k}$, có dạng là

- A. $x + y - 2z - 1 = 0$. B. $x + y - 2z + 1 = 0$. C. $x - y - 2z - 1 = 0$. D. $x - y - 2z + 1 = 0$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - \vec{k}$ nên $B(3; 0; -1)$. Gọi điểm $M(2; 1; 1)$ và đường thẳng d lần lượt là trung điểm và đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Ta có d : $\begin{cases} \text{Qua } M(2; 1; 1) \\ \text{Một véc-tơ pháp tuyến là } \overrightarrow{AB} = (2; -2; -4) = 2(1; -1; -2) \end{cases}$ có dạng

$$\begin{aligned} & a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 2) - (y - 1) - 2(z - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & x - y - 2z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 34.6. Phương trình mặt phẳng đi qua $A(1; -2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$ có dạng là

- A. $x + y + 2z - 5 = 0$. B. $x - y + 2z - 6 = 0$. C. $x - y + 2z + 9 = 0$. D. $x - y + 2z - 9 = 0$.

Lời giải.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với $(P): x - y + 2z - 1 = 0$. Khi đó $(Q): x - y + 2z + m = 0$ ($m \neq -1$). Do $A(1; -2; 3) \in (Q)$ nên $1 + 2 + 2 \cdot 3 + m = 0 \Leftrightarrow m = -9$ (nhận). Vậy $(Q): x - y + 2z - 9 = 0$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 34.7. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có dạng

- A. $2x - 3y + 6z - 6 = 0$. B. $3x - 6y - 2z + 6 = 0$.
C. $6x - 3y + 2z - 6 = 0$. D. $2x + 6y - 3z - 6 = 0$.

Lời giải.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Vậy $(P): 6x - 3y + 2z - 6 = 0$.

Chọn phương án **C** □

Câu 34.8. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(1;0;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;3;0)$ có dạng

A. $x + y - z + 1 = 0$. B. $x - y - z + 1 = 0$. C. $x + y + z - 3 = 0$. D. $x + y - 2z - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0;1;-1) \\ \overrightarrow{AC} = (1;3;-2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; -1; -1)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;2)$ và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$(P): (x-1) - (y-0) - (z-2) = 0 \Leftrightarrow (P): x - y - z + 1 = 0.$$

Chọn phương án **B** □

Câu 34.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0$ và $(P_2): 3x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$, vuông góc với (P_1) và (P_2) .

A. $(P): 4x - 5y + 2z - 1 = 0$.

B. $(P): 4x - 5y + 2z - 1 = 0$.

C. $(P): 4x - 5y + 2z - 1 = 0$.

D. $(P): 4x - 5y + 2z - 1 = 0$.

Lời giải.

- Mặt phẳng (P_1) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;2;3)$;
- Mặt phẳng (P_2) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3;2;-1)$.

Gọi $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của (P) .

Vì (P) vuông góc với (P_1) và (P_2) nên $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-8; 10; -4) = -2(4; -5; 2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(1;1;1)$ và nhận $\vec{n}$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$(P): 4(x-1) - 5(y-1) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow (P): 4x - 5y + 2z - 1 = 0.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 34.10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và đồng thời vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x + y - z = 0$ là

A. $(P): x + 2y - 1 = 0$.

B. $(P): x - 2y + z = 0$.

C. $(P): x - 2y - 1 = 0$.

D. $(P): x + 2y + z = 0$.

Lời giải.

- Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;3)$;
- Mặt phẳng (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;1;-1)$.

Gọi $\vec{c}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) khi đó $\vec{c} = [\vec{n}, \vec{u}] = (-4; 8; 0) = -4(1; -2; 0)$.

Từ phương trình đường thẳng d ta suy ra $A(1;0;-1) \in d$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-1)$ và nhận véc-tơ $\vec{c}$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

$$(P): (x-1) - 2(y-0) = 0 \Leftrightarrow (P): x - 2y - 1 = 0.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 34.11. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$ và song song với đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-3}$ có phương trình là

A. $4x - 7y + 5z + 9 = 0$. B. $4x + 7y + 5z - 9 = 0$.
C. $x + 2y + 2z - 3 = 0$. D. $4x - 7y + 5z - 9 = 0$.

Lời giải.

$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{u}_1 = (1; 2; 2)$ là vectơ chỉ phương của d .

$\Delta : \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{-3} \Rightarrow \vec{u}_2 = (2; -1; -3)$ là vectơ chỉ phương của Δ . Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với Δ nên nhận $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ là vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ là vectơ pháp tuyến qua điểm $A(1; 0; 1)$.

$\Rightarrow (P) : -4(x-1) + 7(y-0) - 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 7y + 5z - 9 = 0$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 34.12. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(2; -3; 3)$ và chứa $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$ có phương trình là

A. $4x - y - z + 10 = 0$.

B. $5x + y - z - 10 = 0$.

C. $5x + y + z + 10 = 0$.

D. $5x - y - z - 10 = 0$.

Lời giải.

$d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3} \Rightarrow \vec{u} = (1; 2; 3)$ là vectơ chỉ phương của d .

$B(2; 1; -1) \in d \Rightarrow \vec{AB} = (0; 4; -4)$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2; -3; 3)$ và nhận $\vec{u}, \vec{AB}$ là vectơ chỉ phương

$\Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}, \vec{AB}] = (-20; 4; 4) = -4(4; -1; -1)$ là vectơ pháp tuyến và qua điểm $A(2; -3; 3)$

$\Rightarrow (P) : 5(x-2) - (y+3) - (z-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - y - z - 10 = 0$.

Chọn phương án **(D)** □

CÂU 35. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2; 3; -1)$ và $N(4; 5; 3)$?

A. $\vec{u}_4(1; 1; 1)$.

B. $\vec{u}_3(1; 1; 2)$.

C. $\vec{u}_1(3; 4; 1)$.

D. $\vec{u}_2(3; 4; 2)$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{MN}(2; 2; 4) = 2(1; 1; 2) \Rightarrow \vec{u}_3(1; 1; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2; 3; -1)$ và $N(4; 5; 3)$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 35.1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 3); B(2; 3; 1); C(-2; -1; 4)$ một vectơ chỉ phương của đường thẳng d qua A và song song với BC là vectơ nào sau đây ?

A. $\vec{u} = (4; 4; -3)$.

B. $\vec{u} = (4; 4; 3)$.

C. $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{BC} = (-4; -4; 3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = -\vec{BC} = (4; 4; -3)$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 35.2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -4)$ và $B(4; -1; -2)$. Vectơ nào dưới đây là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

- A. $\vec{u} = (6; 2; -3)$. B. $\vec{u} = (3; 1; -3)$. C. $\vec{u} = (1; -2; 1)$. D. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (2; -4; 2) = 2(1; -2; 1)$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

Chọn phương án **C** □

Câu 35.3. Trong không gian $Oxyz$, gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M(2; 5; 4)$ lên trục Oy và mặt phẳng (Oxz) . Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

- A. $\vec{u}_2 = (-2; 5; 4)$. B. $\vec{u}_4 = (2; 5; 4)$. C. $\vec{u}_3 = (2; -5; 4)$. D. $\vec{u}_1 = (-2; -5; 4)$.

Lời giải.

Theo giả thiết thì $M_1(0; 5; 0)$ và $M_2(2; 0; 4)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 là $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{u}_3 = (2; -5; 4)$.

Chọn phương án **C** □

Câu 35.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Khi đó giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1; -2; 1)$. B. $\vec{u} = (2; 1; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 3; 5)$. D. $\vec{u} = (-1; 3; -5)$.

Lời giải.

Gọi (d) là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) .

Có $\vec{n}_P = (2; 1; -1)$ và $\vec{n}_Q = (1; -2; 1)$.

Do đó vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-1; -3; -5) = -(1; 3; 5)$.

Chọn phương án **C** □

Câu 35.5. Phương trình trung tuyến AM của $\triangle ABC$ với $A(3; 1; 2)$, $B(-3; 2; 5)$, $C(1; 6; -3)$ là

- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 8 - 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases}$

Lời giải.

Tọa độ trung điểm M của BC là $M\left(\frac{-3+1}{2}; \frac{2+6}{2}; \frac{5-3}{2}\right)$, tức là $M(-1; 4; 1)$.

Đường thẳng AM qua A và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM} = (-4; 3; -1)$ là $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Chọn phương án **C** □

Câu 35.6. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và song song với BC .

- A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. B. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.
C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $A(0; -1; 3)$ và nhận $\overrightarrow{BC} = (-2; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

$(d): \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$

Chọn phương án **B** □

Câu 35.7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1; 0)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$ có dạng

$$\text{A. } \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}.$$

$$\text{C. } \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}.$$

$$\text{B. } \frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

$$\text{D. } \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

Lời giải.

Phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) nên có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 3)$.

Phương trình đường thẳng (d) qua M , nhận $\vec{u}$ làm vectơ chỉ phương là

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 35.8. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(3; -1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 3 = 0$ có phương trình là

$$\text{A. } \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{B. } \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}.$$

$$\text{C. } \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{D. } \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}.$$

Lời giải.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_P = (1; -2; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

Vậy phương trình đường thẳng là $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}.$

Chọn phương án **A** □

Câu 35.9. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với d_1 và d_2 là

$$\text{A. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có vectơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là $\vec{u}_{d_1} = (3; 2; 1)$ và $\vec{u}_{d_2} = (1; 3; -2)$.

Do đường thẳng (Δ) vuông góc với d_1, d_2 nên $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = (-7; 7; 7) = 7(-1; 1; 1)$.

Phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với d_1 và d_2 là $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$

Chọn phương án **D** □

Câu 35.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1); B(-1; 3; 1); C(3; 4; 3)$ đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C có phương trình là

$$\text{A. } \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}.$$

$$\text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-3}.$$

$$\text{D. } \frac{x+1}{1} = \frac{x+2}{-2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (-2; 1; 0); \vec{BC} = (4; 1; 2) \Rightarrow [\vec{AB}; \vec{BC}] = (2; 4; -6) = 2(1; 2; -3)$.

Đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 1)$ nhận $\vec{u} = (1; 2; -3)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 35.11. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z + 2 = 0$ và $(Q) : 2x + y + 3z - 4 = 0$ là

- A. $\vec{u} = (3; 3; -1)$. B. $\vec{u} = (3; -3; 1)$. C. $\vec{u} = (3; 3; 1)$. D. $\vec{u} = (3; -3; 1)$.

Lời giải.

$(P) : x + 2y - 3z + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; 2; -3)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

$(Q) : 2x + y + 3z - 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2; 1; 3)$ là vectơ pháp tuyến của (Q)

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên nhận $[\vec{n}_1; \vec{n}_2] = (9; -9; -3) = 3(3; -3; -1)$ là một vectơ chỉ phương.

Vậy $\vec{u} = (3; -3; -1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

Chọn phương án **(D)** □

Câu 35.12. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P) : x + y - z - 2 = 0$ và vuông góc với $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1; 0; 1)$. B. $\vec{u} = (0; -1; 1)$. C. $\vec{u} = (1; -1; 0)$. D. $\vec{u} = (0; 1; 1)$.

Lời giải.

$(P) : x + y - z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1; 1; -1)$ là vectơ pháp tuyến của (P) .

$\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (1; 2; -2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Vectơ $\vec{u} = [\vec{n}; \vec{u}_\Delta] = (0; 1; 1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

Chọn phương án **(D)** □

CÂU 36. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

- A. $\frac{41}{81}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{16}{81}$.

Lời giải.

Không gian mẫu: $n(\Omega) = A_{10}^3 - A_9^2 = 648$

Gọi A là biến cố “Số được chọn có tổng các chữ số là chẵn.”; $\overline{abc}$ là số cần thành lập thỏa tổng ba chữ số là số chẵn.

TH1: Ba chữ số chẵn chọn từ $\{0; 2; 4; 6; 8\} : A_5^3 - A_4^2 = 48$ (số).

TH2: Chọn chữ số 0 và 2 chữ số lẻ từ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$

Xếp số 0 : 2 cách

Hai vị trí còn lại: A_5^2 cách

Suy ra có 40 số.

TH3: Chọn 1 chữ số chẵn từ $\{2; 4; 6; 8\}$ và 2 chữ số lẻ từ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$

Chọn một chữ số chẵn: 4 cách

Xếp chữ số chẵn vừa chọn: 3 cách

Hai vị trí còn lại: A_5^2 cách

Suy ra có 240 số.

Vậy $n(A) = 328$

Suy ra xác suất: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{328}{648} = \frac{41}{81}$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 36.1. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để chọn được số có tổng các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị bằng hai lần chữ số hàng chục.

A. $\frac{5}{81}$.

B. $\frac{1}{18}$.

C. $\frac{5}{162}$.

D. $\frac{2}{81}$.

Lời giải.

Ta có: $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$); a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và $a + c = 2b$.

Vì $a + c = 2b$ nên $a + c$ là số chẵn khác 0, ta có các trường hợp sau đây:

+ Trường hợp 1: $\{a, c\} \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, mỗi cách chọn a, c có duy nhất một số b nên ta có: $A_5^2 = 20(\text{số})$.

+ Trường hợp 2: $\{a, c\} \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, mỗi cách chọn a, c có duy nhất một số b nên ta có: $A_5^2 - 4 = 20 - 4 = 16(\text{số})$.

Vậy có tất cả $20 + 16 = 36$ số.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{36}{648}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 36.2. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X . Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Tính xác suất để phần tử được chọn có đúng 3 chữ số lẻ.

A. $\frac{2}{75}$.

B. $\frac{10}{21}$.

C. $\frac{3}{22}$.

D. $\frac{15}{98}$.

Lời giải.

Số phần tử của S là: $A_9^5 = 15120$.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 15120$.

Gọi A là biến cố: "phần tử được chọn có đúng 3 chữ số lẻ".

Ta nhận thấy tập X có 5 chữ số lẻ và 4 chữ số chẵn nên số phần tử của A là: $C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot 5! = 7200$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7200}{15120} = \frac{10}{21}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 36.3. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số được chọn có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau.

A. $\frac{2}{75}$.

B. $\frac{8}{147}$.

C. $\frac{85}{567}$.

D. $\frac{58}{567}$.

Lời giải.

Có $9 \cdot A_9^4 = 27216$ số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 27216$.

Gọi A là biến cố "số được chọn có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau".

Có $C_5^3 \cdot C_2^2 \cdot 4! \cdot 2! = 4800$ số tự nhiên có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau (kể cả chữ số 0 đứng đầu).

Có $C_4^2 \cdot C_5^2 \cdot 3! \cdot 2! = 720$ số tự nhiên có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ còn lại đứng kề nhau (trong đó chữ số 0 đứng đầu).

Suy ra $n(A) = 4800 - 720 = 4080$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4080}{27216} = \frac{85}{567}$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 36.4. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần. Chọn ngẫu nhiên 1 số từ S , tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải.

Xếp ba chữ số 3 vào ba trong năm vị trí: có $C_5^3 = 10$ cách.

Sau đó xếp hai chữ số khác nhau trong bốn chữ số còn lại vào hai vị trí còn lại: có $A_4^2 = 12$ cách.

Suy ra S có $10.12 = 120$ phần tử.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 120$.

Gọi A là biến cố "số được chọn chia hết cho 3".

Số chia hết cho 3 khi tổng các chữ số chia hết cho 3, điều này suy ra hai chữ số khác nhau trong năm chữ số phải chia hết cho 3, có 4 trường hợp thỏa là (1;2), (1;5), (2;4), (4;5).

Suy ra $n(A) = C_5^3.4.2! = 80$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 36.5. Gọi S là tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để được số có tổng các chữ số là số lẻ.

A. $\frac{8}{15}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{2}{15}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Số phần tử của S là: $6.A_6^2 = 180$.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 180$.

Gọi A là biến cố "chọn được ra số có tổng các chữ số là số lẻ".

TH1: Số được chọn có một chữ số lẻ và hai chữ số chẵn: có $C_3^1.C_4^2.3! - C_3^1.C_3^1.2! = 90$ số.

TH2: Số được chọn có ba chữ số đều lẻ: có $3! = 6$ số.

Suy ra $n(A) = 90 + 6 = 96$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{96}{180} = \frac{8}{15}$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 36.6. Có 100 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 100 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau), chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2.

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải.

Trong 100 tấm thẻ trên, có 50 thẻ đánh số chẵn và 50 thẻ đánh số lẻ.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{100}^3$.

Gọi A là biến cố: "tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2".

TH1: chọn được ba thẻ đều đánh số chẵn: có C_{50}^3 cách.

TH2: một thẻ đánh số chẵn và hai thẻ đánh số lẻ: có $C_{50}^1.C_{50}^2$ cách.

Suy ra $n(A) = C_{50}^3 + C_{50}^1.C_{50}^2$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{50}^3 + C_{50}^1.C_{50}^2}{C_{100}^3} = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 36.7. Trong một hộp có 100 tấm thẻ đánh số từ 101 đến 200 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau), chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 3.

A. $\frac{817}{2450}$.

B. $\frac{1181}{2450}$.

C. $\frac{808}{2450}$.

D. $\frac{37026}{161700}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{100}^3$.

Gọi A là biến cố: "tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 3".

Nhận xét Một số chia hết cho 3 khi tổng các chữ số cũng chia hết cho 3. Đồng thời từ số 101 đến số 200 có 33 số chia hết cho 3 (N1), 33 số chia 3 dư 1 (N2), 34 số chia 3 dư 2 (N3).

TH1: Ba số ghi trên 3 thẻ thuộc cùng 1 loại N1, N2 hoặc N3: có $C_{33}^3 + C_{33}^3 + C_{34}^3 = 16896$ cách.

TH2: Ba số ghi trên 3 thẻ mỗi số thuộc một loại N1, N2 hoặc N3: có $C_{33}^1 \cdot C_3^1 \cdot C_{34}^1 = 37026$ cách.

Suy ra $n(A) = 16896 + 37026 = 53922$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{53922}{161700} = \frac{817}{2450}$.

Chọn phương án **A** □

Câu 36.8. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 1 dãy ghế dài. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

A. $\frac{3}{11}$.

B. $\frac{1}{12}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{5}{42}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 9!$.

Gọi A là biến cố: "xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11".

Do mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh khối 11 nên ở vị trí đầu tiên và cuối cùng của dãy ghế sẽ là học sinh khối 11.

Xếp 6 học sinh lớp 11 vào dãy ghế: có $6!$ cách.

Giữa 6 học sinh lớp 11 có 5 khoảng trống, xếp 3 học sinh lớp 12 vào 3 trong 5 khoảng trống trên: có A_5^3 cách.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6! \cdot A_5^3}{9!} = \frac{5}{42}$.

Chọn phương án **D** □

Câu 36.9. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh. Tính xác suất để 3 đỉnh đó là 3 đỉnh của tam giác vuông không cân.

A. $\frac{8}{57}$.

B. $\frac{2}{35}$.

C. $\frac{17}{114}$.

D. $\frac{3}{19}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^3$.

Gọi A là biến cố: "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của tam giác vuông không cân".

Đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 20 cạnh có 10 đường kính tạo thành.

Chọn một đường kính bất kì, đường kính này chia đường tròn này thành 2 phần, mỗi phần có 9 đỉnh của đa giác.

Khi đó mỗi phần có 8 tam giác vuông nhưng không cân (trừ đỉnh chính giữa).

Vậy số tam giác vuông không cân được tạo thành từ 20 đỉnh của đa giác đã cho là: $10 \cdot 2 \cdot 8 = 160$.

Vậy xác suất của A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{160}{C_{20}^3} = \frac{8}{57}$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 36.10. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để chọn được số có chữ số hàng trăm, chữ số hàng đơn vị và tổng các chữ số theo thứ tự tạo thành 1 cấp số cộng có công sai dương.

A. $\frac{5}{162}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{16}{81}$.

Lời giải.

Ta có: $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và $a, c, a + b + c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng với công sai d dương).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} c = a + d \\ a + b + c = a + 2d \\ 1 \leq a \leq 9 \\ 0 \leq b, c \leq 9 \\ d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a + d \\ b = d - a \\ -a \leq d \leq 9 - a \\ a \leq d \leq 9 + a \\ 1 \leq a \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a + d \\ b = d - a \\ a \leq d \leq 9 - a \\ 1 \leq a \leq 4 \end{cases}$$

Với mỗi $1 \leq a \leq 4$ có $9 - a - a + 1 = 10 - 2a$ cách chọn d .

Suy ra có tất cả $\sum_{a=1}^4 (10 - 2a) = 20$ số. Xác suất cần tìm là $P = \frac{20}{648} = \frac{5}{162}$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 36.11. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để chọn được số có tích các chữ số là số dương và chia hết cho 6.

A. $\frac{55}{108}$.

B. $\frac{23}{54}$.

C. $\frac{13}{27}$.

D. $\frac{49}{108}$.

Lời giải.

Ta có: $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và abc là số dương và chia hết cho 6).

Ta có: abc là số dương chia hết cho 6 nên $abc > 0$, chia hết cho 2 và 3.

Nếu abc chia hết cho 2 thì ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{2; 4; 6; 8\}$.

Nếu abc chia hết cho 3 thì ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{3; 6; 9\}$.

Do đó ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: N có mặt chữ số 6, có $3 \cdot A_8^2 = 168$ (số).

+ Trường hợp 2: N có mặt chữ số 3 hoặc 9, không có mặt chữ số 6 và có ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{2; 4; 8\}$ nên ta được $2 \cdot (C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 3! + C_3^2 \cdot 3!) + C_3^1 \cdot 3! = 162$ (số).

Vậy có tất cả $168 + 162 = 330$ số.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{330}{648} = \frac{55}{108}$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 36.12. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để chọn được số có tích các chữ số là số chia hết cho 15.

A. $\frac{13}{36}$.

B. $\frac{10}{27}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải.

Ta có: $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và abc là số dương và chia hết cho 15).

Ta có abc là số chia hết cho 15 nên abc chia hết cho 3 và 5.

Nếu abc chia hết cho 5 thì ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{0; 5\}$.

Nếu abc chia hết cho 3 thì ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{0; 3; 6; 9\}$.

Do đó ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: N có mặt số 0, có $2 \cdot A_9^2 = 144$ (số).

+ Trường hợp 2: N có mặt số 5, không có mặt số 0 và có ít nhất một trong các số thuộc $\{3; 6; 9\}$ có $C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot 3! + C_3^2 \cdot 3! = 108$ (số)

Vậy có tất cả $144 + 108 = 252$ số.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{252}{648} = \frac{7}{18}$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 36.13. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số chia hết cho 3.

