

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi thứ nhất: 20/9/2024

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1. (5 điểm) Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2 \\ u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2, \forall n \geq 1 \\ v_{n+1} = 2v_n u_n \end{cases}$$
a) Chứng minh rằng $u_n^2 - 2v_n^2 = 1, \forall n \geq 1$ b) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

Bài 2. (5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương

a) Tìm tất cả các bộ hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) sao cho:

$$\frac{xy}{b^2 + ca} + \frac{yz}{c^2 + ab} + \frac{zx}{a^2 + bc} \leq 1$$

b) Chứng minh rằng với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) ta luôn có:

$$x\sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} + y\sqrt{\frac{ca + 2b^2}{c(a + 2b)^3}} + z\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a(b + 2c)^3}} \geq 1$$

Bài 3. (5 điểm) Số nguyên dương n được gọi là số "tốt" nếu thỏa mãn đồng thời:

i) Với mọi d là ước nguyên dương của n thì $1^d, 2^d, \dots, 46^d$ đều có số dư phân biệt khi chia cho 47.

ii) $\tau(n)^2 \mid n$ a) Chứng minh rằng nếu n là số "tốt" thì n là số chính phương.

b) Tìm tất cả số "tốt" không vượt quá 2025.

Bài 4. (5 điểm) Cho $\triangle ABC$ không cân nội tiếp đường tròn (O) có trục tâm H . Gọi A', D lần lượt là điểm đối xứng của A qua BC và đối xứng của A qua O . Gọi P là điểm trên BC sao cho $AP \perp OH$. H' là trục tâm của $\triangle APD$.

a) Nếu $\angle BAC = 60^\circ$ thì $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) .b) Chứng minh rằng $H'A' \perp OP$. Nếu $\angle BAC = 45^\circ$ thì H' đối xứng với O qua BC .

Bài 1. (5 điểm)

Cho dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2 \\ u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2, \forall n \geq 1 \\ v_{n+1} = 2v_n u_n \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $u_n^2 - 2v_n^2 = 1, \forall n \geq 1$

b) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

Lời giải.

a) (Dương Thiên Phúc)

$$u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} + v_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 + 2u_n v_n$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ \sqrt{2}v_{n+1} = 2\sqrt{2}u_n v_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} + \sqrt{2}v_{n+1} = (u_n + \sqrt{2}v_n)^2 \\ u_{n+1} - \sqrt{2}v_{n+1} = (u_n - \sqrt{2}v_n)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_n = \frac{1}{2}[(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} + (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}] \\ v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n^2 - 2v_n^2 = \frac{1}{4}[(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} + (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}]^2 - \frac{1}{4}[(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}]^2$$

$$\Rightarrow u_n^2 - 2v_n^2 = \frac{1}{4}[2 \cdot (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}][2 \cdot (3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}] = 1^{2^{n-1}} = 1$$

b) Cách 1: (Dương Thiên Phúc)

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}[(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} + (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}]}{\frac{1}{2\sqrt{2}}[(3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} - (3 - 2\sqrt{2})^{2^{n-1}}]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \frac{a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}}{a^{2^{n-1}} - \frac{1}{a^{2^{n-1}}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \cdot \frac{a^{2^{n-1}}}{a^{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

b) Cách 2: (Nguyễn Võ Minh Quân)

$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2 \\ u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + v_n)^2 + v_n^2, \forall n \geq 1 \quad (1) \\ v_{n+1} = 2v_n u_n \quad (2) \end{cases}$$

Từ giả thiết và câu a), ta được:
$$\begin{cases} u_n^2 - 2v_n^2 = 1 \\ u_n^2 + 2v_n^2 = u_{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_n^2 = \frac{u_{n+1} - 1}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 1 > 0$$

$$\Rightarrow u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giả sử $v_{n+1} = 0$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} v_n = 0 \\ u_n = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow v_n = 0$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = v_n = \dots = v_1 = 0 \text{ (sai)}$$

$$\Rightarrow v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow u_n \cdot v_n \neq 0; u_{n+1} \neq 0$$

Lấy (2) chia cho (1), ta được:
$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} + 1 = \frac{u_n}{2v_n} + 1 + \frac{v_n}{2u_n} + \frac{v_n}{2u_n}$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n}{2v_n} + \frac{v_n}{u_n} \text{ Đặt } a_n = \frac{u_n}{v_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$$

Giả sử $\exists a_{n+1} < \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} < 0 \text{ (sai)}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Xét $a_{n+1} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n = \dots = a_1 = \sqrt{2} \left(\text{sai do } \frac{u_1}{v_1} = \frac{3}{2} \right)$$

$$\Rightarrow a_n > \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} < 0$$

$\Rightarrow (a_n)$ giảm. Mà như đã chứng minh, $a_n > \sqrt{2} \Rightarrow (a_n)$ bị chặn dưới

Theo Weierstrass, (a_n) tồn tại giới hạn hữu hạn

$\Rightarrow$ Gọi x là $\lim a_n$

$$\Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \lim a_n = \lim \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{2}$$

Bài 2. (5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương

a) Tìm tất cả các bộ hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) sao cho:

$$\frac{xy}{b^2 + ca} + \frac{yz}{c^2 + ab} + \frac{zx}{a^2 + bc} \leq 1$$

b) Chứng minh rằng với mọi hoán vị (x, y, z) của (a, b, c) ta luôn có:

$$x\sqrt{\frac{bc + 2a^2}{b(c + 2a)^3}} + y\sqrt{\frac{ca + 2b^2}{c(a + 2b)^3}} + z\sqrt{\frac{ab + 2c^2}{a(b + 2c)^3}} \geq 1$$

Lời giải. (Nguyễn Chánh Thiện)

a)

$$\begin{aligned} & \frac{xy}{b^2 + ca} + \frac{yz}{c^2 + ab} + \frac{zx}{a^2 + bc} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{2xy}{b^2 + ca} + \frac{2yz}{c^2 + ab} + \frac{2zx}{a^2 + bc} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2 + 2bc - 2xy}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2 + 2ca - 2yz}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2 + 2ab - 2zx}{c^2 + 2ab} \geq 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo C-S:

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca} = 1$$

Nên:

$$VT_{(1)} \geq 1 + \frac{2bc - 2xy}{a^2 + 2bc} + \frac{2ca - 2yz}{b^2 + 2ca} + \frac{2ab - 2zx}{c^2 + 2ab}$$

