LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: P5, Dãy 14 tập thể xã tắc. Đường Ngô Thời Nhậm

CS 2: Trung Tâm Cao Thắng- 11 Đống Đa

BÀI GIẢNG CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

TOÁN 10

Tập 2: HÌNH HỌC

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

CHƯƠNG I. VECTƠ

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm vectơ

2. Vec tơ cùng phương, vecto cùng hướng

Định nghĩa. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

3. Hai vectơ bằng nhau

Mỗi vectơ có một độ dài, đó là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$

Chú ý. Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

4. Vectơ – không

Ta biết rằng mỗi vectơ có một điểm đầu và một điểm cuối và hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.

Bây giờ với một điểm A bất kì ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là A. Vectơ này được kí hiệu là $\overrightarrow{AA}$ và được gọi là vectơ – không.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác Định Một Vectơ; Phương, Hướng Của Vectơ; Độ Dài Của Vectơ

1. *Phương* pháp giải.

- Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa
- Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCDE$**.** Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn $A,\ B$ ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh $A,\ B,\ C,\ D$ của ngũ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Nếu A, B, C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A, B, C nên $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B.

Lời giải (Hình 1.4)

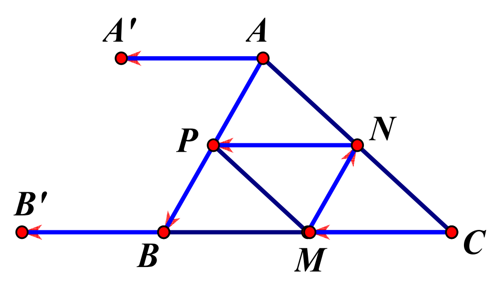
a) Các vectơ khác vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{PA},\ \overrightarrow{BP},\ \overrightarrow{PB}$.

b) Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{PB},\ \overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vectơ có điểm đầu là B và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.



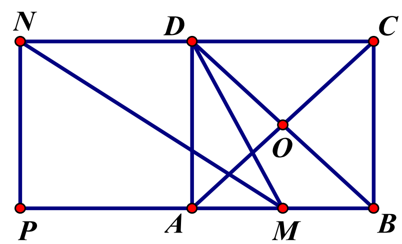
Hình 1.4

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ có điểm đầu là A và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của vectơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có



Hình 1.5

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Dạng 2: chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

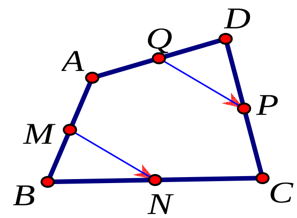
2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN//AC$ và $MN=\frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP//AC$ và $QP=\frac{1}{2}AC$ (2).



Hình 1.6

Từ (1) và (2) suy ra $MN//QP$ và $MN=QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$.

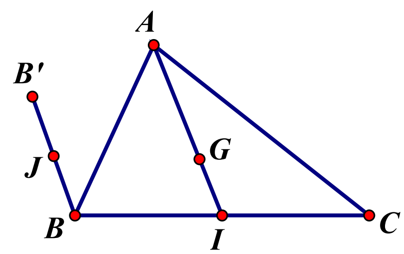
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI=CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B=AG$ và $BB'//AG$.



Hình 1.7

Do đó $\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG=\frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ=\frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ=IG$ (2)

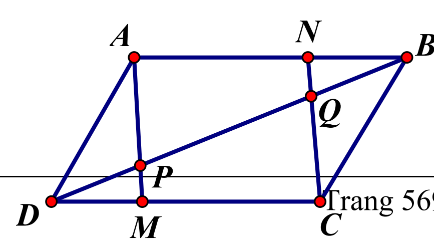
Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{IG}$.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{QB}$.

Lời giải (hình 1.8)

Ta có $DM=BN\Rightarrow AN=MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$.



Hình 1.8

Xét tam giác ΔDMP và ΔBNQ ta có $DM = NB$ (giả thiết), $\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$ (so le trong)

Mặt khác $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) và $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$ (hai góc đồng vị) suy ra $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$.

Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Vectơ có điểm đầu là D, điểm cuối là E được kí hiệu là

A. DE. **B.** $\left|\overrightarrow{DE}\right|$. **C.** $\overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn bài toán là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \longrightarrow$ có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D.

Câu 4: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.

B. Có ít nhất hai vectơ có cùng phương với mọi vectơ.

C. Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.

D. Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn A

Vì vectơ - không cùng phương với mọi vectơ.

Câu 5: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó:

A. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

B. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

C. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn B

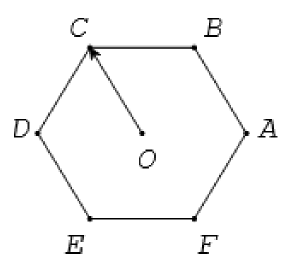
Câu 7: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.



Câu 8: Với $\overrightarrow{DE}$ (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

A. Phương của $\overrightarrow{ED}$. **B.** Hướng của $\overrightarrow{ED}$.

C. Giá của $\overrightarrow{ED}$. **D.** Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. **B.** $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| > 0$. **D.** $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn C

Vì có thể xảy ra trường hợp $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0 \Leftrightarrow A \equiv B.$

Câu 10: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

Chọn D

Câu 11: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và không cùng nằm trên một đường thẳng. Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

C. $AC = BD.$ **D.** $AB = CD.$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|.$ **D.** $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

Phải suy ra $ABDC$ là hình bình hành (nếu A, B, C, D không thẳng hàng) hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 13: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$ **B.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}.$ **C.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}.$ **D.** $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$

Lời giải

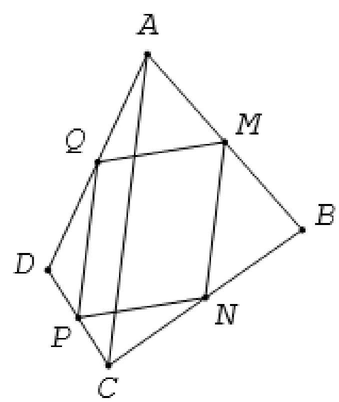
Chọn C

Câu 14: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. **B.** $\left|\overrightarrow{QP}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right|$. **C.** $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} MN \,//\, PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 15: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C

Vì $AB = BC \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Câu 16: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.

C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. **D.** $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Lời giải

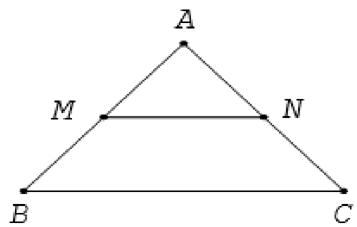
Chọn D

Câu 17: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.$ **C.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|.$

Lời giải

Chọn D



Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Do đó $BC=2MN\longrightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|.$

Câu 18: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $\overrightarrow{AM}=a.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

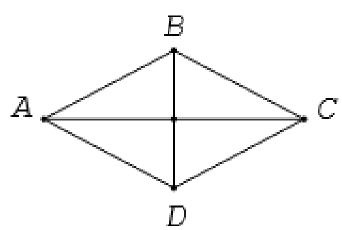
Chọn D

Câu 19: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{BD}\right|=a.$ **C.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}.$

Lời giải

Chọn B



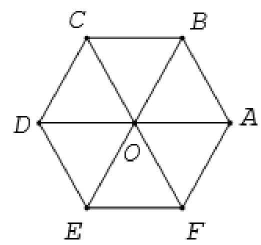
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD=a\longrightarrow\left|\overrightarrow{BD}\right|=a.$

Câu 20: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|.$ **C.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}.$

Lời giải

Chọn D



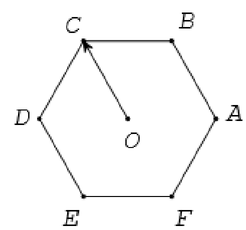
Câu 21: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.



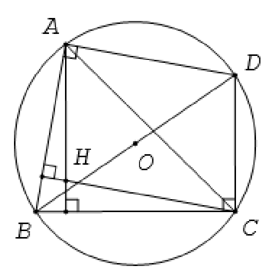
Câu 22: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. **D.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Câu 23: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \Leftrightarrow AB = CD$. Suy ra tập hợp các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm C, bán kính AB.

Câu 24: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

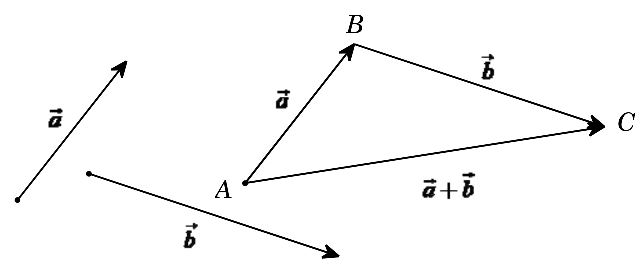
BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Tổng của hai vectơ

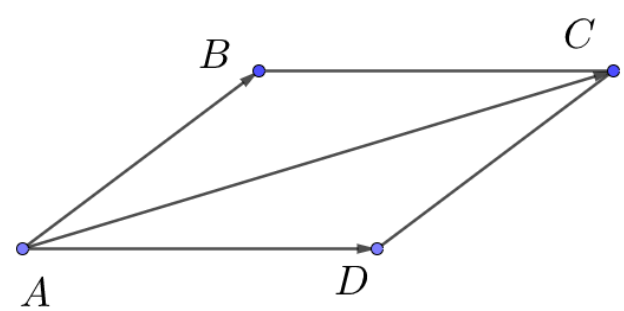
Định nghĩa. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$ Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{BC}=\vec{b}.$ Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$ Ta kí hiệu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\vec{a}+\vec{b}.$ Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$

Phép toán tìm tổng của hai vectơ còn được gọi là **phép cộng vectơ**.



2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$



3. Tính chất của phép cộng các vectơ

Với ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý ta có
• $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
• $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (tính chất kết hợp);
• $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$ (tính chất của vectơ – không).

4. Hiệu của hai vectơ

a) Vectơ đối

Cho vectơ $\vec{a}$. Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a},$ kí hiệu là $-\vec{a}.$

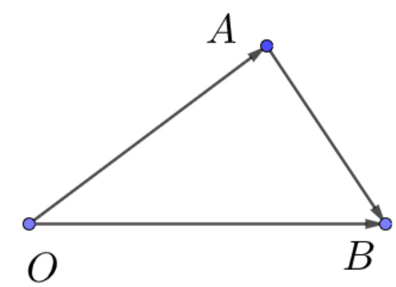
Mỗi vectơ đều có vectơ đối, chẳng hạn vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA},$ nghĩa là $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}.$

Đặc biệt, vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

b) Định nghĩa hiệu của hai vectơ

Định nghĩa. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$. Như vậy $\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)}$.

Từ định nghĩa hiệu của hai vectơ, suy ra với ba điểm $O,\ A,\ B$ tùy ý ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.



Chú ý

1) Phép toán tìm hiệu của hai vectơ còn được gọi là phép trừ vectơ.

2) Với ba điểm tùy ý $A,\ B,\ C$ ta luôn có

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc ba điểm);

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

Thực chất hai quy tắc trên được suy ra từ phép cộng vectơ.

5. Áp dụng

a) Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b) Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: xác định độ dài tổng, hiệu của các vectơ.

1. Phương pháp giải.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vectơ

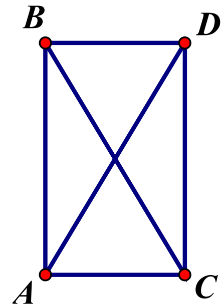
- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vectơ và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vectơ đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lí Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vectơ đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^0$ và $BC=a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.10)



Hình 1.10

Theo quy tắc ba điểm ta có

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Mà $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}$

$\Rightarrow AC=BC.\sin\widehat{ABC}=a\sqrt{5}.\sin 30^0=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Ta có $AC^2+AB^2=BC^2\Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{5a^2-\dfrac{5a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD=BC=a\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=a\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$, $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

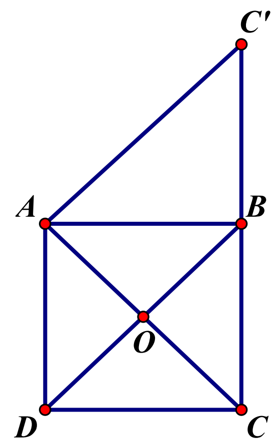
Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Áp dụng định lí Pitago ta có
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{2}$



Hình 1.11

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ suy ra
$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$

Vậy $\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = a$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ suy ra
$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ suy ra $\left|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}\right| = a\sqrt{2}$

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$\vec{u} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác $ADBC'$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC'}$

Do đó $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $\left|\vec{u}\right| = \left|\overrightarrow{CC'}\right| = BC + BC' = a + a = 2a$

Dạng 2: chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vectơ ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vectơ.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)\\ &= \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}\\ &= \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

$= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP$ ĐPCM

b) Đẳng thức tương đương với

$$\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$

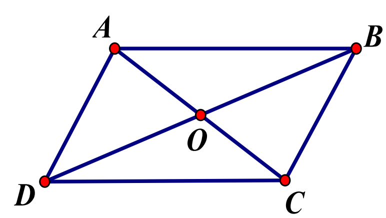
$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.



Hình 1.12

Lời giải (Hình 1.12)

a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ suy ra

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành)

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN // BM$, $MN // BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

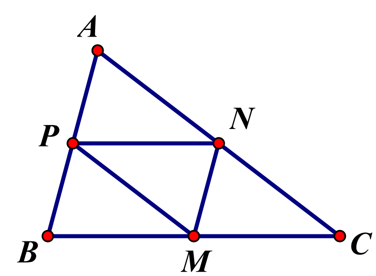
$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \left(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}\right) + \overrightarrow{AP}$

$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$



Hình 1.13

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$
$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$
$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba điểm $A,\ B,\ C$ phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}.$

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}.$ **D.** $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. Vậy B đúng.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CB}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy C sai.

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\neq\overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Câu 2: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng độ dài. **D.** Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a}=-\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$. Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy B sai.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. Vậy C đúng.

Câu 4: Cho $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.

C. $ABCD$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$. Do đó:

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.
- $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng giá.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Câu 5: Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{PR}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 6: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. $IA=IB$. **B.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. **C.** $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB?

A. $IA=IB$. **B.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.

Lời giải

Chọn B.

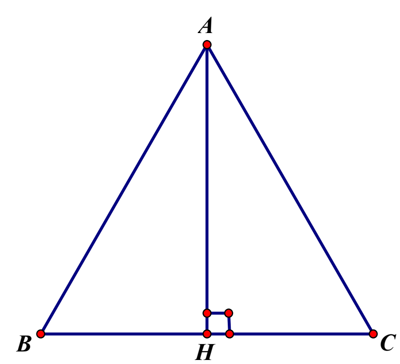
Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{HB}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{HC}$.

Lời giải

Chọn A.



Tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Do đó, H là trung điểm BC.
Ta có:

- $AB = AC \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$

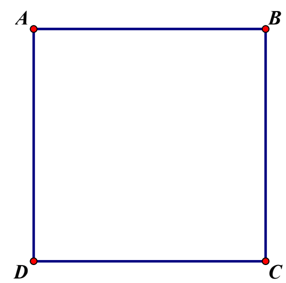
- H là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC} \end{cases}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

Lời giải

Chọn D.



$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

Câu 10: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.

D. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Chọn D.

Với ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên một đường thẳng, đẳng thức $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow AB + BC = AC$ xảy ra khi B nằm giữa A và C.

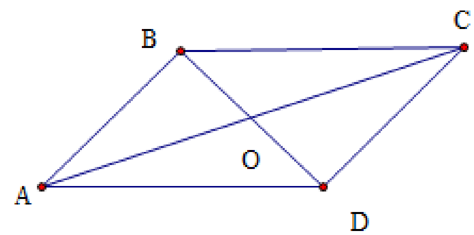
Câu 11: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. **D.** $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.
- Đáp án B. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.
- Đáp án D. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$. Vậy D đúng.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}.$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$

Câu 13: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}.$

C. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.$ **D.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$ **B.** $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a.$ **D.** $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Độ dài các cạnh của tam giác là a thì độ dài các vectơ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a$.

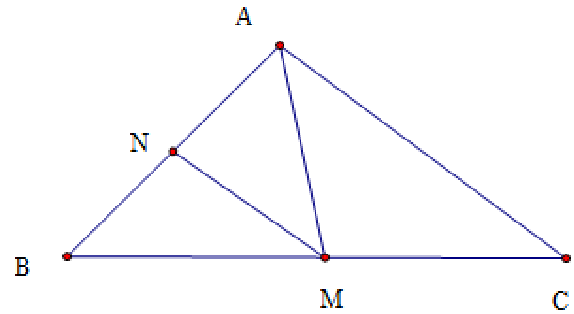
Câu 15: Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}.$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}.$

Lời giải

Chọn A.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ (theo quy tắc ba điểm).
- Đáp án B, C. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}$
  (với điểm N là trung điểm của AB).
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

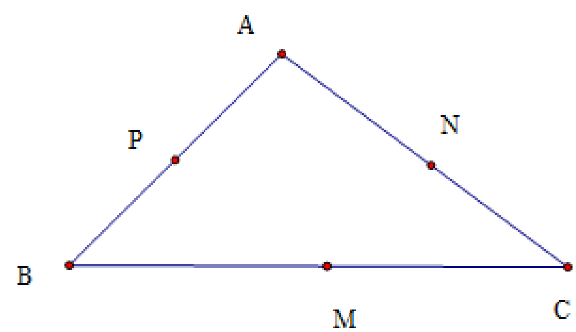
Câu 16: Cho tam giác ABC với M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}.$

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

  $=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MM}=\vec{0}.$

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}.$

Câu 17: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB+BC=AC.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|.$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn B.

Đáp án A chỉ đúng khi ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

Đáp án B đúng theo quy tắc ba điểm.

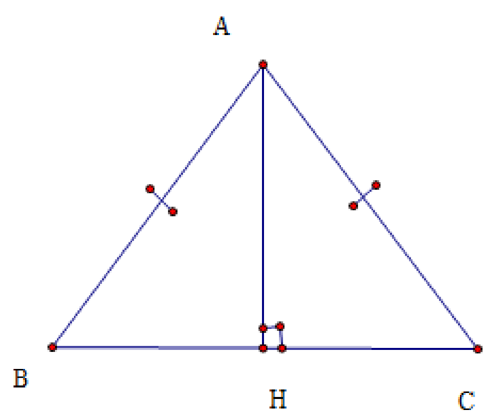
Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB=AC$ và đường cao AH. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}.$ **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn C.



Do ΔABC cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC .

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AH}.$

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\vec{0}=\overrightarrow{HA}\neq\vec{0}.$

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ (do H là trung điểm BC).

• Đáp án D. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AC}.$

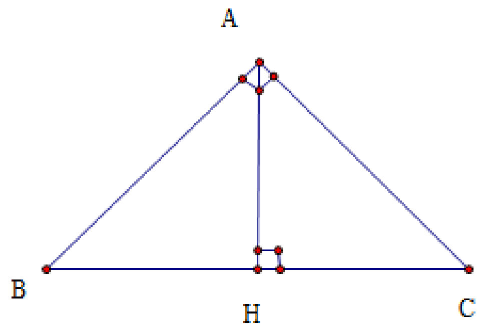
Câu 19: Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right|=\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|.$ **B.** $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right|.$

Lời giải

Chọn B.



Do ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên H là trung điểm BC.
Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = a \\ \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = a \end{cases}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|$.

• Đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CH}=-\overrightarrow{BH} \end{cases}$. Do đó B sai.

• Đáp án C. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{AC} \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}$.

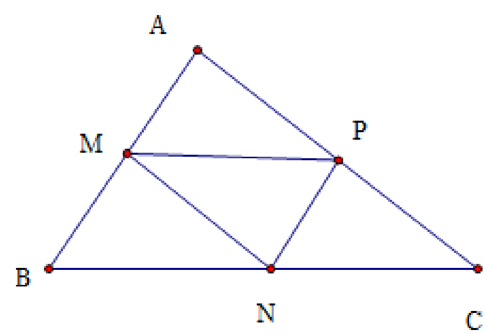
• Đáp án D. Ta có $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right| = \left|\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AH}\right|$ (do ΔABC vuông cân tại A).