A. $\frac{1}{36}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{19}{54}$.

D. $\frac{11}{108}$.

Lời giải.

Ta có: $n(\Omega) = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và $a + b + c$ là số chia hết cho 3).

Gọi $A = \{0; 3; 6; 9\}$, $B = \{1; 4; 7\}$, $C = \{2; 5; 8\}$.

Để $a + b + c$ chia hết cho 3 ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $a, b, c \in A$ hoặc B hoặc C , có $3A_3^2 + 3! = 30$ (số).

+ Trường hợp 2: 3 số a, b, c thuộc 3 tập khác nhau, có $2 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 2! + C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot 3! = 198$ (số)

Vậy có tất cả $30 + 198 = 228$ số.

Xác suất cần tìm là $P = \frac{228}{648} = \frac{19}{54}$.

Chọn phương án **C**

□

CÂU 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

A. $\frac{3a}{4}$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

D. $\frac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Lời giải.

Ta có $DC \parallel MB$ và $DC = BC = MB = a$ suy ra tứ giác $DMBC$ là hình thoi $\Rightarrow DM \parallel BC$, lại có $BC \subset (SBC)$ và $DM \not\subset (SBC)$, do đó: $DM \parallel (SBC)$

$\Rightarrow d(SB, DM) = d(M, (SBC))$.

Vì M là trung điểm của AB nên

$d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC))$.

Từ giả thiết ta được $\widehat{ADC} = 120^\circ$.

Áp dụng định lí Côsin vào tam giác ADC ta được:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \widehat{ADC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Ta nhận thấy $AB^2 = AC^2 + BC^2$ do đó $\triangle ACB$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BC$ (1)

mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta được: $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBC)$.

Trong tam giác SAC dựng AH vuông góc với SC , mà $AC = (SAC) \cap (SBC)$ do đó: $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$. Tam giác SAC vuông tại A và có AH là đường cao nên $AH = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}}$

$$\Rightarrow AH = \frac{3a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \frac{3a}{2} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{3a}{4}.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 37.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$ (minh họa như hình bên). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

$$\text{Do đó } d(MN; SB) = d(MN; (SBC)) = d(M; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) \text{ (vì } MB = \frac{1}{2}AB).$$

Kẻ $AK \perp BC, AH \perp SK$, ta có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAK vuông tại A có đường cao AH , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(M; SB) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Chọn phương án **D** □

Câu 37.2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = OB = a, OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

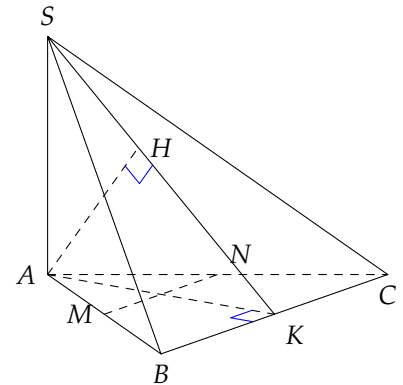
A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải.



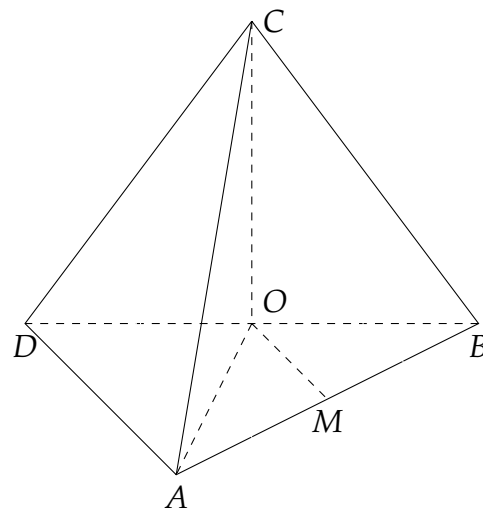
Cách 1: Gọi D là điểm đối xứng với B qua O .

Ta có $OM \parallel AD \Rightarrow OM \parallel (CAD) \Rightarrow d(OM; AC) = d(OM; (ACD)) = d(O; (ACD))$.

Vì OA, OC, OD đôi một vuông góc nên ta có $\frac{1}{d^2(O; (ACD))} =$

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{9}{4a^2}.$$

Suy ra $d(O; (ACD)) = \frac{2a}{3}$ Vậy $d(O; (ACD)) = \frac{2a}{3}$.



Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0); A(a;0;0); B(0;a;0); C(0;0;2a)$.

M là trung điểm của $AB \Rightarrow M(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$.

Đường thẳng OM đi qua O và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = (\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$.

Đường thẳng AC đi qua A và có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{AC} = (-a; 0; a)$.

Ta có $[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{AC}] = (a^2; -a^2; \frac{a^2}{2}); \overrightarrow{OA} = (a; 0; 0) \Rightarrow d(OM; AC) = \frac{|[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{OA}|}{|[\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{AC}]|} = \frac{2a}{3}$.

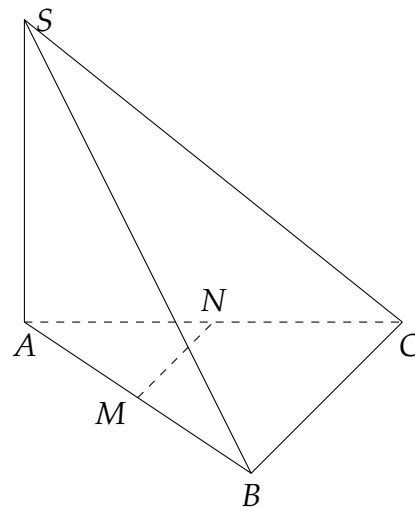
Chọn phương án **D**

□

Câu 37.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy là 60° (minh họa như hình vẽ). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng

- A. $\frac{3a}{8}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.



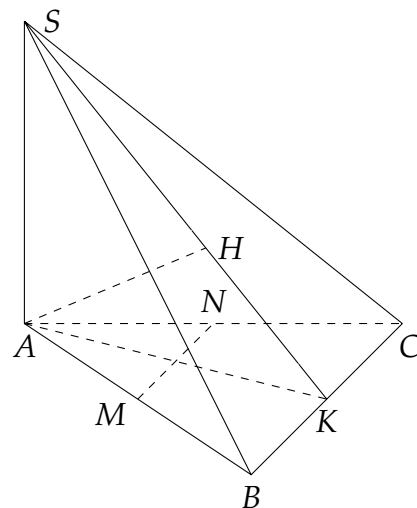
Lời giải.

Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

Do đó $d(MN; SB) = d(MN; (SBC)) = d(M; (SBC)) = \frac{1}{2}d(A; (SBC))$ (vì $MB = \frac{1}{2}AB$).

Kẻ $AK \perp BC, AH \perp SK$, ta có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; SBC) = AH$.



Ta lại có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AK \\ BC \perp SK \end{cases} \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SKA} = 60^\circ$.

Xét tam giác AKH vuông tại H , ta có

$$AH = AK \cdot \sin \widehat{SKA} = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(MN; SB) = \frac{1}{2}d(A; (SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{3a}{8}.$$

Chọn phương án **(A)**

□

CÂU 38. Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}, \forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x) dx$ bằng

A. 7. B. $\frac{197}{6}$. C. $\frac{29}{2}$. D. $\frac{181}{6}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx = x + 2\sqrt{x+1} + C$$

$$\text{Mà } f(3) = 3 \Rightarrow C = -4$$

$$\text{Vậy } \int_3^8 f(x) dx = \int_3^8 (x + 2\sqrt{x+1} - 4) dx = \frac{197}{6}$$

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 38.1. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0$. Khi đó

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\sqrt{32} - \sqrt{12} - 1$. B. $\frac{17}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$. C. $\sqrt{32} + \sqrt{12} - 1$. D. $\frac{17}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } f(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}{(x+1)^2x-x^2(x+1)} dx \\
 &= \int \frac{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}{x(x+1)} dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx \\
 &= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} + C.
 \end{aligned}$$

Suy ra $f(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} + C$.

Mà $f(0) = 1 \Rightarrow C = 3$. Bấm máy tính ta được $\int_0^1 (2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} + 3) dx = \frac{17}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 38.2. Cho $\int_0^{\frac{9}{16}} \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1} = \frac{a - b \ln 2}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

A. 43.

B. 48.

C. 88.

D. 33.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = t \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x} = t - \frac{1}{t} \Rightarrow 4x = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 \Rightarrow 4dx = \frac{2(t^4 - 1)}{t^3} dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{9}{16} \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{9}{16}} \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x} + 1} &= \int_1^2 \frac{t^4 - 1}{2t^3(t+1)} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t^2 - 1)(t - 1)}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(t - \ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^2 \\
 &= \frac{9 - 8 \ln 2}{16}
 \end{aligned}$$

Vậy $a = 9; b = 8, c = 16 \Rightarrow a + b + c = 33$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 38.3. Cho $\int_1^2 \frac{3x^4 - 3x - 3}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx = a + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

A. 59.

B. 104.

C. 111.

D. 147.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \frac{3x^4 - 3x - 3}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx &= \int_1^2 \frac{3(x^4 - x - 1)}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{3(x^2 + \sqrt{x+1})(x^2 - \sqrt{x+1})}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx \\
 &= \int_1^2 (3x^2 - 3\sqrt{x+1}) dx \\
 &= \left(x^3 - 2\sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_1^2 \\
 &= (8 - 6\sqrt{3}) - (1 - 4\sqrt{2}) = 7 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2} = 7 + \sqrt{32} - \sqrt{108}
 \end{aligned}$$

Vậy $a = 7, b = 32, c = 108 \Rightarrow a + b + c = 147$.Chọn phương án **D**

□

Câu 38.4. Cho $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d \ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c, d là các số hữu tỷ.

Giá trị của biểu thức $a + b + c + d$ bằng

A. 0.

B. 3.

C. $-\frac{1}{2}$.D. $\frac{5}{2}$.**Lời giải.**Vì $x \in [1; \sqrt{3}]$ nên

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x)^2 - (1+x^2)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} dx - \\
 &\frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} x dx.
 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}, (t > 0) \Rightarrow x^2 = t^2 - 1 \Rightarrow x dx = t dt$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1} \cdot t dt$$

$$\text{Ta có: } \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1} \cdot t dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right) \\
 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln (\sqrt{2}-1)^2 \\
 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln (3\sqrt{2}-3)
 \end{aligned}$$

Vậy $a = -\frac{3}{2}$; $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$.
 Nên $a + b + c + d = 0$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 38.5. Biết $\int_5^6 \frac{dx}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Giá trị của biểu thức $a - bc$ bằng

A. $\frac{16}{3}$.

B. -19 .

C. 19 .

D. -16 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \int_5^6 \frac{dx}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} &= \int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} = \int_5^6 \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} dx \\ &= \int_5^6 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = 2 \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x} \right) \Big|_5^6 \\ &= 2 \left(\sqrt{5} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{5} \right) = \sqrt{80} - \sqrt{24} - 4. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 80$, $b = 24$ và $c = 4$.

Vậy $a - bc = -16$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 38.6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{khi } x \geq 1, \\ x^2 + b & \text{khi } x < 1. \end{cases}$ với a, b là các tham số thực. Biết rằng $f(x)$ có đạo

hàm trên $\mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-1}^2 f(x) dx$

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{19}{3}$.

C. $\frac{26}{3}$.

D. $\frac{25}{3}$.

Lời giải.

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + b - a - 1}{x - 1} \Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + b - a - 1}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2) dx + \int_1^2 (2x + 1) dx = \frac{26}{3}.$$

Chọn phương án **(C)** □

Câu 38.7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2ax & \text{khi } x \leq 0, \\ 3x^2 + 2bx & \text{khi } x > 0. \end{cases}$ với a, b là các tham số thực, thỏa mãn

$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = [f(-1)]^2 + [f(1)]^2$ bằng

A. 2 .

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{25}{2}$.

Lời giải.

Ta có thể kiểm tra được hàm số f liên tục tại $x = 0$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó, $\int_{-1}^1 f(x) dx$ tồn tại với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Lại có

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 2ax dx + \int_0^1 (3x^2 + 2bx) dx \\ &= ax^2 \Big|_{-1}^0 + (x^3 + bx^2) \Big|_0^1 = a + b + 1.\end{aligned}$$

Theo giả thiết, $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \Leftrightarrow a + b + 1 = 2 \Leftrightarrow b = 1 - a$.

Khi đó

$$\begin{aligned}P &= [f(-1)]^2 + [f(1)]^2 = 4a^2 + (3 + 2b)^2 = 4a^2 + (5 - 2a)^2 \\ &= 8a^2 - 20a + 25 = 8\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq \frac{25}{2}.\end{aligned}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{2}$ khi $a = \frac{5}{4}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 38.8. Cho hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & \text{khi } x \geq 0, \\ 5 \cos x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Biết rằng $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F(1) = 3$. Tính giá trị của biểu thức $T = F(2) - 2F\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\frac{98}{3}$.

B. 11.

C. 21.

D. 22.

Lời giải.

Xét họ các hàm số $g(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + C_1 & \text{khi } x \geq 0. \\ 5 \sin x + C_2 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Ta kiểm tra được trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ thì $g'(x) = f(x)$.

Tồn tại $g'(0)$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} \Leftrightarrow 5 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5 \sin x + C_2 - C_1}{x}$.

Khi đó $C_1 = C_2$ và $g'(0) = 5 = f(0)$.

Vậy khi $C_1 = C_2$ thì $g'(x) = f(x)$ với mọi x .

Do đó, ta tìm được họ nguyên hàm của hàm f là $F(x) = \begin{cases} x^3 + 5x + C & \text{khi } x \geq 0. \\ 5 \sin x + C & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Theo giả thiết, $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + F(1) = 3 \Leftrightarrow -5 + C + 6 + C = 3 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $T = F(2) - 2F\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 19 + 3 = 21$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 38.9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$; $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$.

Giá trị của biểu thức $P = f(-1) + f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2} + \ln 15$.

B. $2 + \ln 15$.

C. $3 + \ln 15$.

D. $\ln 15$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Leftrightarrow \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx \Leftrightarrow f(x) = \ln |2x-1| + C$.

Khi đó $f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{với } x \geq \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{với } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

• Vì $x = 0 < \frac{1}{2}$ nên $f(0) = 1 \Leftrightarrow \ln(1-2 \cdot 0) + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$;

• Vì $x = 1 > \frac{1}{2}$ nên $f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln(2 \cdot 1 - 1) + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2$.

Do đó $f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) + 2 & \text{với } x \geq \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1 & \text{với } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy $P = f(-1) + f(3) = [\ln(1-2 \cdot (-1)) + 1] + [\ln(2 \cdot 3 - 1) + 2] = 3 + \ln 15$.

Chọn phương án **C** □**Câu 38.10.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^*$ thỏa mãn $f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(-1) = 1$, $f(1) = 0$ và $f(2) = 0$. Giá trị biểu thức $f(-2)$ bằng

A. $1 - 2 \ln 2$.

B. $2 + \ln 2$.

C. $3 + \ln 2$.

D. $\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $\int f''(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow \int f'(x) dx = \int \left(-\frac{1}{x} + C\right) dx$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\ln |x| + Cx + C_1 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -\ln x + Cx + C_2 & \text{với } x \geq 0 \\ -\ln(-x) + Cx + C_3 & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

• Với $x = -1 < 0$ nên $f(-1) = 1 \Leftrightarrow -\ln(1) + C \cdot (-1) + C_3 = 1 \Leftrightarrow -C + C_3 = 1$. (1)

• Với $x = 1 > 0$ nên $f(1) = 0 \Leftrightarrow -\ln 1 + C + C_2 = 0 \Leftrightarrow C + C_2 = 0$. (2)

• Với $x = 2 > 0$ nên $f(2) = 0 \Leftrightarrow -\ln 2 + 2C + C_2 = 0 \Leftrightarrow 2C + C_2 = \ln 2$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -C + C_3 = 1 \\ C + C_2 = 0 \\ 2C + C_2 = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \ln 2 \\ C_2 = -\ln 2 \\ C_3 = 1 + \ln 2. \end{cases}$$

Do đó $f(x) = \begin{cases} -\ln x + x \ln 2 - \ln 2 & \text{với } x \geq 0 \\ -\ln(-x) + x \ln 2 + 1 + \ln 2 & \text{với } x < 0. \end{cases}$

Vậy với $x = -2 < 0$ thì $f(-2) = -\ln 2 - 2 \ln 2 + 1 + \ln 2 = 1 - 2 \ln 2$.

Chọn phương án **A** □**Câu 38.11.** Cho $\int_1^2 \frac{3x^4 - 3x - 3}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx = a + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức

$a + b + c$ bằng

A. 59.

B. 104.

C. 111.

D. 147.

Lời giải.

$$\int_1^2 \frac{3x^4 - 3x - 3}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{3(x^4 - x - 1)}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{3(x^2 + \sqrt{x+1})(x^2 - \sqrt{x+1})}{x^2 + \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_1^2 (3x^2 - 3\sqrt{x+1}) dx = \left(x^3 - 2\sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_1^2 = (8 - 6\sqrt{3}) - (1 - 4\sqrt{2}) = 7 + \sqrt{32} - \sqrt{108}.$$

Vậy $a = 7$; $b = 32$; $c = 108 \Rightarrow a + b + c = 147$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 38.12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Biết rằng $\int_1^4 |f'(x)| dx = 5$. Giá trị của $f(4)$ bằng

x	0	1	2	4	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	0	-
y			0		$f(4)$			
	$-\infty$			-1				$+\infty$

A. $\frac{25}{7}$.

B. 3.

C. 15.

D. 5.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\int_1^4 |f'(x)| dx = \int_1^2 -f'(x) dx + \int_2^4 f'(x) dx = -f(x) \Big|_1^2 + f(x) \Big|_2^4 = f(1) + f(4) - 2f(2).$$

$$\text{Mà } \int_1^4 |f'(x)| dx = 5 \Leftrightarrow f(1) + f(4) - 2f(2) = 5 \Leftrightarrow 0 + f(4) - 2 \cdot (-1) = 5 \Leftrightarrow f(4) = 3.$$

Chọn phương án **(B)** □

CÂU 39. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-m^2+4}{(x-m)^2}$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (0; +\infty) \Leftrightarrow \frac{-m^2+4}{(x-m)^2} > 0 \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ x \neq m \forall x \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2; 2) \\ m \in (-\infty; 0] \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; 0]$$

Vậy có hai giá trị nguyên của m là -1 và 0 .

Chọn phương án **(D)** □

Câu 39.1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x-m}{x-1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $m < -2$.

B. $m > -2$.

C. $m > 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{m-2}{(x-1)^2}, \forall x \in \mathcal{D}$.

ycbt $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow m-2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 39.2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $1 < m < 2$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $m \geq 2$ hoặc $m \leq 1$.

D. $m > 2$ hoặc $m < 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}, \forall x \in \mathcal{D}$

ycbt $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow m^2-3m+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 39.3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$.

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

Ta có $y' = \frac{5m-3}{(x+5m)^2}, \forall x \in \mathcal{D}$

ycbt $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \\ (-\infty; -10) \subset \mathcal{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-3 > 0 \\ -5m \notin (-\infty; -10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{5} \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{5} < m \leq 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Chọn phương án **A**

□

Câu 39.4. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ là

A. $(-2; 2)$.

B. $[1; 2)$.

C. $(-2; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{m}{4}\right\}$ và $y' = \frac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 < 0 \\ \frac{m}{4} \notin \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \frac{m}{4} \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Chọn phương án **B**

□

Câu 39.5. Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-2 \sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \geq -\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2} < m < 0$ hoặc $m > 1$.

C. $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\sin x - m \neq 0$. Ta có $y' = \frac{(2m+1) \cos x}{(\sin x - m)^2}$

Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0$ và $\sin x \in (0; 1)$ do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \leq 0 \text{ hoặc } m \geq 1.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 39.6. Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ nghịch biến trên $(0; 1)$. Số các số nguyên của S là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{m}{2}\right\}$. Ta có $y' = \frac{m^2-1}{(2x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-4 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -\frac{m}{2} \leq 0 \text{ hoặc } -\frac{m}{2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -2 \text{ hoặc } m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Vậy các giá trị nguyên của m là $0; 1$.

Chọn phương án **C** □

Câu 39.7. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-9}{x-m}$ (m là tham số thực). Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$f'(x) = \frac{9-m^2}{(x-m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-m^2 > 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3.$$

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên bằng 3.

Chọn phương án **C** □

Câu 39.8. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m+3}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 2020 để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

A. 2020.

B. 2018.

C. 2014.

D. 2016.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m-3\}$.

$$f'(x) = \frac{-m^2 + 3m + 4}{(x-m+3)^2}.$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 3m + 4 > 0 \\ m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \end{cases} \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$$

Do m nhận giá trị nguyên và nhỏ hơn 2020 nên có $2020 - 4 = 2016$ giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **D** □

Câu 39.9. Số giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^2 + 64\sqrt{x+m-2} + mx$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. 32.

B. 33.

C. 64.

D. 28.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = [-m+2; +\infty)$. Ta có

$$y' = 2x + \frac{32}{\sqrt{x+m-2}} + m.$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-m+2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-m+2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{32}{\sqrt{x+m-2}} + m \geq 0, \forall x \in (-m+2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2(x+m-2) + \frac{32}{\sqrt{x+m-2}} + 4, \forall x \in (-m+2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(-m+2; +\infty)} f(x) (*)$$

$$\text{với } f(x) = 2(x+m-2) + \frac{32}{\sqrt{x+m-2}} + 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$2(x+m-2) + \frac{32}{\sqrt{x+m-2}} + 4 = 2(x+m-2) + \frac{16}{\sqrt{x+m-2}} + \frac{16}{\sqrt{x+m-2}} + 4 \geq 28$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 2(x+m-2) = \frac{16}{\sqrt{x+m-2}} \Leftrightarrow x = -m+4 \in (-m+2; +\infty)$$

Suy ra $\min_{(-m+2; +\infty)} f(x) = 28$. Khi đó từ (*) suy ra $m \leq 28$.