Khi đó, ta cần:

$$\frac{2bc - 2xy}{a^2 + 2bc} + \frac{2ca - 2yz}{b^2 + 2ca} + \frac{2ab - 2zx}{c^2 + 2ab} = 0$$

$\Leftrightarrow xy = bc, yz = ca, zx = ab \Rightarrow$ Bộ hoán vị (x, y, z) thỏa mãn bài toán là (b, c, a)

b)

Vì (x, y, z) là bộ hoán vị của (a, b, c) nên $x + y + z = a + b + c$

$$x\sqrt{\frac{bc+2a^2}{b(c+2a)^3}} + y\sqrt{\frac{ca+2b^2}{c(a+2b)^3}} + z\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a(b+2c)^3}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{\frac{bc+2a^2}{b(c+2a)^3}} + y\sqrt{\frac{ca+2b^2}{c(a+2b)^3}} + z\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a(b+2c)^3}} \geq \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

Ta đi chứng minh:

$$x\sqrt{\frac{bc+2a^2}{b(c+2a)^3}} \geq \frac{x}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc+2a^2}{b(c+2a)^3}} \geq \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{bc+2a^2}{b(c+2a)^3} \geq \frac{1}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(2a^2+4ca+bc+2c^2)}{b(c+2a)^3(a+b+c)^2} \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$y\sqrt{\frac{ca+2b^2}{c(a+2b)^3}} \geq \frac{y}{a+b+c}; z\sqrt{\frac{ab+2c^2}{a(b+2c)^3}} \geq \frac{z}{a+b+c}$$

Cộng theo vế ta có được điều phải chứng minh.

Bài 3. (5 điểm)

Số nguyên dương n được gọi là số "tốt" nếu thỏa mãn đồng thời:

i) Với mọi d là ước nguyên dương của n thì $1^d, 2^d, \dots, 46^d$ đều có số dư phân biệt khi chia cho 47.

ii) $\tau(n)^2 \mid n$

a) Chứng minh rằng nếu n là số "tốt" thì n là số chính phương.

b) Tìm tất cả số "tốt" không vượt quá 2025.

Lời giải.

a) *Cách 1: (Nguyễn Chánh Thiện)*

Ta có: $\{1^d; 2^d; \dots; 46^d\}$ là một hệ thặng dư thu gọn theo modulo 47.

Giả sử n chẵn. Khi đó tồn tại d_i là một ước dương chia hết cho 2 của n .

$$\Rightarrow 1^{d_i} \cdot 2^{d_i} \dots 46^{d_i} \equiv 46! \pmod{47}$$

Mà theo định lý Wilson thì $46! \equiv -1 \pmod{47}$ (vô lí vì $46! \equiv 1 \pmod{47}$)

Vậy giả sử sai. Nên n lẻ. Mà $\tau(n)^2 \mid n$ nên n là số chính phương.

a) Cách 2: (Trang Kiện Phong)

Xét $n = 1$, bài toán được giải quyết. Xét $n > 1$:

Giả sử n không là số chính phương, khi đó đặt

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

với p_i là các số nguyên tố, $k_i, m \in \mathbb{Z}^+, i = 1, 2, \dots, m$

Vì n không là số chính phương, nên:

$$\tau(n)^2 = (k_1 + 1)^2 (k_2 + 1)^2 \dots (k_m + 1)^2$$

là một số chẵn. Do đó n là số chẵn vì $\tau(n)^2 \mid n$

Điều này là vô lý khi xét ước $d = 2$ của n vì $1^2 \equiv 46^2 \equiv (-1)^2 \pmod{47}$

Vậy n phải là số chính phương.

b) (Trang Kiện Phong)

Ta thấy với $n = 1$ thì thỏa mãn bài toán. Xét $n > 1$:

Do n là số chính phương và $n < 2025 = 45^2$ nên $n = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}^+$) thỏa $2 \leq a \leq 44$

Ta loại các số a nguyên tố khác 3 do khi đó $\tau(n)^2 = 3^2 \Rightarrow 3 \mid n = a^2$ (vô lý)

Đồng thời, ta cũng loại các số a chẵn. Khi đó:

$$n \in \{3^2; 9^2; 15^2; 21^2; 25^2; 27^2; 33^2; 35^2; 39^2; 45^2\}$$

Từ đây, ta loại các số $n = 15^2; 21^2; 33^2; 35^2; 39^2$ vì các số này được viết dưới dạng

$$n = p^2 q^2$$

với p, q là số nguyên tố. Khi đó

$$\tau(n)^2 = (2 + 1)^4 = 3^4 \mid n \text{ (vô lý)}$$

Với $n = 9^2$, khi đó: $\tau(9^2)^2 = (4 + 1)^2 = 5^2 \mid 9^2$ (vô lý)

Với $n = 27^2 = 3^6$, khi đó: $\tau(27^2)^2 = (6 + 1)^2 = 7^2 \mid 27^2$ (vô lý)

Do đó: $n = 3^2; 25^2; 45^2$ hay $n = 3^2; n = 5^4; n = 3^4 \cdot 5^2$. Ta chứng minh với n bằng những số này

thì thỏa i)

Giả sử tồn tại hai số nguyên dương a, b thỏa mãn

$$a^d \equiv b^d \pmod{47} \quad (a, b \leq 46; a \neq b)$$

Đặt h là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn

$$a^h \equiv b^h \pmod{47}$$

Vì $a^{46} \equiv b^{46} \pmod{47}$ nên $h \mid 46$. Suy ra $(h, 3) = (h, 5) = 1$ do $(46, 3) = (46, 5) = 1$

Vì thế: $h = 1$, hay $a \equiv b \pmod{47}$ (vô lý)