Câu 20: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Hỏi vectơ $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{AP}$. **B.** $\overrightarrow{BP}$. **C.** $\overrightarrow{MN}$. **D.** $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NB}$.

Lời giải

Chọn B.



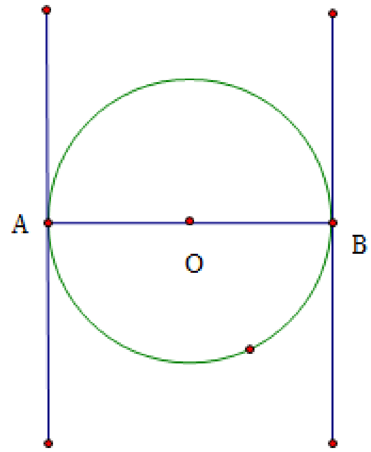
Ta có $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BM} \longrightarrow \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}$.

Câu 21: Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với (O) tại hai điểm A và B. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OB}$. **C.** $OA=-OB$. **D.** $AB=-BA$.

Lời giải

Chọn A.



Do hai tiếp tuyến song song và A, B là hai tiếp điểm nên AB là đường kính.

Do đó O là trung điểm của AB.

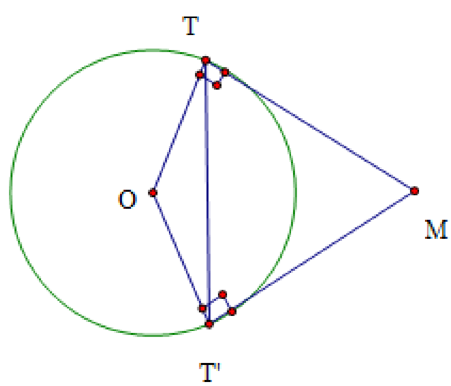
Suy ra $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Câu 22: Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến MT, MT' (T và T' là hai tiếp điểm). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MT'}$. **B.** $MT + MT' = TT'$. **C.** $MT = MT'$. **D.** $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OT'}$.

Lời giải

Chọn C.



Do MT, MT' là hai tiếp tuyến (T và T' là hai tiếp điểm) nên $MT = MT'$.

Câu 23: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A.

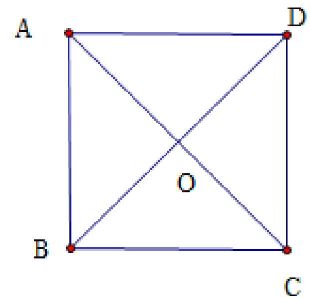
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 24: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$. **B.** $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$. **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$. **D.** $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$.

• Đáp án B. Ta có $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$.

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=-\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=-\overrightarrow{CA}$.

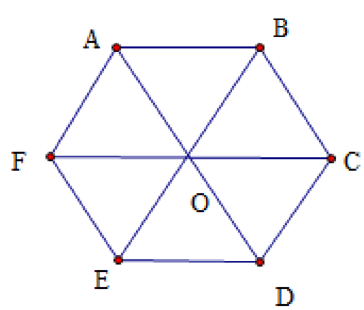
Câu 25: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có

- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. Do đo A đúng.

- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$. Do đo B đúng.

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}\right)+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$ Do đó C đúng.

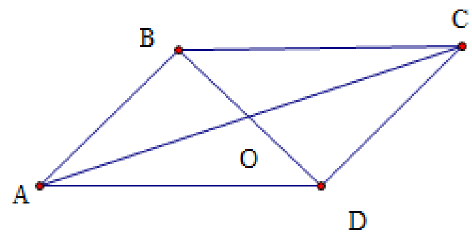
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 26: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{BA}.$ **B.** $\overrightarrow{BC}.$ **C.** $\overrightarrow{DC}.$ **D.** $\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

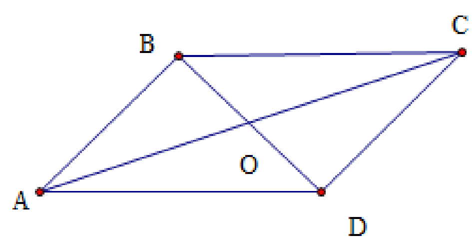
Câu 27: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$

C. $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}.$

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}.$

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

• Đáp án C. Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD\\ \left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD\end{cases}.$

• Đáp án D. Do $\overrightarrow{CD}\neq\overrightarrow{CB}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)\neq\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right).$

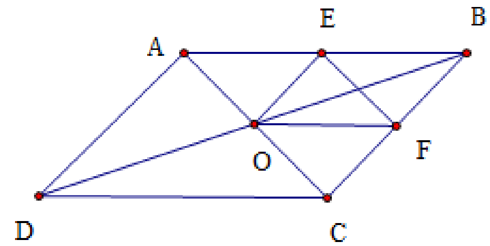
Câu 28: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EO}.$ **B.** $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EO}.$

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có OF, OE lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔBCD và ΔABC.

$\Rightarrow BEOF$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO}\Rightarrow\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BD}.$

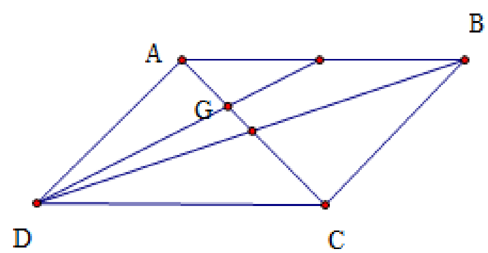
Câu 29: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{CD}$.

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$. **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

$\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}.$

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BD}.$

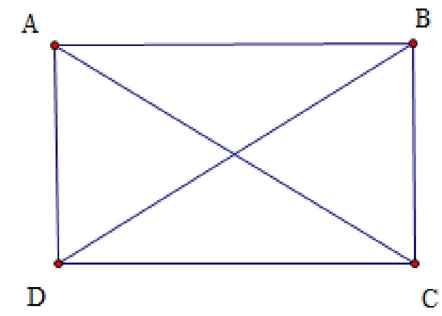
Câu 30: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right| = BD \\ \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC \end{cases}.$

Mà $BD = AC \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|.$

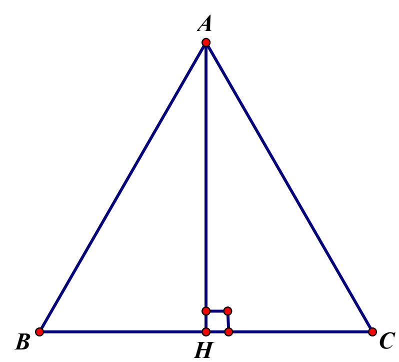
Câu 31: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2a.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2a\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC.$

Suy ra $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ta lại có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AH}\right| = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$

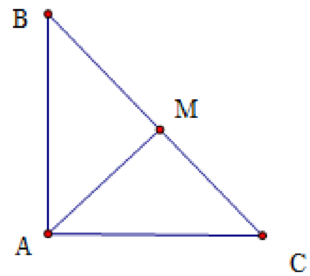
Câu 32: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{2}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2a.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = a.$

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm $BC \longrightarrow AM = \frac{1}{2}BC.$

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = BC = a\sqrt{2}.$

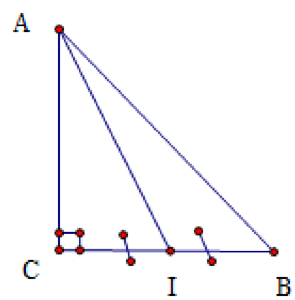
Câu 33: Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB=\sqrt{2}.$ Tính độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{5}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{5}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A.



Ta có $AB=\sqrt{2} \Rightarrow AC=CB=1.$

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI=\sqrt{AC^2+CI^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$

Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right|=2\left|\overrightarrow{AI}\right|=2.\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}.$

Câu 34: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=3,\ AC=4$. Tính $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=2.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{13}.$

C. $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=5.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

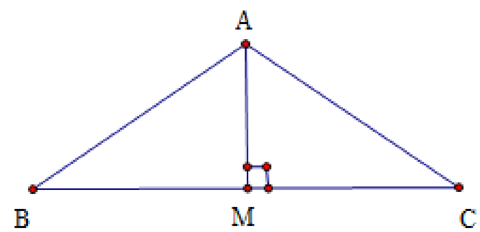
Câu 35: Tam giác ABC có $AB=AC=a$ và $\widehat{BAC}=120°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\frac{a}{2}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a.$

Lời giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm $BC\Rightarrow AM\perp BC.$

Trong tam giác vuông AMB, ta có $AM=AB.\sin\widehat{ABM}=a.\sin 30^0=\frac{a}{2}.$

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2AM=a.$

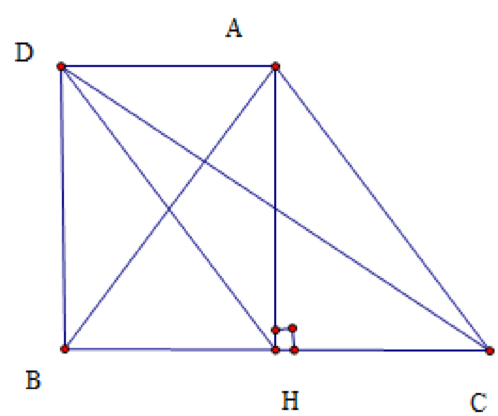
Câu 36: Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{a}{2}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{3a}{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{2\sqrt{3}a}{3}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$

Lời giải

Chọn D.



Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ACHD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AHBD$ là hình chữ nhật.

$\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=CD.$

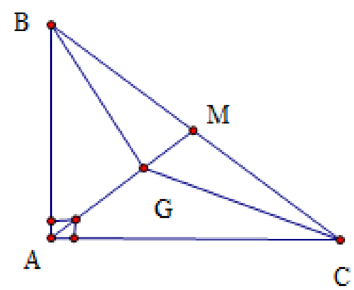
Ta có $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{AH^2+BC^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+a^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 37: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

A. $\left|\vec{v}\right|=2.$ **B.** $\left|\vec{v}\right|=2\sqrt{3}.$ **C.** $\left|\vec{v}\right|=8.$ **D.** $\left|\vec{v}\right|=4.$

Lời giải

Chọn D.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GM}\right|=2GM=2.\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}BC\right)=\dfrac{BC}{3}=4.$

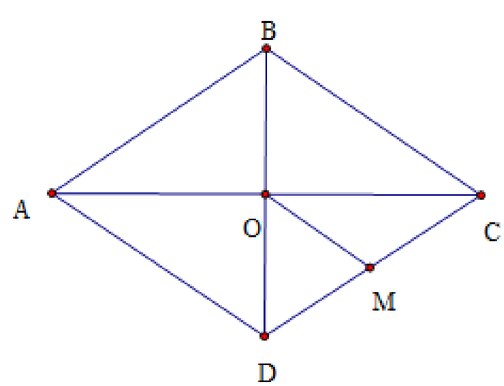
Câu 38: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2a$ và $BD=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=3a.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=a\sqrt{3}.$

C. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=a\sqrt{5}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=5a.$

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O=AC\cap BD$ và M là trung điểm của CD.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=2\left|2\overrightarrow{OM}\right|=4OM$

$=4.\frac{1}{2}CD=2\sqrt{OD^2+OC^2}=2\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=a\sqrt{5}.$

Câu 39: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=0.$

B. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=a.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=a\sqrt{2}.$

D. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=2a.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}.$

Câu 40: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a.$

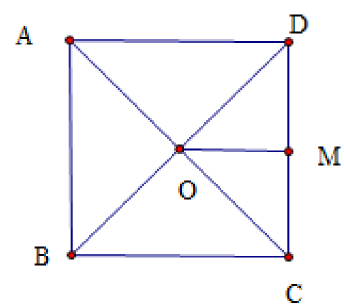
B. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a\sqrt{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{a}{2}.$

D. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2\left|\overrightarrow{OM}\right|=2OM=AB=a.$

Câu 41: Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Xác định vị trí điểm M.

A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

C. M trùng với C.

D. M là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow M\equiv G$.

Câu 42: Cho tam giác ABC. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right|$ là

A. đường thẳng AB.

B. trung trực đoạn BC.

C. đường tròn tâm A, bán kính BC.

D. đường thẳng qua A và song song với BC.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|\Rightarrow AM=BC$

Mà A,B,C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính BC.

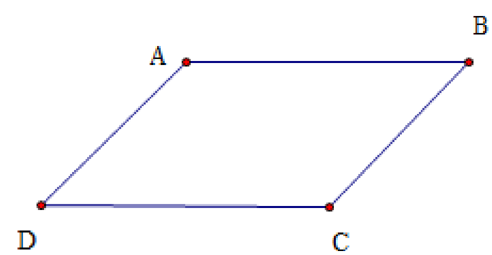
Câu 43: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là

A. một đường tròn.
B. một đường thẳng.

C. tập rỗng.
D. một đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C.



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$: vô lí

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

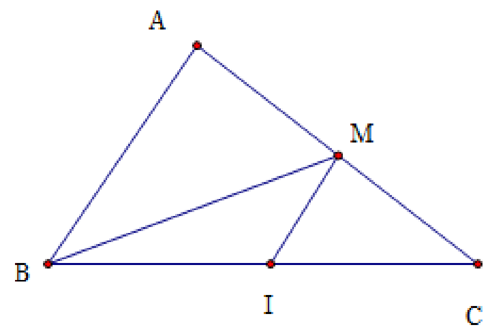
Câu 44: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

A. M là trung điểm của AC.
B. M là trung điểm của AB.

C. M là trung điểm của BC. **D.** M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MI}$ $\Rightarrow M$ là trung điểm AC.

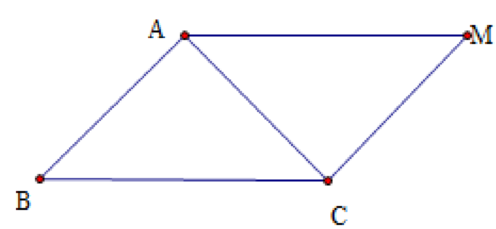
Câu 45: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $MABC$ là hình bình hành. **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$. **D.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}$.

Do đó D sai.

BÀI 3. TÍCH VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho số $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

2. Tính chất

Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có

- $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $\left(h+k\right)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h\left(k\vec{a}\right) = \left(hk\right)\vec{a}$;
- $1.\vec{a} = \vec{a}, \left(-1\right).\vec{a} = -\vec{a}$.

3. Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

a) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M thì ta có

$$\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.}$$

b) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M thì ta có

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}.}$$

4. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương là có một số k để

$$\boxed{\vec{a} = k\vec{b}.}$$

Nhận xét. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}.}$$

5. Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựng vectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a. điểm M là trung điểm BC. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$ b) $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

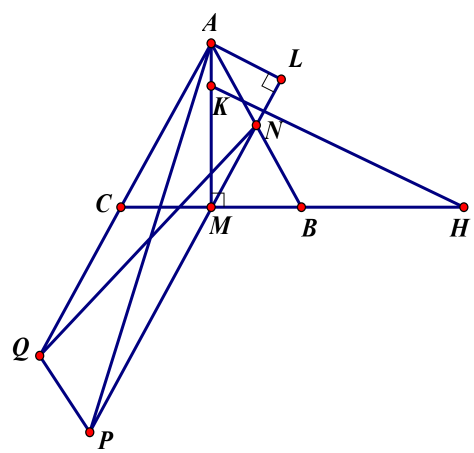
c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ c) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=CA=a$



Hình 1.14

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có

$$\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$$

Theo định lí Pitago ta có

$$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=MA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}$, $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên QN

Vì $MN//AC \Rightarrow \widehat{ANL} = \widehat{MNB} = \widehat{CAB} = 60^0$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin\widehat{ANL} = \dfrac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN.\sin\widehat{ANL} = \dfrac{a}{2}\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

$\cos\widehat{ANL} = \dfrac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN.\cos\widehat{ANL} = \dfrac{a}{2}\cos 60^0 = \dfrac{a}{4}$

Ta lại có $AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = AQ + NL = 2a + \dfrac{a}{4} = \dfrac{9a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

Vậy $\left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right| = AP = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK = \dfrac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH = 2,5MB$.

Khi đó $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MK}$, $2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}$

Do đó $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HK}$

Ta có $MK = \dfrac{3}{4}AM = \dfrac{3}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH = 2,5MB = 2,5.\dfrac{a}{2} = \dfrac{5a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông KMH ta có

$$KH = \sqrt{MH^2 + MK^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{16} + \frac{27a^2}{64}} = \frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Vậy $\left|\dfrac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}\right| = KH = \dfrac{a\sqrt{127}}{8}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh rằng $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

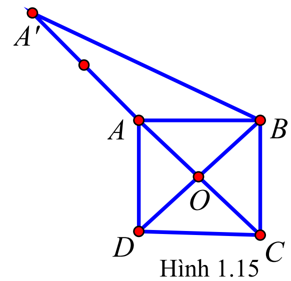
b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (Hình 1.15)

a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{u} = 4\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}\right)$$
$$= 4\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD}$$



Hình 1.15

Mà $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ nên $\vec{u} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA' = 3OA$ khi đó

$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ do đó $\vec{u} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA'}$

Mặt khác $BA' = \sqrt{OB^2 + OA'^2} = \sqrt{OB^2 + 9OA^2} = a\sqrt{5}$

Suy ra $\left|\vec{u}\right| = a\sqrt{5}$

DẠNG 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

2. Các ví dụ.

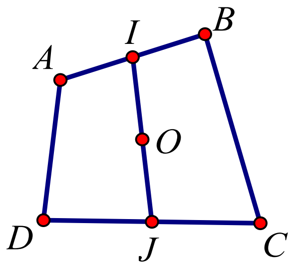
Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì

Lời giải (Hình 1.16)



Hình 1.16

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}\right) + \left(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}\right) + 2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$ đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}\right) = \vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ đpcm

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$3\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC_1}$ và $3\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB_1}$

Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}\right)$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

Suy ra $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Lời giải (Hình 1.17)

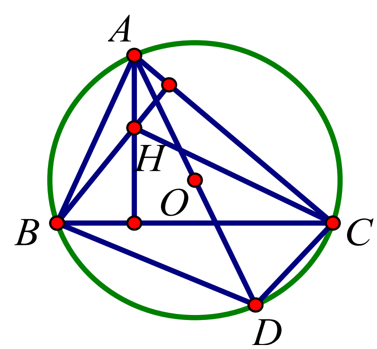
a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH//DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD//CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (1)



Hình 1.17

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$$
$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{HO}$$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ đpcm

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

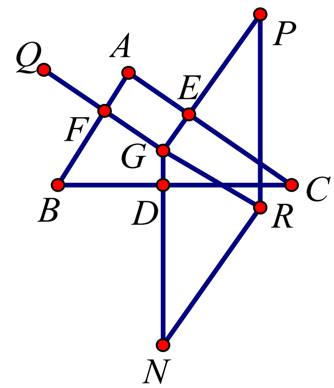
Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}\right)-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC với $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$ và có trọng tâm G. Gọi D,E,F lần lượt là hình chiếu G lên cạnh BC,CA,AB.

Chứng minh rằng $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

Lời giải (hình 1.18)

Trên tia GD, GE, MF lần lượt lấy các điểm N, P, Q sao cho $GN = a, GP = b, GQ = c$ và dựng hình bình hành $GPRN$



Hình 1.18

Ta có $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow a.GD.\overrightarrow{GN} + b.GE.\overrightarrow{GP} + c.GF.\overrightarrow{GQ} = \vec{0}$ (*)

Ta có $a.GD = 2S_{\Delta GBC}, b.GE = 2S_{\Delta GCA}, c.GF = 2S_{\Delta GAB}$, mặt khác G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{\Delta GBC} = S_{\Delta GCA} = S_{\Delta GAB}$ suy ra $a.GD = b.GE = c.GF$

Vậy (*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

Ta có $AC = GP = b, PR = BC = a$ và $\widehat{ACB} = \widehat{GPR}$ (góc có cặp cạnh vuông góc với nhau)

Suy ra $\Delta ACB = \Delta GPR(c.g.c)$

$\Rightarrow GR = AB = c$ và $\widehat{PGR} = \widehat{BAC}$

Ta có $\widehat{QGP} + \widehat{BAC} = 180^0 \Rightarrow \widehat{QGP} + \widehat{GPR} = 180^0 \Rightarrow Q, G, R$ thẳng hàng do đó G là trung điểm của QR

Theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có

$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GR} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

Vậy $a^2.\overrightarrow{GD} + b^2.\overrightarrow{GE} + c^2.\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.