Vậy có 28 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

Chọn phương án **D** □

Câu 39.10. Cho hàm số $y = \frac{1-m^3}{4}x^4 + x^3 + \frac{4-m}{2}x^2 + 2x$ với m là tham số. Số giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ sao cho hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$ là

A. 4037. B. 2021. C. 2019. D. 2020.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $y' = (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 4)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; 4)$

$$\Leftrightarrow (1-m^3)x^3 + 3x^2 + (4-m)x + 2 \geq 0, \forall x \in (2; 4)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) \geq (mx)^3 + mx, \forall x \in (2; 4) (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x$. Ta có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x+1 \geq mx, \forall x \in (2; 4)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{x+1}{x}, \forall x \in (2; 4)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(2;4)} g(x) (**)$$

với $g(x) = \frac{x+1}{x}$. Ta có $g'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x \in (2; 4)$ nên $\min_{(2;4)} g(x) = g(4) = \frac{5}{4}$.

Từ (**) suy ra $m \leq \frac{5}{4}$. Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ là 2020.

Chọn phương án **D** □

Câu 39.11. Số giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + mx - 12 \ln x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

A. 32. B. 18. C. 27. D. 30.

Lời giải.

Hàm số tập xác định là $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ và có $y' = 3x^2 - 18x + m - \frac{12}{x}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 18x + m - \frac{12}{x} \leq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow m \leq -3x^2 + 18x + \frac{12}{x}, \forall x \in (0; 2) (*)$$

Xét hàm số $f(x) = -3x^2 + 18x + \frac{12}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 2]$. Ta có $f'(x) = -6x + 18 - \frac{12}{x^2}$.

Trên nửa khoảng $(0; 2]$ phương trình $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm $x = 1$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; f(1) = 27; f(2) = 66$$

Suy ra $\min_{(0;2)} f(x) = 27$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow m \leq \min_{(0;2)} f(x) = 27$$

Vậy có 27 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn phương án **C** □

Câu 39.12. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x + 2m + 2}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - m - 2}{(x + m)^2}, \forall x \in \mathcal{D}$

$$\text{ycbt} \begin{cases} y' < 0, \forall x \in \mathcal{D} \\ (-1; +\infty) \subset \mathcal{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ -m \notin (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn ycbt.

Chọn phương án **C**

□

Câu 39.13. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 5.

B. 15.

C. 9.

D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x + m)^2}, \forall x \in \mathcal{D}$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Do đó $S = \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng 5.

Chọn phương án **B**

□

Câu 39.14. Cho hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 5.

B. 4.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 4m}{(x + m)^2}, \forall x \in \mathcal{D}$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Do đó $S = \{1; 2; 3\}$.

Vậy số các phần tử của S bằng 3.

Chọn phương án **D**

□

Câu 39.15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải.

Đặt $u = \tan x$, ta có $u' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{4})$. Do đó $u = \tan x$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.

Và khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $u \in (0; 1)$.

Bài toán đã cho trở thành "Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $f(u) = \frac{u-2}{u-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

$$+ \text{ Ta có } f'(u) = \frac{2-m}{(u-m)^2}.$$

$$+ \text{ YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ \begin{cases} m \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m < 2. \\ m \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy có 1 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Chọn phương án **C** □

Câu 39.16. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 \cos x - 1}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $m \leq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m > 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải.

Đặt $u = \cos x$, ta có $u' = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $u = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Và khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $u \in (0; 1)$.

Bài toán đã cho trở thành "Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $f(u) = \frac{2u-1}{u-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

$$+ \text{ Ta có } f'(u) = \frac{-2m+1}{(u-m)^2}.$$

$$+ \text{ YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ \begin{cases} m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0. \\ m \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Chọn phương án **A** □

Câu 39.17. Cho hàm số $y = \frac{2\sqrt{9-x^2}-m}{\sqrt{9-x^2}-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \sqrt{5}\right)$. Tính tổng các phần tử của tập hợp S .

A. 2041205.

B. 2039190.

C. 2039191.

D. 2041210.

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{9-x^2}$, ta có $u' = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} < 0, \forall x \in \left(0; \sqrt{5}\right)$. Do đó $u = \sqrt{9-x^2}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \sqrt{5}\right)$. Và khi $x \in \left(0; \sqrt{5}\right)$ thì $u \in (2; 3)$.

Bài toán đã cho trở thành " Cho hàm số $y = \frac{2u-m}{u-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 2020 để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$."

$$+ \text{ Ta có } f'(u) = \frac{-m}{(u-m)^2}.$$

$$+ \text{ YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ m \notin (2;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq 2 \Leftrightarrow m \in (0;2] \cup [3;+\infty). \\ m \geq 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$+ \text{ Do đó } S = \{1, 2, 3, \dots, 2020\} \text{ nên tổng các phần tử của } S \text{ là } T = \frac{2020 \cdot 2021}{2} = 2041210.$$

Chọn phương án **(D)** □

CÂU 40. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. B. 32π . C. $32\sqrt{5}\pi$. D. 96π .

Lời giải.

$\triangle ABC$ đều, đặt $AB = BC = CA = x$.

$$\text{Ta có: } S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 6.$$

$$AI = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (} \triangle ABC \text{ đều)}.$$

$$\triangle AOI \text{ vuông tại } O : OI = \sqrt{AI^2 - AO^2} = \sqrt{7}.$$

$$\triangle OIB \text{ vuông tại } I : R = OB = \sqrt{OI^2 + BI^2} = 4.$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón: } V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 16 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 40.1. Cho hình nón có chiều cao bằng $\sqrt{11}$. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân có diện tích bằng 18. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{25\pi\sqrt{11}}{3}$. B. 150π . C. $25\pi\sqrt{11}$. D. 50π .

Lời giải.

$$\text{Theo giả thiết, } \triangle SAB \text{ vuông cân tại } S. \text{ Ta có } S_{SAB} = \frac{SA^2}{2} = 18 \Rightarrow SA^2 = 36.$$

$$R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{36 - 11} = 5.$$

$$\text{Thể tích của khối nón là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{25\pi\sqrt{11}}{3}$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 40.2. Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. B. 32π . C. $32\sqrt{5}\pi$. D. 96π .

Lời giải.

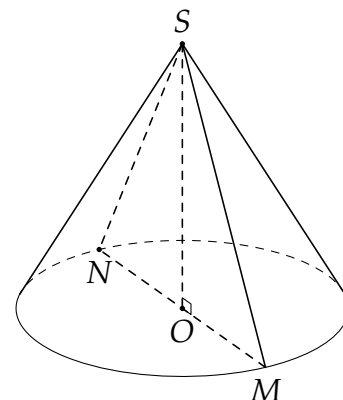
Gọi thiết diện là tam giác đều SMN có cạnh là a , ($a > 0$) và O là trung điểm MN .

$$\text{Khi đó } S_{\triangle SMN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a = 6.$$

$$\text{Ta có } h = SO = 2\sqrt{5} \text{ và } l = SM = a.$$

Vậy thể tích của khối nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (l^2 - h^2) h = \frac{1}{3}\pi (6^2 - (2\sqrt{5})^2) 2\sqrt{5} = \frac{32\sqrt{5}\pi}{3}.$$



Chọn phương án **A** □

Câu 40.3. Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm . Diện tích của thiết diện đó bằng

A. 500cm^2 .

B. 400cm^2 .

C. 300cm^2 .

D. 406cm^2 .

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB).$$

$$\text{Kẻ } OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O, (SAB)) = 12\text{cm}.$$

Do tam giác SOI vuông tại O nên

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \\ \Rightarrow OI^2 = 225 \Rightarrow OI = 15\text{cm}.$$

$$SI^2 = SO^2 + OI^2 = 20^2 + 15^2 = 625 \Rightarrow SI = 25\text{cm}.$$

Do tam giác AOI vuông tại I nên

$$AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20\text{cm} \Rightarrow AB = 40\text{cm}.$$

Diện tích của thiết diện cần tìm là

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}SI \cdot AB = \frac{1}{2}25 \cdot 40 = 500\text{cm}^2.$$

Chọn phương án **A** □

Câu 40.4. Cho hình nón đỉnh S có chiều cao bằng bán kính đáy và bằng $2a$. Mặt phẳng (P) đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến (P) .

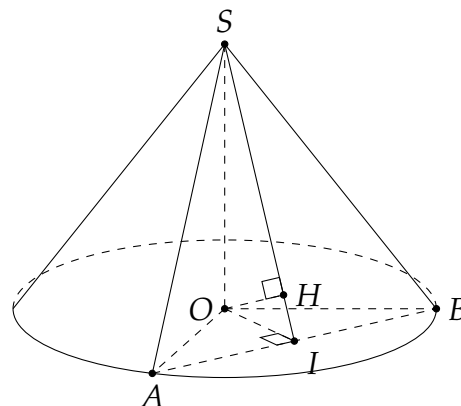
A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. a .

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow (SOI) \perp (SAB).$$

$$\text{Kẻ } OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O, (SAB)).$$

Do tam giác SOA vuông tại O nên

$$SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Do tam giác SIA vuông tại I nên

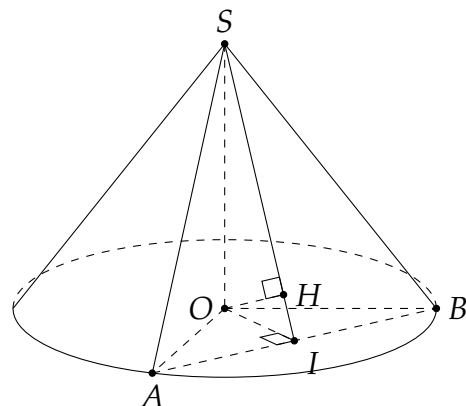
$$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{8a^2 - 3a^2} = a\sqrt{5}.$$

Do tam giác SOI vuông tại O nên

$$OI = \sqrt{SI^2 - SO^2} = \sqrt{5a^2 - 4a^2} = a.$$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{4a^2}{5}$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$



Chọn phương án **(D)** □

Câu 40.5. Cho hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O , bán kính $R = 3\text{cm}$, góc ở đỉnh hình nón là $\varphi = 120^\circ$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB , trong đó A, B thuộc đường tròn đáy. Diện tích tam giác SAB bằng

A. $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

B. $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

C. 6 cm^2 .

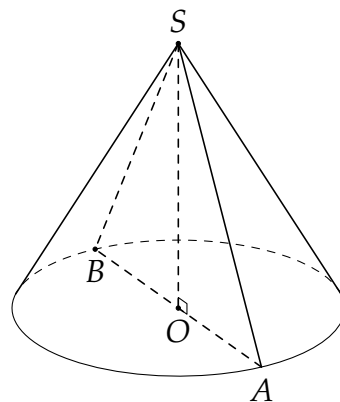
D. 3 cm^2 .

Lời giải.

Do góc ở đỉnh của hình nón $\varphi = 120^\circ$, gọi l là độ dài đường sinh ta có

$$l = \frac{2R}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = SA.$$

Khi đó, diện tích của tam giác SAB bằng $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot SA^2 = 3\sqrt{3}$.



Chọn phương án **(A)** □

Câu 40.6. Cho hình trụ có đường cao $h = 5\text{cm}$, bán kính đáy $r = 3\text{cm}$. Xét mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ, cách trục 2cm . Tính diện tích S thiết diện của hình trụ với (P) .

A. $5\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

B. $6\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

C. $3\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

D. $10\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABCD).$$

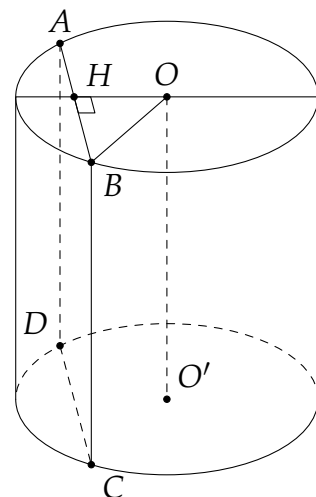
$$\Rightarrow OH = d(OO', (P)) = d(O, (ABCD)) = 2\text{Cm}.$$

$$\text{Tam giác } OHB \text{ vuông tại } H \text{ có } HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

$$\Rightarrow AB = 2HB = 2\sqrt{5}.$$

Diện tích S thiết diện của hình trụ với (P) là

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2\sqrt{5} \cdot 5 = 10\sqrt{5} \text{ cm}^2.$$



Chọn phương án **(D)** □

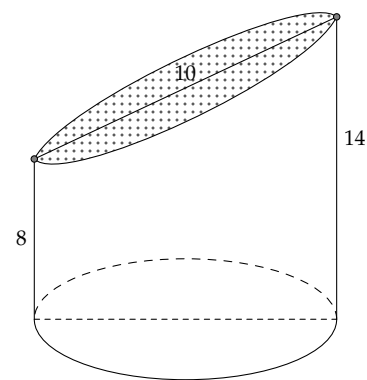
Câu 40.7. Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên dưới. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (xem hình vẽ). Tính thể tích $V_{(H)}$ của (H) .

A. $V_{(H)} = 192\pi.$

B. $V_{(H)} = 275\pi.$

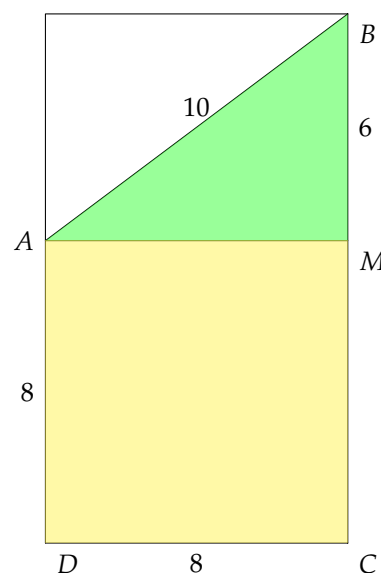
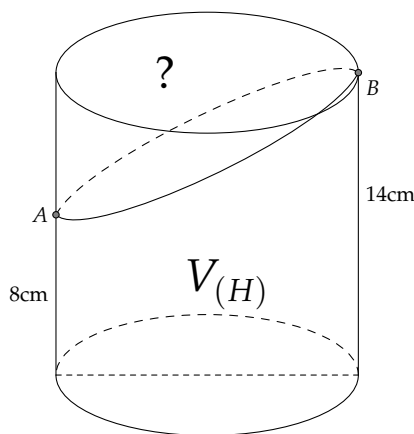
C. $V_{(H)} = 704\pi.$

D. $V_{(H)} = 176\pi.$



Lời giải.

$$\begin{aligned} V_{(H)} &= \pi \cdot \left(\frac{CD}{2}\right)^2 \cdot AD + \frac{1}{2}\pi \cdot \\ &\left(\frac{AM}{2}\right)^2 \cdot BM = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 + \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 \cdot \\ &6 = 176\pi. \end{aligned}$$



Chọn phương án **(D)** □

Câu 40.8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. có tất cả các cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh

của hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp.

A. $S_{xq} = \frac{9\pi}{2}$.

B. $S_{xq} = \frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$.

C. $S_{xq} = 9\pi$.

D. $S_{xq} = \frac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

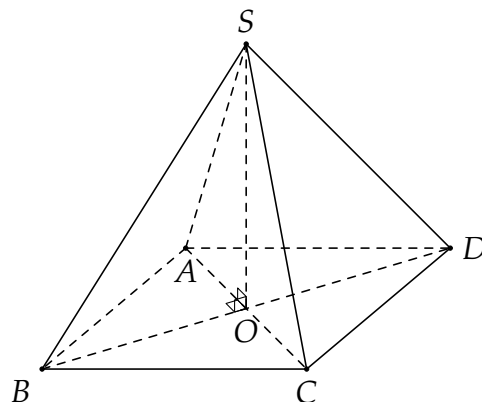
Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $l = SA = 3$ và $r = OA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot$

$$3\sqrt{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{2}\pi}{2}.$$



Chọn phương án **D**

□

Câu 40.9. Một nhà máy cần sản xuất các hộp hình trụ kín cả hai đầu có thể tích V cho trước. Mỗi quan hệ giữa bán kính đáy R và h của hình trụ để diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất là

A. $h = 3R$.

B. $h = R$.

C. $h = 2R$.

D. $2h = R$.

Lời giải.

Thể tích của khối trụ là $V = \pi \cdot R^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot R^2}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot R \cdot h + 2\pi \cdot R^2 = 2\pi \cdot R^2 + 2\pi \cdot R \cdot \frac{V}{\pi \cdot R^2} = 2\pi \cdot R^2 + \frac{2V}{R}.$$

$$\text{Ta có } \pi \cdot R^2 + \frac{V}{R} = \pi \cdot R^2 + \frac{V}{2R} + \frac{V}{2R} \geq 3\sqrt[3]{\pi \cdot R^2 \cdot \frac{V}{2R} \cdot \frac{V}{2R}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \pi \cdot R^2 = \frac{V}{2R} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Vậy $h = 2R$.

Chọn phương án **C**

□

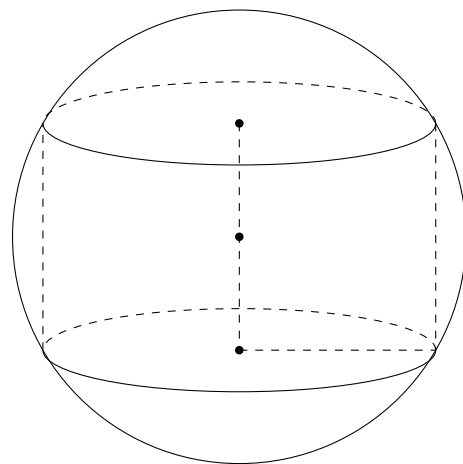
Câu 40.10. Cho mặt cầu (S) bán kính $R = \sqrt{2}$. Một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy r thay đổi nội tiếp mặt cầu. Diện tích xung quanh lớn nhất của khối trụ bằng

A. 2π .

B. 4π .

C. 6π .

D. 8π .



Lời giải.

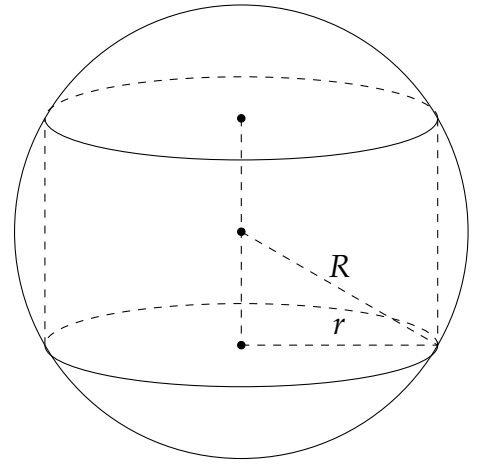
Ta có $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot h$.

Lại có $r^2 + \frac{h^2}{4} \geq 2\sqrt{r^2 \cdot \frac{h^2}{4}} = rh = \frac{S_{xq}}{2\pi} \Rightarrow 2\pi R^2 \geq S_{xq}$.

Do đó S_{xq} lớn nhất khi $r = \frac{h}{2} \Rightarrow R^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow h = R\sqrt{2}$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot R\sqrt{2} = 2\pi \cdot R^2 = 4\pi$.



Chọn phương án **(B)** □

Câu 40.11. Cho hình nón có chiều cao bằng 3. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều. Biết góc giữa đường thẳng chứa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là 45° . Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $5\pi\sqrt{24}$.

B. $15\pi\sqrt{24}$.

C. 45π .

D. 15π .

Lời giải.

Gọi thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác đều SAB và I là tâm của đáy, M là trung điểm AB . Ta có góc giữa đường thẳng chứa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là 45° .

Suy ra $\widehat{MSI} = 45^\circ \Rightarrow \triangle MSI$ vuông cân tại I .

$SM = SI \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $MB = \frac{SM}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ và $MI = SI = 3$, $R = \sqrt{MB^2 + MI^2} = \sqrt{15}$.

Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 15\pi$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 40.12. Cho hình nón có chiều cao bằng $\sqrt{2}$. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (α) là $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$.

C. $8\pi\sqrt{3}$.

D. $4\pi\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác đều SAB và I là tâm của đáy, M là trung điểm AB . Kẻ $IH \perp SM$ tại H .

Suy ra $d(I; (\alpha)) = IH = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Mà $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IM^2} \Rightarrow IM = 2 \Rightarrow SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow MB = \frac{SM}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{IM^2 + MB^2} = \sqrt{6}$ và $l = SB = AB = 2MB = 2\sqrt{2}$. Nên $S_{xq} = \pi Rl = \pi\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{3}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 40.13. Cho hình nón có chiều cao bằng 1. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích S . Gọi S_d là diện tích đáy của hình nón. Biết $S = \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} S_d$. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

- A. $\frac{(\sqrt{5}+3)\pi}{6}$. B. $\frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{2}$. C. $\frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{4}$. D. $\frac{(\sqrt{5}+3)\pi}{12}$.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Cạnh của thiết diện là $SA = \sqrt{SO^2 + R^2} = \sqrt{1 + R^2}$.

Diện tích của thiết diện là $S = \frac{SA^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(1 + R^2) \sqrt{3}}{4}$.

Diện tích của đáy hình nón $S_d = \pi R^2$.

Ta có $S = \frac{5\sqrt{3}}{4\pi} \cdot S_d \Leftrightarrow \frac{(1 + R^2) \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 5\sqrt{3}}{4\pi} \Leftrightarrow R = \frac{1}{2} \Rightarrow SA = \frac{\sqrt{5}}{2} = l$

Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp} = \pi R^2 + \pi Rl = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi \sqrt{5}}{4} = \frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{4}$.

Chọn phương án **C** □

CÂU 41. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (2x + y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases}$

Khi đó ta có: $\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t$ và $2 \cdot 9^t + 6^t = 4^t$ (1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 & (\text{loại}) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} & (t/\text{man}) \end{cases}$

Vậy $\frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **B** □

Câu 41.1. Giả sử p, q là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25} (p + q)$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{p}{q}$?

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$. C. $\frac{8}{5}$. D. $\frac{1}{2} (-1 + \sqrt{5})$.

Lời giải.

Đặt $t = \log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25} (p + q) \Rightarrow p = 16^t, q = 20^t, p + q = 25^t$. Suy ra

$16^t + 20^t = 25^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2t} + \left(\frac{4}{5}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vì $\left(\frac{4}{5}\right)^t > 0$ nên $\left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta được $\frac{p}{q} = \frac{16'}{20^t} = \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 41.2. Cho các số $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_3 a = \log_6 b = \log_2(a + b)$. Giá trị $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ bằng
 A. 18. B. 45. C. 27. D. 36.