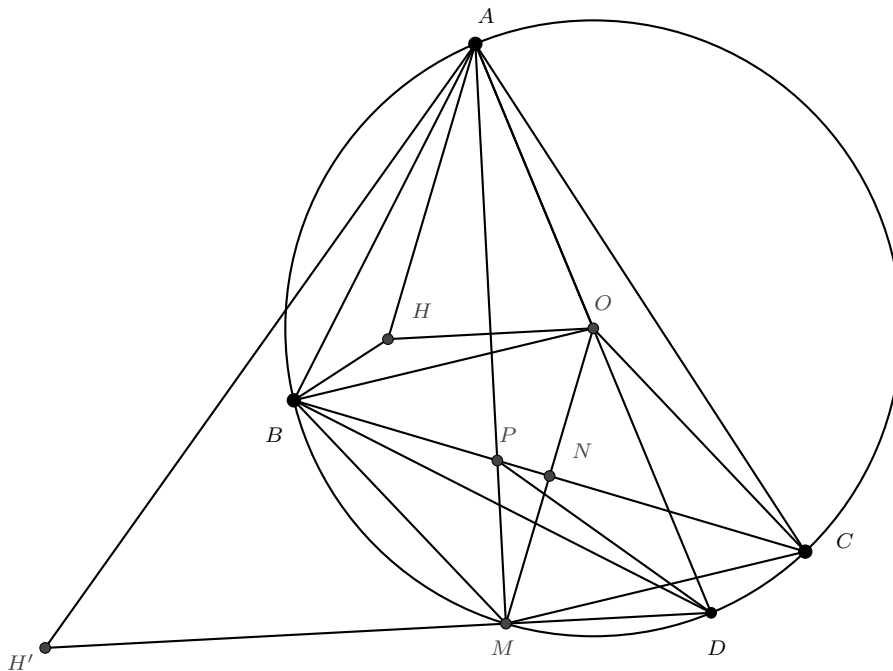
Kết luận: $n = 1; n = 3^2; n = 25^2; n = 45^2$

Bài 4. (5 điểm)

Cho $\triangle ABC$ không cân nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H . Gọi A', D lần lượt là điểm đối xứng của A qua BC và đối xứng của A qua O . Gọi P là điểm trên BC sao cho $AP \perp OH$. H' là trực tâm của $\triangle APD$.

a) Nếu $\angle BAC = 60^\circ$ thì $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) .

b) Chứng minh rằng $H'A' \perp OP$. Nếu $\angle BAC = 45^\circ$ thì H' đối xứng với O qua BC .



Lời giải. a) (Nguyễn Minh Quang)

Gọi M là điểm chính giữa cung BC , N là trung điểm BC

Ta có: $\angle OBC = \angle BCM (= 30^\circ) \Rightarrow OB \parallel MC$. Tương tự như vậy, ta cũng được $OC \parallel BM$

Từ đó suy ra: $BOCM$ là hình bình hành, kết hợp với $OB = OC$ ta được: $BOCM$ là hình thoi

Dẫn đến: $ON = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}OA$. Mà $ON = \frac{1}{2}AH$, nên: $AH = AO \Rightarrow \triangle AHO$ cân tại A

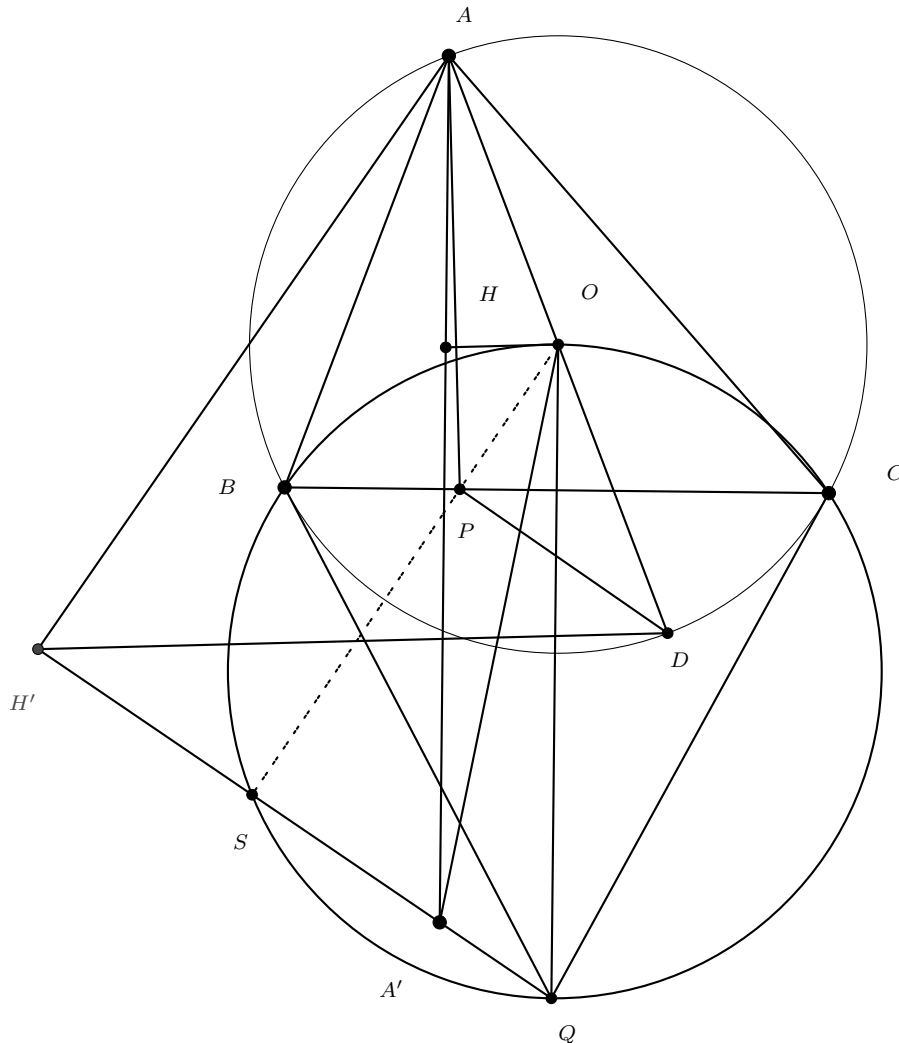
Lại có: AM cũng là phân giác HAO nên từ đó A, P, M thẳng hàng

Suy ra: AM vuông góc OH , mà AM vuông MD , từ đó $OH \parallel MD$

Có: $OH, H'D$ cùng vuông góc AP nên: $OH \parallel H'D \Rightarrow H', M, D$ thẳng hàng

Vậy: Với $\angle BAC = 60^\circ$ thì $H'D$ đi qua điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O)

b) (Nguyễn Võ Thiên Lộc, Vũ Duy Hải)



Xét thể hình như sau:

Vì H' là trực tâm $\triangle APD$ nên H' thuộc đối cực của P

Tiếp tuyến của B và C của (O) cắt nhau tại Q . Vì B, P, C thẳng hàng nên P thuộc đối cực của Q .