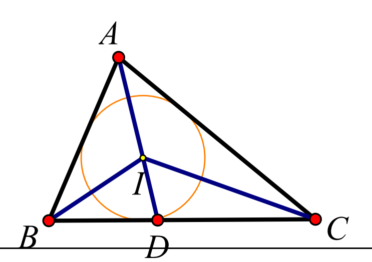
Ví dụ 5: Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Lời giải

Cách 1: (Hình 1.19)Gọi D là chân đường phân giác góc A

Do D là đường phân giác giác trong góc A nên ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB} = \frac{c}{b}\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(b + c\right)\overrightarrow{ID} = b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \text{ (1)}$$



Hình 1.19

Do I là chân đường phân giác nên ta có :

$$\frac{ID}{IA}=\frac{BD}{BA}=\frac{CD}{CA}=\frac{BD+CD}{BA+CA}=\frac{a}{b+c}$$
$$\Rightarrow \left(b+c\right)\overrightarrow{ID}=-a\overrightarrow{IA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

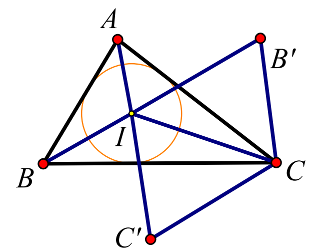
Cách 2: (hình 1.20)Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tai B';song song với BI cắt AI tại A'

Ta có $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}$ (*)

Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có :

$$\frac{IB}{IB'}=\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{c}{b}\Rightarrow \overrightarrow{IB'}=-\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \ \ (1)$$

Tương tự : $\overrightarrow{IA'}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}$ (2)



Hình 1.20

Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có :

$$\overrightarrow{IC}=-\frac{a}{c}\overrightarrow{IA}-\frac{b}{c}\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

DẠNG 3: Xác định điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước

1. Phương pháp giải.

- Ta biến đổi đẳng thức vectơ về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn vectơ này chính là điểm M.
- Ta biến đổi về đẳng thức vectơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Lời giải (hình 1.21)

Ta có $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Hình 1.21

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

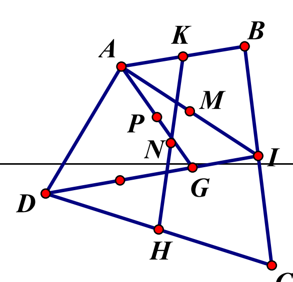
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$

M nằm trên tia AB và $AM=3AB$

Ví dụ 2: Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M,N,P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$



Hình 1.22

c) $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

Lời giải (hình 1.22)

a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Do đó $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}$

Suy ra M là trung điểm AI

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK}+2\overrightarrow{NH}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NH}=\vec{0}\Leftrightarrow$ N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD khi đó ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PG}$

Suy ra $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PG}=\vec{0}\Leftrightarrow P$ là trung điểm AG.

Ví dụ 3: Cho trước hai điểm A, B và hai số thực α, β thoả mãn $\alpha+\beta\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Từ đó, suy ra với điểm bất kì M thì $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

Ta có: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA}+\beta(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}.\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{AI}=\beta\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}.$

Vì A, B cố định nên vectơ $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện.

Từ đó suy ra

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})+\beta(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB})=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$ đpcm.

DẠNG 4: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$

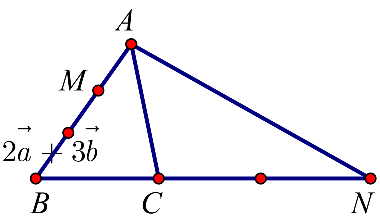
b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{CM}$. Chứng minh I, A, N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)

a) Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM=\frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN=2BC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$



Hình 1.23

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-2\vec{a}+3\vec{b}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{a}+3\vec{b}=-\frac{7}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}=-\frac{1}{3}(-2\vec{a}+3\vec{b})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}\Rightarrow$ A, I, N thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên cạnh BC lấy M sao cho $BM=3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN=5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

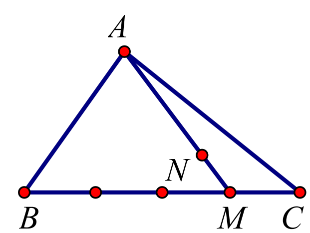
b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



Hình 1.24

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

Ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

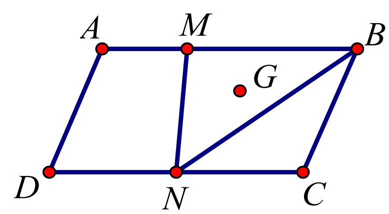
$= -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) - \frac{3}{14}\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}\right)$

$= -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) - \frac{3}{14}\left(-\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM, CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)



Hình 1.25

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

DẠNG 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau, hai tam giác cùng trọng tâm

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau :

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tuỳ ý.

- Để chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng trọng tâm ta làm như sau:

Cách 1: Chứng minh G là trọng tâm ΔABC trùng với G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Cách 2: Gọi G là trọng tâmΔABC(tức ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JB}$

Do đó $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ hay I trùng với J

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\frac{AM}{AB}=k$ suy ra $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CA}$

Cách 1: Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔMNP

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'P}=\vec{0}$ (*)

Ta có $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'M}=k\overrightarrow{AB}$

Tương tự $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'N}=k\overrightarrow{BC}$

Và $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'P}=k\overrightarrow{CA}$

Cộng vế với vế từng đẳng thức trên ta được

$\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'P}\right)=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$Kết hợp với (*) ta được $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

Suy ra điều phải chứng minh

Cách 2: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}$

$=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$

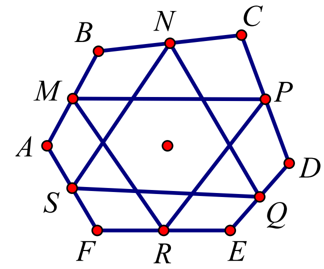
Vậy hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Ví dụ 3: Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.26)

Gọi G là trọng tâm của ΔMPR suy ra $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$ (*)

Mặt khác $2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB},\quad 2\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD},$



Hình 1.26

$2\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}.\Rightarrow 2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR})=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}$ Kết hợp với (*) ta được

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GF})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GS}+2\overrightarrow{GN}+2\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔSNQ.

Vậy ΔMPR và ΔSNQ có cùng trọng tâm.

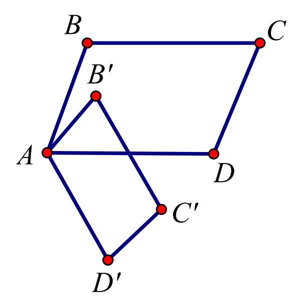
Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ cùng trọng tâm.

Lời giải (hình 1.27)

Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$ (1)

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có



Hình 1.27

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\right)+\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\right)+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

DẠNG 6: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right| = k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì

  + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in R$

  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$

  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$

- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}, B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\dfrac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$ $\Rightarrow$ I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ nên

$| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} | = | \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} | \Leftrightarrow | 9\overrightarrow{MI} | = | \overrightarrow{AB} | \Leftrightarrow MI = \dfrac{AB}{9}$

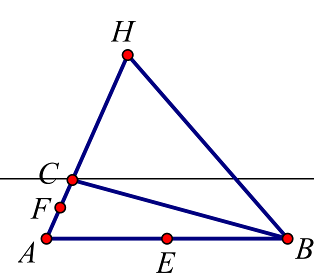
Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right|$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right)$ với k là số thực thay đổi

Lời giải (hình 1.28)



Hình 1.28

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$

Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

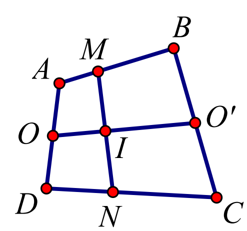
Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}$



Hình 1.29

Do đó $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\right)=k\overrightarrow{OO'}$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'

DẠNG 7: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ

1. Phương pháp giải.

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả " $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow m=n=0$ với $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương "

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác $ABCD$. Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AN}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MP}$

$= 5\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AD}$

$= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) - 2\overrightarrow{AD}$

$= 2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn: $a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$ Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}.$

Suy ra $a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$

$\Leftrightarrow a^2\left(-\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right) + b^2\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$

$\Leftrightarrow \left(b^2 - a^2\right)\overrightarrow{GB} + \left(c^2 - a^2\right)\overrightarrow{GC} = \vec{0}.(*)$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vecơ không cùng phương, do đó (*) tương đương với:

$\begin{cases} b^2 - a^2 = 0 \\ c^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{AB'} = m\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'} = n\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Mặt khác A' là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Do đó $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

hay $\left(n-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra $m=n=\frac{1}{2}$ do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB

Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

DẠNG 8: Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị liên quan đến độ dài vectơ

1. Phương pháp.

- Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có

+ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

+ $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng

- Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng Δ khi đó $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của M lên Δ.

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn; $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Lời giải:

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBI$ thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Khi đó : $T=\left|\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$

$$=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T=AA'+BB'+CC'$

Giải:

Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A}+\overrightarrow{BG}+$$

$$+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'})=3\overrightarrow{GG'}$$

Do đó:

$$AA'+BB'+CC'=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|+\left|\overrightarrow{CC'}\right|\geq\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right|=3\left|\overrightarrow{GG'}\right|=3GG'$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ cùng hướng

Vậy giá trị nhỏ nhất T là $3GG'$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân tại $O,$ cạnh $OA=a.$ Tính $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|.$

A. $a.$ **B.** $\left(1+\sqrt{2}\right)a.$ **C.** $a\sqrt{5}.$ **D.** $2a\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Gọi C là điểm đối xứng của O qua $A\Rightarrow OC=2a.$ Tam giác OBC vuông tại $O,$ có $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{5}.$

Ta có $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC},$ suy ra $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a\sqrt{5}.$

Câu 2: Cho tam giác OAB vuông cân tại $O,$ cạnh $OA=a.$ Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=5a.$ **B.** $\left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=5a.$ **C.** $\left|7\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|=5a.$ **D.** $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=5a.$

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào các đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, gọi C nằm trên tia đối của tia AO sao cho $OC=3OA\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}.$ Và D nằm trên tia đối của tia BO sao cho $OD=4OB\Rightarrow 4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}.$ Dựng hình chữ nhật $OCED$ suy ra $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành).

  Ta có $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=OE=CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=5a.$

• **B đúng**, vì $\left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OA}\right|+3\left|\overrightarrow{OB}\right|=2a+3a=5a.$

• **C sai**, xử lý tương tự như ý đáp án **A. Chọn C.**

• **D đúng**, vì $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=11\left|\overrightarrow{OA}\right|-6\left|\overrightarrow{OB}\right|=11a-6a=5a.$

Câu 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

C. $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}$. Mặt khác I là trung điểm AM nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}=\vec{0}.$ Suy ra $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IA}=2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IA}\right)=\vec{0}.$

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).$

C. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}.$ (1) Mặt khác I là trung điểm AM nên $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}.$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

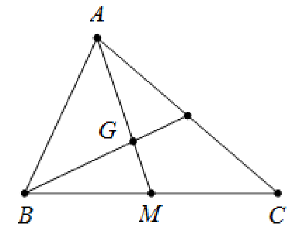
Câu 5: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Do đó $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Suy ra $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)$

$=\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}\right)$.

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Vậy $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DC}$.
B. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}$.

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$.
D. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}\\ \overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}\end{cases}$. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, vì $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}.$

- **B đúng**, vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}.$

- **C đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$

Suy ra

$2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$

- **D sai**, vì theo phân tích ở đáp án **C. Chọn D.**

Câu 8: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của $AB.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.$

B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}.$

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án ta thấy bài toán yêu cầu phân tích vectơ $\overrightarrow{DM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}.$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}.$ Vì M là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM}=-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$

suy ra $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}.$

Câu 9: Cho tam giác $ABC,$ điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM=AB$ và N là trung điểm của $AC.$ Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

B. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

D. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Vì N là trung điểm AC nên

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}.\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Câu 10: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN. Khi đó

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}.$ Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\end{cases}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\longrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$

Câu 14: Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}.$ Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}.$ **B.** $2\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}.$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b}, -10\vec{a}-2\vec{b}.$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}.$

Lời giải

Chọn C.

Dễ thấy $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2\left(5\vec{a}+\vec{b}\right)\longrightarrow$ hai vectơ $5\vec{a}+\vec{b}, -10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 15: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Ba điểm C, M, B thẳng hàng.

B. AM là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}.$

C. A, M và trọng tâm tam giác ABC thẳng hàng.

D. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn C.

Gọi I, G lần lượt là trung điểm BC và trọng tâm tam giác $ABC.$ Vì I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}.$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ suy ra $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MI}\Rightarrow A, M, I$ thẳng hàng

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác $ABC\longrightarrow G\in AI.$ Do đó, ba điểm A, M, G thẳng hàng.

Câu 16: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của $BC.$ Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}.$ **B.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}.$

C. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}.$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì I là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GI}.$

Câu 17: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{GA} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}.$ **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$

C. $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}.$ **D.** $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM}.$

Lời giải

Chọn D.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$ Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{\vec{0}} + 2\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GM}.$

Câu 18: Cho tam giác ABC vuông tại $A,$ M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.$ **B.** $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.$ **C.** $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}.$ **D.** $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}.$

Câu 19: Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}.$ **B.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}.$ **C.** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}.$ **D.** $\overrightarrow{CN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác

$ABC \longrightarrow MN = \dfrac{1}{2}BC.$ Mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}.$

Câu 20: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}.$ **B.** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}.$

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CG}.$ **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$

Lời giải

Chọn B.

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BE}.$ (1) Mà G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}.$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2.\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}.$

Câu 21: Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}}{3}.$

B. $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{3}.$

C. $\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}.$

D. $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{-3}.$

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}\Rightarrow B$ là trung điểm của $IA\Rightarrow \overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}.$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\\ \overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}.$

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=-2\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}.$

Câu 22: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}.$

B. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}.$

C. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}.$

D. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}.$

Câu 23: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}.$

B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$

D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$ (vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$).

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{BC}.$

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$. Suy ra điều trên không thể xảy ra vì $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$.

Câu 26: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. M trùng A. **B.** M trùng B.

C. M trùng C. **D.** M là trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.\ (*)$

Đẳng thức $(*)$ suy ra M là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 27: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a},\ \overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

A. $m=1, n=2$. **B.** $m=-1, n=-2$.

C. $m=2, n=1$. **D.** $m=-2, n=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BG}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)=-\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}$ $\left(\text{do } \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\right)$.

Câu 28: Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$. Tính giá trị biểu thức $P=x+y$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên tồn tại các số thực x, y sao cho

$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}, \forall M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=x\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+y\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow (1-x-y)\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow (x+y-1)\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$.

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$ suy ra $x+y-1=1 \Leftrightarrow x+y=2$.

Câu 29: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k>0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k$ là

A. một đoạn thẳng. **B.** một đường thẳng. **C.** một đường tròn. **D.** một điểm.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có $\begin{cases} 2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC} \\ 2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD} \end{cases}, \forall M$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MI}\right|=k \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{MI}\right|=k \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|=\frac{k}{4}$. $(*)$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{k}{4}$.

Câu 30: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ là

A. trung trực của đoạn thẳng AB.

B. trung trực của đoạn thẳng AD.

C. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AC}{2}$.

D. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AB+BC}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $AB, CD.$ Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME} \\ \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MF} \end{cases}, \forall M.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| \Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{ME}\right|=2\left|\overrightarrow{MF}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{ME}\right|=\left|\overrightarrow{MF}\right|.$ $(*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF hay chính là trung trực của đoạn thẳng $AD.$

Câu 31: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của $AB.$ Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. đường tròn tâm $I,$ đường kính $\dfrac{AB}{2}.$ **B.** đường tròn đường kính $AB.$

C. đường trung trực của đoạn thẳng $AB.$ **D.** đường trung trực đoạn thẳng $IA.$

Lời giải

Chọn A.

Vì I là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}.$ $(*)$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm $I,$ bán kính

Câu 32: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của $AB.$ Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. đường trung trực của đoạn thẳng $AB.$ **B.** đường tròn đường kính $AB.$

C. đường trung trực đoạn thẳng $IA.$ **D.** đường tròn tâm $A,$ bán kính $AB.$

Lời giải

Chọn A.

Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB=2EA \Rightarrow 2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}.$

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA=2FB \Rightarrow 2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}.$

Ta có $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}+2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}\right|$

$$\Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{ME}+\underbrace{2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}\right|=\left|3\overrightarrow{MF}+\underbrace{2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}}_{\vec{0}}\right| \Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{ME}\right|=\left|3\overrightarrow{MF}\right| \Leftrightarrow ME=MF. \quad (*)$$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF. Gọi I là trung điểm của AB suy ra I cũng là trung điểm của

EF.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Câu 33: Cho tam giác đều ABC cạnh a, trọng tâm G. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. đường trung trực của đoạn BC **.**
B. đường tròn đường kính BC **.**
C. đường tròn tâm G, bán kính $\frac{a}{3}$.
D. đường trung trực đoạn thẳng AG .

Lời giải

Chọn A.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}\end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow MI=MJ$.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng IJ, cũng chính là đường trung trực của đoạn thẳng BC vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC.

Câu 34: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính R. Tính bán kính R theo a.

A. $R=\frac{a}{3}$.
B. $R=\frac{a}{9}$.
C. $R=\frac{a}{2}$.
D. $R=\frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$.

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$.

Khi đó $9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{CA}$. $(*)$

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|\Leftrightarrow\left|9\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow 9MI=AB$.

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm

I, bán kính $R = \dfrac{AB}{9} = \dfrac{a}{9}$.

Câu 35: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC nên G cố định duy nhất và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{GM}\right| = 3 \Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{GM}\right| = 3 \Leftrightarrow GM = 1$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 1.

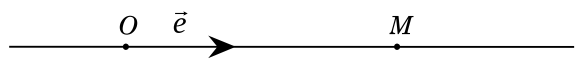
BÀI 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Trục và độ dài đại số trên trục

a) Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{e}$.

Ta kí hiệu trục đó là $\left(O;\vec{e}\right)$.



b) Cho M là một điểm tùy ý trên trục $\left(O;\vec{e}\right)$. Khi đó có duy nhất một số k sao cho $\overrightarrow{OM}=k\,\vec{e}$. Ta gọi số k đó là tọa độ của điểm M đối với trục đã cho.

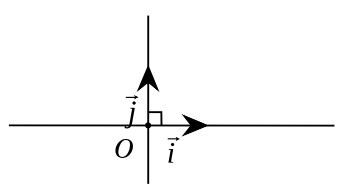
c) Cho hai điểm A và B trên trục $\left(O;\vec{e}\right)$. Khi đó có duy nhất số a sao cho $\overrightarrow{AB}=a\,\vec{e}$. Ta gọi số a là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $a=\overline{AB}$.

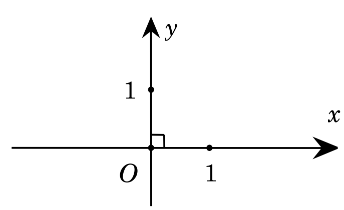
Nhận xét.

- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB}=AB$, còn nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB}=-AB$.
- Nếu hai điểm A và B trên trục $\left(O;\vec{e}\right)$ có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB}=b-a$.

2. Hệ trục tọa độ

a) Định nghĩa. Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ gồm hai trục $\left(O;\vec{i}\right)$ và $\left(O;\vec{j}\right)$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục $\left(O;\vec{i}\right)$ được gọi là trục hoành và kí hiệu là Ox, trục $\left(O;\vec{j}\right)$ được gọi là trục tung và kí hiệu là Oy. Các vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy và $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$. Hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ còn được kí hiệu là Oxy.





Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ Oxy còn được gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay gọi tắt là mặt phẳng Oxy.

b) Tọa độ của vectơ

Trong mặt phẳng Oxy cho một vectơ $\vec{u}$ tùy ý. Vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ và gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của vuông góc của A lên Ox và Oy. Ta có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất $(x;y)$ để $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Như vậy $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Cặp số $(x;y)$ duy nhất đó được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ đối với hệ tọa độ Oxy và viết $\vec{u}=(x;y)$ hoặc $\vec{u}(x;y)$. Số thứ nhất x gọi là hoành độ, số thứ hai y gọi là tung độ của vectơ $\vec{u}$.

Như vậy $\boxed{\vec{u}=(x;y)\Leftrightarrow\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}}$

Nhận xét. Từ định nghĩa tọa độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Nếu $\vec{u}=(x;y)$ và $\vec{u'}=(x';y')$ thì $\boxed{\vec{u}=\vec{u'}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}.}$

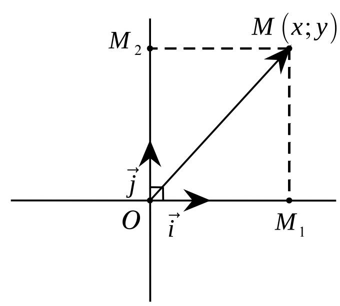
Như vậy, mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

c) Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ đối với hệ trục Oxy được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ trục đó.

Như vậy, cặp số $(x;y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=(x;y)$. Khi đó ta viết $M(x;y)$ hoặc $M=(x;y)$. Số x được gọi là hoành độ, còn số y được gọi là tung độ của điểm M. Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M, tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M.

$$\boxed{M=(x;y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}}$$



Chú ý rằng, nếu $MM_1\perp Ox$, $MM_2\perp Oy$ thì $x=\overline{OM_1}$, $y=\overline{OM_2}$.

d) Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$. Ta có

$$\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A).}$$

3. Tọa độ của các vectơ $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $k\vec{u}$

Ta có các công thức sau:

Cho $\vec{u}=(u_1;u_2)$, $\vec{v}=(v_1;v_2)$

Khi đó:

- $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+u_2;v_1+v_2)$;
- $\vec{u}-\vec{v}=(u_1-u_2;v_1-v_2)$;
- $k\vec{u}=(ku_1;ku_2)$, $k\in\mathbb{R}$.

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{u}=(u_1;u_2)$, $\vec{v}=(v_1;v_2)$ với $\vec{v}\neq\vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $u_1=kv_1$ và $u_2=kv_2$.

4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm của tam giác

a) Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm $I(x_I;y_I)$ của đoạn thẳng AB là

$$\boxed{x_I=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}.}$$

b) Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Khi đó tọa độ của trọng tâm $G(x_G;y_G)$ của tam giác ABC được tính theo công thức

$$\boxed{x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 2: tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ trên mặt phẳng Oxy.

1. Phương pháp.

- Để tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau

Dựng vectơ $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy. Khi đó $\vec{a}(a_1;a_2)$ với $a_1=\overline{OH}$, $a_2=\overline{OK}$

- Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$
- Nếu biết tọa độ hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ suy ra tọa độ $\overrightarrow{AB}$ được xác định theo công

thức $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$

Chú ý: $\overline{OH}=OH$ nếu H nằm trên tia Ox (hoặc Oy) và $\overline{OH}=-OH$ nếu H nằm trên tia đối tia Ox (hoặc Oy)

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho điểm $M(x;y)$.

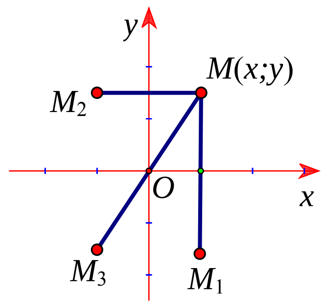
Tìm tọa độ của các điểm

a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành

b) M_2 đối xứng với M qua trục tung

c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ

Lời giải (hình 1.32)



Hình 1.32

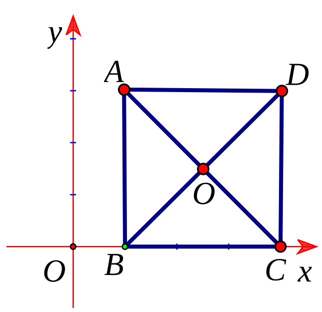
a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành suy ra $M_1(x;-y)$

b) M_2 đối xứng với M qua trục tung suy ra $M_2(-x;y)$

c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra $M_3(-x;-y)$

Ví dụ 2: Trong hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1;3)$. Biết điểm B thuộc trục (O; $\vec{i}$) và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vecto $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.33)



Hình 1.33

Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ

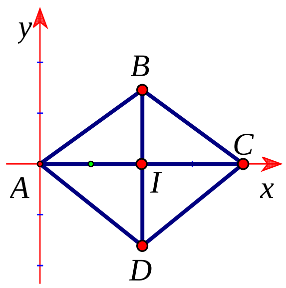
(hình bên)

Vì điểm $A(1;3)$ suy ra $AB=3$, $OB=1$

Do đó $B(1;0)$, $C(4;0)$, $D(4;3)$

Vậy $\overrightarrow{AB}(0;-3)$, $\overrightarrow{BC}(3;0)$ và $\overrightarrow{AC}(3;-3)$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD}=60^0$. Biết A trùng với gốc tọa độ O, C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$



Hình 1.34

Lời giải (hình 1.34)

Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Gọi I là tâm hình thoi ta có $BI = AB\sin\widehat{BAI} = a\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

$$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $A(0;0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2}\right)$, $C\left(a\sqrt{3};0\right)$, $D\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2}\right)$

Dạng 3: Xác Định Tọa Độ Điểm, Vectơ Liên Quan Đến Biểu Thức Dạng $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $k\vec{u}$

1. Phương pháp.

Dùng công thức tính tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $k\vec{u}$

Với $\vec{u}=(x;y)$; $\overrightarrow{u'}=(x';y')$ và số thực k, khi đó $\vec{u}\pm\vec{v}=(x\pm x';y\pm y')$ và $k.\vec{u}=(kx;ky)$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 vecto: $\vec{a}=\left(3;2\right)$ $\vec{b}=\left(-1;5\right)$ $\vec{c}=\left(-2;-5\right)$

Tìm tọa độ của vectơ sau

a) $\vec{u}+2\vec{v}$ với $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$ và $\vec{v}=\pi\vec{i}$

b) $\vec{k}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{l}=-\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $\vec{u}+2\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}+\pi\vec{i}=(3+\pi)\vec{i}-4\vec{j}$ suy ra $\vec{u}+2\vec{v}=(3+\pi;-4)$

b) Ta có $2\vec{a} = (6;4)$ $\vec{b} = (-1;5)$ suy ra $\vec{k} = \left(6-1;4+5\right) = \left(5;9\right)$;

$-\vec{a} = (-3;-2)$, $2\vec{b} = (-2;10)$ và $5\vec{c} = (-10;-25)$ suy ra

$\vec{l} = \left(-3-2-10;-2+10-25\right) = \left(-15;-17\right)$

Ví dụ 2: Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;4)$; $\vec{c} = (-1;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ biết

a) $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ b) $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

Suy ra $\vec{u} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2};3-2\right) = (3;1)$

b) Ta có $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Suy ra $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3} + 3 - 1;-\frac{4}{3} - 4 + 3\right) = \left(\frac{4}{3};-\frac{7}{3}\right)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(-4;0), B(0;3)$ và $C(2;1)$

a) Xác định tọa độ vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(4;3)$, $\overrightarrow{AC}(6;1)$ suy ra $\vec{u} = (2;5)$

b) Gọi $M(x;y)$, ta có $\overrightarrow{MA}(-4-x;-y)$, $\overrightarrow{MB}(-x;3-y)$, $\overrightarrow{MC}(2-x;1-y)$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (-6x+2;-6y+9)$

Do đó $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -6x+2=0 \\ -6y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy $M\left(\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right)$

Dạng 4: Xác Định Tọa Độ Các Điểm Của Một Hình

1. Phương pháp.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}, y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

+ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{2}$

+ $\vec{u}(x;y) = \vec{u'}(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

b) Xác định trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Lời giải

a) C là trung điểm của MB suy ra $x_C = \dfrac{x_M + x_B}{2} \Rightarrow x_M = 2x_C - x_B = -5$

và $y_C = \dfrac{y_M + y_B}{2} \Rightarrow y_M = 2y_C - y_B = 6$

Vậy $M(-5;6)$

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2-1-3}{3} = -\dfrac{2}{3}$ và $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{2} = \dfrac{1-2+2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Vậy $G\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$

c) Gọi $D(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-3-x;2-y)$

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x = -3 \\ 2-y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(0;5)$.

Vậy $D(0;5)$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;-1)$, $B(-1;2)$ và $I(1;-1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên

$$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$$

suy ra $C(1;-4)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-3 = 1 - x_D \\ 2+1 = -4 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(5;-7)$$

Điểm O của hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm AC do đó

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = 2,\ y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow O\left(2;-\frac{5}{2}\right)$$

Dạng 5: bài toán liên quan đến sự cùng phương của hai vectơ. Phân tích một vectơ qua hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp.

- Cho $\vec{u} = (x;y)$; $\overrightarrow{u'} = (x';y')$. Vectơ $\overrightarrow{u'}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}\,(\vec{u} \neq \vec{0})$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Chú ý: Nếu $xy \neq 0$ ta có $\overrightarrow{u'}$ cùng phương $\vec{u} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$

- Để phân tích $\vec{c}(c_1;c_2)$ qua hai vectơ $\vec{a}(a_1;a_2)$, $\vec{b}(b_1;b_2)$ không cùng phương, ta giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;0)$; $\vec{c} = (-1;3)$

a) Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương

b) Phân tích vectơ $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{-3}{1} \neq \frac{0}{2} \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương

b) Giả sử $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Ta có $x\vec{a} + y\vec{b} = \left(x - 3y;2x\right)$

Suy ra $\begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \vec{c}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}$

Ví dụ 2: Cho $\overrightarrow{u}=\left(m^2+m-2\,;4\right)$ và $\overrightarrow{v}=(m;2)$. Tìm m để hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

+ Với $m=0$: Ta có $\overrightarrow{u}=(-2;4)$;$\overrightarrow{v}=(0;2)$

Vì $\dfrac{0}{-2}\neq\dfrac{2}{4}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}$ không cùng phương

+ Với $m\neq 0$: Ta có $\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$\dfrac{\mathrm{m}^2+m-2}{m}=\dfrac{4}{2}\Leftrightarrow m^2-m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Vậy với $m=-1$ và $m=2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.

c) Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE=2EC$

d) Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-9;3)$, $\overrightarrow{AC}(-5;-5)$. Vì $\dfrac{-9}{-5}\neq\dfrac{3}{-5}$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành $\Rightarrow D(x;0)$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương

Mặt khác $\overrightarrow{AD}(x-6;-3)$ do đó $\dfrac{x-6}{-9}=\dfrac{-3}{3}\Rightarrow x=15$

Vậy $D(15;0)$

c) Vì E thuộc đoạn BC và $BE=2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$

Gọi $E(x;y)$ khi đó $\overrightarrow{BE}(x+3;y-6)$, $\overrightarrow{EC}(1-x;-2-y)$

Do đó $\begin{cases} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vậy $E\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

d) Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của DE và AC.

Do đó $\overrightarrow{DI}(x-15;y),\overrightarrow{DE}\left(-\dfrac{46}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ cùng phương suy ra $\dfrac{3(x-15)}{-46}=\dfrac{3y}{2} \Rightarrow x+23y-15=0$ (1)

$\overrightarrow{AI}(x-6;y-3)$, $\overrightarrow{AC}(-5;-5)$ cùng phương suy ra $\dfrac{x-6}{-5}=\dfrac{y-3}{-5} \Rightarrow x-y-3=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x=\dfrac{7}{2}$ và $y=\dfrac{1}{2}$

Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=(-5;0)$, $\vec{b}=(-4;0)$ cùng hướng.

B. $\vec{c}=(7;3)$ là vectơ đối của $\vec{d}=(-7;3)$.

C. $\vec{u}=(4;2)$, $\vec{v}=(8;3)$ cùng phương.

D. $\vec{a}=(6;3)$, $\vec{b}=(2;1)$ ngược hướng.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\vec{a}=\dfrac{5}{4}\vec{b} \longrightarrow \vec{a},\ \vec{b}$ cùng hướng.

Câu 2: Cho $\vec{a}=(2;-4)$, $\vec{b}=(-5;3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$.

A. $\vec{u}=(7;-7)$. **B.** $\vec{u}=(9;-11)$. **C.** $\vec{u}=(9;-5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;5)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} 2\vec{a}=(4;-8) \\ -\vec{b}=(5;-3) \end{cases} \longrightarrow \vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}=(4+5;-8-3)=(9;-11)$.

Câu 3: Cho $\vec{a}=(3;-4)$, $\vec{b}=(-1;2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$.

A. $(-4;6)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(4;-6)$. **D.** $(-3;-8)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=\left(3+\left(-1\right);-4+2\right)=\left(2;-2\right)$.

Câu 4: Cho $\vec{a}=\left(-1;2\right)$, $\vec{b}=\left(5;-7\right)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

A. $\left(6;-9\right)$. **B.** $\left(4;-5\right)$. **C.** $\left(-6;9\right)$. **D.** $\left(-5;-14\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{a}-\vec{b}=\left(-1-5;2-\left(-7\right)\right)=\left(-6;9\right)$.

Câu 5: Trong hệ trục tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, tọa độ của vectơ $\vec{i}+\vec{j}$ là

A. $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(1;-1\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(1;1\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\begin{cases}\vec{i}=\left(1;0\right)\\ \vec{j}=\left(0;1\right)\end{cases}\longrightarrow \vec{i}+\vec{j}=\left(1;1\right)$.

Câu 6: Cho $\vec{u}=\left(3;-2\right)$, $\vec{v}=\left(1;6\right)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{u}+\vec{v}$ và $\vec{a}=\left(-4;4\right)$ ngược hướng. **B.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}-\vec{v}$ và $\vec{b}=\left(6;-24\right)$ cùng hướng. **D.** $2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u}+\vec{v}=\left(4;4\right)$ và $\vec{u}-\vec{v}=\left(2;-8\right)$.

Xét tỉ số $\dfrac{4}{-4}\neq\dfrac{4}{4}\longrightarrow \vec{u}+\vec{v}$ và $\vec{a}=\left(-4;4\right)$ không cùng phương. Loại A

Xét tỉ số $\dfrac{3}{1}\neq\dfrac{-2}{6}\longrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương. Loại B

Xét tỉ số $\dfrac{2}{6}=\dfrac{-8}{-24}=\dfrac{1}{3}>0\longrightarrow \vec{u}-\vec{v}$ và $\vec{b}=\left(6;-24\right)$ cùng hướng.

Câu 7: Cho $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x=-1$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $x=\dfrac{1}{4}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \longrightarrow \vec{u} = (2;-1) \\ \vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} \longrightarrow \vec{v} = (1;x) \end{cases}$.

Để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{-1} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho $\vec{a} = (-5;0)$, $\vec{b} = (4;x)$. Tìm x để hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $x = -5$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn C.

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow -5.x = 0.4 \longrightarrow x = 0$.

Câu 9: Cho $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$, $\vec{c} = (x;7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $x = -15$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 15$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases} 2\vec{a} = (2x;4) \\ 3\vec{b} = (-15;3) \end{cases} \longrightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x-15;7)$.

Để $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 15 \\ 7 = 7 \end{cases} \longrightarrow x = 15$.

Câu 10: Cho ba vectơ $\vec{a} = (2;1)$, $\vec{b} = (3;4)$, $\vec{c} = (7;2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k.\vec{a} + h.\vec{b}$ là

A. $k = 2,5;\ h = -1,3$. **B.** $k = 4,6;\ h = -5,1$.

C. $k = 4,4;\ h = -0,6$. **D.** $k = 3,4;\ h = -0,2$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left.\begin{array}{l} k.\vec{a} = (2k;k) \\ h.\vec{b} = (3h;4h) \end{array}\right\} \longrightarrow k.\vec{a} + h.\vec{b} = (2k+3h;k+4h)$.

Theo đề bài: $\vec{c} = k.\vec{a} + h.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 3h \\ 2 = k + 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4,4 \\ h = -0,6 \end{cases}$.

Câu 11: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(5;2)$, $B(10;8)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{AB} = (15;10)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (2;4)$.

C. $\overrightarrow{AB}=\left(5;6\right)$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\left(50;16\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(5;6\right)$.

Câu 12: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A\left(1;3\right)$, $B\left(-1;2\right)$, $C\left(-2;1\right)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

A. $\left(-5;-3\right)$. **B.** $\left(1;1\right)$. **C.** $\left(-1;2\right)$. **D.** $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(-2;-1\right)\\ \overrightarrow{AC}=\left(-3;-2\right)\end{cases}\longrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\left(-2-\left(-3\right);-1-\left(-2\right)\right)=\left(1;1\right)$.

Cách khác: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=\left(1;1\right)$.

Câu 13: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A\left(2;-3\right)$, $B\left(4;7\right)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I\left(6;4\right)$. **B.** $I\left(2;10\right)$. **C.** $I\left(3;2\right)$. **D.** $I\left(8;-21\right)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases}x_I=\dfrac{2+4}{2}=3\\ y_I=\dfrac{-3+7}{2}=2\end{cases}\longrightarrow I\left(3;2\right)$.

Câu 14: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\left(3;5\right)$, $B\left(1;2\right)$, $C\left(5;2\right)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC?

A. $G\left(-3;-3\right)$. **B.** $G\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $G\left(9;9\right)$. **D.** $G\left(3;3\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\begin{cases}x_G=\dfrac{3+1+5}{3}=3\\ y_G=\dfrac{5+2+2}{3}=3\end{cases}\longrightarrow G\left(3;3\right)$.

Câu 15: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\left(6;1\right)$, $B\left(-3;5\right)$ và trọng tâm $G\left(-1;1\right)$.

Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $C(6;-3)$. **B.** $C(-6;3)$. **C.** $C(-6;-3)$. **D.** $C(-3;6)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $C(x;y)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \dfrac{6+(-3)+x}{3}=-1 \\ \dfrac{1+5+y}{3}=1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases}$.

Câu 16: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(3;5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $C(-1;-7)$. **B.** $C(2;-2)$. **C.** $C(-3;-5)$. **D.** $C(1;7)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $C(x;y)$.

Vì O là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \dfrac{-2+3+x}{3}=0 \\ \dfrac{2+5+y}{3}=0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$.

Câu 17: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $N(5;-3)$ và C thuộc trục Oy, trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox. Tìm tọa độ điểm C.

A. $C(0;4.)$ **B.** $C(2;4.)$ **C.** $C(0;2.)$ **D.** $C(0;-4.)$

Lời giải

Chọn A.

Vì C thuộc trục $Oy \longrightarrow C$ có hoành độ bằng 0. Loại **B.**

Trọng tâm G thuộc trục $Ox \longrightarrow G$ có tung độ bằng 0. Xét các đáp án còn lại chỉ có đáp án A thỏa mãn $\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=0$.

Câu 18: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(-2;-4)$, trọng tâm $G(0;4)$ và trung điểm cạnh BC là $M(2;0)$. Tổng hoành độ của điểm A và B là

A. -2. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Vì M là trung điểm BC nên $\begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 2.2 - (-2) = 6 \\ y_B = 2y_M - y_C = 2.0 - (-4) = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6;4).$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C = -4 \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C = 12 \end{cases} \to A(-4;12).$

Suy ra $x_A + x_B = 2.$

Câu 19: Trong hệ tọa độ $Oxy,$ cho ba điểm $A(-1;1),$ $B(1;3),$ $C(-2;0).$ Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}.$ **B.** $A,$ $B,$ C thẳng hàng.

C. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;-1) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}.$

Câu 20: Trong hệ tọa độ $Oxy,$ cho bốn điểm $A(3;-2),$ $B(7;1),$ $C(0;1),$ $D(-8;-5).$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau. **B.** $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

C. $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. **D.** $A,$ $B,$ $C,$ D thẳng hàng.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4;3) \\ \overrightarrow{CD} = (-8;-6) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

Câu 21: Trong hệ tọa độ $Oxy,$ cho $A(-1;5),$ $B(5;5),$ $C(-1;11).$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $A,$ $B,$ C thẳng hàng. **B.** $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

C. $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. **D.** $\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6;0) \\ \overrightarrow{AC} = (0;6) \end{cases} \longrightarrow 6.6 \neq 0.0 \longrightarrow \overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Câu 22: Trong hệ tọa độ $Oxy,$ cho bốn điểm $A(1;1),\ B(2;-1),\ C(4;3),\ D(3;5).$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. $G(9;7)$ là trọng tâm tam giác $BCD.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$

D. $\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;-2)\\ \overrightarrow{DC}=(1;-2)\end{cases}\longrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\longrightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Câu 23: Trong hệ tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(1;1),\ B(-2;-2),\ C(7;7).$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $G(2;2)$ là trọng tâm tam giác $ABC.$

B. B ở giữa hai điểm A và $C.$

C. A ở giữa hai điểm B và $C.$

D. $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-3;-3)\\ \overrightarrow{AC}=(6;6)\end{cases}\longrightarrow \overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}.$ Đẳng thức này chứng tỏ A ở giữa hai điểm B và $C.$

Câu 24: Trong hệ tọa độ $Oxy,$ cho điểm $M(3;-4).$ Gọi M_1,M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên $Ox,Oy.$ Khẳng định nào đúng?

A. $\overline{OM_1}=-3.$

B. $\overline{OM_2}=4.$

C. $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=(-3;-4).$

D. $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=(3;-4).$

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết, suy ra $M_1=(3;0),M_2=(0;-4).$

A. Sai vì $\overline{OM_1}=3.$

B. Sai vì $\overline{OM_2}=-4.$

C. Sai vì $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{M_2M_1}=(3;4).$

Dùng phương pháp loại trừ ta Chọn D.

Cách 2. Gọi I là trung điểm $M_1M_2 \longrightarrow I\left(\frac{3}{2};-2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=2\overrightarrow{OI}=\left(2.\frac{3}{2};2.(-2)\right)=(3;-4)$.

Câu 25: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $OABC$, điểm C thuộc trục hoành. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ có tung độ khác 0.

B. Hai điểm A, B có tung độ khác nhau.

C. C có hoành độ bằng 0.

D. $x_A+x_C-x_B=0$.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết suy ra cạnh OC thuộc trục hoành $\longrightarrow$ cạnh AB song song với trục hoành nên $y_A=y_B \longrightarrow \overrightarrow{AB}=(x_A-x_B;0)$. Do đó loại A và B.

Nếu C có hoành độ bằng $0 \longrightarrow C(0;0)\equiv O$: mâu thuẩn với giả thiết $OABC$ là hình bình hành. Loại C.

Dùng phương pháp loại trừ, ta chọn D.

Cách 2. Gọi I là tâm của hình bình hành $OABC$. Suy ra

- I là trung điểm $AC \longrightarrow I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+0}{2}\right)$.
- I là trung điểm $OB \longrightarrow I\left(\frac{0+x_B}{2};\frac{0+y_B}{2}\right)$.

Từ đó suy ra $\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{0+x_B}{2} \longrightarrow x_A+x_C-x_B=0$.

Câu 26: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-5;-2)$, $B(-5;3)$, $C(3;3)$, $D(3;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.

B. $ABCD$ là hình chữ nhật.

C. $I(-1;1)$ là trung điểm AC.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0;5)\\ \overrightarrow{CD}=(0;-5)\end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$ suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng. Loại A.

Tọa độ trung điểm của AC là $\begin{cases} x = \dfrac{-5+3}{2} = -1 \\ y = \dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Loại C.

Ta có $\overrightarrow{OC} = (3;3)$; $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (-5;-2) \\ \overrightarrow{OB} = (-5;3) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-10;1) \neq \overrightarrow{OC}$. Loại D.

Dùng phương pháp loại trừ ta chọn B.

Câu 27: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét hai mệnh đề:

(I). $ABCD$ là hình bình hành. (II). AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng. **D.** Cả (I) và (II) đều sai.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0;-2)$, $\overrightarrow{DC} = (0;-2) \xrightarrow{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}} ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó tọa độ trung điểm của AC là $(0;-1)$ và cũng là tọa độ trung điểm của BD.

Câu 28: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(4;3)$. **B.** $D(3;4)$. **C.** $D(4;4)$. **D.** $D(8;6)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;1) \\ \overrightarrow{DC} = (6-x;5-y) \end{cases}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2 = 6-x \\ 1 = 5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \longrightarrow D(4;4)$.

Câu 29: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;-3)$, $B(2;1)$, $D(5;5)$ Tìm tọa độ điểm C để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $C(3;1)$. **B.** $C(-3;-1)$. **C.** $C(7;9)$. **D.** $C(-7;-9)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $C(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;4)\\ \overrightarrow{DC}=(x-5;y-5)\end{cases}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow \begin{cases}2=x-5\\ 4=y-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\ y=9\end{cases} \longrightarrow C(7;9)$.

Câu 30: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0;3)$, $D(2;1)$ và $I(-1;0)$ là tâm của hình chữ nhật. Tìm tọa độ tung điểm của cạnh BC.

A. $(1;2)$. **B.** $(-2;-3)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(-4;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi M là tọa độ trung điểm của cạnh $AD \longrightarrow M(1;2)$.

Gọi $N(x_N;y_N)$ là tọa độ trung điểm của cạnh BC.

Do I là tâm của hình chữ nhật $\longrightarrow I$ là trung điểm của MN.

Suy ra $\begin{cases}x_N=2x_I-x_M=-3\\ y_N=2y_I-y_M=-2\end{cases} \longrightarrow N(-3;-2)$.

Câu 31: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(9;7)$, $C(11;-1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{MN}$?

A. $\overrightarrow{MN}=(2;-8)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=(1;-4)$. **C.** $\overrightarrow{MN}=(10;6)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=(5;3)$.

Lời giải

Chọn B.

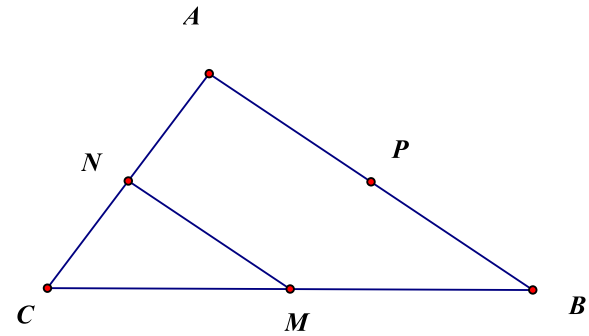
Ta có $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(2;-8)=(1;-4)$.

Câu 32: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ đỉnh A?

A. $A(1;5)$. **B.** $A(-3;-1)$. **C.** $A(-2;-7)$. **D.** $A(1;-10)$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi $A(x;y)$.

Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$. $(*)$

Ta có $\overrightarrow{PA} = (x+1;y-6)$ và $\overrightarrow{MN} = (-2;-7)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-2 \\ y-6=-7 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \longrightarrow A(-3;-1)$.

Câu 33: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

A. $I(1;2)$. **B.** $I\left(1;\frac{2}{5}\right)$. **C.** $I\left(-1;\frac{8}{3}\right)$. **D.** $I(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IA} = (1-x;2-y) \\ \overrightarrow{IB} = (-2-x;3-y) \longrightarrow 2\overrightarrow{IB} = (-4-2x;6-2y) \end{cases}$

$\longrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (-3-3x;8-3y)$.

Do đó từ giả thiết $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \longrightarrow \begin{cases} -3-3x=0 \\ 8-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}$.

Câu 34: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

A. $M(1;0)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Điểm $M \in Ox \longrightarrow M(m;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;7)$ và $\overrightarrow{AM} = (m-2;3)$.

Để A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \dfrac{m-2}{1}=\dfrac{3}{7} \Leftrightarrow m=\dfrac{17}{7}$.

Câu 35: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-5)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(4;0)$. **B.** $M(-4;0)$. **C.** $M(16;0)$. **D.** $M(-16;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right),\ \forall I$

$$=\overrightarrow{MI}+2\left(\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right),\ \forall I.$$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}.\ (*)$

Gọi $I(x;y)$, từ $(*)$ ta có

$$\begin{cases}2(1-x)-3(0-x)+2(-3-x)=0\\2(0-y)-3(2-y)+2(-5-y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\y=-16\end{cases} \Rightarrow I(-4;-16).$$

Khi đó $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\longrightarrow M(-4;0)$.

CHƯƠNG II. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

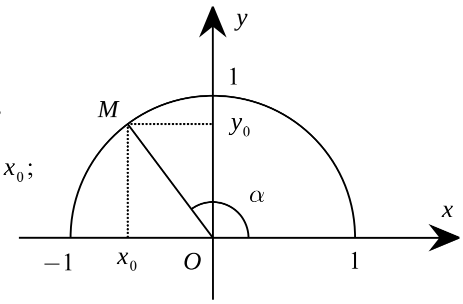
BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α $\left(0^0 \le \alpha \le 180^0\right)$ ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M\left(x_0; y_0\right)$.

Khi đó ta có định nghĩa:



- sin của góc α là y_0, kí hiệu $\sin\alpha = y_0$;
- cosin của góc α là x_0, kí hiệu $\cos\alpha = x_0$;
- tang của góc α là $\dfrac{y_0}{x_0}(x_0 \ne 0)$,

kí hiệu $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$;

- cotang của góc α là $\dfrac{x_0}{y_0}(y_0 \ne 0)$, kí hiệu $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.

2. Tính chất

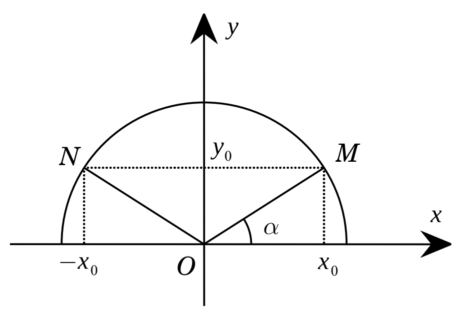
Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^0 - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

$\sin\alpha = \sin\left(180^0 - \alpha\right)$

$\cos\alpha = -\cos\left(180^0 - \alpha\right)$

$\tan\alpha = -\tan\left(180^0 - \alpha\right)$

$\cot\alpha = -\cot\left(180^0 - \alpha\right)$.



3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị α lượng giác	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0

$\cot\alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\parallel$

Trong bảng kí hiệu "$\parallel$" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

Chú ý. Từ giá trị lượng giác của các góc đặc biệt đã cho trong bảng và tính chất trên, ta có thể suy ra giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Chẳng hạn:

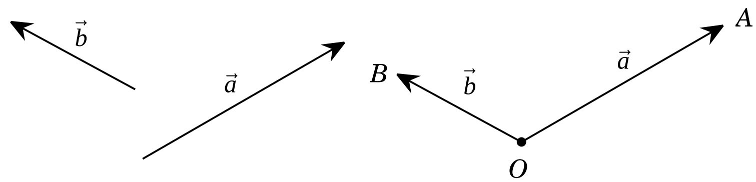
$$\sin 120^0 = \sin\left(180^0 - 60^0\right) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^0 = \cos\left(180^0 - 45^0\right) = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Góc giữa hai vectơ

a) Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



b) Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

được 6)

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1 : xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2\sin 90^0 + b^2\cos 90^0 + c^2\cos 180^0$

b) $B = 3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\tan^2 45^0$

c) $C = \sin^2 45^0 - 2\sin^2 50^0 + 3\cos^2 45^0 - 2\sin^2 40^0 + 4\tan 55^0.\tan 35^0$

Lời giải

a) $A = a^2.1 + b^2.0 + c^2.\left(-1\right) = a^2 - c^2$

b) $B = 3 - \left(1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

c) $C = \sin^2 45^0 + 3\cos^2 45^0 - 2\left(\sin^2 50^0 + \sin^2 40^0\right) + 4\tan 55^0.\cot 55^0$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\sin^2 50^0 + \cos^2 40^0\right) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2 3^0 + \sin^2 15^0 + \sin^2 75^0 + \sin^2 87^0$

b) $B = \cos 0^0 + \cos 20^0 + \cos 40^0 + ... + \cos 160^0 + \cos 180^0$

c) $C = \tan 5^0 \tan 10^0 \tan 15^0 ... \tan 80^0 \tan 85^0$

Lời giải

a) $A = \left(\sin^2 3^0 + \sin^2 87^0\right) + \left(\sin^2 15^0 + \sin^2 75^0\right)$

$= \left(\sin^2 3^0 + \cos^2 3^0\right) + \left(\sin^2 15^0 + \cos^2 15^0\right)$
$= 1 + 1 = 2$

b) $B = \left(\cos 0^0 + \cos 180^0\right) + \left(\cos 20^0 + \cos 160^0\right) + ... + \left(\cos 80^0 + \cos 100^0\right)$
$= \left(\cos 0^0 - \cos 0^0\right) + \left(\cos 20^0 - \cos 20^0\right) + ... + \left(\cos 80^0 - \cos 80^0\right)$
$= 0$

c) $C = \left(\tan 5^0 \tan 85^0\right)\left(\tan 15^0 \tan 75^0\right)...\left(\tan 45^0 \tan 45^0\right)$

$= \left(\tan 5^0 \cot 5^0\right)\left(\tan 15^0 \cot 5^0\right)...\left(\tan 45^0 \cot 5^0\right)$
$= 1$

Dạng 2 : chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc x, đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ .

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Lời giải

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

b) $\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\tan x}}{1-\dfrac{1}{\tan x}} = \dfrac{\dfrac{\tan x + 1}{\tan x}}{\dfrac{\tan x - 1}{\tan x}} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x\left(\tan^2 x + 1\right)$

$$= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3\dfrac{B}{2}}{\cos\left(\dfrac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3\dfrac{B}{2}}{\sin\left(\dfrac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos\left(A+C\right)}{\sin B}.\tan B = 2$$

Lời giải

Vì $A + B + C = 180^0$ nên

$$VT = \frac{\sin^3\dfrac{B}{2}}{\cos\left(\dfrac{180^0 - B}{2}\right)} + \frac{\cos^3\dfrac{B}{2}}{\sin\left(\dfrac{180^0 - B}{2}\right)} - \frac{\cos\left(180^0 - B\right)}{\sin B}.\tan B$$

$$= \frac{\sin^3\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}} + \frac{\cos^3\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B}.\tan B = \sin^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + 1 = 2 = VP$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \sin(90^0 - x) + \cos(180^0 - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

b) $B = \dfrac{1}{\sin x}.\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos x} + \dfrac{1}{1-\cos x}} - \sqrt{2}$

Lời giải

a) $A = \cos x - \cos x + \sin^2 x.\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$

b) $B = \dfrac{1}{\sin x}.\sqrt{\dfrac{1-\cos x+1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}} - \sqrt{2}$

$$= \frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x}.\sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) = \sqrt{2}\cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$$

Lời giải

$$P = \sqrt{\left(1-\cos^2 x\right)^2 + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\left(1-\sin^2 x\right)^2 + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$$
$$= \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1}$$
$$= \sqrt{\left(2\cos^2 x + 1\right)^2} + \sqrt{\left(2\sin^2 x + 1\right)^2}$$
$$= 2\cos^2 x + 1 + 2\sin^2 x + 1$$
$$= 3$$

Vậy P không phụ thuộc vào x.

Dạng 3 : xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1*:* a) Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ với $90^0 < \alpha < 180^0$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$

b) Cho $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Tính $\sin\alpha$ và $\cot\alpha$

c) Cho $\tan\gamma = -2\sqrt{2}$ tính giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^0 < \alpha < 180^0$ nên $\cos\alpha < 0$ mặt khác $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ suy ra

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nên $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì $\tan\gamma = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0$ mặt khác $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ nên

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -2\sqrt{2}.\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ví dụ 2: a) Cho $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ với $0^0 < \alpha < 90^0$. Tính $A = \dfrac{\tan\alpha + 3\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha}$.

b) Cho $\tan\alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\sin\alpha}$

Lời giải

a) Ta có $A = \dfrac{\tan\alpha + 3\frac{1}{\tan\alpha}}{\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}} = \dfrac{\tan^2\alpha + 3}{\tan^2\alpha + 1} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = 1 + 2\cos^2\alpha$

Suy ra $A = 1 + 2.\dfrac{9}{16} = \dfrac{17}{8}$

b) $B=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}=\dfrac{\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)-\left(\tan^2\alpha+1\right)}{\tan^3\alpha+3+2\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)}$

Suy ra $B=\dfrac{\sqrt{2}\left(2+1\right)-\left(2+1\right)}{2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\left(2+1\right)}=\dfrac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{3+8\sqrt{2}}$

Ví dụ 3: Biết $\sin x+\cos x=m$

a) Tìm $\sin x\cos x$ và $\left|\sin^4 x-\cos^4 x\right|$

b) Chứng minh rằng $\left|m\right|\le\sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $\left(\sin x+\cos x\right)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+2\sin x\cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x+\cos x=m$ nên $m^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$ hay $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{m^2-1}{2}$

Đặt $A=\left|\sin^4 x-\cos^4 x\right|$. Ta có

$$A=\left|\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\right|=\left|\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)\right|$$
$$\Rightarrow A^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2\left(\sin x-\cos x\right)^2=\left(1+2\sin x\cos x\right)\left(1-2\sin x\cos x\right)$$
$$\Rightarrow A^2=\left(1+\frac{m^2-1}{2}\right)\left(1-\frac{m^2-1}{2}\right)=\frac{3+2m^2-m^4}{4}$$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{3+2m^2-m^4}}{2}$

b) Ta có $2\sin x\cos x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1$ kết hợp với (*) suy ra

$\left(\sin x+\cos x\right)^2\le 2\Rightarrow\left|\sin x+\cos x\right|\le\sqrt{2}$

Vậy $\left|m\right|\le\sqrt{2}$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90°$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn B

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 2: Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90°$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$.

A. $P=0.$ **B.** $P=1.$ **C.** $P=-1.$ **D.** $P=2.$

Lời giải

Chọn A

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha=\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=0$.

Câu 3: Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin\alpha<0.$ **B.** $\cos\alpha>0.$ **C.** $\tan\alpha<0.$ **D.** $\cot\alpha>0.$

Lời giải

Chọn C

Lấy góc $\alpha=120^0$ sau đó thử ngược

Câu 4: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha<\beta$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\cos\alpha<\cos\beta.$ **B.** $\sin\alpha<\sin\beta.$

C. $\cot\alpha>\cot\beta.$ **D.** $\tan\alpha+\tan\beta>0.$

Lời giải

Chọn A

Lấy $\alpha=30^0;\beta=60^0$ sau đó thử ngược.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\cos75°>\cos50°.$ **B.** $\sin80°>\sin50°.$

C. $\tan45°<\tan60°.$ **D.** $\cos30°=\sin60°.$

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng từ $0°$ đến $90°$, khi giá trị của góc tăng thì giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin90°<\sin100°.$ **B.** $\cos95°>\cos100°.$

C. $\tan85°<\tan125°.$ **D.** $\cos145°>\cos125°.$

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng từ $90°$ đến $180°$, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90° < \sin 150°$.
B. $\sin 90°15' < \sin 90°30'$.
C. $\cos 90°30' > \cos 100°$.
D. $\cos 150° > \cos 120°$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng từ $90°$ đến $180°$, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 8: Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$?

A. $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.
B. $\cos^2\frac{\alpha}{3} + \sin^2\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.
C. $\cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$.
D. $5\left(\cos^2\frac{\alpha}{5} + \sin^2\frac{\alpha}{5}\right) = 5$.