Lời giải.

Đặt $t = \log_3 a = \log_6 b = \log_2(a + b) \Rightarrow \begin{cases} a = 3^t \\ b = 6^t \\ a + b = 2^t \end{cases} \Rightarrow 3^t + 6^t = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3^t = 1 \quad (1).$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3^t$ trên $(0, +\infty)$.

có $f'(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3^t \cdot \ln 3 > 0, \forall t \in (0, +\infty)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$ mà $f(-1) = 1$.

Suy ra $t = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 45$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 41.3. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$. Giá trị của $\frac{x}{y}$ bằng
 A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\log_2 \frac{3}{2}$. D. $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải.

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y) = t$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \cdot 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}.$

Khi đó $\frac{x}{y} = \frac{9^t}{6^t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 41.4. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a + b)$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng
 A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a + b) = t$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a + b = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$

Khi đó $\frac{a}{b} = \frac{4^t}{6^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 41.5. Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$. Tính tỉ số $T = \frac{a}{b}$.

A. $T = \frac{5}{4}$. B. $T = \frac{2}{3}$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = \frac{4}{5}$.

Lời giải.

Đặt $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3} = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 16^t \\ b = 20^t \\ \frac{2a-b}{3} = 25^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 16^t - 20^t = 3 \cdot 25^t \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2t} - \left(\frac{4}{5}\right)^t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{2}{3}.$$

Khi đó $\frac{a}{b} = \frac{16^t}{20^t} = \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{2}{3}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 41.6. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{10}} x = \log_{\sqrt{15}} y = \log_5(x+y)$. Tính tỉ số $\frac{y}{x}$.

A. $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$. B. $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$. C. $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$. D. $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đặt $\log_{\sqrt{10}} x = \log_{\sqrt{15}} y = \log_5(x+y) = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10^{\frac{t}{2}} \\ y = 15^{\frac{t}{2}} \\ x + y = 5^t = 25^{\frac{t}{2}} \end{cases} \Rightarrow 10^{\frac{t}{2}} + 15^{\frac{t}{2}} = 25^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{t}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{2}} = 1 \quad (*).$$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{t}{2}} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{2}}$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và có $f(2) = 1$. Nên phương trình (*) có một nghiệm duy nhất $t = 2$.

Vậy $\frac{y}{x} = \left(\frac{15}{10}\right)^{\frac{t}{2}} = \frac{3^{\frac{t}{2}}}{2^{\frac{t}{2}}} = \frac{3}{2}$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 41.7. Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = ab$.

A. $P = 10$. B. $P = -10$. C. $P = -45$. D. $P = 45$.

Lời giải.

Từ giả thiết $9^x + 9^{-x} = 14 \Rightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 16 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = 4$.

Do đó $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3(3^x-3^{-x})} = \frac{18}{-10} = \frac{-9}{5}$.

Vậy $a = -9, b = 5$ nên $ab = -45$.

Chọn phương án **(C)** □

Câu 41.8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^{\log_2 5} = 4, b^{\log_4 6} = 16, c^{\log_7 3} = 49$. Tính $T = a^{\log_2^2 5} + b^{\log_4^2 6} + 3 \cdot c^{\log_7^2 3}$

A. $T = 126$. B. $T = 5 + 2\sqrt{3}$. C. $T = 88$. D. $T = 3 - 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $T = a^{\log_2^2 5} + b^{\log_4^2 6} + 3 \cdot c^{\log_7^2 3} = 4^{\log_2 5} + 16^{\log_4 6} + 3 \cdot 49^{\log_7 3} = 5^2 + 6^2 + 3 \cdot 3^2 = 88$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 41.9. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$ với $x > 0$. Tính $P = x^2 + y^2 - xy + 1$.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}} \geq 4$.

Lại có: $14 - (y-2)\sqrt{y+1} = 14 - (y+1)\sqrt{y+1} + 3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t = \sqrt{y+1} \geq 0$. Ta xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t + 14$ trên $[0; +\infty)$ có kết quả $\max_{t \in [0; +\infty)} f(t) = f(1) = 16$.

Vậy $14 - (y-2)\sqrt{y+1} \leq 16 \Rightarrow \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}] \leq 4$.

Khi đó $2^{x+\frac{1}{x}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = 2$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 41.10. Biết rằng phương trình $27^x - 27^{1-x} - 16 \left(3^x - \frac{3}{3^x} \right) + 6 = 0$ có các nghiệm $x = a, x = \log_3 b$ và $x = \log_3 c$ với $a \in \mathbb{Z}, b > c > 0$. Tỉ số $\frac{b}{c}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3; +\infty)$.

B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x - 3^{1-x}$. Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 7t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$

Với $t = 3 \Rightarrow 3^x - 3^{1-x} = 3 \Leftrightarrow (3)^{2x} - 3 \cdot 3^x - 3 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$.

Với $t = -1 \Rightarrow 3^x - 3^{1-x} = -1 \Leftrightarrow (3)^{2x} + 3^x - 3 = 0 \Rightarrow 3^x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.

Với $t = -2 \Rightarrow 3^x - 3^{1-x} = -2 \Leftrightarrow (3)^{2x} + 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Do đó $a = 0, b = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}, c = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$. Vậy $\frac{b}{c} \in \left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 41.11. Biết rằng $a, b, c > 1$ thỏa $\log_{ab}(bc) = 2$. Giá trị của $P = \log_{\frac{c}{b}} a^4 + \log_{\frac{c}{a}}(ab)$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta biến đổi: $2 = \log_{ab} bc = \frac{\log_a(bc)}{\log_a(ab)} = \frac{\log_a b + \log_a c}{1 + \log_a b} \Rightarrow \log_a b + 2 = \log_a c$.

Từ đó $P = \log_{\frac{c}{b}} a^4 + \log_{\frac{c}{a}}(ab) = \frac{\log_a a^4}{\log_a \frac{c}{b}} + \frac{\log_a(ab)}{\log_a \frac{c}{a}} = \frac{4}{\log_a c - \log_a b} + \frac{1 + \log_a b}{\log_a c - 1} = 2 + 1 = 3$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 41.12. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12}$. Giá trị $\frac{a}{b}$ bằng

A. 4.

B. 12.

C. 6.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \frac{a-4b}{12} = t.$$

$$\text{Ta có } a = 100^t, b = 40^t, \frac{a-4b}{12} = 16^t. \text{ Suy ra}$$

$$100^t - 4 \cdot 40^t = 12 \cdot 16^t \Leftrightarrow 12 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^t + 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^t = \frac{1}{6} \\ \left(\frac{2}{5}\right)^t = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{2}{5}\right)^t = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{100}{40}\right)^t = \left(\frac{5}{2}\right)^t = 6.$$

Chọn phương án **C**

□

Câu 41.13. Cho các số thức $m > 0, n > 0, p > 0$ thỏa mãn $4^m = 10^n = 25^p$. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{n}{2m} + \frac{n}{2p}$.

A. $T = 1$. B. $T = \frac{5}{2}$. C. $T = 2$. D. $T = \frac{1}{10}$.

Lời giải.

$$\text{Vì } 4^m = 10^n \Rightarrow n = m \log 4 \Rightarrow \frac{n}{2m} = \frac{\log 4}{2} = \log 2.$$

$$\text{Vì } 10^n = 25^p \Rightarrow n = p \log 25 \Rightarrow \frac{n}{2p} = \frac{\log 25}{2} = \log 5.$$

$$\text{Suy ra } T = \frac{n}{2m} + \frac{n}{2p} = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1.$$

Chọn phương án **A**

□

CÂU 42. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -16. B. 16. C. -12. D. -2.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Ta xét các trường hợp sau:

$$+) m + 18 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -18. \text{ Khi đó } m - 2 < m < m + 18 \leq 0, \text{ nên}$$

$$\max_{[0;3]} y = \max_{[0;3]} \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = |m-2| = 2-m.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} y = 16 \Leftrightarrow 2-m = 16 \Leftrightarrow m = -14 \text{ (loại).}$$

$$+) m < 0 < m + 18 \Leftrightarrow -18 < m < 0. \text{ Khi đó } m - 2 < m < 0 < m + 18,$$

$$\text{ nên } \begin{cases} \max_{[0;3]} y = \max_{[0;3]} \{|m-2|, |m|, |m+18|\} = \max_{[0;3]} \{2-m, -m, m+18\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \max_{[0;3]} \{2-m, m+18\} = \begin{cases} 2-m, -18 < m < -8 \\ m+18, 0 > m \geq -8 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} y = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m = 16, -18 < m < -8 \\ m+18 = 16, -8 \leq m < 0 \end{cases}. \text{ Như vậy } \begin{cases} m = -14 \\ m = -2 \end{cases}$$

+) $m = 0 : \underset{[0;3]}{\text{Max}} y = 18 \neq 16$ (loại).

+) $m - 2 < 0 < m < m + 18$

Ta có $\underset{[0;3]}{\text{Max}} y = \underset{[0;3]}{\text{Max}} \{|m - 2|, |m|, |m + 18|\} = \underset{[0;3]}{\text{Max}} \{2 - m, m, m + 18\} = m + 18,$

Do đó $\underset{[0;3]}{\text{Max}} y = 16 \iff m + 18 = 16 \iff m = -2$ (thỏa mãn).

+) $0 \leq m - 2 < m < m + 18.$

Ta có $\underset{[0;3]}{\text{Max}} y = \underset{[0;3]}{\text{Max}} \{|m - 2|, |m|, |m + 18|\} = \underset{[0;3]}{\text{Max}} \{m - 2, m, m + 18\} = m + 18.$

Do đó $\underset{[0;3]}{\text{Max}} y = 16 \iff m + 18 = 16 \iff m = -2$ (loại).

Suy ra $S = \{-14; -2\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $-14 + (-2) = -16$.

Chọn phương án **A** □

Câu 42.1. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -2.

B. 2.

C. -12.

D. 8.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + m$ trên đoạn $[0; 3]$.

$f'(x) = 2x - 2.$

$f'(x) = 0 \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1.$

$f(0) = m, f(1) = m - 1, f(3) = m + 3.$

$\underset{x \in [0;3]}{\text{max}} f(x) = \max\{m - 1; m; m + 3\} = m + 3.$

$\underset{x \in [0;3]}{\text{min}} f(x) = \min\{m - 1; m; m + 3\} = m - 1.$

$$\underset{x \in [0;3]}{\text{max}} y = \underset{x \in [0;3]}{\text{max}} |f(x)| = \max\{|m - 1|; |m + 3|\} = 5 \iff \begin{cases} |m - 1| = 5 \\ |m + 3| \leq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} |m + 3| = 5 \\ |m - 1| \leq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} m = -4 \\ m = 2 \end{cases}.$$

vậy $S = \{-4; 2\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -2.

Chọn phương án **A** □

Câu 42.2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + m, f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \iff x = \pm 1.$

x	0	1	2
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	m	$m - 2$	$m + 2$

- Nếu $m \geq 0$ thì $\underset{[0;2]}{\text{max}} y = |m + 2|$. Khi đó $|m + 2| = 3 \iff m = 1.$

- Nếu $m < 0$ thì $\max_{[0;2]} y = |m - 2|$. Khi đó $|m - 2| = 3 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 42.3. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\ln^2 x + \ln x + m|$ trên $[1; e]$ bằng 2. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Đặt $t = \ln x, x \in [1; e] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm $y = |t^2 + t + m|$ trên $[0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + m$, ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0 \forall t \in [0; 1]$.

$$\text{Vậy } \max_{t \in [0;1]} y = \max_{t \in [0;1]} |f(t)| = \max\{|m|; |2 + m|\} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 2 \\ |m + 2| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 0. \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 42.4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\sin^2 x - 2 \sin x + m|$ bằng 1. Số phần tử của S là

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |t^2 - 2t + m|$ trên $[-1; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + m$, ta có $f'(t) = 2t - 2, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1; 1]$.

$$\text{Vậy } \max_{t \in [-1;1]} y = \max_{t \in [-1;1]} |f(t)| = \max\{|3 + m|; |m - 1|\} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 3| = 1 \\ |m - 1| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 1| = 1 \\ |m + 3| \leq 1 \end{cases}$$

Hệ này không có nghiệm, vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 42.5. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{(m+1)x + m - 1}{x+1} \right|$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng $\frac{1}{2}$.

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 6.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{(m+1)x + m - 1}{x+1}$ liên tục trên $[-3; -2]$.

Suy ra hàm số $y = |f(x)|$ liên tục trên $[-3; -2]$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [-3; -2]$.

Nên $\max_{x \in [-3; -2]} |f(x)| = \max\{|f(-3)|; |f(-2)|\} = \max\{|m+2|; |m+3|\}.$

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\left[\begin{cases} |m+2| = \frac{1}{2} \\ |m+3| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2} \right.$$

$$\left. \begin{cases} |m+3| = \frac{1}{2} \\ |m+2| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \right]$$

Vậy có duy nhất một giá trị của m thỏa mãn.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 42.6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + x + 2|e^{x+m^2}$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng $2e$. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Ta có $y = |x^2 + x + 2|e^x \cdot e^{m^2} = |f(x)|e^{m^2}$ với $f(x) = (x^2 + x + 2)e^x$.

Ta có $f'(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x + 2)e^x = (x^2 + 3x + 3)e^x > 0 \forall x \in [-1; 0]$.

Vậy $\max_{x \in [-1; 0]} |f(x)| = \max\{|f(-1)|, |f(0)|\} = 2$.

Từ yêu cầu bài toán ta có $2e^{m^2} = 2e \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 42.7. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 2]$.

Ta có $f'(x) = \frac{m^2 - m + 1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Vậy $M = \max_{x \in [1; 2]} g(x) = \max\{|f(1)|, |f(2)|\} = \max\left\{\frac{1}{2}|1 - m^2 + m|; \frac{1}{3}|2 - m^2 + m|\right\}$.

Đặt $\alpha = m^2 - m$.

Ta có

$$5M = 2M + 3M \geq |1 - \alpha| + |\alpha - 2| \geq |1 - \alpha + \alpha - 2| = 1 \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{5}.$$

Vậy M nhỏ nhất bằng $\frac{1}{5}$ và dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} |1 - \alpha| = \frac{2}{5} \\ |\alpha - 2| = \frac{3}{5} \\ (1 - \alpha)(\alpha - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{5}.$

Vậy $m^2 - m = \frac{7}{5}$. Phương trình này có hai nghiệm thỏa mãn. □

Câu 42.8. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4mx + 2m^2} + |x|$ bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|m| \in \left[\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right]$. B. $|m| \in \left[\frac{3}{10}; \frac{5}{10}\right]$. C. $|m| \in \left[\frac{5}{10}; \frac{7}{10}\right]$. D. $|m| \in \left[\frac{7}{10}; \frac{9}{10}\right]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) \geq \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) ((m-2x)^2 + m^2) + x} \geq \left|\frac{1}{2}(m-2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}m\right| + x \geq \frac{\sqrt{3}+1}{2}m.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{\sqrt{3}+1}{2}m = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \in \left[\frac{5}{10}; \frac{7}{10}\right].$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{m-2x}{\frac{1}{2}} = \frac{m}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ \frac{1}{2}(m-2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 42.9. Biết hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ ($m; n$ là tham số) đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

A. -16.

B. 4.

C. $-\frac{1}{16}$.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3[x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2].$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow mn \leq 0.$$

$$\bullet \text{ TH1: } mn = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0. \end{cases}$$

Do vai trò của m, n là như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $m = 0$.

$$\Rightarrow P = 4n^2 - n = \left(2n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \quad (1).$$

$$\bullet \text{ TH2: } mn < 0 \Leftrightarrow m > 0; n < 0 \text{ (do vai trò của } m, n \text{ như nhau).}$$

$$\text{Ta có } P = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 4n^2 + (-n) > -\frac{1}{16} \quad (2).$$

Từ (1), (2) ta có $P_{\min} = -\frac{1}{16}$. Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{8}; n = 0$ hoặc $m = 0; n = \frac{1}{8}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 42.10. Cho hàm số $f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị nhỏ nhất của M bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 16.

C. $\frac{57}{2}$.

D. $\frac{59}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2. \text{ Ta có } g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -1. \end{cases}$$

Ta có $g(0) = 0, g(-1) = -5, g(2) = -32, g(3) = 27$. Vậy $t \in [-32; 27]$.

$$\text{Vậy } M = \max_{t \in [-32; 27]} |t + m| = \max\{|m + 27|; |m - 32|\}.$$

Ta có $2M \geq |m + 27| + |32 - m| \geq |m + 27 + 32 - m| = 59$.

Vậy $M \geq \frac{59}{2}$. Dấu bằng xảy ra tại $m = \frac{5}{2}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 42.11. Cho hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a|$. Gọi M, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên dương a thuộc đoạn $[0; 100]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 36.

B. 37.

C. 40.

D. 38.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$ trên đoạn $[-1; 2]$. $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f(0) = a, f(-1) = a - 5, f(2) = a - 32.$$

Ta có bản biến thiên

x	-1	0	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$a - 5$	a	$a - 32$

Để có được $M \leq 2m$ thì $m > 0$ (có nghĩa là phần đồ thị hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$ trên đoạn $[-1; 2]$ không cắt trục hoành).

$$\text{Vậy ta suy ra } \begin{cases} a < 0 \\ a - 32 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 32 \end{cases}.$$

Vì $[0; 100]$ nên ta chỉ loại trường hợp $a < 0$.

Với $a > 32$, ta có: $m = |a - 32| = a - 32, M = |a| = a$.

Vậy $M \leq 2m \Leftrightarrow a \leq 2(a - 32) \Leftrightarrow a \geq 64$ (thỏa mãn).

Kết luận: trong đoạn $[0; 100]$ có 37 số nguyên dương a thỏa mãn.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 42.12. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -3.

B. 2.

C. 4.

D. 7.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[1; 3]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f(1) = m - 2, f(2) = m - 4, f(3) = m.$$

Gọi A, a lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[1; 3]$.

$$\text{Ta có } A = \max_{x \in [1; 3]} f(x) = \max\{m - 4; m - 2; m\} = m.$$

$$a = \min_{x \in [1;3]} f(x) = \min\{m-4; m-2; m\} = m-4.$$

+ Nếu $a > 0 \Leftrightarrow m-4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$ thì $\min_{x \in [1;3]} y = |m-4| = m-4 = 3 \Leftrightarrow m = 7$ (thỏa mãn). + Nếu $A < 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì $\min_{x \in [1;3]} y = |m| = -m = 3 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn). + Nếu $Aa < 0$ thì $\min_{x \in [1;3]} y = 0$ (loại).

Vậy $S = \{-3; 7\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng 4.

Chọn phương án **C**

□

Câu 42.13. Cho hàm số $y = |8x^4 + ax^2 + b|$. Trong đó a, b là các hệ số thực. Tìm mối liên hệ giữa a và b để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1?

A. $b - 8a = 0$.

B. $b - 4a = 0$.

C. $b + 4a = 0$.

D. $b + 8a = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$, suy ra $t \in [0; 1]$.

Xét $g(t) = 8t^2 + at + b$, đây là đồ thị Parabol có bề lõm quay lên và tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{a}{16}; -\frac{a^2}{32} + b\right)$.

Trường hợp 1. $-\frac{a}{16} \in [0; 1]$.

Để thỏa mãn yêu cầu của bài toán, ta phải có:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{a^2}{32} + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq a + b + 8 \leq 1 \\ -32 \leq -a^2 + 32b \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -32 \leq 32b \leq 32 \\ -32 \leq 32a + 32b + 256 \leq 32 \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -64 \leq a^2 \leq 64 \\ -64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 \leq a \leq 8 \\ a^2 + 32a + 192 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq a \leq 8 \\ -24 \leq a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8.$$

Với $a = -8$ thay vào hệ $\begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq a + b + 8 \leq 1 \\ -32 \leq -a^2 + 32b \leq 32 \end{cases}$, ta được:

$$\begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -32 \leq -64 + 32b \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ 1 \leq b \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1.$$

Thử lại $g(t) = 8t^2 - 8t + 1$ với $t \in [0; 1]$.

$$g'(t) = 16t - 8.$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 16t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$g(0) = 1, g\left(\frac{1}{2}\right) = -1, g(1) = 1.$$

Vậy $\max_{[-1;1]} y = \max_{[0;1]} g(t) = 1$, suy ra $\begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$ thỏa mãn. **Trường hợp 2.** $\begin{cases} -\frac{a}{16} < 0 \\ -\frac{a}{16} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -16 \end{cases}$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta phải có:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq a + b + 8 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq -b \leq 1 \\ -1 \leq a + b + 8 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 \leq a + 8 \leq 2 \Leftrightarrow -10 \leq a \leq -6 \text{ (loại)}.$$

Chọn phương án **D**

□

CÂU 43. Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất

cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là

- A. $(1; 2)$. B. $[1; 2]$. C. $[1; 2)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 &= 0 \iff (\log_2 x + 1)^2 - m\log_2 x - 2\log_2 x + m - 2 = 0 \\ \iff \log_2^2 x - 1 - m\log_2 x + m &= 0 \iff (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1) - m(\log_2 x - 1) = 0 \\ \iff (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1 - m) &= 0 \\ \iff \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m - 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2 \in [1; 2] \\ x = 2^{m-1} \end{cases}. \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 \leq 2^{m-1} \leq 2 \\ 2^{m-1} \neq 2 \end{cases}$

$$\iff 1 \leq 2^{m-1} < 2 \iff 0 \leq m - 1 < 1 \iff 1 \leq m < 2 \text{ hay } m \in [1; 2).$$

Chọn phương án **C** □

Câu 43.1. Cho phương trình $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 1)$

- A. $m > \frac{9}{4}$. B. $0 < m < \frac{1}{4}$. C. $0 < m < \frac{9}{4}$. D. $m > \frac{-9}{4}$.

Lời giải.

Cách 1:

Phương trình đã cho $\iff \log_3^2 3x + \log_3 3x + m - 2 = 0$ (1).

Đặt $t = \log_3 3x$, thì phương trình (1) có dạng $t^2 + t + m - 2 = 0$ (2).

Khi $x \in (0; 1) \Rightarrow 0 < 3x < 3 \iff \log_3 3x < 1 \iff t < 1$.