Suy ra: Q thuộc đối cực của $P \Rightarrow QH' \perp OP$

Gọi S là giao điểm của QA' và (BOC)

$$\text{Ta có: } \frac{SB}{SC} = \frac{\sin \angle A'QB}{\sin \angle A'QC} = \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{\sin \angle A'BQ}{\sin \angle A'CQ} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle B - \angle A)}{\sin(\angle A - \angle C)}$$

$$\text{Ta có: } \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle PAB}{\sin \angle PAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle OHC}{\sin \angle OHB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle OCH}{\sin \angle OBH}$$

$$\text{Mà } \angle OCH = \angle C - 2\angle OCA = 180^\circ - 2\angle OCA - \angle B - \angle A = 2\angle B - \angle B - \angle A = \angle B - \angle A$$

Tương tự, ta cũng có được: $\angle OBH = \angle A - \angle C$

$$\text{Từ đó: } \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle OCH}{\sin \angle OBH} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle OCH}{\sin \angle OBH} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\angle B - \angle A)}{\sin(\angle A - \angle C)} = \frac{SB}{SC}$$

Do đó: SP là phân giác $\angle BSC \Rightarrow S, P, O$ thẳng hàng $\Rightarrow OP \perp A'Q \Rightarrow H', S, A', Q$ thẳng hàng

Vậy: $A'H' \perp OP$

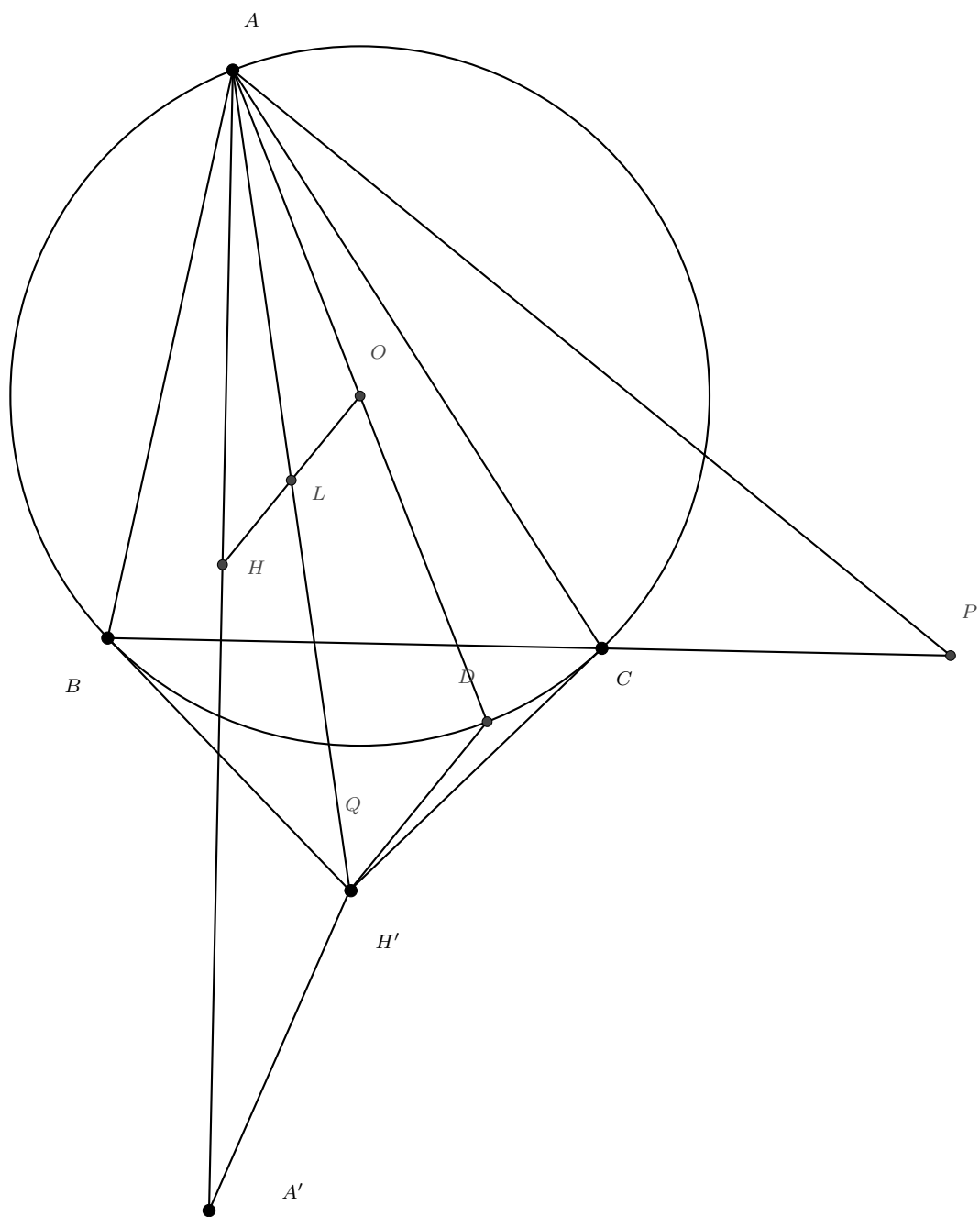
(Sử dụng hình ở trang sau)

Với $\angle BAC = 45^\circ$

Ta đã có được: A', H', Q thẳng hàng. Vì $\angle BAC = 90^\circ$ nên: $BOCQ$ là hình vuông. Khi đó: Q là đối xứng của O qua BC .

Gọi L là trung điểm của $OH \Rightarrow AHQO$ là hình bình hành $\Rightarrow L$ là trung điểm của AQ

Mà $H'D \perp AP \Rightarrow H' \equiv Q$ (hoàn tất chứng minh)



ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi thứ hai: 21/9/2024

(Đề thi có 1 trang, gồm 4 bài)

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 5. (5 điểm) Cho hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} f(m) = m + 3, \text{ nếu } m \text{ là số lẻ.} \\ f(m) = \frac{m}{2}, \text{ nếu } m \text{ là số chẵn.} \end{cases}$$

- a) Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn: $f(f(f(m))) = 1$.
- b) Với mọi số nguyên lẻ k . Chứng minh có đúng 3 số m thỏa mãn: $f(f(f(m))) = k$.
- c) Với mọi số nguyên chẵn k . Có bao nhiêu số m thỏa mãn: $f(f(f(m))) = k$.