Lời giải

Chọn D

Từ biểu thức $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ta suy ra $\cos^2\frac{\alpha}{5} + \sin^2\frac{\alpha}{5} = 1$.

Do đó ta có $5\left(\cos^2\frac{\alpha}{5} + \sin^2\frac{\alpha}{5}\right) = 5$.

Câu 9: Cho biết $\sin\frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3\sin^2\frac{\alpha}{3} + 5\cos^2\frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{105}{25}$.
B. $P = \frac{107}{25}$.
C. $P = \frac{109}{25}$.
D. $P = \frac{111}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2\frac{\alpha}{3} + \cos^2\frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\alpha}{3} = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{3} = \frac{16}{25}$.

Do đó ta có $P = 3\sin^2\frac{\alpha}{3} + 5\cos^2\frac{\alpha}{3} = 3.\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5.\frac{16}{25} = \frac{107}{25}$.

Câu 10: Cho biết $\tan\alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6\sin\alpha - 7\cos\alpha}{6\cos\alpha + 7\sin\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{4}{3}$.
B. $P = \frac{5}{3}$.
C. $P = -\frac{4}{3}$.
D. $P = -\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\dfrac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{6\cos\alpha+7\sin\alpha}=\dfrac{6\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-7}{6+7\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{6\tan\alpha-7}{6+7\tan\alpha}=\dfrac{5}{3}.$

Câu 11: Cho biết $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Giá trị của $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=-\dfrac{19}{13}$. **B.** $P=\dfrac{19}{13}$. **C.** $P=\dfrac{25}{13}$. **D.** $P=-\dfrac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{5}{9}$.

Ta có $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+3.\dfrac{5}{9}}{2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}}=\dfrac{19}{13}.$

Câu 12: Cho biết $\cot\alpha=5$. Giá trị của $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\dfrac{10}{26}$. **B.** $P=\dfrac{100}{26}$. **C.** $P=\dfrac{50}{26}$. **D.** $P=\dfrac{101}{26}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1=\sin^2\alpha\left(2\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+5\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$

$=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}\left(2\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1+\cot^2\alpha\right)=\dfrac{3\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1}{\cot^2\alpha+1}=\dfrac{101}{26}.$

Câu 13: Cho biết $3\cos\alpha-\sin\alpha=1$, $0^0<\alpha<90^0$. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. **C.** $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3\cos\alpha-\sin\alpha=1\Leftrightarrow 3\cos\alpha=\sin\alpha+1\rightarrow 9\cos^2\alpha=(\sin\alpha+1)^2$

$\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1\Leftrightarrow 9\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1$

$\Leftrightarrow 10\sin^2\alpha+2\sin\alpha-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=-1\\ \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.

- $\sin\alpha=-1$: không thỏa mãn vì $0^0<\alpha<90^0$.
- $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\longrightarrow\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}.$

Câu 14: Cho biết $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2$, $0^0<\alpha<90^0$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

A. $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\alpha=2-2\cos\alpha\to2\sin^2\alpha=\left(2-2\cos\alpha\right)^2$

$\Leftrightarrow2\sin^2\alpha=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha\Leftrightarrow2\left(1-\cos^2\alpha\right)=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow6\cos^2\alpha-8\cos\alpha+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=1\\\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

- $\cos\alpha=1$: không thỏa mãn vì $0^0<\alpha<90^0$.
- $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\longrightarrow\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15: Cho biết $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Tính giá trị của $\sin\alpha\cos\alpha$.

A. $\sin\alpha\cos\alpha=a^2$. **B.** $\sin\alpha\cos\alpha=2a$.

C. $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{a^2-1}{2}$. **D.** $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{a^2-11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\alpha+\cos\alpha=a\to\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=a^2$

$\Leftrightarrow1+2\sin\alpha\cos\alpha=a^2\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{a^2-1}{2}$.

Câu 16: Cho biết $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của $P=\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\dfrac{5}{4}$. **B.** $P=\dfrac{7}{4}$. **C.** $P=\dfrac{9}{4}$. **D.** $P=\dfrac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}\to\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)^2=\dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{9}$.

Ta có $P=\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}=\sqrt{\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)^2-2\tan\alpha\cot\alpha}=\sqrt{\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2-2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2-2}=\sqrt{\left(-\dfrac{9}{4}\right)^2-2}=\dfrac{7}{4}$.

Câu 17: Cho biết $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $P=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{19}}{5}$. **D.** $P=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\to(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$.

Ta có $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}=\sqrt{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

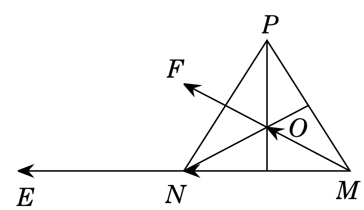
$=\sqrt{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

Câu 18: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120^0?

A. $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)$ **B.** $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$.

Lời giải

Chọn A



Vẽ $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)=\left(\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NP}\right)$

$=\widehat{PNE}=180^0-\widehat{MNP}=180^0-60^0=120^0$.

- Vẽ $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{MO}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ON}\right)=\widehat{NOF}=60^0$.
- Vì $MN\perp OP\longrightarrow\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)=90^0$.
- Ta có $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)=\widehat{NMP}=60^0$.

Câu 19: Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. $P=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $P=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

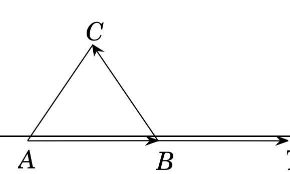
Lời giải

Chọn C

Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=180-\widehat{CBA}=120^0$

$\longrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos120^0=-\dfrac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{1}{2}$.



Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 20: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Tính $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 120^0. **D.** 150^0.

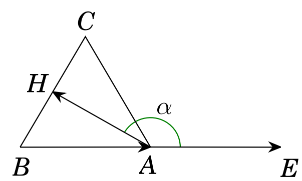
Lời giải

Chọn D

Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AE}\right)=\widehat{HAE}=\alpha$ (hình vẽ)

$=180^0-\widehat{BAH}=180^0-30^0=150^0$.



Câu 21: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B}=50^0$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^0$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^0$.

C. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^0$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=40^0$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}=180^0-40^0=140^0$.

Câu 22: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

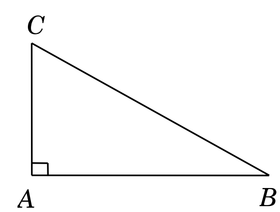
Chọn B

Xác định được $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}$.

Ta có $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow\widehat{ACB}=60^0$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^0-\widehat{ACB}=120^0$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\cos120^0=-\dfrac{1}{2}$.



Câu 23: Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. 180°. **B.** 360°. **C.** 270°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^0-\widehat{ABC} \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^0-\widehat{BCA} \\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=180^0-\widehat{CAB} \end{cases}$

$\longrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=540^0-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{CAB}\right)=540^0-180^0=360^0.$

Câu 24: Cho tam giác ABC với $\widehat{A}=60^\circ$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$.

A. 120°. **B.** 360°. **C.** 270°. **D.** 240°.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^0-\widehat{ABC} \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^0-\widehat{BCA} \end{cases}$

$\longrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=360^0-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}\right)$

$=360^0-\left(180^0-\widehat{BAC}\right)=360^0-180^0+60^0=240^0.$

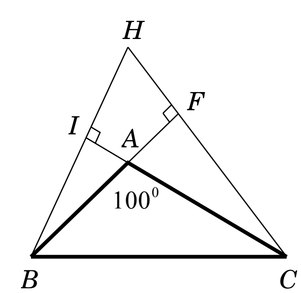
Câu 25: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)$.

A. 360°. **B.** 180°. **C.** 80°. **D.** 160°.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)=\widehat{BHA} \\ \left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)=\widehat{BHC} \\ \left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{CHA} \end{cases}$



$\longrightarrow \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{BHA}+\widehat{BHC}+\widehat{CHA}$

$=2\widehat{BHC}=2\left(180^0-100^0\right)=160^0$

(do tứ giác $HIAF$ nội tiếp. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

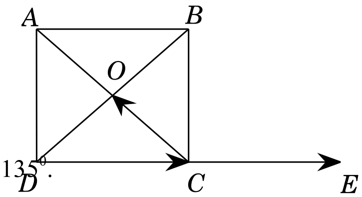
Câu 26: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A. 45^0. **B.** 405^0. **C.** 315^0. **D.** 225^0.

Lời giải

Chọn C

- Ta có $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^0$.
- Ta có $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)=180^0$.
- Vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$, khi đó $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)=\widehat{OCE}=135^0$.



Vậy $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$

$=0^0+180^0+135^0=315^0.$

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có:

$$\boxed{\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos 0^0 = \left|\vec{a}\right|^2.}$$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$, $\vec{b} = (b_1;b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$ là:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.}$$

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 = 0.}$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.}$$

b) Góc giữa hai vectơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\boxed{\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$\boxed{AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}.}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1 : Xác định biểu thức tích vô hướng, góc giữa hai vectơ.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2. Các ví dụ:

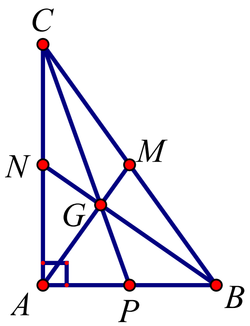
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Lời giải (hình 2.2)



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 2a^2\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Mặt khác $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \cos\widehat{ABC} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

Nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = a^2$

* Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = -\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có $CA = \sqrt{\left(2a\right)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3}.2a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$ Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) = -4a^2$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\dfrac{1}{2}\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\dfrac{2}{3}AM\right)^2 = \dfrac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}\left(AB^2 + AN^2\right) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}\left(AC^2 + AP^2\right) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}\right)$

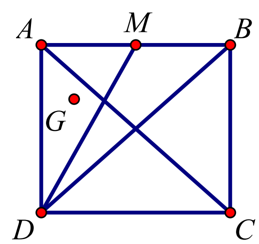
Lời giải (hình 2.3)

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\widehat{ACB}$

($\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)



Hình 2.3

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^0$ và theo định lý Pitago ta có :

$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a.a\sqrt{2}\cos 45^0 = a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\right] = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

Nên $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}\right) = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$

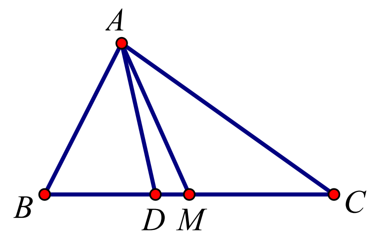
$$= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải (hình 2.3)



Hình 2.3

a) Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - CB^2\right] = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right)$$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos A = cb\cos A$

Suy ra $\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) = cb\cos A$ hay $\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2.\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) + b^2\right) = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC} = \frac{b}{c}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{b}{c}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) \Leftrightarrow (b + c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b + c)^2\overrightarrow{AD}^2 = \left(b\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (b + c)^2\overrightarrow{AD}^2 = b^2c^2 + 2bc.\frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) + c^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b + c)^2}(b + c - a)(b + c + a)$$

Hay $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

Nhận xét : Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$

Dạng 2: chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài của đoạn thẳng.

1. Phương pháp giải.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải:

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$VT = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)$

$= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = VP$ (đpcm)

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right)$

$= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0,\ \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (2)

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0$ suy ra BH vuông góc với AC

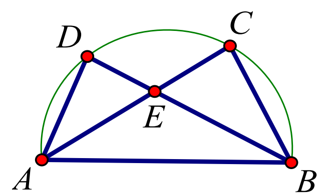
Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$

Lời giải (hình 2.4)

Ta có $VT=\overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{BE}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$



Hình 2.4

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB}=90^0$, $\widehat{ACB}=90^0$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}=0$, $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}=0$

Do đó $VT=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{AB}^2=VP$ (đpcm).

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $BC=a,CA=b,AB=c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$

Lời giải:

Ta có: $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Rightarrow\left(a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}\right)^2=0$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}+2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA}=0$

$$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2+ab\left(IA^2+IB^2-AB^2\right)+$$
$$+bc\left(IB^2+IC^2-BC^2\right)+ca\left(IA^2+IC^2-CA^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(a^2+ab+ca\right)IA^2+\left(b^2+ba+bc\right)IB^2+$$
$$+\left(c^2+ca+cb\right)IC^2-\left(abc^2+ab^2c+a^2bc\right)=0$$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)\left(a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2\right)=\left(a+b+c\right)abc$

$\Rightarrow a^2IA^2+b^2IB^2+c^2IC^2=abc$ (đpcm)

Dạng 3: tìm tập hợp điểm thoả mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài.

1. Phương pháp giải.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải:

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \frac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4}$ (Do $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$)

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI = a$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$

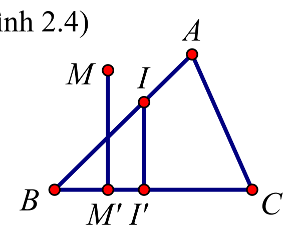
b) Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải (hình 2.4)



Hình 2.4

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Khi đó $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)\right].\overrightarrow{BC} = 3BC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC} = BC^2$

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC

Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC} = BC^2$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I'.BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$

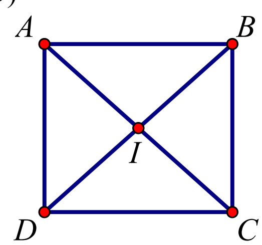
Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.

Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước.

Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = k$

Lời giải (hình 2.5)



Hình 2.5

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$
$$= MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$

Nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = k$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

Nếu $k > -a^2$ thì $MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

DẠNG 4: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp giải.

- Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vectơ là $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

+ Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

- Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a} = (x;y)$ thì $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

+ Nếu $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3.8 + 4.6 = 0$

Do đó $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}(11;2)$, $\overrightarrow{BA}(3;-4)$

Suy ra $\cos B = \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{11.3 + 2.(-4)}{\sqrt{11^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1;y-2)$, $\overrightarrow{BH}(x+2;y-6)$, $\overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$

Hay $11x + 2y - 15 = 0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\dfrac{x+2}{11} = \dfrac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x = \dfrac{1}{5}$, $y = \dfrac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{32}{5}\right)$

Ví dụ 2: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I\left(1;1\right)$, đỉnh $A\left(3;2\right)$ và đỉnh B nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Lời giải:

Vì B nằm trên trục hoành nên giả sử $B\left(0;y\right)$

Vì I là tâm hình thoi $ABCD$ nên I là trung điểm của AC và BD

Suy ra $C=\left(2x_I-x_A;2y_I-y_A\right)=\left(-1;0\right)$, $D=\left(2x_I-x_B;2y_I-y_B\right)=\left(2;2-y\right)$

Do đó $AB=AD\Leftrightarrow AB^2=AD^2\Leftrightarrow 9+\left(y-2\right)^2=1+y^2\Leftrightarrow y=3$

Vậy $B\left(0;3\right)$, $C\left(-1;0\right)$, $D\left(2;-1\right)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $\widehat{AMB}=45^0$

Lời giải:

Giả sử $M(x;y)$ suy ra $\overrightarrow{MA}(3-x;4-y)$, $\overrightarrow{MB}(2-x;1-y)$, $\overrightarrow{BC}(-3;-3)$

Vì $\widehat{AMB}=45^0$ suy ra $\left|\cos\widehat{AMB}\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BC}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|-3(3-x)-3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}\sqrt{9+9}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}=|x+y-7|$ (*)

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Suy ra $\frac{2-x}{-3}=\frac{1-y}{-3}\Leftrightarrow x=y+1$ thế vào (*) ta được

$\sqrt{(2-y)^2+(4-y)^2}=|2y-6|\Leftrightarrow y^2-6y+8=0\Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=4$

+ Với $y=2\Rightarrow x=3$, ta có $\overrightarrow{MA}(0;2)$, $\overrightarrow{MB}(-1;-1)\Rightarrow \cos\widehat{AMB}=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB}=135^0$ (không thỏa mãn)

+ Với $y=4\Rightarrow x=5$, $\overrightarrow{MA}(-2;0)$, $\overrightarrow{MB}(-3;-3)\Rightarrow \cos\widehat{AMB}=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB}=45^0$

Vậy $M(5;4)$. là điểm cần tìm.

Ví dụ 4: Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \geq 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2)-1.(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b+5$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}$

$= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5$

Vì $c > 0$ nên $-2b+5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \dfrac{5}{2}$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \dfrac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5 ↘	1	↗ $\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \dfrac{5}{2}$ là $y = 5$ khi $x = 0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b = 0$, suy ra $c = 5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b}) = 0^0 \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^0$. **B.** $\alpha = 0^0$. **C.** $\alpha = 90^0$. **D.** $\alpha = 45^0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 180^0$.

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2$ và $\vec{a}.\vec{b} = -3.$ Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\alpha = 30^0$. **B.** $\alpha = 45^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 120^0$.

Lời giải

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{-3}{3.2} = -\dfrac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 120^0.$

Chọn D

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}.$

A. $\alpha = 90^0$. **B.** $\alpha = 180^0$. **C.** $\alpha = 60^0$. **D.** $\alpha = 45^0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}\vec{a}^2 - \dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a}\vec{b} = -1.$

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 180^0.$

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right).$ **B.** $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2\right).$

C. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.　　**D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=4\vec{a}\vec{b}\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

- A đúng, vì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.

- B đúng, vì $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$.

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$.　**B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.　**C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$.　**D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$.　**B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.　**C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$.　**D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos 120^0=-\frac{a^2}{2}$.

Câu 8. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$.　**B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$.　**C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$.　**D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2}\longrightarrow$ **A đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{2}\longrightarrow$ **B đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=GA.GB.\cos\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{6}\longrightarrow$ **C sai.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=30^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=AB.AG.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=a.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.\cos 30^0=\dfrac{a^2}{2}\longrightarrow$ **D đúng.**

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$. **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA}\right)=150^0$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=135^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a\sqrt{2}.\cos 135^0=-a^2$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c,\ AC=b.$ Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$.

C. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2.$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA.BC.\cos\widehat{B}=c.\sqrt{b^2+c^2}.\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=c^2.$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0.$

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=AB^2=c^2.$

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CA=5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}.$

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13.$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15.$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17.$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB+BC=CA\Rightarrow$ ba điểm A,B,C thẳng hàng và B nằm giữa $A,C.$

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=3.5.\cos0^0=15.$

Cách khác. Ta có $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2=CB^2-2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}+CA^2$

$\longrightarrow\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(3^2+5^2-2^2\right)=15.$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}.$

A. $P=b^2-c^2.$ **B.** $P=\frac{c^2+b^2}{2}.$

C. $P=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}.$ **D.** $P=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=AC^2-AB^2=b^2-c^2.$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$ Gọi M là trung điểm cạnh $BC.$ Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}.$

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{b^2-c^2}{2}.$ **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2}{2}.$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)=\frac{b^2-c^2}{2}$.

Câu 15. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ là

A. tam giác OAB đều.

B. tam giác OAB cân tại O.

C. tam giác OAB vuông tại O.

D. tam giác OAB vuông cân tại O.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=0\Leftrightarrow OB^2-OA^2=0\Leftrightarrow OB=OA$.

Câu 16. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$.

B. $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$.

D. $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$.

B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$.

A. $P=-1.$ **B.** $P=3a^2.$ **C.** $P=-3a^2.$ **D.** $P=2a^2.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC=a\sqrt{2}.$

Ta có $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}^2$

$=-CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)-AC^2=-a\sqrt{2}.a.\cos 45^0-\left(a\sqrt{2}\right)^2=-3a^2.$

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right).$

A. $P=2\sqrt{2}a.$ **B.** $P=2a^2.$ **C.** $P=a^2.$ **D.** $P=-2a^2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} BD=a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD} \end{cases}.$

Khi đó $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}+0$

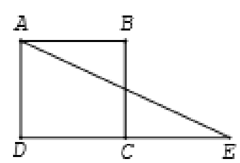
$=-2.BA.BD\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-2.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=-2a^2.$

Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}.$

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2.$ **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2.$ **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2.$ **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a.$

Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$

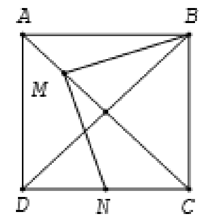
$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2.$

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng $DC.$ Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}.$

A. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4.$ **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0.$ **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4.$ **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16.$

Lời giải

Chọn B



Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

• $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$

• $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$ Suy ra:

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0\right) = 0.$$

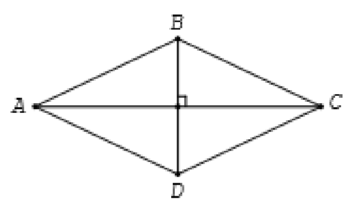
Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5.$ Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 62.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 64.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -62.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -64.$

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64$.