Yêu cầu đề bài tương đương với tìm tham số m để phương trình (2) có đúng hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 nhỏ hơn 1.

$$\begin{aligned} \iff \begin{cases} \Delta > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 + t_2 - 2 < 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 - 2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 4m + 8 > 0 \\ m - 2 + 1 + 1 > 0 \\ -1 - 2 < 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ m > 0 \end{cases} &\iff 0 < m < \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Vậy $0 < m < \frac{9}{4}$. **Cách 2:**

Phương trình đã cho $\iff \log_3^2 3x + \log_3 3x + m - 2 = 0$ (1).

Đặt $t = \log_3 3x$, thì phương trình (1) có dạng $t^2 + t + m - 2 = 0 \iff t^2 + t = 2 - m$ (2).

Khi $x \in (0; 1) \Rightarrow 0 < 3x < 3 \iff \log_3 3x < 1 \iff t < 1$. Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \in (-\infty; 1)$. Bảng biến thiên của $f(t)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1
y'	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	2

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2 - m$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 1 $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < 2 - m < 2 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$.

Vậy $0 < m < \frac{9}{4}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 43.2. Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 2]$ là

- A. $(1; 2)$. B. $[1; 2]$. C. $[1; 2)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x > 0$.

Đặt $t = \log_2 x$. Với $x \in [1; 2]$ thì $t \in [0; 1]$.

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} (1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = m - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} m - 1 \neq 1 \\ 0 \leq m - 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 2$.

Chọn phương án **C** □

Câu 43.3. Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(2m+1) \cdot 3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{1}{4}; 3\right)$. B. $(3; 9)$. C. $(9; +\infty)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = 3^x$ với $t > 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$ có

$$\Delta' = 4m^2 - 8m + 4 = (2m-2)^2.$$

Theo công thức nghiệm ta có $\begin{cases} t = 3 \\ t = 4m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = 4m - 1. \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m - 1 > 0 \\ 4m - 1 \neq 3 \\ \log_3(4m - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{4} \\ m \neq 1 \\ m = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{5}{2}$.

Chọn phương án **A** □

Câu 43.4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho phương trình $x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m(2^x - 1)$ có hai nghiệm?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. Vô số.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 x \cdot 2^x &= x(x - m + 1) + m(2^x - 1) \\
 \Leftrightarrow x \cdot 2^x - x^2 - x &= m(2^x - 1 - x) \\
 \Leftrightarrow x(2^x - x - 1) &= m(2^x - 1 - x) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ 2^x - x - 1 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x - x - 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right)$

x	$-\infty$	$\log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f \left(\log_2 \left(\frac{1}{\ln 2} \right) \right)$	$+\infty$

Mà $x = 0$; $x = 1$ là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ chỉ có hai nghiệm này.

Vậy phương trình $x \cdot 2^x = x(x - m + 1) + m(2^x - 1)$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Chọn phương án **A** □

Câu 43.5. Cho phương trình $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 3^{2x^2-3x+m} + 9 &= 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m} \\
 \Leftrightarrow 3^{2x^2-3x+m} - 3^{x^2-2x+m} &= 3^{x^2-x+2} - 9 \\
 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x+m} (3^{x^2-x} - 1) &= 9 (3^{x^2-x} - 1) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-2x+m} = 9 \\ 3^{x^2-x} = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m = 2 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m - 2 = 0 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Phương trình $3^{2x^2-3x+m} + 9 = 3^{x^2-x+2} + 3^{x^2-2x+m}$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 0$ và $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - (m - 2) > 0 \\ m - 2 \neq 0 \\ 1 - 2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m < 3 \\ m \neq 2 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-2018; -2017; \dots; 0; 1\}$ nên có 2020 giá trị của tham số m .

Chọn phương án **C** □

Câu 43.6. Tìm m để phương trình $5^{2x^2-6x+2m} - 5^{x^2-2x+2} - 5^{x^2-4x+2m} + 25 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $0 \neq m < 1$.

B. $2 \neq m < 3$.

C. $4 \neq m > 3$.

D. $1 \neq m < 3$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & 5^{2x^2-6x+2m} - 5^{x^2-2x+2} - 5^{x^2-4x+2m} + 25 \\ \Leftrightarrow & 5^{x^2-2x} (5^{x^2-4x+2m} - 5^2) - (5^{x^2-4x+2m} - 5^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (5^{x^2-4x+2m} - 5^2) \cdot (5^{x^2-2x} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 5^{x^2-4x+2m} - 5^2 = 0 \\ 5^{x^2-2x} - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 4x + 2m - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 4x + 2m - 2 = 0 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

phương trình $5^{2x^2-6x+2m} - 5^{x^2-2x+2} - 5^{x^2-4x+2m} + 25 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

phương trình $x^2 - 4x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \neq 0$ và $2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (2m - 2) > 0 \\ 2m - 2 \neq 0 \\ 4 - 8 + 2m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m < 3 \\ m \neq 1 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Vậy $1 \neq m < 3$.

Chọn phương án **D** □

Câu 43.7. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9 \cdot 3^{10-5x} + m$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & m \cdot 3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9 \cdot 3^{10-5x} + m \\
 \Leftrightarrow & m \cdot (3^{x^2-7x+12} - 1) - 3^{2x-x^2} \cdot (3^{x^2-7x+12} - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (m - 3^{2x-x^2}) \cdot (3^{x^2-7x+12} - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} m - 3^{2x-x^2} = 0 \\ 3^{x^2-7x+12} - 1 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3^{2x-x^2} = m \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3^{2x-x^2} = m \\ x = 3 \\ x = 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ta có các trường hợp:

1. $3^{2x-x^2} = m$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 3$ và $x_2 \neq 4$.

Thế $x = 3$ vào phương trình ta có: $m = \frac{1}{27}$.

Thử lại $3^{2x-x^2} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$. Do đó $m = \frac{1}{27}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2. $3^{2x-x^2} = m$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 4$ và $x_2 \neq 3$.

Thế $x = 4$ vào phương trình ta có: $m = 3^{-8}$.

Thử lại $3^{2x-x^2} = 3^{-8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$. Do đó $m = 3^{-8}$ thỏa yêu cầu bài toán.

3. $3^{2x-x^2} = m$ có duy nhất một nghiệm khác 3; 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 3^{-3} \\ m \neq 3^{-8} \\ 1 - \log_3 m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy có tất cả 3 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **C**

□

Câu 43.8. Biết m_0 là giá trị duy nhất của tham số m để phương trình $2^{x^2} \cdot 3^{mx-1} = 6$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_2 81$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $m_0 \in (-7; -2)$. B. $m_0 \in (-2; 5)$. C. $m_0 \in (6; 7)$. D. $m_0 \in (5; 6)$.

Lời giải.

Ta có $2^{x^2} \cdot 3^{mx-1} = 6 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} \cdot 3^{mx-2} = 1$.

Lấy logarit cơ số 2 của hai vế của phương trình ta có: $x^2 - 1 + (mx - 2) \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + m \log_2 3 \cdot x - 2 \log_2 3 - 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = \log_2 81$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \log_2 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \cdot \log_2^2 3 + 8 \log_2 3 + 4 > 0 \\ -m \log_2 3 = \log_2 81 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy $m_0 \in (-7; -2)$.

Chọn phương án **(A)** □

Câu 43.9. Tìm tập hợp tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(0; \frac{5}{2}\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Lời giải.

Đặt $t = 2^x$ khi đó phương trình $4^x - m \cdot 2^x + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình $t^2 - mt + 2m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 20 > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 5 > 0 \\ m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{2} \\ m < 4. \end{cases}$$

Vậy $m \in \left(\frac{5}{2}; 4\right)$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 43.10. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2} (4x + 4y - 4) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$. Tổng các giá trị của S bằng

- A. 33. B. 24. C. 15. D. 5.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2} (4x + 4y - 4) = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2; 2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1; 1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m}$ với $m > 0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

- Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.
- Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 = 24$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 43.11. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(m - 1) \log_{\frac{1}{3}} (x - 3)^2 + 4(m - 5) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x - 3} + 4(m - 1) = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{10}{3}; 6\right]$. Số phần tử của tập S bằng

- A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.

Lời giải.

Cách 1:

$$\text{Ta có } (m-1) \log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2 + 4(m-5) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x-3} + 4(m-1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1) \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 4(m-5) \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 4(m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1) \log_{\frac{1}{3}}^2(x-3) - (m-5) \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + m-1 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) \text{ khi } x \in \left[\frac{10}{3}; 6\right] \Rightarrow t \in [-1; 1].$$

$$\text{Phương trình trở thành: } (m-1)t^2 - (m-5)t + m-1 = 0.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nguyên của m để phương trình $(m-1)t^2 - (m-5)t + m-1 = 0 (*)$ có nghiệm $t \in [-1; 1]$.

$$(*) \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} \text{ có nghiệm } t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \min_{[-1;1]} g(t) \leq m \leq \max_{[-1;1]} g(t).$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}. \text{ Ta có } g'(t) = \frac{4(t^2 - 1)}{(t^2 - t + 1)^2} \leq 0, \forall t \in (-1; 1).$$

Lại có hàm số $g(t)$ liên tục trên $[-1; 1]$.

Suy ra, $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$.

$$\Rightarrow \min_{[-1;1]} g(t) = g(1) = -3; \max_{[-1;1]} g(t) = g(-1) = \frac{7}{3}.$$

$$\Rightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3} \text{ và } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\} \text{ Cách 2:}$$

$$\text{Với điều kiện } x > 3 \text{ thì } (m-1) \log_{\frac{1}{3}}(x-3)^2 + 4(m-5) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x-3} + 4(m-1) = 0 (1).$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1) \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 4(m-5) \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + 4(m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1) \log_{\frac{1}{3}}^2(x-3) - (m-5) \log_{\frac{1}{3}}(x-3) + (m-1) = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \log_{\frac{1}{3}}(x-3), \text{ Khi đó } x \in \left[\frac{10}{3}; 6\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]. \text{ Vậy (1) có nghiệm trên } \left[\frac{10}{3}; 6\right] \Leftrightarrow f(t) = (m-1)t^2 - (m-5)t + (m-1) = 0 (2) \text{ có nghiệm trên } [-1; 1] + \text{ Với } m = 1 (2) \Leftrightarrow t = 0 \in [-1; 1], \text{ vậy } m = 1 \text{ thỏa mãn điều kiện bài toán (3).} + \text{ Với } m \neq 1 (2) \text{ có nghiệm } \Delta = (m-5)^2 - 4(m-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (-m-3)(3m-7) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}.$$

$$\text{Vậy } m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right] \setminus \{1\} \text{ thì (2) có nghiệm.}$$

$$\text{Xét thấy } f(-1) \cdot f(1) = (3m-7)(m+3) \leq 0 \text{ đúng với } \forall m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right] \setminus \{1\}.$$

$$\text{Nên } \forall m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right] \setminus \{1\} \text{ thì (2) luôn có đúng 1 nghiệm } \in [-1; 1] (4).$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } m \in \left[-3; \frac{7}{3}\right] \text{ thì (2) có nghiệm trên } [-1; 1] \Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm trên } \left[\frac{10}{3}; 6\right].$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

$$\text{Vậy có 6 giá trị của } m \text{ để (1) có nghiệm } \left[\frac{10}{3}; 6\right].$$

Chọn phương án 

□

Câu 43.12. Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m (\log_4 x^2 - 3)$, (m là tham số thực). Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc $[8\sqrt{2}; +\infty)$ là $(a; b]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2a + b = 3$.

B. $2a + b = 4$.

C. $2a + b = 0$.

D. $2x + b = 5$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3) (*)$.

Đặt $t = \log_2 x$, khi $x \in [8\sqrt{2}; +\infty) \Rightarrow \log_2 x \geq \frac{7}{2} \Rightarrow t \geq \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Suy ra phương trình $(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ t^2 - 2t - 3 = m^2(t - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m^2 = \frac{t + 1}{t - 3} \end{cases}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t + 1}{t - 3}, t \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = \frac{-4}{(t - 3)^2} < 0, \forall t \geq \frac{7}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
y'		-
y	9	1

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 1 < m^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 5$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 43.13. Tính tổng T các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^x + (m^2 - m)3^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\frac{1}{\log 3}$.

A. $T = 28$.

B. $T = 20$.

C. $T = 21$.

D. $T = 27$.

Lời giải.

$3^x + (m^2 - m)3^{-x} = 2m \Leftrightarrow 3^x + \frac{(m^2 - m)}{3^x} - 2m = 0$.

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$.

$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - m = 0 (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \frac{1}{\log 3} \Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 10$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0 < \frac{S}{2} < 10 \\ P > 0 \\ (t_1 - 10)(t_2 - 10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 < m < 10 \\ m^2 - m > 0 \\ m^2 - 21m + 100 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (0; +\infty) \\ m \in (0; 10) \\ m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ m \in \left(-\infty; \frac{21 - \sqrt{41}}{2}\right) \cup \left(\frac{21 + \sqrt{41}}{2}; +\infty\right) \end{cases}$.

$\Leftrightarrow 1 < m < \frac{21 + \sqrt{41}}{2}$, vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy $T = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$.

Chọn phương án **D**

□

Câu 43.14. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1; 1)$. Số tập con của tập hợp S là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x - m + 3 = 0$ (1).

Đặt $t = 2^x$ khi $x \in (-1; 1) \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$, ta có (1) $\Leftrightarrow t^2 - mt - m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 3}{t + 1}$ (2).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 3}{t + 1}, t \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

$\Rightarrow f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}$. Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$	1	2	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	$\frac{13}{6}$		$\frac{7}{3}$	

$\searrow$
2
 $\nearrow$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1; 1) \Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \Leftrightarrow 2 < m < \frac{13}{6}$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \emptyset$.

Vậy tập S có 1 tập con là chính nó.

Chọn phương án **A** □

Câu 43.15. Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a; b)$. Tổng của $a + b$ bằng

- A. $\frac{10}{3}$. B. 4. C. $\frac{22}{3}$. D. 7.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } \ln(3x - mx + 1) &= \ln(-x^2 + 4x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 > 0 \\ 3x - mx + 1 = -x^2 + 4x - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x^2 - x + 4 = mx \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ m = \frac{x^2 - x + 4}{x} \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ với $1 < x < 3$.

Khi đó $f'(x) = \frac{x^2 - x}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ trên khoảng $(1; 3)$

x	1	2	3
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	4	3	$\frac{10}{3}$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm trên khoảng (1;3).

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (*) có nghiệm trên khoảng (1;3) khi và chỉ khi $3 \leq m < 4$ hay $m \in [3;4)$. Do đó $a = 3, b = 4$.

Vậy $a + b = 7$.

Chọn phương án **D** □

Câu 43.16. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $m^2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) = (2 - m) \ln x - 4$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[1; \sqrt{e}]$?

A. 0.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

$$m^2 \ln\left(\frac{x}{e}\right) = (2 - m) \ln x - 4 \Leftrightarrow (m^2 + m - 2) \ln x = m^2 - 4 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \ln x, x \in [1; \sqrt{e}] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành } (m^2 + m - 2)t = m^2 - 4 \quad (2)$$

$$\text{TH1: } m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Với $m = 1$, phương trình (2) $\Rightarrow 0t = -3$ (vô nghiệm). Do đó $m = 1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Với $m = -2$, phương trình (2) $\Rightarrow 0t = 0$ (nghiệm đúng $\forall t \in \mathbb{R}$). Do đó $m = -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

$$\text{TH2: } m^2 + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ và } m \neq -2.$$

$$\text{Khi đó phương trình (2) trở thành } t = \frac{m^2 - 4}{m^2 + m - 2} = \frac{m - 2}{m - 1}.$$

Phương trình ban đầu có nghiệm thuộc đoạn $[1; \sqrt{e}]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{m - 2}{m - 1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m - 2}{m - 1} \geq 0 \\ \frac{m - 3}{2(m - 1)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [2; 3] \cup \{1\}.$$

Vậy $m \in [2; 3] \cup \{-2; 1\}$ nên có 3 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn phương án **C** □

Câu 43.17. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$2 \log_2 x^4 + \sqrt{2 \log_2 x^8 - 2m + 2020} = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn } [1; 2]. \text{ Số phần tử của } S \text{ là}$$

A. 7.

B. 9.

C. 8.

D. 6.

Lời giải.

Khi $x \in [1; 2]$, ta có $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8 - 2m + 2020} = 0 \Leftrightarrow 4\log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x} + 1010 = m$.

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x}$. Vì $x \in [1; 2] \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0; 1]$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$, với $f(t) = 4t^2 + 2t + 1010$.

Ta có $f'(t) = 8t + 2 > 0, \forall t \in [0; 1]$. Suy ra $\forall t \in [0; 1], 1010 = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = 1016$.

Do vậy $1010 \leq m \leq 1016 \Rightarrow S = \{1010; 1011; \dots; 1016\}$. Vậy số phần tử của S là 7.

Chọn phương án **A** □

Câu 43.18. Cho phương trình $(3x - 5)\log_3^2(x + m) + (9x - 19)\log_3(x + m) = 12$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$.

- A. $\left(-\infty; -\frac{53}{27}\right)$. B. $\left(-\frac{53}{27}; 79\right)$. C. $(-79; +\infty)$. D. $(-\infty; 79)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = (-m; +\infty)$.

Đặt $t = \log_3 x + m$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (3x - 5)t^2 + (9x - 19)t - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & (3x - 5)t^2 + (9x - 15)t - 4t - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & (3x - 5)t(t + 3) - 4(t + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (t + 3)[(3x - 5)t - 4] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} t + 3 = 0 \\ (3x - 5)t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{4}{3x - 5} \end{cases} \text{ (do } x > 2) \end{aligned}$$

Với $t = -3 \Rightarrow \log_3(x + m) = -3 \Leftrightarrow x + m = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = \frac{1}{27} - m$.

$x = \frac{1}{27} - m$ là nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{27} - m > 2 \Leftrightarrow m < -\frac{53}{27}$.

Với $t = \frac{4}{3x - 5} \Rightarrow \log_3(x + m) = \frac{4}{3x - 5} \Leftrightarrow x + m = 3^{\frac{4}{3x - 5}} \Leftrightarrow m = 3^{\frac{4}{3x - 5}} - x$.

Đặt $f(x) = 3^{\frac{4}{3x - 5}} - x$ với $x > 2$. Có $f'(x) = 3^{\frac{4}{3x - 5}} \cdot \frac{12}{(3x - 5)^2} \cdot \ln 3 - 1 < 0, \forall x > 2$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$. Do đó $\forall x > 2, f(x) < f(2) = 79$.

Do vậy phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(2; +\infty)$ khi $m < 79$.

Vậy $m \in (-\infty; 79)$ là giá trị cần tìm.

Chọn phương án **D** □

Câu 43.19. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = m\log_2^2 x - 2\log_2 x + 2m + 1$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc $[1; +\infty)$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. B. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $m\log_2^2 x - 2\log_2 x + 2m + 1 = 0$ (1).

YCBT $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; +\infty)$.

Đặt $t = \log_2 x \geq 0, \forall x \in [1; +\infty)$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow mt^2 - 2t + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2t-1}{t^2+2}$ (2).

Ycvt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có duy nhất một nghiệm $t \in [0; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{2t-1}{t^2+2}$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{-2t^2 + 2t + 4}{(t^2+1)^2}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \notin [0; +\infty) \\ t = 2 \in [0; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra: ycvt $\Leftrightarrow m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Chọn phương án **(D)**

CÂU 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$.

B. $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$.

D. $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải.

Vì $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$ nên $f(x)e^x = (\cos 2x)' = -2\sin 2x$.

Ta có $\int f'(x)e^x dx = \int e^x d(f(x)) = f(x)e^x - \int f(x)d(e^x) = f(x)e^x - \int f(x)e^x dx$.

Mà $f(x)e^x = -2\sin 2x$ do đó $\int f'(x)e^x dx = -2\sin 2x + \int 2\sin 2x dx$.

Vậy $\int f'(x)e^x dx = -2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Chọn phương án **(C)**

Câu 44.1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết $\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Họ nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $2x \cos 2x \ln x + \sin 2x + C$.

B. $2x \sin 2x \ln x - \cos 2x + C$.

C. $2x \cos 2x \ln x - \sin 2x + C$.

D. $-2x \cos 2x \ln x + \sin 2x + C$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $(\sin x)' = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = 2\cos 2x \Rightarrow f(x) = 2x \cos 2x$.

Xét $I = \int f'(x)\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$I = f(x)\ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = 2x \cos 2x \ln x - 2 \int \cos 2x dx = 2x \cos 2x \ln x - \sin 2x + C$.

Chọn phương án **C** □

Câu 44.2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 0$, $F(x) = [f(x)]^{2020}$ là một nguyên hàm của $2020xe^x$. Họ các nguyên hàm của $[f(x)]^{2020}$ là

- A. $2020(x-2)e^x + C$. B. $xe^x + C$. C. $2020(x+2)e^x + C$. D. $(x-2)e^x + C$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = 2020xe^x \Leftrightarrow 2020f'(x)f^{2019}(x) = 2020xe^x \Rightarrow f'(x).f^{2019}(x) = xe^x$.

$$\Rightarrow \int f'(x)[f(x)]^{2019} dx = \int xe^x dx \Leftrightarrow \int [f(x)]^{2019} d[f(x)] = \int xe^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2020}[f(x)]^{2020} = (x-1)e^x + C'.$$

Do $f(1) = 0 \Rightarrow C' = 0$. Do vậy $[f(x)]^{2020} = 2020(x-1)e^x$.

$$\text{Suy ra } I = \int [f(x)]^{2020} dx = \int (x-1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-2)e^x + C.$$

Chọn phương án **D** □

Câu 44.3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 1$, $F(x) = f(x) - e^x - x$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Họ các nguyên hàm của $f(x)$ là

- A. $(x+1)e^x + C$. B. $(x+1)e^x - x + C$. C. $(x+2)e^x - x + C$. D. $(x+1)e^x + x + C$.

Lời giải.

Ta có $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - e^x - 1 = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + 1$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 1 + e^{-x} \Leftrightarrow [e^{-x}f(x)]' = 1 + e^{-x}$$

$$\Rightarrow e^{-x}f(x) = x - e^{-x} + C' \Rightarrow f(x) = xe^x - 1 + C'e^x.$$

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C' = 2 \Rightarrow f(x) = (x+2)e^x - 1$.

$$\text{Do đó } I = \int f(x) dx = \int [(x+2)e^x - 1] dx = \int (x+2)e^x dx - \int dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = (x+2)e^x - \int e^x dx - \int dx = (x+2)e^x - e^x - x + C = (x+1)e^x - x + C.$$

Chọn phương án **B** □

Câu 44.4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

- A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. B. $-2 \sin 2x + \cos 2x + C$.
C. $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$. D. $2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải.