Bài 6. (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) có trọng tâm G . Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Điểm A' thuộc (O) sao cho $AA' \parallel BC$. Gọi D, E, F là điểm đối xứng với chân đường phân giác từ góc A, B, C qua M, N, P . EF cắt BC tại D' . ω_A là tâm đường tròn đường kính DD' .

- a) Chứng minh OA' tiếp xúc với (ω_A) tại A' .
- b) Tính $\frac{\mathcal{P}_{G/(O)}}{\mathcal{P}_{G/(\omega_A)}}$.
- c) Chứng minh trực tâm tam giác DEF nằm trên OG .

Bài 7. (5 điểm) Tìm tất cả hàm số $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

- i) $f(2024x^2) \leq 2024f(g(x)), \forall x > 0$.
- ii) $f(x + y^2) \geq f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{g(yf(x))}, \forall x, y > 0$.

Bài 8. (5 điểm) Trong buổi sinh hoạt ngoại khóa, có 100 cái ghế được xếp thành hai hàng tạo thành 50 cặp đối diện nhau. Cô giáo cho 100 em học sinh ngồi vào các ghế, mỗi ghế có đúng một học sinh.

- a) Giả sử mỗi học sinh chỉ quen với người ngồi bên cạnh hoặc đối diện mình. Hỏi cần chọn ít nhất bao nhiêu em sao cho mỗi em không được chọn thì quen với ít nhất một em được chọn?
- b) Giả sử có một học sinh nào đó đi ra ngoài và bỏ lại một ghế trống. Cô giáo sẽ chọn một học sinh tùy ý ở hàng không có ghế trống đến ngồi vào ghế đang trống. Cô có thể thực hiện thao tác như thế nhiều lần. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần, cô giáo không thể xếp vị trí của các bạn học sinh sao cho em nào cũng ngồi vào chiếc ghế đối diện với chiếc ghế mình ngồi ban đầu.

Bài 5. (5 điểm)

Cho hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} f(m) = m + 3, & \text{nếu } m \text{ là số lẻ} \\ f(m) = \frac{m}{2}, & \text{nếu } m \text{ là số chẵn} \end{cases}$$

- a) Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn: $f(f(f(m))) = 1$.
 b) Với mọi số nguyên lẻ k . Chứng minh có đúng 3 số m thỏa mãn: $f(f(f(m))) = k$.
 c) Với mọi số nguyên chẵn k . Có bao nhiêu số m thỏa mãn: $f(f(f(m))) = k$.

Lời giải. (Nguyễn Chánh Thiện)

a)

- Nếu m lẻ:

$$f(f(f(m))) = f(f(m+3)) = f\left(\frac{m+3}{2}\right) = 1 \text{ (vì } m \text{ lẻ nên } m+3 \text{ chẵn)}$$

+) Xét $\frac{m+3}{2}$ lẻ:

$$1 = f\left(\frac{m+3}{2}\right) = \frac{m+3}{2} + 3 \Leftrightarrow m = -7$$

Thử lại thấy không thỏa mãn.

+) Xét $\frac{m+3}{2}$ chẵn:

$$1 = f\left(\frac{m+3}{2}\right) = \frac{m+3}{4} \Leftrightarrow m = 1$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

- Nếu m chẵn:

$$f(f(f(m))) = f\left(f\left(\frac{m}{2}\right)\right) = 1$$

+) Xét $\frac{m}{2}$ lẻ:

$$1 = f\left(f\left(\frac{m}{2}\right)\right) = f\left(\frac{m}{2} + 3\right) = \frac{\frac{m}{2} + 3}{2} \Leftrightarrow m = -2$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

+) Xét $\frac{m}{2}$ chẵn:

$$1 = f\left(f\left(\frac{m}{2}\right)\right) = f\left(\frac{m}{4}\right)$$

Ta dễ dàng thấy $\frac{m}{4}$ chẵn, khi đó:

$$1 = f\left(\frac{m}{4}\right) = \frac{m}{8} \Leftrightarrow m = 8$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy $m = 1; -2; 8$ thỏa mãn đề bài.

b)

Kế thừa các trường hợp ở câu a):

- Nếu m lẻ:

$$f(f(f(m))) = f(f(m+3)) = f\left(\frac{m+3}{2}\right) = k$$

+) Xét $\frac{m+3}{2}$ lẻ:

$$k = \frac{m+3}{2} + 3 \text{ (loại)}$$

+) Xét $\frac{m+3}{2}$ chẵn:

$$k = \frac{m+3}{4} \Leftrightarrow m = 4k - 3$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

- Nếu m chẵn:

$$f(f(f(m))) = f\left(f\left(\frac{m}{2}\right)\right) = k$$

+) Xét $\frac{m}{2}$ lẻ:

$$k = \frac{\frac{m}{2} + 3}{2} \Leftrightarrow m = 4k - 6$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

+) Xét $\frac{m}{2}$ chẵn:

$$k = f\left(\frac{m}{4}\right)$$

*TH1: $\frac{m}{4}$ chẵn, khi đó:

$$k = \frac{m}{8} \Leftrightarrow m = 8k$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

*TH2: $\frac{m}{4}$ lẻ, khi đó:

$$k = \frac{m}{4} + 3 \text{ (loại)}$$

Vậy có đúng 3 số nguyên m thỏa mãn $f(f(f(m))) = k$ là $m = 4k - 3; 4k - 6; 8k$

c)

- Nếu m lẻ:

$$f(f(f(m))) = f(f(m+3)) = f\left(\frac{m+3}{2}\right) = k$$

+) Xét $\frac{m+3}{2}$ lẻ:

$$k = \frac{m+3}{2} + 3 \Leftrightarrow m = 2k - 9$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

+) Xét $\frac{m+3}{2}$ chẵn:

$$k = \frac{m+3}{4} \Leftrightarrow m = 4k - 3$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