Áp dụng $F'(x) = f(x)$, ta có: $(\cos 2x)' = f(x)e^x \Leftrightarrow -2 \sin 2x = f(x)e^x$.

$$\text{Tính } I = \int f'(x)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = e^x f(x) - \int e^x f(x) dx = -2 \sin 2x + \int 2 \sin 2x dx = -2 \sin 2x - \cos 2x + C.$$

Chọn phương án **C** □

Câu 44.5. Cho $F(x) = \frac{x^2}{4}$ là một nguyên hàm của $\frac{f(x)}{x}$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $\frac{x^2}{2} + \left(\ln x + \frac{1}{2} \right) + C.$

C. $\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2x} \right) + C.$

D. $\frac{x^2}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2x} \right) + C.$

Lời giải.

Ta có $F'(x) = \left(\frac{x^2}{4} \right)' = \frac{x}{2} = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$

Tính $I = \int f'(x) \ln x \, dx.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = f(x) \ln x - \int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Chọn phương án **A** □

Câu 44.6. Cho $F(x) = -x \cdot e^x$ là một nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $2(1-x)e^x + C.$

B. $\frac{1-x}{2}e^x + C.$

C. $(x-1)e^x + C.$

D. $(x-2)e^x + C.$

Lời giải.

Ta có $F'(x) = (-xe^x)' = -(x+1)e^x = f(x)e^{2x}.$

Tính $I = \int f'(x)e^{2x} \, dx.$

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = f(x)e^{2x} - \int 2e^{2x}f(x) \, dx = -(x+1)e^x + 2xe^x + C = (x-1)e^x + C.$

Chọn phương án **C** □

Câu 44.7. Cho $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x|$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{\cos^2 x}$. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f'(x) \tan x$.

A. $\ln |\cos x| + C.$

B. $\ln |\sin x| + C.$

C. $-\ln |\cos x| + C.$

D. $-\ln |\sin x| + C.$

Lời giải.

$F'(x) = (x + \tan x + \ln |\cos x|)' = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x = \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{f(x)}{\cos^2 x} \Rightarrow f(x) = x.$

Tính $I = \int f'(x) \tan x \, dx.$

Đặt $\begin{cases} u = \tan x \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ dv = f'(x) dx \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I = f(x) \tan x - \int \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx = x \tan x - x \tan x - \ln |\cos x| + C = -\ln |\cos x| + C.$

Chọn phương án **C** □

Câu 44.8. Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^2 - 5x + 2) \cdot e^{-x}$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $f[F(0)]$ bằng

A. $-e^{-1}$.

B. $9e$.

C. $20e^2$.

D. $3e$.

Lời giải.Ta có $F'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
& F'(x) = f(x) \\
& \Leftrightarrow [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x} = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x} \\
& \Leftrightarrow -ax^2 + (2a - b)x + b - c = 2x^2 - 5x + 2 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = -5 \\ b - c = 2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Do đó :

$$F(x) = (-2x^2 + x + 1)e^{-x} \text{ và } f(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x}.$$

Suy ra : $F(0) = -1$ Vậy $f(-1) = 9e$.Chọn phương án **(B)** □**Câu 44.9.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$, $F(x) = f(x)e^{3x}$ là một nguyên hàm của $e^{3x}[6f(x) + 2xe^{3x}]$. Họ các nguyên hàm của $f(x)$ là

A. $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$.

B. $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x} + C$.

C. $\frac{1}{3}x^2e^{3x} + \frac{1}{9}xe^{3x} + \frac{1}{27}e^{3x} + C$.

D. $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{1}{9}xe^{3x} + \frac{1}{27}e^{3x} + C$.

Lời giải.Ta có $F'(x) = e^{3x}[6f(x) + 2xe^{3x}] \Leftrightarrow f'(x)e^{3x} + 3f(x)e^{3x} = 6e^{3x}f(x) + 2xe^{6x}$.

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{3x} - 3f(x)e^{3x} = xe^{6x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)e^{3x} + 3f(x)e^{3x}}{(e^{3x})^2} = x \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^{3x}} \right]' = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{e^{3x}} = x^2 + C'$$

Do $f(0) = 0 \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow f(x) = x^2e^{3x}$. Do đó $I = \int f(x) dx = \int x^2e^{3x} dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = x^2 \\ dv_1 = e^{3x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = 2x dx \\ v_1 = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3} \int xe^{3x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_2 = x \\ dv_2 = e^{3x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_2 = dx \\ v_2 = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx \right) = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C \right) \\
&= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C
\end{aligned}$$

Chọn phương án **(A)** □

CÂU 45. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$
		-2			-2		

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Lời giải.

Ta có $2f(\sin x) + 3 = 0 \iff f(\sin x) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

$$\text{Ta có: } f(x) = -\frac{3}{2} \iff \begin{cases} x = x_1 \text{ (với } x_1 < -1) \\ x = x_2 \text{ (với } -1 < x_2 < 0) \\ x = x_3 \text{ (với } 0 < x_3 < 1) \\ x = x_4 \text{ (với } x_4 > 1) \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } f(\sin x) = -\frac{3}{2} \iff \begin{cases} \sin x = x_1 \text{ (với } x_1 < -1) \\ \sin x = x_2 \text{ (với } -1 < x_2 < 0) \\ \sin x = x_3 \text{ (với } 0 < x_3 < 1) \\ \sin x = x_4 \text{ (với } x_4 > 1) \end{cases}.$$

+) Các trường hợp: $\sin x = x_1$, $\sin x = x_4$ vô nghiệm do $x_1 < -1$, $x_4 > 1$.

+) Do $-1 < x_2 < 0$ nên tồn tại góc α với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ sao cho $\sin \alpha = x_2$.

$$\text{Khi đó: } \sin x = x_2 \iff \sin x = \sin \alpha \iff \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z}).$$

Theo đầu bài, ta lấy nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $-\pi \leq \alpha + k2\pi \leq 2\pi$ hoặc $-\pi \leq \pi - \alpha + m2\pi \leq 2\pi$, với $k, m \in \mathbb{Z}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Suy ra $k = 0, k = 1$; $m = -1, m = 0$.

Do đó, $\sin x = x_2$ có 4 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

+) Tương tự, do $0 < x_3 < 1$ nên tồn tại góc β với $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ sao cho $\sin \beta = x_3$.

$$\text{Khi đó: } \sin x = x_3 \iff \sin x = \sin \beta \iff \begin{cases} x = \beta + n2\pi \\ x = \pi - \beta + l2\pi \end{cases} \quad (n, l \in \mathbb{Z}).$$

Theo đầu bài, ta lấy nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $-\pi \leq \beta + n2\pi \leq 2\pi$ hoặc $-\pi \leq \pi - \beta + l2\pi \leq 2\pi$ với $n, l \in \mathbb{Z}$ và $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Suy ra $n = 0$; $l = 0$.

Do đó, $\sin x = x_3$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Vậy, phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 45.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	-1	1	-1	-3	-1	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$ của phương trình $2f(2\cos x + 1) + 3 = 0$ là
 A. 6. B. 7. C. 11. D. 12.

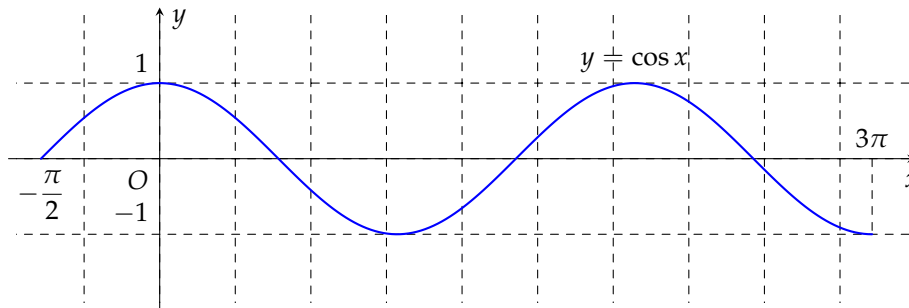
Lời giải.

Ta có $2f(2\cos x + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(2\cos x + 1) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$f(2\cos x + 1) = -\frac{3}{2} \in (-3; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x + 1 = m \in (-\infty; -2) \\ 2\cos x + 1 = n \in (0; 1) \\ 2\cos x + 1 = p \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{m-1}{2} \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \\ \cos x = \frac{n-1}{2} \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \\ \cos x = \frac{p-1}{2} \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

Ta có đồ thị hàm số $y = \cos x$ trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$



Dựa vào đồ thị ta suy ra (1) vô nghiệm, (2) có 3 nghiệm phân biệt, (3) có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thỏa ycbt.

Chọn phương án **(B)**

Câu 45.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$	
		-2		-4		

Số nghiệm của phương trình $|f[f(x)]| = 2$ là

A. 4. B. 5. C. 7. D. 9.

Lời giải.

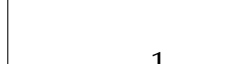
$$\text{Ta có: } |f[f(x)]| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f[f(x)] = 2 \\ f[f(x)] = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a < -4 \\ f(x) = b > 3 \\ f(x) = -4 \\ f(x) = c \in (1; 3) \\ f(x) = d > 3 \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5)$$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra các phương trình (2) và (5) có 2 nghiệm, phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (3) có 1 nghiệm, phương trình (4) có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tổng cộng 7 nghiệm.

Chọn phương án **(C)**

Câu 45.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2f(x) + m|) = 1$ có đúng 2 nghiệm trên $[-1; 1]$?

A. 13.

B. 9.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(|2f(x) + m|) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |2f(x) + m| = -1 \text{ (VN)} \\ |2f(x) + m| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(x) + m = 2 \\ 2f(x) + m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{2-m}{2} \\ f(x) = \frac{-2-m}{2} \end{cases}$$

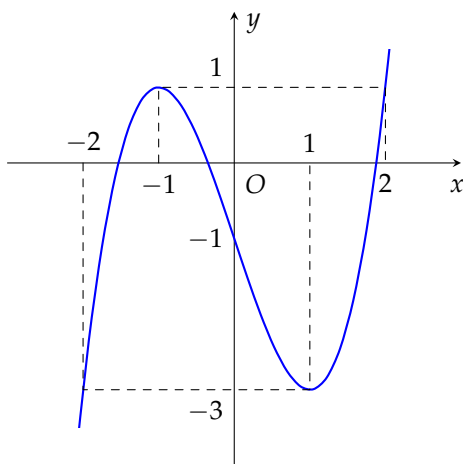
$$\text{Dựa vào BBT ta suy ra: ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq \frac{2-m}{2} \leq 1 \\ -3 \leq \frac{-2-m}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 8 \\ -4 \leq m \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa ycbt.

Chọn phương án **D**

□

Câu 45.4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f[f(x) + m] + 1 = f(x) + m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $[-1; 1]$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f[f(x) + m] + 1 = f(x) + m \Leftrightarrow f(t) = t - 1 \text{ với } t = f(x) + m.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -m - 2 \\ f(x) = -m \\ f(x) = -m + 2 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị trên } [-1; 1], \text{ ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq -m - 2 \leq 1 \\ -3 \leq -m \leq 1 \\ -3 \leq -m + 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 1 \\ -1 \leq m \leq 3 \\ 1 \leq m \leq 5 \end{cases} \Rightarrow m = 1. \text{ Vậy có 1 giá trị}$$

nguyên của m thỏa ycbt.

Chọn phương án **A**

□

CÂU 46. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

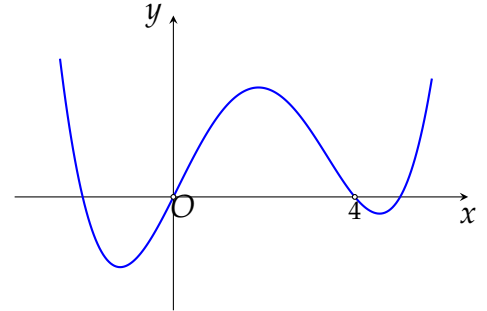
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.



Lời giải.

$$\text{Dựa vào đồ thị } y = f(x) \text{ ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 0) \\ x = b \in (0; 4) \\ x = c \in (4; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = (3x^2 + 6x) f'(x^3 + 3x^2).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a \in (-\infty; 0) \quad (1) \\ x^3 + 3x^2 = b \in (0; 4) \quad (2) \\ x^3 + 3x^2 = c \in (4; +\infty) \quad (3) \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số: } h(x) = x^3 + 3x^2$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 3x^2 + 6x, h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta có Phương trình (1) có một nghiệm.

Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.

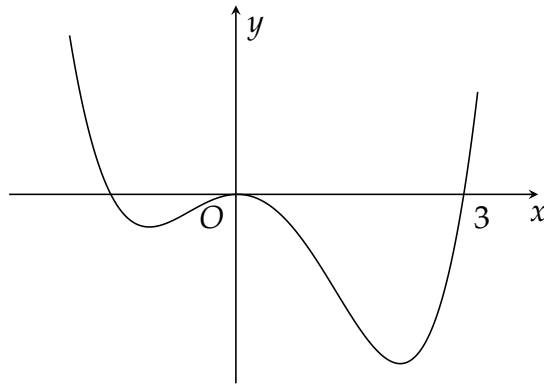
Phương trình (3) có một nghiệm.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Chọn phương án **C**

□

Câu 46.1. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2)$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 9.

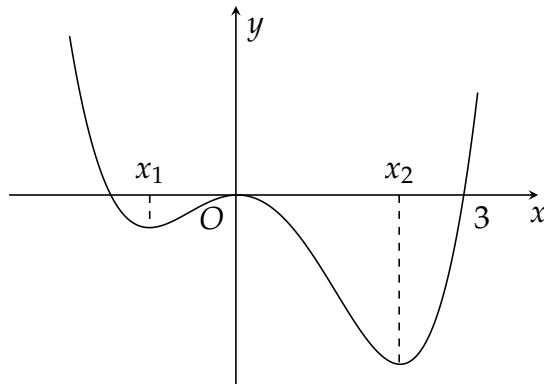
Lời giải.

Xét hàm số $u = x^3 - 3x^2$ có bảng biến thiên như sau:

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x) f'(x^3 - 3x^2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \\ f'(x^3 - 3x^2) = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	



Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có:

$$f'(x^3 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 = 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2 = x_1 \in (-3; 0) & (2) \\ x^3 - 3x^2 = x_2 \in (1; 3) & (3) \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $u = x^3 - 3x^2$ ta thấy:

(1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó $x = 0$ là nghiệm kép.

(2) có 3 nghiệm phân biệt khác nhau với các nghiệm trên.

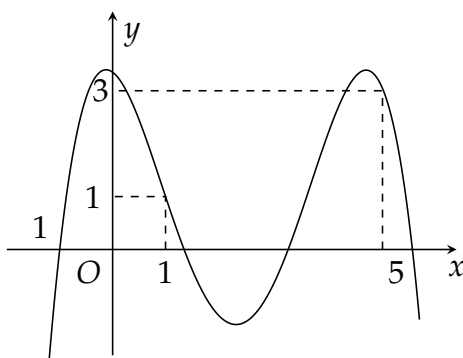
(3) có nghiệm duy nhất khác với tất cả các nghiệm trên.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này (trong đó $x = 0$ là nghiệm bội 3) nên hàm số $g(x)$ có 7 cực trị.

Chọn phương án **C**

□

Câu 46.2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



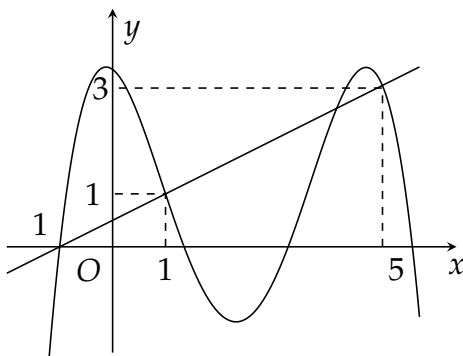
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 8f(x^3 - 3x + 3) - (2x^6 - 12x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 48x + 1)$ là 5 3 7 9

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= 8(3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 3) - (12x^5 - 48x^3 + 48x^2 + 36x - 48) \\ &= 24(x^2 - 1) \left[f'(x^3 - 3x + 3) - \frac{(x^3 - 3x + 2) + 1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ f'(x^3 - 3x + 3) = \frac{(x^3 - 3x + 3) + 1}{2} \quad (*) \end{cases}$$



Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có: Đặt: $x^3 - 3x + 3 = t$. Phương trình (*) trở thành: $f'(t) = \frac{t+1}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

+ Với $t = -1$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = -1$ (phương trình này có 1 nghiệm không nguyên).

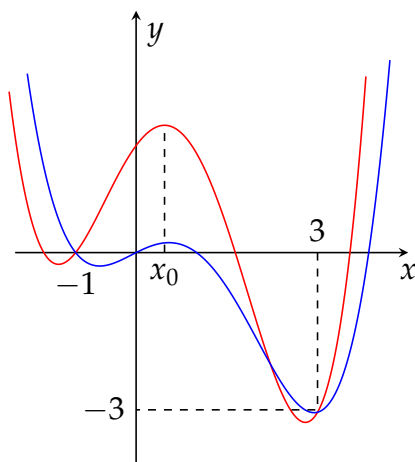
+ Với $t = 1$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$, trong đó $x = 1$ là nghiệm bội hai.

+ Với $t = 5$ ta có: $x^3 - 3x + 3 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$, trong đó $x = -1$ là nghiệm bội hai.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này (trong đó $x = \pm 1$ là nghiệm bội 3) nên hàm số $g(x)$ có 5 cực trị.

Chọn phương án **D**

Câu 46.3. Cho hai hàm số bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các đồ thị như hình dưới đây (2 đồ thị chỉ có đ 3 điểm chung)



Số điểm cực trị của hàm số $h(x) = f^2(x) + g^2(x) - 2f(x).g(x)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

Ta có: $h(x) = [f(x) - g(x)]^2 \Rightarrow h'(x) = 2[f(x) - g(x)] \cdot [f'(x) - g'(x)]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = 0 & (1) \\ f'(x) - g'(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x = -1; x = x_1 \in (-1; 3); x = 3$ và đa thức $f(x) - g(x)$ đổi dấu khia qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là các nghiệm bội lẻ của (1). Mà $f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc 4 nên bậc của phương trình (1) nhỏ hơn hoặc bằng 4. Từ đó suy ra phương trình (1) là phương trình bậc 3.

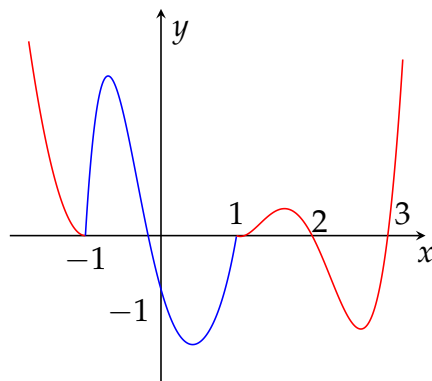
Do phương trình (1) là phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình (1).

Suy ra $h'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt $h'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này nên hàm số $h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn phương án **A**

□

Câu 46.4. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Trong hình vẽ dưới đây, gồm đồ thị $y = f(x)$ trên $(-\infty; -1]$ và $[1; +\infty)$ (đậm hơn), đồ thị $y = f(x)$ trên $[-1; 1]$. Biết $\max_{[-1; 1]} f(x) > 1$



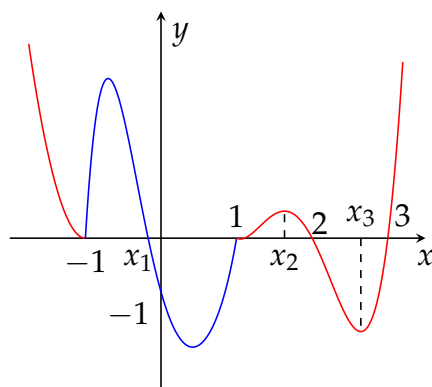
A. 9.

B. 7.

C. 13.

D. 11.

Lời giải.



Dựa vào đồ thị ta có bảng biến sau:

x	$-\infty$	-1	x_1	1	x_2	2	x_3	3	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$								$+\infty$

Chú ý rằng:

$$\begin{cases} \max_{[-1;1]} f(x) = f(x_1) > 1 \\ f(x_2) \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ \min f(x) = f(x_3) > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) + 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x) + 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + 2 = -1 & (3) \\ f(x) + 2 = x_1 \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) & (4) \\ f(x) + 2 = 1 & (5) \\ f(x) + 2 = x_2 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) & (6) \\ f(x) = 2 = x_3 \in \left(\frac{5}{2}; 3\right) & (7) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị và bảng biến ta có:

(3) và (4) vô nghiệm.

(5) $\Leftrightarrow f(x) = -1$ có 2 nghiệm phân biệt.

(6) $\Leftrightarrow f(x) = x_2 - 2 \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ có 2 nghiệm phân biệt.

(7) $\Leftrightarrow f(x) = x_3 - 2 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra $g'(x)$ có 13 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này nên hàm số $g(x)$ có 13 điểm cực trị.

Chọn phương án **C** □

CÂU 47. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$?

A. 2019 .

B. 6 .

C. 2020 .

D. 4 .

Lời giải.

Ta có $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y \Leftrightarrow [1 + \log_3(x+1)] + x = 2y + 3^{2y}$
 $\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = 2y + 3^{2y} \Leftrightarrow \log_3(x+1) + 3^{\log_3(x+1)} = 2y + 3^{2y} (*)$.

Xét hàm $f(t) = t + 3^t$.

Ta có $f'(t) = 1 + 3^t \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow f[\log_3(x+1)] = f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 9^y (**)$.

Vì $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq 9^y \leq 2021 \Rightarrow 0 \leq y \leq \log_9 2021 \approx 3,464$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Với $y = 0 \Rightarrow x = 0; y = 1 \Rightarrow x = 8; y = 2 \Rightarrow x = 80; y = 3 \Rightarrow x = 728$.

Vậy có 4 cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn.

Chọn phương án **D** □

Câu 47.1. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Biết $0 \leq x \leq 2018$, số cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)} + \log_2(x+1) = 2^{3y} + 3y$ (1)

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0$. Nên (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x = 2^{3y} - 1$.

Với $0 \leq x \leq 2018 \Leftrightarrow 1 \leq 8^y \leq 2019 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_8 2019$, Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Chọn phương án **C** □

Câu 47.2. Cho phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 3.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \in \mathbb{R}$.