- Nếu m chẵn:

$$f(f(f(m))) = f\left(f\left(\frac{m}{2}\right)\right) = k$$

+) Xét $\frac{m}{2}$ lẻ:

$$k = \frac{\frac{m}{2} + 3}{2} \Leftrightarrow m = 4k - 6$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

+) Xét $\frac{m}{2}$ chẵn:

$$k = \frac{m}{4}$$

*TH1: $\frac{m}{4}$ chẵn, khi đó:

$$k = \frac{m}{8} \Leftrightarrow m = 8k$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

*TH2: $\frac{m}{4}$ lẻ, khi đó:

$$k = \frac{m}{4} + 3 \Leftrightarrow m = 4k - 12$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy có đúng 5 số nguyên m thỏa mãn $f(f(f(m))) = k$ là:

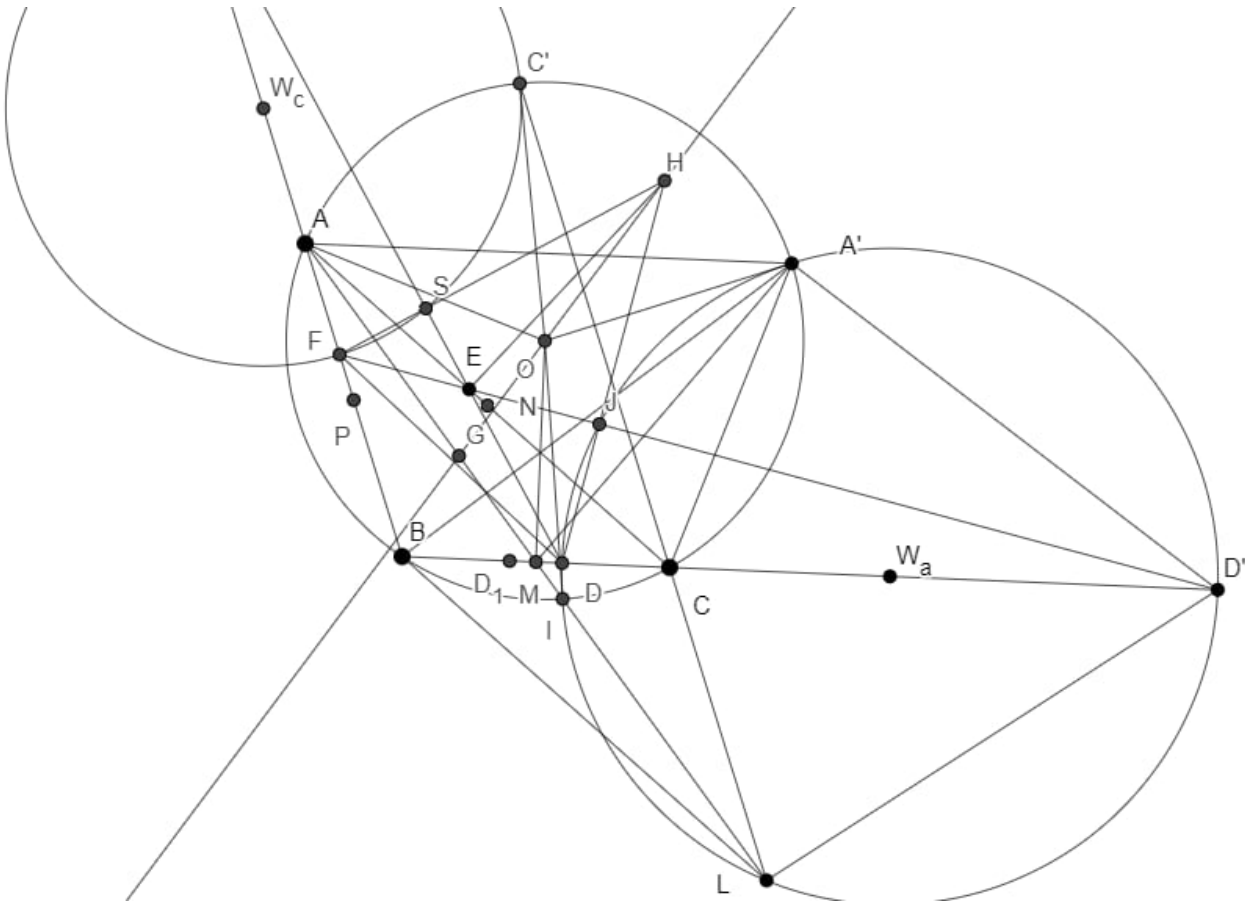
$$m \in \{2k - 9; 4k - 3; 8k; 4k - 12; 4k - 6\}$$

Bài 6. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) có trọng tâm G . Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Điểm A' thuộc (O) sao cho $AA' \parallel BC$. Gọi D, E, F là điểm đối xứng với chân đường phân giác từ góc A, B, C qua M, N, P . EF cắt BC tại D' . ω_A là tâm đường tròn đường kính DD' .

- Chứng minh OA' tiếp xúc với (ω_A) tại A' .
- Tính $\frac{\mathcal{P}_{G/(O)}}{\mathcal{P}_{G/(\omega_A)}}$.
- Chứng minh trực tâm tam giác DEF nằm trên OG .

Lời giải. (Vũ Duy Hải, Nguyễn Võ Thiên Lộc)



a)

Gọi D_1 là chân đường phân giác của BAC . Ta có: $\frac{D_1B}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$

Dễ có được: $\frac{D_1B}{D_1C} = \frac{DC}{DB}$. Suy ra: $\frac{AB}{AC} = \frac{DC}{DB}$.

Tương tự, ta cũng có được: $\frac{CA}{CB} = \frac{FB}{FA}$ và $\frac{BC}{BA} = \frac{EA}{EC}$

Áp dụng định lý Ceva, ta có:

$$\frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{BC}{BA} = 1$$

Suy ra: AD, BE, CF đồng quy $\Rightarrow (BC, DD') = -1$

Vì $AA'CB$ là hình thang cân, nên: $AB = A'C$ và $AC = A'B$

Do đó: $\frac{AB}{AC} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{A'C}{A'B} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow A'D$ là phân giác của $\angle BA'C$

Mà $(BCDD') = -1$ và ω_a là trung điểm DD' , rõ ràng ω_a là tâm A' -Apollonius của $\triangle BA'C$

Suy ra: WA' là tiếp tuyến của (O) đồng thời OA' tiếp xúc với (ω_a)

b)

Từ O kẻ tiếp tuyến OI đến (ω_a) . Có: $\triangle OA'\omega_a = \triangle OI\omega_a \Rightarrow OA' = OI \Rightarrow I \in (O)$

Xét tứ giác $OMI\omega_a$, có: $\angle OMD' = \angle OI\omega_a = 90^\circ$

Suy ra: tứ giác $OMI\omega_a$ nội tiếp. Kết hợp với tứ giác $OA'\omega_a I$ nội tiếp, ta có được cái điểm O, A', ω_a, I, M đồng viên $\Rightarrow IMOA'$ nội tiếp

Gọi I' là giao điểm của AM và (O) . Ta có: $\angle OIM = \angle OA'M = \angle OAM = \angle OI'M$

Do đó: $I' \equiv I$, hay ba điểm A, M, I thẳng hàng.

Gọi L là đối xứng của A qua M . Khi đó tứ giác $ACLB$ là hình bình hành

Suy ra: $BL = AC = BA'$ và $CL = AB = CA' \Rightarrow A', L$ đối xứng với nhau qua BC hay BC là đường trung trực của $A'L$, đồng nghĩa với L nằm trên (ω_a)

Ta có: $\frac{GA}{GL} = \frac{\frac{2}{3}MA}{MG + ML} = \frac{\frac{2}{3}MA}{\frac{1}{3}MA + MA} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\mathcal{P}_{G/(O)} = \overline{GA} \cdot \overline{GI}$ và $\mathcal{P}_{G(\omega_a)} = \overline{GI} \cdot \overline{GL} \Rightarrow \frac{\mathcal{P}_{G/(O)}}{\mathcal{P}_{G(\omega_a)}} = \frac{\overline{GA}}{\overline{GL}} = -\frac{1}{2}$

c)

Gọi H là trực tâm của $\triangle DEF$, J, K là giao của HD với FE và DE và HF

Gọi F' là giao điểm của DE và AB , (ω_c) là đường tròn đường kính FF'

Ta có được: $J \in (\omega_a)$ và $K \in (\omega_c)$. Có: $\overline{HJ} \cdot \overline{HD} = \overline{HK} \cdot \overline{HP}$. Do H thuộc trục đẳng phương (ω_a) và (ω_c)

Tương tự câu a, trên (O) lấy C' sao cho $CC' \parallel AB$

Khi đó, có được: OC' tiếp xúc với (ω_c) mà $OA'^2 = OC'^2$, nên: O thuộc trục đẳng phương (ω_a) và (ω_c)

Tương tự câu b, ta cũng có được: G thuộc trục đẳng phương (ω_a) và (ω_c)

Suy ra: O, G, H thẳng hàng.

Bài 7. (5 điểm)

Tìm tất cả hàm số $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

i) $f(2024x^2) \leq 2024f(g(x)), \forall x > 0.$

ii) $f(x + y^2) \geq f(g(y)) + \frac{y^2 f(x)^3}{g(yf(x))}, \forall x, y > 0.$

Lời giải. (Nguyễn Võ Thiên Lộc)

Giả sử tồn tại hàm số f, g thỏa mãn bài toán

Giả sử tồn tại $y_0 > 0$ để $g(y) > y_0^2$

Từ ii) thay $x \rightarrow g(y_0) - y_0^2; y \rightarrow y_0$, ta có:

$$f(g(y_0)) \geq f(g(y_0)) + \frac{y_0^2 f(g(y_0) - y_0^2)}{g(y_0) f(g(y_0) - y_0^2)}$$

Điều này là vô lý.

Do đó ta có:

$$g(x) \leq x^2, \forall x > 0$$

Từ ii) ta có:

$$f(x + y^2) \geq f(g(y)) + f(x), \forall x, y > 0$$

$$\text{Mà } f(g(y)) + f(x) \geq \frac{f(2024y)}{2024} + f(x), \forall x, y > 0$$

Từ đó ta có:

$$f(x + y) \geq \frac{f(2024y)}{2024} + f(x), \forall x, y > 0 \quad (1)$$

Từ (1) ta thay $x \rightarrow 2023y$ ta có:

$$\frac{f(2024y)}{2024} \geq \frac{f(2023y)}{2023}, \forall y > 0$$

Từ (1) ta có:

$$f(x + y) \geq \frac{f(2023y)}{2023} + f(x), \forall x, y > 0$$

Làm tương tự, ta sẽ có:

$$f(x) = \frac{f(2024y)}{2024} \geq \frac{f(2023x)}{2023} \geq \dots \geq \frac{f(2x)}{2} \geq f(x), \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(x + y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y > 0 \text{ Do đó ta có } f \text{ tăng} \Rightarrow f(nx) \geq nf(x), \forall x > 0$$

$$\text{Ta có } f(x) \geq \frac{f(2024x)}{2024} \geq f(x), \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(2024x) = 2024f(x), \forall x > 0$$

Từ i) suy ra:

$$f(x^2) \leq f(g(x)), \forall x > 0$$

$$\Rightarrow x^2 \leq g(x) \leq x^2, \forall x > 0 \Rightarrow g(x) = x^2, \forall x > 0$$

Ta đã chứng minh được:

$$f(x) = \frac{f(2024x)}{2024} \geq \frac{f(2023x)}{2023} \geq \dots \geq \frac{f(2x)}{2} \geq f(x), \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f(nx) = nf(x), \forall x > 0; n = \overline{1; 2024}$$

Từ i) thay $x \rightarrow 2x$, ta có:

$$f(2024.2x) \leq 2024.2f(x), \forall x > 0$$

Quy nạp ta có:

$$f(2024.2^n x) \leq 2024.2^n f(x) \leq f(2024.2^n x), \forall x > 0; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow f(x).2024.2^n = f(2024.2^n x), \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}^+$$

Với $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $f(kx) = kf(x), \forall x > 0$ (*)

Ta có:

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y) = \frac{f(kx)}{k} + f(y), \forall x, y > 0; k \in \mathbb{Z}^+$$

Thay $y \rightarrow (k-1)x$, ta có:

$$f(kx) \geq \frac{f(kx)}{k} + f((k-1)x), \forall x > 0, k \in \mathbb{Z}^+ (**)$$

$$\Rightarrow (k-1)f(x) \geq f((k-1)x) \geq (k-1)x, \forall x > 0; k \in \mathbb{Z}^+$$

Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2024.2^n = +\infty$ nên kết hợp (*) và (**) ta có:

$$f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}^*; x > 0$$

Đặt $f(1) = a > 0$, ta có:

$$f(n) = an, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow a = f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a \cdot \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Với p, q là số nguyên dương bất kì, ta có:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = p \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) = a \cdot \frac{p}{q}, \forall p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}^+$$

Mà $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$f(x) = ax, \forall x > 0; a \text{ là hằng số thực dương}$$

Thử lại, ta kết luận: $f(x) = ax, \forall x > 0, a$ là hằng số thực dương; $g(x) = x^2, \forall x > 0$.