Xét phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2^{-2|x-m|+1} \cdot \log_{\sqrt{2}} \left[\left(x^2 - 2x + 1 \right) + 2 \right] = 2^{-(x^2-2x+1)} \cdot \log_2(2|x-m|+2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1} \cdot \log_{\sqrt{2}} \left[\left(x^2 - 2x + 1 \right) + 2 \right] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m|+2) \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(t) = 2^t \log_2(t+2), t \geq 2$.

Ta có: $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \cdot \frac{1}{(t+2) \ln 2} > 0 \forall t \geq 0$.

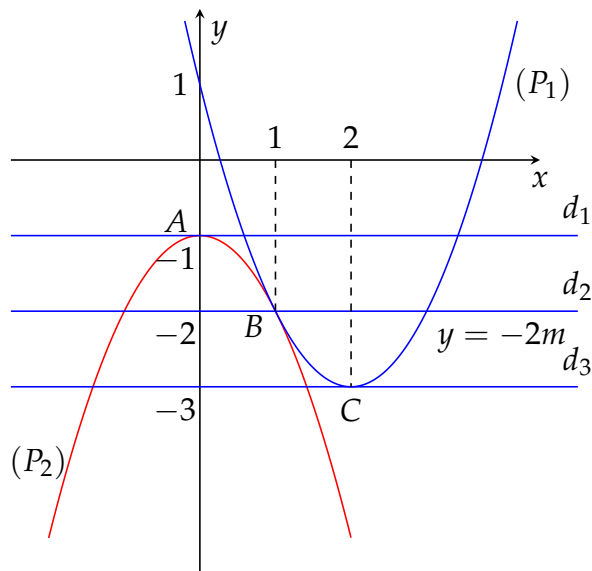
Mà $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Phương trình (2) có dạng $f(x^2 - 2x + 1) = f(2|x - m|)$ và $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$; $2|x - m| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó (2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x - m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x - m) \\ x^2 - 2x + 1 = 2(m - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = -2m & (*) \\ -x^2 - 1 = -2m & (**) \end{cases}$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Dựng các Parabol: $y = x^2 - 4x + 1 (P_1)$ và $y = -x^2 - 1 (P_2)$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ



Số lượng nghiệm của (*) và (**) bằng số giao điểm của đường thẳng $d : y = -2m$ lần lượt với các đồ thị (P_1) và (P_2) . Dựa vào đồ thị có thể thấy phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt thì d phải nằm ở các vị trí của d_1, d_2, d_3 .

Tương ứng khi đó

$$-2m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$-2m = -2 \Leftrightarrow m = 1$$

$$-2m = -3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Do đó có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu: $m = \frac{1}{2}; m = 1; m = \frac{3}{2}$.

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}.$$

Chọn phương án **A**

□

Câu 47.3. Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(x + m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x > -\frac{m}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \log_2(2x+m) - 2\log_2 x &= x^2 - 4x - 2m - 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(x+m) - 2\log_2 x &= x^2 - 2(x+2m) - 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x+m) + 2(x+2m) + 1 &= \log_2 x^2 + x^2 \\ \Leftrightarrow \log_2(2x+m) + 2(x+2m) &= \log_2 x^2 + x^2 \\ \Leftrightarrow f(u) &= f(v) \end{aligned}$$

Xét $f(u) = \log_2 u + u$, ($u > 0$); ta có: $f'(u) = \frac{1}{u \ln 2} + 1 > 0$. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x$, ($x > 0$).

x	0	2	$+\infty$
y'	—	0	+
y	0	-4	$-\infty$

Phương trình có 2 nghiệm dương khi $-4 < 2m < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0$ suy ra có 1 giá trị nguyên.

Chọn phương án **C**

Câu 47.4. Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4} (a + \sqrt{b})$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a + b$.

A. $a + b = 13$. B. $a + b = 11$. C. $a + b = 16$. D. $a + b = 14$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0, n \neq 0$.

Ta có: $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 - 4x + 1 = \log_7(2x) + 2x$.

Xét hàm số $f(t) = \log_7 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \forall t > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó ta có: $4x^2 - 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}$.

$x_1 + 2x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4} (9 + \sqrt{5})$ hoặc $x_1 + 2x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} + 2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{4} (9 - \sqrt{5})$.

Vậy $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$. Do đó $a = 9; b = 5$ và $a + b = 9 + 5 = 14$.

Chọn phương án **C**

Câu 47.5. Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $T = 2a + b$.

A. 3. B. 8. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Ta có: $\log_5 \frac{2\sqrt{x} + 1}{x} = 2\log_2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right)$ (1)

Điều kiện xác định: $x > 1$.

$$(1) \Leftrightarrow \log_5 2\sqrt{x} + 1 + 2\log_3 2\sqrt{x} = \log_5 x + 2\log_3(x-1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5 t + 2\log_3 t - 1$ với $t > 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + \frac{2}{(t-1) \ln 3} > 0$ với $t > 1$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Từ (*) ta có $f(2\sqrt{x} + 1) = f(x)$ nên suy ra $2\sqrt{x} + 1 = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2}$ (do $x > 1$).

Suy ra $x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3; b = 2 \Rightarrow 2a + b = 8$.

Chọn phương án **(B)** □

CÂU 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x$,

$\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{17}{20}$.

B. $-\frac{13}{4}$.

C. $\frac{17}{4}$.

D. -1 .

Lời giải.

$$+ \text{Ta có } xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 xf(1-x^2) dx = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{17}{24} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f(x^3) dx + \int_0^1 xf(1-x^2) dx = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(1-x^2) d(1-x^2) = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_1^0 f(x) dx = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = -\frac{13}{4}$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 48.1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $xf(x^2) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2, \forall x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Giá trị của $\int_1^2 f(x) dx$ nằm trong khoảng nào?

A. $(5; 6)$.

B. $(3; 4)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & xf(x^2) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 \Rightarrow & \int_1^2 [xf(x^2) - f(2x)] \, dx = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{2x} - 2 \right) \, dx \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2} \int_1^2 f(x^2) \, d(x^2) - \frac{1}{2} \int_1^2 f(2x) \, d(2x) = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \ln |x| - 2x \right) \Big|_1^2 \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2} \int_1^4 f(x) \, d(x) - \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) \, d(x) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \\
 \Rightarrow & \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) \, d(x) = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \\
 \Rightarrow & \int_1^2 f(x) \, d(x) = \frac{7}{2} - \ln 2.
 \end{aligned}$$

Vậy $\int_1^2 f(x) \, d(x) = \frac{7}{2} - \ln 2 \in (2; 3)$.

Chọn phương án **D** □

Câu 48.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 4]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf(x^2) + 6f(2x) = \sqrt{4 - x^2}, \forall x \in [0; 2]$. Giá trị $\int_0^4 f(x) \, dx$ bằng

- A. $\frac{\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{20}$. D. $\frac{\pi}{10}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & 4xf(x^2) + 6f(2x) = \sqrt{4 - x^2} - \forall x \in [0; 2] \\
 \Rightarrow & \int_0^2 [4xf(x^2) + 6f(2x)] \, dx = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx \\
 \Rightarrow & 2 \int_0^2 f(x^2) \, d(x^2) + 3 \int_0^2 f(2x) \, d(2x) = \pi \\
 \Rightarrow & 2 \int_0^4 f(x) \, d(x) + 3 \int_0^4 f(x) \, d(x) = \pi \\
 \Rightarrow & \int_0^4 f(x) \, d(x) = \frac{\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

Vậy $\int_0^4 f(x) \, d(x) = \frac{\pi}{5}$.

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 48.3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 x \cdot f'(x) dx = -\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $8a - 3b$ là

A. 1. B. 0. C. 16. D. 2.

Lời giải.

Từ $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$ thay x bởi $1-x$ ta được $5f(1-x) - 7f(x) = 3(x^2 - 1)$.

Do đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x) \\ 5f(1-x) - 7f(x) = 3(x^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow 25f(x) - 49f(x) = 15(x^2 - 2x) + 21(x^2 - 1)$$

Do đó $-24f(x) = 36x^2 - 30x - 21 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Suy ra $f'(x) = -3x + \frac{5}{4}$.

Do đó $\int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 \left(-3x^2 + \frac{5}{4}x\right) dx = -\frac{3}{8} = \frac{a}{b}$.

Vậy $a = 3$ và $b = 8$, nên $8a - 3b = 0$.

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 48.4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f\left(\frac{2}{3x}\right) = 5x, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. Tính phân $\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x \cdot f'(x) dx$ bằng

A. $\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. C. $-\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$. D. $-\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Cách 1:

Từ $2f(x) + 3f\left(\frac{2}{3x}\right) = 5x$ ta thế x bởi $\frac{2}{3x}$ ta được $2f\left(\frac{2}{3x}\right) + 3f(x) = \frac{10}{3x}$.

Do đó $4f(x) - 9f(x) = 10x - \frac{10}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} - 2x \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 2$.

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x \cdot f'(x) dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{-2}{x^2} - 2\right) \ln x dx = -\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2}.$$

Cách 2:

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x \cdot f'(x) dx = f(x) \ln x \Big|_{\frac{2}{3}}^1 - \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{f(x)}{x} dx$$

Từ $2f(x) + 3f\left(\frac{2}{3x}\right) = 5x, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ thay $x = 1$ và $x = \frac{2}{3}$ vào ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2f(1) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \\ 3f(1) + 2f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Xét $I = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{f(x)}{x} dx$

Đặt $x = \frac{2}{3t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{3t^2} dt$.

Khi đó $I = -\frac{2}{3} \int_1^{\frac{2}{3}} \frac{f\left(\frac{2}{3t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}}{\frac{2}{3t}} dt = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{f\left(\frac{2}{3x}\right)}{x} dx$.

Ta có: $2I + 3I = 2 \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{f(x)}{x} dx + 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{f\left(\frac{2}{3x}\right)}{x} dx \Rightarrow 5I = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{2f(x) + 3f\left(\frac{2}{3x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 5 dx = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$I = \frac{1}{3}$.

Vậy $\int_{\frac{2}{3}}^1 \ln x \cdot f'(x) dx = f(x) \ln x \Big|_{\frac{2}{3}}^1 - \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = -\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 48.5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = 2x^2 - 2x + 1, \forall x \in [0; 1]$. Giá trị của $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) + f(1-x) = 2x^2 - 2x + 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x + 1) dx$$

$$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow I + \int_0^1 f(1-x) dx = \frac{2}{3}.$$

Xét $\int_0^1 f(1-x) dx$, đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$.

Ta có $\int_0^1 f(1-x) dx = -\int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = I$.

Vậy $2I = \frac{2}{3} \Leftrightarrow I = \frac{1}{3}$.

Chọn phương án **(D)** □

Câu 48.6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2f(\pi - x) = (x + 1) \sin x, (\forall x \in \mathbb{R})$.

Tích phân $\int_0^\pi f(x) dx$ bằng

A. $1 + \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{2 + \pi}{3}$.

C. $2 + \pi$.

D. 0.

Lời giải.

Thay $x = \pi - x$ ta được

$$f(\pi - x) + 2f(x) = (\pi - x + 1) \sin(\pi - x) \Leftrightarrow 2f(x) + f(\pi - x) = (\pi - x + 1) \sin x.$$

Ta có
$$\begin{cases} f(x) + 2f(\pi - x) = (\pi - x + 1) \sin x \\ 2f(x) + f(\pi - x) = (x + 1) \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3f(x) = (2\pi - 3x + 1) \sin x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2\pi - 3x + 1}{3} \sin x$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi f(x) dx = \left(\frac{2\pi + 1}{3} x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{2 + \pi}{3}.$$

Chọn phương án **B**

□

Câu 48.7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + 3xf(x^2) = 3x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{16}{3}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{11}{6}$.

Lời giải.

- Lấy tích phân hai vế từ -1 đến 1 ta được

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 3xf(x^2) dx &= \int_{-1}^1 (3x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1) dx \\ \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{3}{2} \int_1^1 f(t) dt &= \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

- Lấy tích phân hai vế từ -1 đến 0 ta được

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_{-1}^0 3xf(x^2) dx = \int_{-1}^0 (3x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1) dx \\
 \Leftrightarrow & \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{3}{2} \int_1^0 f(t) dt = \frac{7}{12} \\
 \Leftrightarrow & \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{3}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{7}{12} \\
 \Leftrightarrow & \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 f(t) dt - \int_{-1}^0 f(t) dt \right) = \frac{7}{12} \\
 \Leftrightarrow & \frac{5}{2} \int_{-1}^0 f(x) dx - 4 = \frac{7}{12} \\
 \Leftrightarrow & \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{11}{6}.
 \end{aligned}$$

□

Câu 48.8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(\pi - x) = (x - 1) \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $\int_0^\pi f(x) dx$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $-\frac{2}{5}$.

C. $-\frac{3}{5}$.

D. $-\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$\int_0^\pi f(\pi - x) dx = \int_0^\pi f(\pi - x) \frac{d(\pi - x)}{-1} = - \int_\pi^0 f(t) dt = \int_0^\pi f(t) dt = \int_0^\pi f(x) dx.$$

Khi đó từ $2f(x) + 3f(\pi - x) = (x - 1) \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ lấy tích phân hai vế ta được

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi (2f(x) + 3f(\pi - x)) dx = \int_0^\pi (x - 1) \cos x dx \\
 \Leftrightarrow & 2 \int_0^\pi f(x) dx + 3 \int_0^\pi f(\pi - x) dx = \int_0^\pi (x - 1) \cos x dx \\
 \Leftrightarrow & \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{5} \int_0^\pi (x - 1) \cos x dx.
 \end{aligned}$$

Ta có

$$\int_0^\pi (x - 1) \cos x dx = (x - 1) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = (x - 1) \sin x \Big|_0^\pi + \cos x \Big|_0^\pi = -2.$$

Vậy $\int_0^{\pi} f(x) dx = -\frac{2}{5}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 48.9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}, \forall x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{8}$.

C. $\frac{\pi}{12}$.

D. $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

Xét $x \in [0; 1]$. Ta có

$$2f(x) - f(1-x) = \sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Thay x bởi $1-x$, ta được

$$2f(1-x) - f(x) = \sqrt{2x-x^2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2x-x^2}.$$

Vậy

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2x-x^2} \right) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn phương án **(A)** □

Câu 48.10. Cho $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[0; 4]$ thỏa mãn $f(x) + f(4-x) = -x^2 + 4x$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx$ bằng

A. 32.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. 16.

Lời giải.

Trong tích phân I , ta đặt $t = 4-x \Rightarrow dt = -dx$.

Với $x = 0 \Rightarrow t = 4$; với $x = 4 \Rightarrow t = 0$.

Tích phân trở thành $I = \int_4^0 f(4-t)(-dt)$. Hay $I = \int_0^4 f(4-x) dx$.

$$\text{Từ đó suy ra } I + I = \int_0^4 (f(x) + f(4-x)) dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Vậy $I = \frac{16}{3}$.

Chọn phương án **(B)** □

Câu 48.11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0; 1]$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{4} + 2 \ln 2$.

B. $I = 3 + \ln 2$.

C. $I = \frac{3}{4} + \ln 2$.

D. $I = \frac{3}{2} + 2 \ln 2$.

Lời giải.

Đặt $t = 1 - x$, ta có $dt = -dx$. Đổi cận, ta được $I = - \int_1^0 f(1-t) dt = \int_0^1 f(1-x) dx$.

$$\text{Do vậy } 2I = \int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x+1| \right] \Big|_0^1 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2.$$

Vậy $I = \frac{3}{4} + \ln 2$.

Chọn phương án **C**

□

Câu 48.12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$.

A. $1 - \frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} - 1$.

C. $1 + \frac{\pi}{4}$.

D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$. (1)

Thay x bởi $-x$ ta được: $3f(x) - 2f(-x) = \tan^2(-x) = \tan^2 x$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = \tan^2 x$. Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \tan^2 x) - 1] dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = 2(\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **D**

□

Câu 48.13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) + f(-x) = \cos^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

A. $I = \frac{\pi}{2} + 2 \ln 2$.

B. $I = \frac{\pi}{4}$.

C. $I = \frac{3\pi}{4}$.

D. $I = \frac{\pi}{4} + \ln 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$, khi $x = -\frac{\pi}{2}$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(-t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(-x) + f(x)] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Chọn phương án **(B)**

□

Câu 48.14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x^3 + x - 1) + f(-x^3 - x - 1) = -6x^6 - 12x^4 - 6x^2 - 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giá trị của $\int_{-3}^1 f(x) dx$ bằng

A. 32.

B. 4.

C. -36.

D. -20.

Lời giải.

Đặt $a = x^3 + x - 1$, khi đó ta có $f(a) + f(-a - 2) = -6(a + 1)^2 - 2$. Hàm số $f(a)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Từ đó

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-3}^1 f(a) da + \int_{-3}^1 f(-a - 2) da &= \int_{-3}^1 (-6(a + 1)^2 - 2) da \\ \Rightarrow I + \int_{-3}^1 f(-a - 2) da &= -40. \end{aligned}$$

Xét $\int_{-3}^1 f(-a - 2) da$, đặt $t = -a - 2 \Rightarrow dt = -da$.

$$\text{Ta có } \int_{-3}^1 f(-a - 2) da = - \int_1^{-3} f(t) dt = \int_{-3}^1 f(a) da = I.$$

$$\text{Vậy } 2I = -40 \Leftrightarrow I = -20.$$

Chọn phương án **(D)**

□

CÂU 49. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3 .

B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{2}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải.

- Gọi I và H lần lượt là trung điểm của SA và BC . Theo giả thiết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$ nên điểm I cách đều 4 điểm S, A, B, C , suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- Mặt khác, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , suy ra IH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó $IH \perp (ABC)$.

- Ngoài ra, tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$; $AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$ và $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Đặt $IH = x, x > 0$.

- Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $H(0; 0; 0), A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), I(0; 0; x)$.

Do I là trung điểm của SA nên ta có $S\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 2x\right)$. - Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), \overrightarrow{AS} = \left(-a\sqrt{2}; 0; 2x\right)$, suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB) là $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}] = (ax\sqrt{2}; ax\sqrt{2}; a^2)$.

- Ta có $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), \overrightarrow{CS} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 2x\right)$, suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CS}] = (ax\sqrt{2}; -ax\sqrt{2}; a^2)$.

Theo giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng 60° nên ta có

$$\cos 60^\circ = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2a^2x^2 - 2a^2x^2 + a^4|}{\sqrt{2a^2x^2 + 2a^2x^2 + a^4} \cdot \sqrt{2a^2x^2 + 2a^2x^2 + a^4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^4}{2a^2x^2 + 2a^2x^2 + a^4} \Leftrightarrow 4a^2x^2 + a^4 = 2a^4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \text{ (do } x, a > 0 \text{)}.$$

Khi đó $d(S, (ABC)) = 2d(I, (ABC)) = 2.IH = 2x = a$; $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot d(S, (ABC)) \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$ (đvtt).

Chọn phương án **D**

□

Câu 49.1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = 5a$; $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SBA) bằng α với $\cos \alpha = \frac{9}{16}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{50a^3}{3}$.

B. $\frac{125\sqrt{7}a^3}{9}$.

C. $\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$.

D. $\frac{50a^3}{9}$.

Lời giải.

Ta có hai tam giác vuông $\triangle ASB$ và $\triangle SBC$ bằng nhau.

Kẻ $AI \perp SB \Rightarrow CI \perp SB$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là góc giữa hai đường thẳng AI và CI suy ra $(AI; CI) = \alpha$.

Do $AC = 5\sqrt{2}a$, $\triangle AIC$ cân tại I nên ta có:

$$\frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = \cos \widehat{AIC} \Leftrightarrow \frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow AI^2 = 16a^2 \Rightarrow AI = 4a.$$

Dựng $(SD) \perp (ABC)$ tại D . Ta có $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$.

Tương tự $BC \perp CD$.

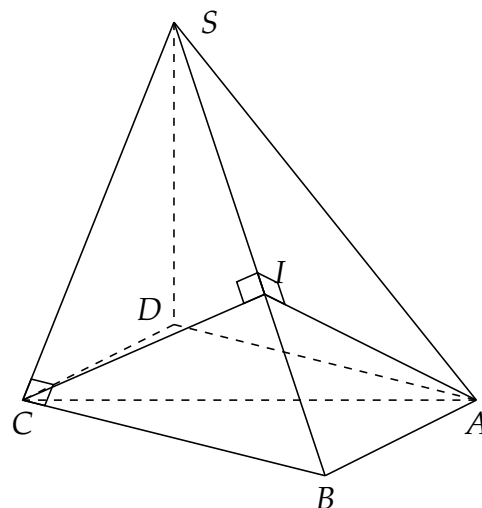
Nên tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh $5a$, suy ra $BD = 5\sqrt{2}a$

$$\Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \frac{5\sqrt{7}}{3}a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot \frac{1}{2}BA^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 25a^3 = \frac{125\sqrt{7}a^3}{18}.$$

Chọn phương án **C**

□



Câu 49.2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = 2BA = 4a$; $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = 90^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SBA) bằng 60° và $SC = SB$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

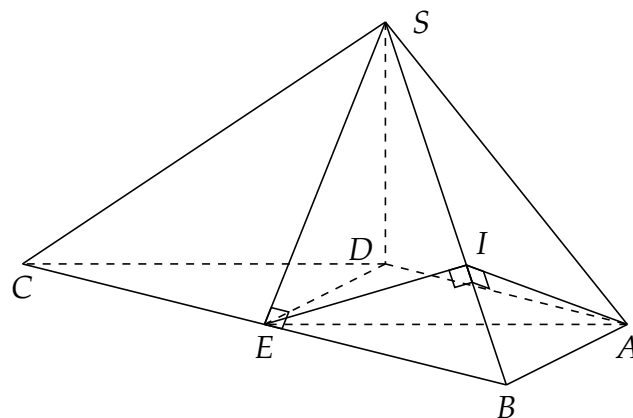
A. $\frac{32}{3}a^3$. B. $\frac{8a^3}{3}$. C. $\frac{16a^3}{3}$. D. $\frac{16a^3}{9}$.

Lời giải.

Tam giác SBC cân cạnh đáy $BC = 4a$. Gọi E là trung điểm của BC thì ta có $\triangle SEB$ vuông tại E , $BE = 2a = BA$.