Bài 8. (5 điểm)

Trong buổi sinh hoạt ngoại khóa, có 100 cái ghế được xếp thành hai hàng tạo thành 50 cặp đối diện nhau. Cô giáo cho 100 em học sinh ngồi vào các ghế, mỗi ghế có đúng một học sinh.

- Giả sử mỗi học sinh chỉ quen với người ngồi bên cạnh hoặc đối diện mình. Hỏi cần chọn ít nhất bao nhiêu em sao cho mỗi em không được chọn thì quen với ít nhất một em được chọn?
- Giả sử có một học sinh nào đó đi ra ngoài và bỏ lại một ghế trống. Cô giáo sẽ chọn một học sinh tùy ý ở hàng không có ghế trống đến ngồi vào ghế đang trống. Cô có thể thực hiện thao tác như thế nhiều lần. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần, cô giáo không thể xếp vị trí của các bạn học sinh sao cho em nào cũng ngồi vào chiếc ghế đối diện với chiếc ghế mình ngồi ban đầu.

Lời giải. *Cách 1: (Bùi Tùng Lâm)*

a)

Ta có thể đưa mô hình bài toán thành như sau:

"Cho một bảng hình vuông 2×50 và mỗi khi ta tô một ô thì các ô chung cạnh với nó cũng được tô theo, tìm số ô được tô nhỏ nhất để các ô đều được tô màu."

Ta nhận xét rằng mỗi ô được tô sẽ tạo thành nhiều nhất 4 ô được tô tính cả ô đó, và với mỗi ô được tô thì ở hàng đối diện nó chỉ có đúng 1 ô được tô. Số ô được tô ít nhất là 25. Nhưng vì theo Nguyên lý Dirichlet nên tồn tại một hàng có ít nhất 13 lần tô, nên ở hàng còn lại chỉ có nhiều nhất 12 lần tô, nên số ô ở hàng đó sẽ có giá trị lớn nhất là 49 (sai).

Vì vậy số ô được tô ít nhất phải là 26.

b)

Ta đánh số các ô từ $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ theo thứ tự sau:

a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{49}	a_{50}
a_{100}	a_{99}	a_{98}	$\dots$	a_{52}	a_{51}

Ban đầu, ta viết số i ở vị trí a_i , sau khi đổi chỗ, ta có $(a_1, a_2, \dots, a_{100})$ là bộ $(100; 99; \dots; 1)$.

Ta xét một cặp là "nghịch thế" là một cặp thỏa mãn tính chất $a_i > a_j, i < j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 100$). Số cặp "nghịch thế" ban đầu là 0, số cặp "nghịch thế" lúc sau là 4950. Giả sử ghế bị trống là a_j , có thể định nghĩa lại mỗi lần ngồi vào ghế trống là a_j sẽ đổi chỗ với một người nào đó. Dễ dàng chứng minh được mỗi lần đổi chỗ, số cặp "nghịch thế" thay đổi lẻ lần, và vì đến cuối cùng a_j ngồi đối diện với vị trí ban đầu nên số lần đổi chỗ là lẻ lần. Mà số cặp "nghịch thế" thay đổi là chẵn lần từ ban đầu đến lúc cuối cùng, điều này là không thể xảy ra.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Cách 2: (Lê Trung Kiên)

Xét đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với $V = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và tập cạnh được định nghĩa như sau:

$$E = \{(i; i-1), (i; i+1) \mid 1 < i < 100\} \cup \{(i; i+50) \mid 2 < i < 49\}$$

(i đại diện cho vị trí ngồi của từng ghế trong số 100 ghế, với i nhận các giá trị từ 1 đến 100. Mỗi học sinh sẽ ngồi trên một ghế với chỉ số tương ứng i , tức là học sinh đầu tiên ngồi ở ghế 1, học sinh thứ hai ngồi ở ghế 2, và cứ tiếp tục cho đến học sinh thứ 100 ngồi ở ghế 100.)

Gọi ghế trống là T . Sau mỗi lần di chuyển, khi 1 học sinh K ngồi vào ghế trống T , ta cập nhật trạng thái của đồ thị:

$$G' = (V', E') \text{ với } V' = V \text{ và } E' = E \cup \{(K, T)\}$$

Khi này ta giả sử sau hữu hạn lần thao tác của giáo viên, tất cả học sinh có thể ngồi ở ghế đối diện với ghế của mình lúc đầu. Mỗi học sinh K_i ban đầu ngồi ở ghế i sau hữu hạn bước di chuyển sẽ ngồi ở ghế $i+50$. Suy ra trạng thái cuối cùng $(K_i; i+50)$. Khi một học sinh K_j từ hàng không có ghế trống ngồi vào ghế trống T , ta cần lưu ý rằng K_j chỉ có thể ngồi vào 1 ghế trống tại 1 thời điểm. Do đó nếu ghế trống di chuyển liên tục, nó sẽ luôn tạo ra một trạng thái không đủ ghế trống cho tất cả học sinh để đạt được vị trí đối diện. Về lý thuyết sẽ luôn tồn tại ít nhất một học sinh mà không có ghế trống phù hợp để ngồi ở vị trí đối diện, tức với mọi i , K_i không thể quay lại ghế đối diện $i+50$.

Như vậy, điều giả sử là sai, nên sau một số hữu hạn lần, cô giáo không thể xếp vị trí của các bạn học sinh sao cho em nào cũng ngồi vào chiếc ghế đối diện với chiếc ghế mình ngồi ban đầu.