Ta có hai tam giác $\triangle SAB$ và $\triangle SEB$ bằng nhau và chung cạnh huyền.

Kẻ $AI \perp SB \Rightarrow EI \perp SB$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBE) là góc giữa hai đường thẳng AI và EI suy ra $(AI; EI) = 60^\circ$.



Do $\widehat{CBA} = 90^\circ \Rightarrow 180^\circ > \widehat{AIE} > 90^\circ$ suy ra $\widehat{AIE} = 120^\circ \Rightarrow \cos \widehat{AIE} = -\frac{1}{2}$.

Có $AE = 2\sqrt{2}a$, $\triangle AIE$ cân tại I , nên ta có:

$$\frac{2AI^2 - AE^2}{2AI^2} = \cos \widehat{AIE} \Leftrightarrow \frac{2AI^2 - AE^2}{2AI^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow AI^2 = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow AI = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.$$

$$\text{Suy ra } BI = \frac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SI = \frac{AI^2}{IB} = \frac{4a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \frac{6a}{\sqrt{3}}.$$

Dựng $SD \perp (ABC)$ tại D . Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$. Tương tự $BE \perp ED$ nên tứ giác $ABED$ là

hình vuông cạnh $2a$. Suy ra $BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = 2a$.

$$\text{Thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD \cdot \frac{1}{2}BC \cdot BA = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 4a^2 = \frac{8a^3}{3}.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 49.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Theo giả thiết: $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ \Rightarrow MS = MB = MA = MC \Rightarrow M$ thuộc trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow MG \perp (ABC)$.

Do D là điểm đối xứng với G qua cạnh $AC \Rightarrow SD \perp (ABC)$.

Từ giả thiết suy ra hai tam giác vuông $\triangle SAB$ và $\triangle SCB$ bằng nhau.

Do đó từ A kẻ $AI \perp SB$ $I \in SB$ thì $CI \perp SB$.

Nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCB) là $(AI; CI) = 60^\circ$.

Do $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 120^\circ \Rightarrow \frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AI =$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow BI = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } BD = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SD.S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^3 = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}.$$

Chọn phương án **(B)** □

Câu 49.4. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ$; $AB = a$; $AC = a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30° . Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng.

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$

B. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}.$

C. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$

D. $\frac{a^3}{6}.$

Lời giải.

Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle HAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{CBA} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Dựng $\begin{cases} HE \perp DA \\ HF \perp BD \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB)$ và $HF \perp (DBC)$.

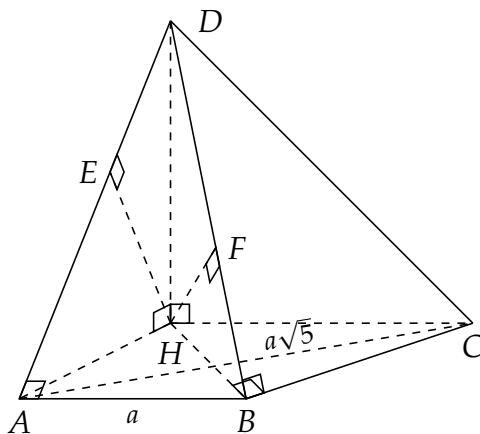
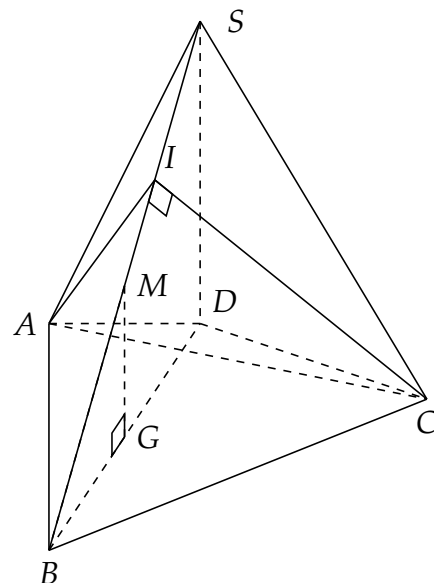
Suy ra góc giữa (DBA) bằng (DBC) là $(HE; HF) = \widehat{EHF}$ và tam giác HEF vuông tại E .

$$\text{Đặt } DH = x, \text{ khi đó } HE = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}, HF = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \frac{\frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\sqrt{2x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a. \text{ Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3}DH.S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{6}.$$

Chọn phương án **(D)** □

Câu 49.5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, và hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) tạo với nhau 1 góc α sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải.

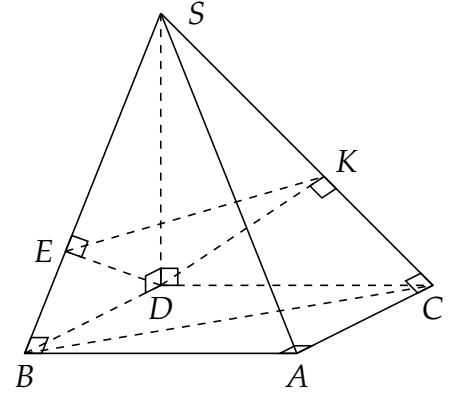
Từ giả thiết $AB = a\sqrt{2}, AC = a, BC = a\sqrt{3} \Rightarrow BC^2 = 3a^2 = 2a^2 + a^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

Dựng $SD \perp (ABC) \Rightarrow ABCD$ hình chữ nhật, nên $BD = AC = a, DC = AB = a\sqrt{2}$. Gọi $SD = h$

Ta có $\frac{DB}{SB} \cdot \frac{DC}{SC} = \cos \alpha$, xem $a = 1$ để dễ cho tính toán, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{h+1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow h^4 + 3h^2 - 4 = 0 \Rightarrow h^2 = 1 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow h = a = SD.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SD \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$



Chọn phương án **(D)**

□

CÂU 50. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

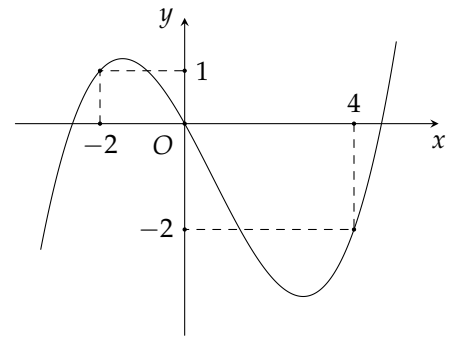
Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; \frac{3}{2})$.

B. $(0; \frac{1}{2})$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) - (1-2x)$

Đặt $u = 1-2x$ ta được hàm số $h(u) = -2[f'(u) + \frac{1}{2}u]$

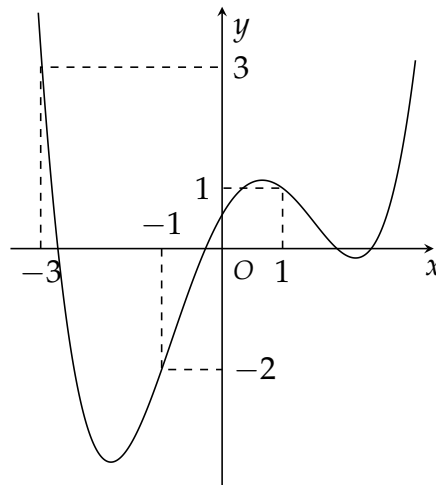
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = -\frac{1}{2}u$ như hình vẽ

$$\text{Từ đó ta có } h(u) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < u < 0 \\ u > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1-2x < 0 \\ 1-2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Chọn phương án **(A)**

□

Câu 50.1. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình phía dưới



Hàm số $g(x) = 3f(1 - 2x) + 8x^3 - 21x^2 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-3; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-1; 2)$.

Lời giải.

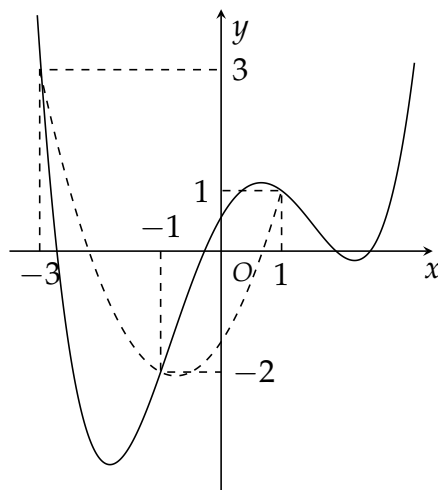
Ta có $g'(x) = -6f'(1 - 2x) + 24x^2 - 42x + 6$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) < 4x^2 - 7x + 1 \quad (*)$$

Đặt $1 - 2x = t \Leftrightarrow x = \frac{1 - t}{2}$.

Ta có $(*)$ trở thành $f'(t) < 4 \cdot \left(\frac{1 - t}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{1 - t}{2} + 1 \Leftrightarrow f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2}$.

Vẽ Parabol $(P) : y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng 1 hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau, ta thấy (P) có đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$ và đi qua các điểm $(-3; 3), (-1; -2), (1; 1)$



Từ đồ thị ta thấy trên khoảng $(-3; 1)$ ta có

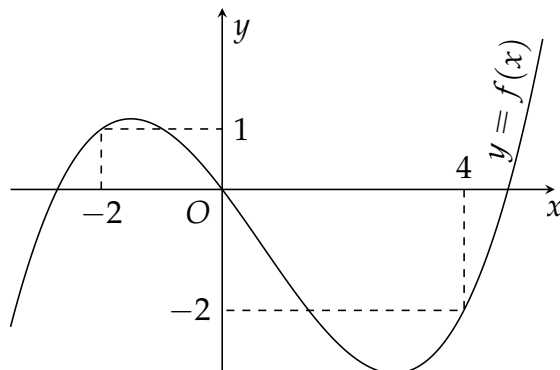
$$f'(t) < t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \Leftrightarrow -3 < t < -1 \Leftrightarrow -3 < 1 - 2x < -1 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 50.2. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình phía dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x - m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

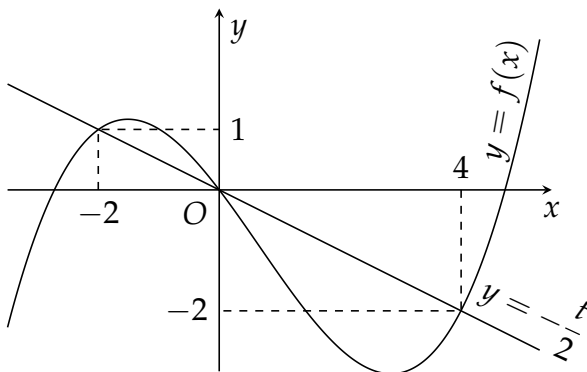
Lời giải.

Ta có $g'(x) = 4f'(x - m) = 2x - 2m$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x - m) \geq -\frac{x - m}{2} \quad (*)$$

Đặt $t = x - m$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}$.

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình sau



Từ đồ thị ta có $f'(x) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \leq x \leq m \\ x \geq x + m \end{cases}$.

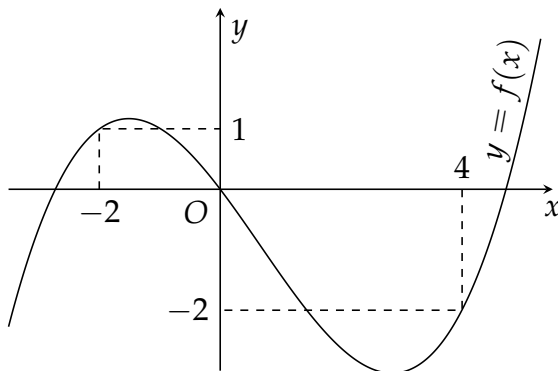
Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \forall x \in (1; 2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m + 4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\}$. Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn phương án **A** □

Câu 50.3. Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình phía dưới



Hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 4)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(4; +\infty)$.

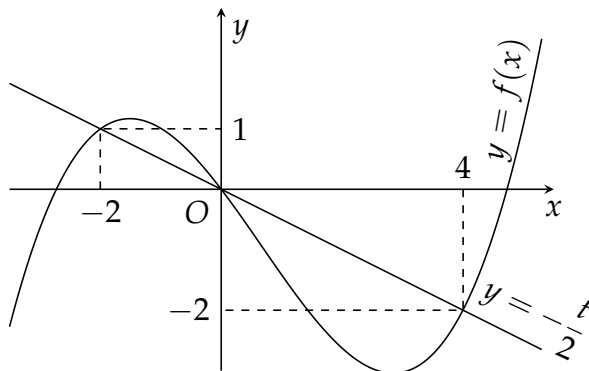
D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Có $h'(x) = 4f'(x) + 2x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{2}$.

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình phía dưới



Từ đồ thị ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$h(-2)$	0	$h(4)$	$+\infty$	

Chú ý ở đây $h(0) = 4f(0)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$-h(-2)$	0	$-h(4)$	$+\infty$

Từ bảng biến ta suy ra $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.

Chọn phương án **A**

□

Câu 50.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Biết rằng $a < f(x) < 5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f[f(x) - 1] + x^3 + 3x^2 + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 5)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; 5)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có: $g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x) - 1] + 3x^2 + 6x$.

Vì $1 < f(x) < 5$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < f(x) - 1 < 4$.

Từ bảng xét dấu của $f'(x) \Rightarrow f'[f(x) - 1] < 0$.

Từ đó ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	0	5	$+\infty$			
$f'(x).f'[f(x)-1]$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$
$3x^2+6x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$

Do đó hàm $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Chọn phương án **B**

□

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1 A	3 C	4.12 C	6.9 D	8.8 A	10.7 A	12.4 D	13.11 B	15.14 C	17.10 D
1.1 B	3.1 C	4.13 C	6.10 A	8.9 D	10.8 B	12.5 A	13.12 B	16 A	17.11 D
1.2 D	3.2 A	5 A	6.11 D	8.10 D	10.9 C	12.6 A	13.13 B	16.1 A	17.12 A
1.3 C	3.3 C	5.1 D	6.12 C	8.11 B	10.10 B	12.7 D	13.14 A	16.2 D	17.13 C
1.4 D	3.4 A	5.2 C	6.13 B	8.12 A	10.11 D	12.8 D	14 D	16.3 A	18 B
1.5 C	3.5 B	5.3 A	7 B	9 A	10.12 D	12.9 B	14.1 D	16.4 D	18.1 A
1.6 B	3.6 C	5.4 A	7.1 C	9.1 C	10.13 B	12.10 C	14.2 B	16.5 D	18.2 B
1.7 C	3.7 D	5.5 A	7.2 D	9.2 B	11 A	12.11 D	14.3 B	16.6 C	18.3 A
1.8 C	3.8 C	5.6 B	7.3 C	9.3 A	11.1 B	12.12 D	14.4 D	16.7 C	18.4 C
1.9 A	3.9 D	5.7 D	7.4 B	9.4 B	11.2 C	12.13 B	14.5 D	16.8 D	18.5 B
1.10 C	3.10 B	5.8 D	7.5 A	9.5 D	11.3 B	12.14 D	14.6 C	16.9 A	18.6 B
1.11 B	3.11 A	5.9 B	7.6 D	9.6 A	11.4 A	12.15 C	15 D	16.10 B	18.7 C
2 A	3.12 C	5.10 A	7.7 D	9.7 D	11.5 A	12.16 D	15.1 C	16.11 C	18.8 C
2.1 B	4 D	5.11 C	7.8 A	9.8 D	11.6 C	12.17 D	15.2 B	16.12 A	18.9 A
2.2 B	4.1 B	5.12 B	7.9 B	9.9 C	11.7 D	13 B	15.3 D	16.13 C	18.10 A
2.3 C	4.2 A	5.13 B	7.10 C	9.10 C	11.8 D	13.1 C	15.4 D	17 B	18.11 C
2.4 C	4.3 C	6 B	7.11 D	9.11 A	11.9 D	13.2 B	15.5 B	17.1 A	18.12 C
2.5 A	4.4 D	6.1 A	8 D	9.12 C	11.10 C	13.3 B	15.6 A	17.2 A	18.13 D
2.6 A	4.5 B	6.2 D	8.1 B	10 C	11.11 B	13.4 B	15.7 A	17.3 B	18.14 C
2.7 B	4.6 D	6.3 B	8.2 C	10.1 C	11.12 B	13.5 D	15.8 A	17.4 D	18.15 C
2.8 B	4.7 B	6.4 C	8.3 C	10.2 C	11.13 D	13.6 A	15.9 B	17.5 B	19 C
2.9 C	4.8 D	6.5 B	8.4 D	10.3 C	12 C	13.7 C	15.10 D	17.6 A	19.1 A
2.10 C	4.9 D	6.6 A	8.5 C	10.4 A	12.1 D	13.8 A	15.11 C	17.7 C	19.2 B
2.11 A	4.10 D	6.7 C	8.6 D	10.5 B	12.2 C	13.9 D	15.12 C	17.8 A	19.3 A
2.12 B	4.11 C	6.8 B	8.7 B	10.6 D	12.3 C	13.10 B	15.13 B	17.9 D	19.4 A
									19.5 C
									19.6 D
									19.7 B
									19.8 B

19.9 A	21.11 D	23.10 C	25.8 D	27.7 A	29.7 C	31.4 A	33.2 B	35.1 A	37 A
19.10 B	21.12 D	23.11 A	25.9 C	27.8 A	29.8 C	31.5 C	33.3 D	35.2 C	37.1 D
20 D	21.13 A	23.12 D	25.10 B	27.9 B	29.9 A	31.6 D	33.4 A	35.3 C	37.2 D
20.1 C	22 B	23.13 C	25.11 A	27.10 A	29.10 A	31.7 B	33.5 D	35.4 C	37.3 A
20.2 A	22.1 C	24 A	25.12 D	27.11 C	29.11 A	31.8 A	33.6 D	35.5 C	38 B
20.3 B	22.2 A	24.1 D	26 A	27.12 C	29.12 D	31.9 B	33.7 B	35.6 B	38.1 B
20.4 A	22.3 A	24.2 A	26.1 C	28 D	29.13 D	31.10 B	33.8 D	35.7 C	38.2 D
20.5 C	22.4 B	24.3 B	26.2 A	28.1 A	30 C	31.11 B	33.9 A	35.8 A	38.3 D
20.6 D	22.5 C	24.4 A	26.3 A	28.2 C	30.1 C	31.12 C	33.10 A	35.9 D	38.4 A
20.7 D	22.6 B	24.5 C	26.4 A	28.3 D	30.2 C	31.13 A	33.11 C	35.10 B	38.5 D
20.8 C	22.7 A	24.6 B	26.5 A	28.4 A	30.3 B	32 B	33.12 A	35.11 D	38.6 C
20.9 C	22.8 A	24.7 A	26.6 A	28.5 C	30.4 D	32.1 B	33.13 A	35.12 D	38.7 D
20.10 D	22.9 B	24.8 D	26.7 A	28.6 A	30.5 C	32.2 C	34 C	36 A	38.8 C
20.11 A	22.10 D	24.9 D	26.8 D	28.7 A	30.6 C	32.3 B	34.1 A	36.1 B	38.9 C
20.12 B	22.11 C	24.10 C	26.9 A	28.8 C	30.7 A	32.4 A	34.2 B	36.2 B	38.10 A
20.13 C	22.12 C	24.11 A	26.10 C	28.9 D	30.8 A	32.5 D	34.3 B	36.3 C	38.11 D
21 A	23 C	24.12 B	26.11 A	28.10 D	30.9 A	32.6 B	34.4 C	36.4 C	38.12 B
21.1 D	23.1 A	24.13 A	26.12 A	28.11 A	30.10 A	32.7 D	34.5 D	36.5 A	39 D
21.2 B	23.2 C	25 B	26.13 B	28.12 A	30.11 D	32.8 A	34.6 D	36.6 C	39.1 C
21.3 B	23.3 B	25.1 A	27 C	29 A	30.12 D	32.9 D	34.7 C	36.7 A	39.2 A
21.4 D	23.4 D	25.2 B	27.1 B	29.1 A	30.13 D	32.10 C	34.8 B	36.8 D	39.3 A
21.5 C	23.5 C	25.3 C	27.2 C	29.2 A	30.14 A	32.11 C	34.9 C	36.9 A	39.4 B
21.7 D	23.6 C	25.4 C	27.3 A	29.3 C	31 A	32.12 A	34.10 C	36.10 A	39.5 C
21.8 A	23.7 B	25.5 C	27.4 C	29.4 C	31.1 C	32.13 D	34.11 D	36.11 A	39.6 C
21.9 C	23.8 B	25.6 D	27.5 C	29.5 A	31.2 A	33 A	34.12 D	36.12 C	39.7 C
21.10 D	23.9 B	25.7 A	27.6 B	29.6 D	31.3 B	33.1 A	35 B	36.13 C	39.8 D
									39.9 D
									39.10 D
									39.11 C
									39.12 C

39.13 B	40.7 D	41.5 B	42.3 B	43.2 C	43.14 A	44.6 C	46.3 A	48.4 D	49.1 C
39.14 D	40.8 D	41.6 A	42.4 A	43.3 A	43.15 D	44.7 C	46.4 C	48.5 D	49.2 B
39.15 C	40.9 C	41.7 C	42.5 A	43.4 A	43.16 C	44.8 B	47 D	48.6 B	49.3 B
39.16 A	40.10 B	41.8 C	42.6 B	43.5 C	43.17 A	44.9 A	47.1 C	48.7 D	49.4 D
39.17 D	40.11 D	41.9 C	42.8 C	43.6 D	43.18 D	45 B	47.2 A	48.8 B	49.5 D
40 A	40.12 D	41.10 D	42.9 C	43.7 C	43.19 D	45.1 B	47.3 C	48.9 A	50 A
40.1 A	40.13 C	41.11 C	42.10 D	43.8 A	44 C	45.2 C	47.4 C	48.10 B	50.1 A
40.2 A	41 B	41.12 C	42.11 B	43.9 D	44.1 C	45.3 D	47.5 B	48.11 C	50.2 A
40.3 A	41.1 D	41.13 A	42.12 C	43.10 B	44.2 D	45.4 A	48 B	48.12 D	50.3 A
40.4 D	41.2 B	42 A	42.13 D	43.11 C	44.3 B	46 C	48.1 D	48.13 B	50.4 B
40.5 A	41.3 B	42.1 A	43 C	43.12 D	44.4 C	46.1 C	48.2 A	48.14 D	
40.6 D	41.4 B	42.2 B	43.1 C	43.13 D	44.5 A	46.2 D	48.3 B	49 D	