Câu 23. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6.$ Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 24.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 26.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 28.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 32.$

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\frac{1}{2}AC^2=32.$$

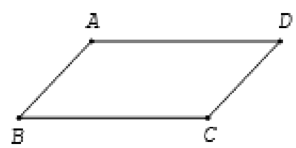
Câu 24. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=8$ cm, $AD=12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2\sqrt{7}}{16}.$ **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{16}.$

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}.$ **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABC}=54\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=27\,\text{cm}^2$. Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{ABC}.$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{ABC}=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB.AD}=\frac{2.27}{8.12}=\frac{9}{16}$$

$$\longrightarrow \cos\widehat{ABC}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}}=\frac{5\sqrt{7}}{16}\text{ (vì }\widehat{ABC}\text{ nhọn).}$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

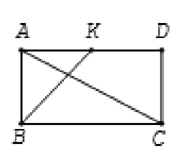
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\left(180^0-\widehat{ABC}\right)=-\cos\widehat{ABC}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}.$

Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh $AD.$ Tính $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0.$ **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}.$ **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}.$ **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}.$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$

$\longrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 0.$$

Câu 26. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}.$

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI.

Câu 27. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$

Ta có $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}.$ $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính $BG.$

Câu 28. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $BC.$

Câu 29. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Khi đó $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2=2a^2.$

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN}=0 \Leftrightarrow CN\perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với $AB.$

Câu 30. Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8.$ Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}.$

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}.$

Theo giả thiết, ta có $MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=-16 \Leftrightarrow MI^2=\dfrac{AB^2}{4}-16=\dfrac{8^2}{4}-16=0 \longrightarrow M\equiv I.$

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho ba điểm $A(3;-1),\ B(2;10),\ C(-4;2).$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11),\ \overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40.$

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10).$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}.$

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4.$ **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0.$ **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4.$ **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1),\ \overrightarrow{OB}=(2;10).$ Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4.$

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$.

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=(4;6)$ và $\vec{b}=(3;-7)$.

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.(-7)=-30$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$.

A. $\vec{c}=(-1;-3)$. **B.** $\vec{c}=(-1;3)$. **C.** $\vec{c}=(1;-3)$. **D.** $\vec{c}=(1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c}=(x;y)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\longrightarrow\vec{c}=(-1;3)$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$. Tính $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=18$. **C.** $P=20$. **D.** $P=28$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=1.6+2.6=18$.

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{-1.2+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{2^2+0^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{\circ}$. **B.** $\alpha=60^{\circ}$. **C.** $\alpha=45^{\circ}$. **D.** $\alpha=30^{\circ}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{4.1+3.7}{\sqrt{16+9}.\sqrt{1+49}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^{0}$.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha=45^{\circ}$. **B.** $\alpha=60^{\circ}$. **C.** $\alpha=90^{\circ}$. **D.** $\alpha=135^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|}=\frac{1.(-3)+2.(-1)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{x},\vec{y}\right)=135^{0}$.

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^{\circ}$. **B.** $\alpha=45^{\circ}$. **C.** $\alpha=60^{\circ}$. **D.** $\alpha=135^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{2.3+5(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=135^{0}$.

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{a}=(9;3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?

A. $\vec{v_1}=(1;-3)$. **B.** $\vec{v_2}=(2;-6)$. **C.** $\vec{v_3}=(1;3)$. **D.** $\vec{v_4}=(-1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a}.\vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận vectơ đó không vuông góc với $\vec{a}$.

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho ba điểm $A(1;2),\ B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}.$

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{1}{2}.$

B. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{2}{5}.$

D. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(6;0),\ B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. $15^{O}.$ **B.** $60^{O}.$ **C.** $120^{O}.$ **D.** $135^{O}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-4;-2)$. Suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3.(-4)+(-1).(-2)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\widehat{B}=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=135^{O}.$$

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho bốn điểm $A(-8;0),\ B(0;4),\ C(2;0)$ và $D(-3;-5).$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right).$

D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;4),\ \overrightarrow{AD}=(5;-5),\ \overrightarrow{CB}=(-2;4),\ \overrightarrow{CD}=(-5;5).$

Suy ra $\begin{cases}\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{8.5+4.(-5)}{\sqrt{8^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{(-2).(-5)+4.(-5)}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$

$$\longrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=0\Rightarrow\widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^{0}.$$

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$ Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}.$

A. $k=20.$ **B.** $k=-20.$ **C.** $k=-40.$ **D.** $k=40.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4).$

Yêu cầu bài toán: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{2}k+(-5)(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}.$ Tìm k để vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k=\frac{37}{4}.$ **B.** $k=\frac{\sqrt{37}}{2}.$ **C.** $k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$ **D.** $k=\frac{5}{8}.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4).$

Suy ra $|\vec{u}|=\sqrt{\frac{1}{4}+25}=\frac{1}{2}\sqrt{101}$ và $|\vec{v}|=\sqrt{k^2+16}$. Do đó để

$|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow\sqrt{k^2+16}=\frac{1}{2}\sqrt{101}\Leftrightarrow k^2+16=\frac{101}{4}\Leftrightarrow k^2=\frac{37}{4}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3),\ \vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}.$ Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m.$ **B.** $3k=2m.$ **C.** $2k+3m=0.$ **D.** $3k+2m=0.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}.$

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0.$

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;3)$ và $\vec{b}=(4;1)$. Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

A. $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right).$ **B.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right).$ **C.** $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right).$ **D.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right).$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{d}=(x;y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases}-2x+3y=4\\4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{5}{7}\\y=\dfrac{6}{7}\end{cases}$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{u}=(4;1)$, $\vec{v}=(1;4)$ và $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ với $m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}=(4+m;1+4m)$. Trục hoành có vectơ đơn vị là $\vec{i}=(1;0)$.

Vectơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{i}=0\Leftrightarrow 4+m=0\Leftrightarrow m=-4$.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$. Tìm m để vectơ $\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với vectơ $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc 45^0.

A. $m=4$. **B.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}=(4m+1;m+4)\\\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}=(1;1)\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(4m+1)+(m+4)}{\sqrt{2}\sqrt{(4m+1)^2+(m+4)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \dfrac{5(m+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17m^2+16m+17}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 5(m+1)=\sqrt{17m^2+16m+17}\Leftrightarrow \begin{cases}m+1\ge 0\\25m^2+50m+25=17m^2+16m+17\end{cases}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1;-2)$ và $N(-3;4)$.

A. $MN=4$. **B.** $MN=6$. **C.** $MN=3\sqrt{6}$. **D.** $MN=2\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4;6)$ suy ra $MN=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{42}=2\sqrt{13}$.

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$, $C(5;4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P=4+2\sqrt{2}.$ **B.** $P=4+4\sqrt{2}.$ **C.** $P=8+8\sqrt{2}.$ **D.** $P=2+2\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-2)\\ \overrightarrow{BC}=(2;2)\\ \overrightarrow{CA}=(-4;0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}\\ BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\\ CA=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4\end{cases}$

Vậy chu vi P của tam giác ABC là $P=AB+BC+CA=4+4\sqrt{2}.$

Câu 53. Trong hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j})$, cho vectơ $\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}.$ **B.** $1.$ **C.** $\frac{6}{5}.$ **D.** $\frac{7}{5}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}\longrightarrow\vec{a}=\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1.$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|.$ **B.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho các điểm $A(1;2),$ $B(-2;-4),$ $C(0;1)$ và $D\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|.$

C. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-6)$ và $\overrightarrow{CD}=\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-3).(-1)+(-6).\frac{1}{2}=0.$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{CD}.$

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho bốn điểm $A(7;-3),$ $B(8;4),$ $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$.

B. Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;7) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} = (-7;1) \Rightarrow BC = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD} = (-1;-7) \Rightarrow CD = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA} = (7;-1) \Rightarrow DA = 5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB = BC = CD = DA = 5\sqrt{2}.$

Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 1(-7) + 7.1 = 0$ nên $AB \perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(3;1)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1;1) \\ \overrightarrow{DC} = (3;3) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $DC \parallel AB$ và $DC = 3AB$. (1)

Mặt khác $\begin{cases} AD = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \\ BC = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \end{cases} \longrightarrow AD = BC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B.

D. Tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2),\ \overrightarrow{BC}=(0;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$.

Suy ra $\begin{cases} AB=AC=2\sqrt{2} \\ AB^2+AC^2=BC^2 \end{cases}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(10;5)$, $B(3;2)$ và $C(6;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC vuông cân tại A.

C. Tam giác ABC vuông cân tại B.

D. Tam giác ABC có góc A tù.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-7;-3), \overrightarrow{BC}=(3;-7)$ và $\overrightarrow{AC}=(-4;-10)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(-7).3+(-3).(-7)=0$ và $AB=BC$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, $B(1;-1)$ và $C(-2;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC vuông cân tại A.

C. Tam giác ABC vuông tại B.

D. Tam giác ABC vuông cân tại C.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;0),\ \overrightarrow{BC}=(-3;3)$ và $\overrightarrow{AC}=(0;3)$.

Do đó $\begin{cases} AB=AC=3 \\ BC=3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2.$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

A. $C(6;0)$.

B. $C(0;0),\ C(6;0)$.

C. $C(0;0)$.

D. $C(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C\in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CA}=(-2-c;4) \\ \overrightarrow{CB}=(8-c;4) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (-2-c).(8-c)+4.4=0$

$\Leftrightarrow c^2-6c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \to C(6;0) \\ c=0 \to C(0;0) \end{array}\right.$.

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow (-4).(-1)+(-1)(c-2)=0 \Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;0)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(2;0)$. **C.** $M(-4;0)$. **D.** $M(-5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in Ox$ nên $M(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA}=(-4-x;0) \\ \overrightarrow{MB}=(-5-x;0) \\ \overrightarrow{MC}=(3-x;0) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-6-3x;0)$.

Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên $-6-3x=0 \Leftrightarrow x=-2 \longrightarrow M(-2;0)$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(-2;2)$ và $N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng.

A. $P(0;4)$. **B.** $P(0;-4)$. **C.** $P(-4;0)$. **D.** $P(4;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P \in Ox$ nên $P(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MP}=(x+2;-2) \\ \overrightarrow{MN}=(3;-1) \end{cases}$.

Do M, N, P thẳng hàng nên $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{-2}{-1} \Leftrightarrow x=4 \longrightarrow P(4;0)$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1;4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $M(1;0)$. **B.** $M(1;0)$, $M(-3;0)$.

C. $M(3;0)$. **D.** $M(1;0)$, $M(3;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\overrightarrow{MN}=(-1-m;4)$.

Theo giả thiết: $MN=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-m)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (1+m)^2+16=20 \Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \longrightarrow M(1;0) \\ m=-3 \longrightarrow M(-3;0) \end{array}\right.$.

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B.

A. $C\left(-\frac{5}{3};0\right)$. **B.** $C\left(\frac{5}{3};0\right)$. **C.** $C\left(-\frac{3}{5};0\right)$. **D.** $C\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C \in Ox$ nên $C(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AC}=(x-1;-3) \\ \overrightarrow{BC}=(x-4;-2) \end{cases}$.

Do $CA=CB \Leftrightarrow CA^2=CB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(-3)^2=(x-4)^2+(-2)^2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \longrightarrow C\left(\frac{5}{3};0\right)$.

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoàng sao cho $\widehat{AMB}=90^0$?

A. $M(0;1)$. **B.** $M(6;0)$. **C.** $M(1;6)$. **D.** $M(0;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AM}=(m-2;-2) \\ \overrightarrow{BM}=(m-5;2) \end{cases}$.

Vì $\widehat{AMB}=90^0$ suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ nên $(m-2)(m-5)+(-2).2=0$.

$\Leftrightarrow m^2-7m+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=6 \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;0) \\ M(6;0) \end{array}\right.$.

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M\in Oy$ nên $M\left(0;m\right)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=\left(1;-1-m\right)\\ \overrightarrow{MB}=\left(3;2-m\right)\end{cases}$.

Khi đó $MA^2+MB^2=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2=1^2+\left(-1-m\right)^2+3^2+\left(2-m\right)^2=2m^2-2m+15.$

$=2\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{29}{2}\ge\dfrac{29}{2};\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Suy ra $\left\{MA^2+MB^2\right\}_{\min}=\dfrac{29}{2}.$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $m=\dfrac{1}{2}\longrightarrow M\left(0;\dfrac{1}{2}\right).$

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hình bình hành $ABCD$ biết $A\left(-2;0\right),$ $B\left(2;5\right),$ $C\left(6;2\right).$ Tìm tọa độ điểm $D.$

A. $D\left(2;-3\right).$ **B.** $D\left(2;3\right).$ **C.** $D\left(-2;-3\right).$ **D.** $D\left(-2;3\right).$

Lời giải

Chọn A

Gọi $D\left(x;y\right).$ Ta có $\overrightarrow{AD}=\left(x+2;y\right)$ và $\overrightarrow{BC}=\left(4;-3\right).$ Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\longrightarrow\begin{cases}x+2=4\\ y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases}\longrightarrow D\left(2;-3\right).$

Câu 70. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A\left(1;3\right),B\left(-2;4\right),C\left(5;3\right).$ Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

A. $G\left(2;\dfrac{10}{3}\right).$ **B.** $G\left(\dfrac{8}{3};-\dfrac{10}{3}\right).$ **C.** $G\left(2;5\right).$ **D.** $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{10}{3}\right).$

Lời giải

Chọn D

Tọa độ trọng tâm $G\left(x_G;y_G\right)$ là $\begin{cases}x_G=\dfrac{1-2+5}{3}=\dfrac{4}{3}\\ y_G=\dfrac{3+4+3}{3}=\dfrac{10}{3}\end{cases}.$

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A\left(-4;1\right),B\left(2;4\right),$ $C\left(2;-2\right).$ Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\dfrac{1}{4};1\right).$ **B.** $I\left(-\dfrac{1}{4};1\right).$ **C.** $I\left(1;\dfrac{1}{4}\right).$ **D.** $I\left(1;-\dfrac{1}{4}\right).$

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AI}=(x+4;y-1) \\ \overrightarrow{BI}=(x-2;y-4). \\ \overrightarrow{CI}=(x-2;y+2) \end{cases}$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IB^2=IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-4)^2 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2=(x-2)^2+9 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{4} \\ y=1 \end{cases}.$$

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(-3;0), B(3;0)$ và $C(2;6).$ Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b.$

A. $a+6b=5.$ **B.** $a+6b=6.$ **C.** $a+6b=7.$ **D.** $a+6b=8.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}=(a+3;b) \ \& \ \overrightarrow{BC}=(-1;6) \\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b) \ \& \ \overrightarrow{AC}=(5;6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3).(-1)+b.6=0 \\ (a-3).5+b.6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b=7.$$

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác ABC có $A(4;3), B(2;7)$ và $C(-3;-8).$ Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh $BC.$

A. $A'(1;-4).$ **B.** $A'(-1;4).$ **C.** $A'(1;4).$ **D.** $A'(4;1).$

Lời giải

Chọn C

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3) \\ \overrightarrow{BC}=(-5;-15) \\ \overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7) \end{cases}.$

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} AA' \perp BC \\ B,\ A',\ C \text{ thang hang} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 & (1) \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} & (2) \end{cases}.$

- $(1) \Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y=13.$
- $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x-y=-1.$

Giải hệ $\begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \longrightarrow A'(1;4).$

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

A. $A'\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **B.** $A'\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **C.** $A'\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **D.** $A'\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4) \\ \overrightarrow{BC}=(6;-2) \\ \overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1) \end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AA'\perp BC \\ B,\ C,\ A' \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2).6+(y-4).(-2)=0 \\ \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4 \\ -2x-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Câu 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$ và $C(11;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

A. $D(5;-8)$. **B.** $D(8;5)$. **C.** $D(-5;8)$. **D.** $D(-8;5)$.

Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \longrightarrow \widehat{ABC}=90^0$.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Suy ra I là trung điểm của $AC \longrightarrow I(4;-1)$.

Gọi $D(x;y)$, do I cũng là trung điểm của $BD \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+3}{2}=4 \\ \dfrac{y+6}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow D(5;-8)$.

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B.

A. $C(4;0)$. **B.** $C(-2;2)$. **C.** $C(4;0)$, $C(-2;2)$. **D.** $C(2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $C(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(1;3) \\ \overrightarrow{BC}=(x-1;y-1) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ BA=BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1.(x-1)+3.(y-1)=0 \\ 1^2+3^2=(x-1)^2+(y-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y \\ 10y^2-20y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}$.

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;-1)$ và $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm D, biết D có tung độ âm.

A. $D(0;-1)$. **B.** $D(2;-3)$. **C.** $D(2;-3),\ D(0;1)$. **D.** $D(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $C\ =(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;1) \\ \overrightarrow{BC}=(x-3;y) \end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC} \\ AB=BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)+1.y=0 \\ (x-3)^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2(3-x) \\ 5(x-3)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2(3-x) \\ (x-3)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Với $C_1(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2;-3)$: thỏa mãn.

Với $C_2(2;2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0;1)$: không thỏa mãn.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho bốn điểm $A(1;2), B(-1;3), C(-2;-1)$ và $D(0;-2).$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $ABCD$ là hình vuông.

B. $ABCD$ là hình chữ nhật.

C. $ABCD$ là hình thoi.

D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-2;1) \\ \overrightarrow{BC}=(-1;-4) \\ \overrightarrow{DC}=(-2;1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-2\neq 0 \end{cases} \longrightarrow ABCD$ là hình hình hành.

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho tam giác OAB với $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc O của tam giác $OAB.$

A. $E=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.

B. $E=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

C. $E=\left(-2+3\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right)$.

D. $E=\left(-2+3\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. $(*)$

Gọi $E(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{EA}=(1-x;3-y)\\ \overrightarrow{EB}=(4-x;2-y)\end{cases}$.

Từ $(*)$, suy ra $\begin{cases}1-x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(4-x)\\ 3-y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2+3\sqrt{2}\\ y=4-\sqrt{2}\end{cases}$.

Câu 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$. **B.** $D(7;0)$, $D(2;9)$. **C.** $D(0;7)$, $D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

Lời giải

Chọn B

Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x;y)$.

• Trường hợp 1: $\begin{cases}AB\parallel CD\\ AB\neq CD\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ (với $k\neq -1$)

$\Leftrightarrow(x-0;y-7)=(-2k;2k)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2k\\ y=2k+7\end{cases}$. (1)

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x-2;y)\Rightarrow AD=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\\ \overrightarrow{BC}=(0;5)\Rightarrow BC=5\end{cases}\longrightarrow AD=BC\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=25.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $(-2k-2)^2+(2k+7)^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\,(\text{loại})\\ k=-\dfrac{7}{2}\end{array}\right.\longrightarrow D(7;0)$.

• Trường hợp 2: $\begin{cases}AD\parallel BC\\ AD\neq BC\end{cases}$. Làm tương tự ta được $D=(2;9)$.

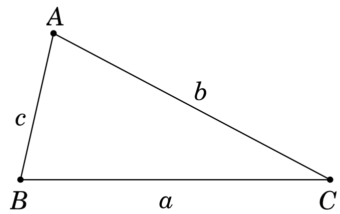
Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(2;9)$.

BÀI 3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định lí côsin

Cho tam giác ABC có $BC = a,\ AC = b$ và $AB = c$.



Ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A;$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B;$

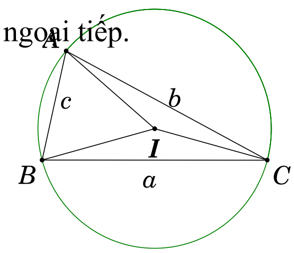
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$

Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin

Cho tam giác ABC có $BC = a,\ AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.



Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài đường trung tuyến

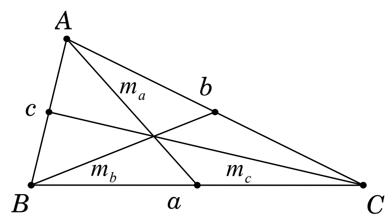
Cho tam giác ABC có $m_a,\ m_b,\ m_c$ lần lượt là các trung tuyến kẻ từ $A,\ B,\ C$.

Ta có

$m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4};$

$m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4};$

$m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}.$



4. Công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có

- $h_a,\ h_b,\ h_c$ là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh $BC,\ CA,\ AB$;
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác;
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác;
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác;
- S là diện tích tam giác.

Khi đó ta có:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$
$$= \frac{abc}{4R}$$
$$= pr$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp.

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\widehat{A} = 30^0$, $\widehat{B} = 45^0$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 30^0 - 45^0 = 105^0$

Theo định lí sin ta có $a = 2R\sin A = 2.3.\sin 30^0 = 3$,

$b = 2R\sin B = 2.3.\sin 45^0 = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R\sin C = 2.3.\sin 105^0 \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \approx \frac{2\left(18 + 5,796^2\right) - 9}{4} = 23,547$

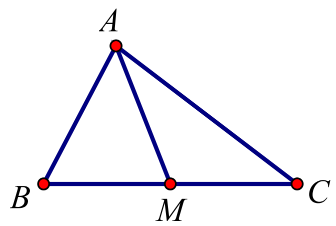
Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow r = \frac{bc\sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5,796\sin 30^0}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Biết $AB = 3$, $BC = 8$, $\cos\widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC.

Lời giải (hình 2.7)



Hình 2.7

$BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí côsin ta có

$\cos \widehat{AMB} = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.AB}$

Suy ra $\dfrac{5\sqrt{13}}{26} = \dfrac{x^2 + 16 - 9}{2.4.x}$

$\Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{13} \\ x = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$AM^2 = \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{2AB.AC}$

TH1: Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \dfrac{2\left(3^2 + AC^2\right) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$.

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{9 + 49 - 64}{2.3.7} = -\dfrac{1}{7}$

Suy ra $A \approx 98^0 12'$

TH2: Nếu $x = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \dfrac{49}{13} = \dfrac{2\left(3^2 + AC^2\right) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\dfrac{397}{13}}$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{9 + \dfrac{397}{13} - 64}{2.3.\sqrt{\dfrac{397}{13}}} = -\dfrac{53}{\sqrt{5161}}$

Suy ra $A \approx 137^0 32'$

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 1$. Giả sử E là trung điểm AB và thỏa mãn $\sin \widehat{BDE} = \dfrac{1}{3}$.

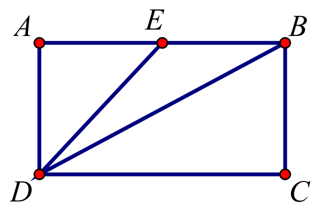
Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải (hình 2.8)

Đặt $AB = 2x\ (x > 0) \Rightarrow AE = EB = x$.

Vì góc $\widehat{BDE}$ nhọn nên $\cos \widehat{BDE} > 0$ suy ra

$\cos \widehat{BDE} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{BDE}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$



Hình 2.8

Theo định lí Pitago ta có:

$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 1 + x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{1 + x^2}$

$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow BD = \sqrt{4x^2 + 1}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDE ta có

$$\cos \widehat{BDE} = \frac{DE^2 + DB^2 - EB^2}{2DE.DB} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4x^2 + 2}{2\sqrt{\left(1 + x^2\right)\left(4x^2 + 1\right)}}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (Do } x > 0\text{)}$$

Vậy độ dài cạnh AB là $\sqrt{2}$

Dạng 2: giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai

góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0 và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\widehat{A} = 87^0$.

Lời giải

Theo định lí côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 32^2 + 4^2 - 2.32.4.\sin 87^0$$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lí sin ta có

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{32\sin 87^0}{53,8} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^0$$

Suy ra $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 180^0 - 87^0 - 36^0 = 57^0$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 40^0$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C} = \frac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C} = \frac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giải thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12^2}{2.2\sqrt{2}.\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\widehat{A} = 120^0$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120^0.

Dạng 3: Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \ge \dfrac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \dfrac{a}{2R}, \sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin C = \dfrac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B.\sin C \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 = \dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \ge \dfrac{2bc - bc}{2bc} = \dfrac{1}{2}$ đpcm

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

Lời giải (hình 2.9)

a) Trên tia đối của tia AC lấy D thỏa $AD = AB = c$ suy ra tam giác BDA cân tại A và $\widehat{BDA} = \dfrac{1}{2}\widehat{A}$.

Áp dụng định lý hàm số Côsin cho ΔABD, ta có:

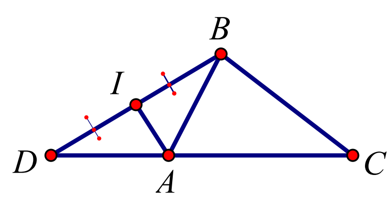
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\widehat{BAD}$

$= 2c^2 - 2c^2.\cos(180^0 - A)$

$= 2c^2(1 + \cos A) = 2c^2(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})$

$= \dfrac{c}{b}(a+b+c)(b+c-a) = \dfrac{4c}{b}p(p-a)$

Suy ra



Hình 2.9

$BD = 2\sqrt{\dfrac{cp(p-a)}{b}}$

Gọi I là trung điểm của BD suy ra $AI \perp BD$.

Trong tam giác ADI vuông tại I, ta có

$\cos\dfrac{A}{2} = \cos\widehat{ADI} = \dfrac{DI}{AD} = \dfrac{BD}{2c} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$.

Vậy $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

b) Từ định lý hàm số sin, ta có: $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{p}{R}$ (1)

Theo câu a) ta có $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, tương tự thì $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ và $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

kết hợp với công thức $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}=\frac{abc}{4R}$

Suy ra $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$=\frac{4p}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{4pS}{abc}=\frac{p}{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Nhận xét: Từ câu a) và hệ thức lượng giác cơ bản ta suy ra được các công thức

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

b) $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lí côsin và công thức $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ta có:

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ đpcm

b) Theo câu a) tương tự ta có $\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$, $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

Suy ra $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\leq\left(\frac{3p-a-b-c}{3}\right)^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3$

Mặt khác $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\Rightarrow S\leq\sqrt{p\frac{p^3}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Ta có $p^2=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{4}\leq\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}$ suy ra $S\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

Do đó $\cot A + \cot B + \cot C \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4.\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

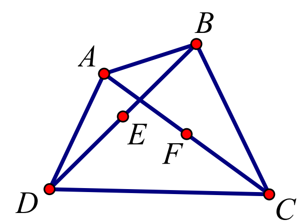
Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G
$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2$ (*)
Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có
$m_b^2 = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4},\ m_c^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$
Suy ra $(*) \Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\left(m_b^2 + m_c^2\right) = a^2$
$\Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\left[\dfrac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4} + \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}\right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$ (đpcm)

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm các đường chéo. Chứng minh :
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Lời giải (hình 2.10)

Áp dụng công thức đường trung tuyến với tam giác ABC và ADC ta có:
$AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (1)
$CD^2 + DA^2 = 2DE^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(BE^2 + DE^2\right) + AC^2$



Hình 2.10

Mặt khác EF là đường trung tuyến tam giác BDF nên $BE^2 + DE^2 = 2EF^2 + \dfrac{BD^2}{2}$

Suy ra $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

Dạng 4: Nhận Dạng Tam Giác

1. Phương pháp giải.
Sử dụng định lí côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.
2. Các ví dụ.
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin C = 2\sin B\cos A$. Chứng minh minh rằng tam giác ABC cân .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin và sin ta có:
$\sin C = 2\sin B\cos A \Leftrightarrow \dfrac{c}{2R} = 2.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$
Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

Ta có: $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}\Leftrightarrow \sin A(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{2R}(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab})=\dfrac{b+c}{2R}$

$\Leftrightarrow b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=2b^2c+2c^2b$

$\Leftrightarrow b^3+c^3+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c=0\Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2)-a^2(b+c)=0$

$b^2+c^2=a^2\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c$

b) $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ah_a$ suy ra

$a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c\Leftrightarrow a.\dfrac{2S}{bc}+b.\dfrac{2S}{ca}+c.\dfrac{2S}{ab}=\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+1+\cot^2 B+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B})\Leftrightarrow (\sin^2 A+\sin^2 B)^2=4\sin^2 A\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A=\sin^2 B\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tam giác ABC có $AB=5, BC=7, CA=8$. Số đo góc $\widehat{A}$ bằng:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos\widehat{A}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2.5.8}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó, $\widehat{A}=60°$.

Câu 2: Tam giác ABC có $AB=2, AC=1$ và $\widehat{A}=60°$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC=1.$ **B.** $BC=2.$ **C.** $BC=\sqrt{2}.$ **D.** $BC=\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm cosin, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A} = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 60° = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3}$.

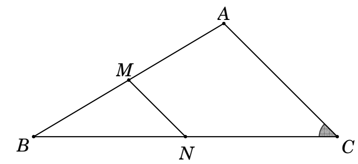
Câu 3: Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60°$. Tính độ dài cạnh cạnh BC .

A. $BC = 3 + 3\sqrt{6}.$ **B.** $BC = 3\sqrt{6} - 3.$ **C.** $BC = 3\sqrt{7}.$ **D.** $BC = \dfrac{3 + 3\sqrt{33}}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .



$\longrightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC .

$\longrightarrow MN = \dfrac{1}{2}AC$. Mà $MN = 3$, suy ra $AC = 6$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos\widehat{ACB}$

$\Leftrightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 - 2.6.BC.\cos 60°$

$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{6}$

Câu 4: Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}, AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45°$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $BC = \sqrt{5}.$ **B.** $BC = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$ **C.** $BC = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$ **D.** $BC = \sqrt{6}.$

Lời giải

Chọn B

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos\widehat{C} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + BC^2 - 2.\sqrt{3}.BC.\cos 45°$

$\Rightarrow BC = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

Câu 5: Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60°, \widehat{C} = 45°$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

A. $AC = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}.$ **B.** $AC = 5\sqrt{3}.$ **C.** $AC = 5\sqrt{2}.$ **D.** $AC = 10.$

Lời giải

Chọn A

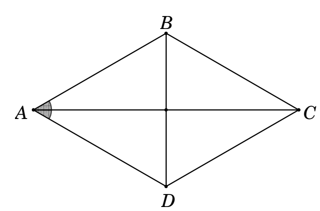
Theo định lí hàm sin, ta có $\dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} \Leftrightarrow \dfrac{5}{\sin 45°} = \dfrac{AC}{\sin 60°} \Rightarrow AC = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

Câu 6: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng $1\,cm$ và có $\widehat{BAD} = 60°$. Tính độ dài cạnh AC .

A. $AC = \sqrt{3}.$ **B.** $AC = \sqrt{2}.$ **C.** $AC = 2\sqrt{3}.$ **D.** $AC = 2.$

Lời giải

Chọn A



Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \widehat{ABC} = 120°$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}$

$= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120° = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$

Câu 7: Tam giác ABC có $AB=4, BC=6, AC=2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài cạnh AM.

A. $AM=4\sqrt{2}$. **B.** $AM=3$. **C.** $AM=2\sqrt{3}$. **D.** $AM=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

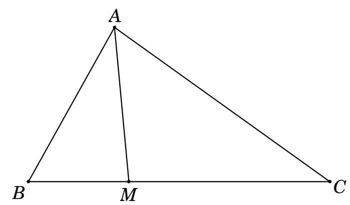
Theo định lí hàm cosin, ta có : $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{4^2+6^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}{2.4.6}=\dfrac{1}{2}$.

Do $MC=2MB \longrightarrow BM=\dfrac{1}{3}BC=2$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AM^2=AB^2+BM^2-2.AB.BM.\cos\widehat{B}$

$=4^2+2^2-2.4.2.\dfrac{1}{2}=12 \Rightarrow AM=2\sqrt{3}$



Câu 8: Tam giác ABC có $AB=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, BC=\sqrt{3}, CA=\sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng bao nhiêu độ?

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $75°$. **D.** $90°$.

Lời giải

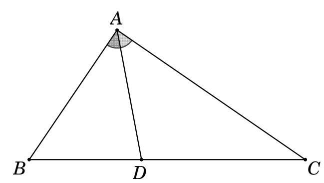
Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có:

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BAC}=120° \Rightarrow \widehat{BAD}=60°$

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC}=45°$



Trong ΔABD có $\widehat{BAD}=60°, \widehat{ABD}=45° \Rightarrow \widehat{ADB}=75°$.

Câu 9: Tam giác ABC vuông tại A, đường cao $AH=32\ cm$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $38\ cm$. **B.** $40\ cm$. **C.** $42\ cm$. **D.** $45\ cm$.

Lời giải

Chọn B

Do tam giác ABC vuông tại A, có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB:AC$ là $3:4$ nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

Ta có $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow AC=\dfrac{4}{3}AB$.

Trong ΔABC có AH là đường cao

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{4}{3}AB^2\right)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{32^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{9}{16AB^2} \Rightarrow AB=40$.

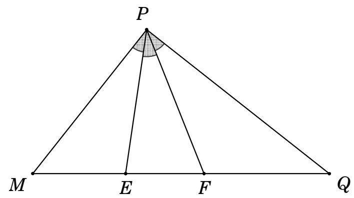
Câu 10: Tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}, \widehat{EPF}, \widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP=q, PQ=m, PE=x, PF=y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

A. $ME=EF=FQ$. **B.** $ME^2=q^2+x^2-xq$.

C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq.$ **D.** $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm.$

Lời giải

Chọn C



Ta có $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \dfrac{\widehat{MPQ}}{3} = 30° \Rightarrow \widehat{MPF} = \widehat{EPQ} = 60°$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$ME^2 = AM^2 + AE^2 - 2.AM.AE.\cos\widehat{MAE}$

$= q^2 + x^2 - 2qx.\cos 30° = q^2 + x^2 - qx\sqrt{3}$

$MF^2 = AM^2 + AF^2 - 2AM.AF.\cos\widehat{MAF}$

$= q^2 + y^2 - 2qy.\cos 60° = q^2 + y^2 - qy$

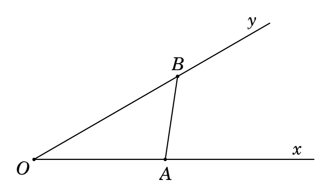
$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 = q^2 + m^2$.

Câu 11: Cho góc $\widehat{xOy} = 30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

A. $\dfrac{3}{2}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $2\sqrt{2}.$ **D.** $2.$

Lời giải

Chọn D



Theo định lí hàm sin, ta có:

$\dfrac{OB}{\sin\widehat{OAB}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}}.\sin\widehat{OAB} = \dfrac{1}{\sin 30°}.\sin\widehat{OAB} = 2\sin\widehat{OAB}$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90°$.

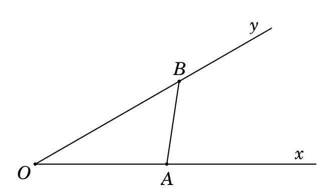
Khi đó $OB = 2$.

Câu 12: Cho góc $\widehat{xOy} = 30°$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Khi OB có độ dài lớn nhất thì độ dài của đoạn OA bằng:

A. $\dfrac{3}{2}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $2\sqrt{2}.$ **D.** $2.$

Lời giải

Chọn B



Theo định lí hàm sin, ta có

$\dfrac{OB}{\sin\widehat{OAB}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \dfrac{AB}{\sin\widehat{AOB}}.\sin\widehat{OAB} = \dfrac{1}{\sin 30°}.\sin\widehat{OAB} = 2\sin\widehat{OAB}$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi

$\sin\widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90°$.

Khi đó $OB = 2$.

Tam giác OAB vuông tại $A \Rightarrow OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Câu 13: Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a,b,c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$.

Mà $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(a^2-c^2\right)\Leftrightarrow b^3-a^2b=a^2c-c^3\Leftrightarrow -a^2\left(b+c\right)+\left(b^3+c^3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(b+c\right)\left(b^2+c^2-a^2-bc\right)=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2-bc=0$ (do $b>0, c>0$)

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc$

Khi đó, $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{BAC}=60°$.

Câu 14: Tam giác ABC vuông tại A, có $AB=c, AC=b$. Gọi ℓ_a là độ dài đoạn phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tính ℓ_a theo b và c.

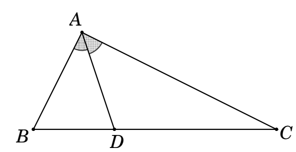
A. $\ell_a=\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. **B.** $\ell_a=\dfrac{2\left(b+c\right)}{bc}$. **C.** $\ell_a=\dfrac{2bc}{b+c}$. **D.** $\ell_a=\dfrac{\sqrt{2}\left(b+c\right)}{bc}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{b^2+c^2}$.

Do AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}$



$\Rightarrow BD=\dfrac{AB}{AC}.DC=\dfrac{c}{b}.DC=\dfrac{c}{b+c}.\text{BC}=\dfrac{c\sqrt{b^2+c^2}}{b+c}$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$BD^2=AB^2+AD^2-2.AB.AD.\cos\widehat{ABD}\Leftrightarrow \dfrac{c^2\left(b^2+c^2\right)}{\left(b+c\right)^2}=c^2+AD^2-2c.AD.\cos 45°$

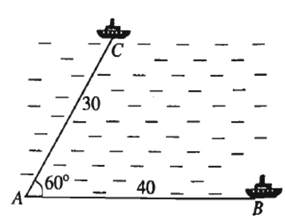
$\Rightarrow AD^2-c\sqrt{2}.AD+\left(c^2-\dfrac{c^2\left(b^2+c^2\right)}{\left(b+c\right)^2}\right)=0\Leftrightarrow AD^2-c\sqrt{2}.AD+\dfrac{2bc^3}{\left(b+c\right)^2}=0$.

$\Rightarrow AD=\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$ hay $\ell_a=\dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$.

Câu 15: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60^0. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

A. 61 hải lí. **B.** 36 hải lí.

C. 21 hải lí. **D.** 18 hải lí.



Lời giải

Chọn B

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB=40,\ AC=30$ và $\widehat{A}=60^0$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác $ABC,$ ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 30^2 + 40^2 - 2.30.40.\cos 60^0 = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

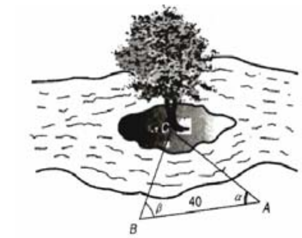
Câu 16: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^0$ và $\widehat{CBA} = 70^0$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 53 m.

B. 30 m.

C. $41,5$ m.

D. 41 m.



Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lí sin vào tam giác $ABC,$ ta có $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$

Vì $\sin C = \sin(\alpha + \beta)$ nên $AC = \dfrac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{40.\sin 70^0}{\sin 115^0} \approx 41,47$ m.

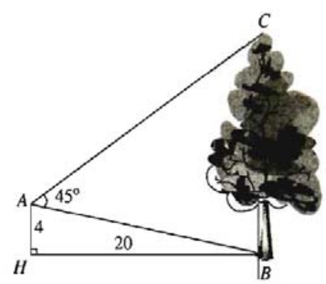
Câu 17: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m},\ HB = 20\text{m},\ \widehat{BAC} = 45^0$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $17,5$m. **B.** 17m.

C. $16,5$m. **D.** 16m.



Lời giải

Chọn B

Trong tam giác AHB, ta có $\tan\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^0 19'$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{ABH} = 78^0 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = 56^0 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta được

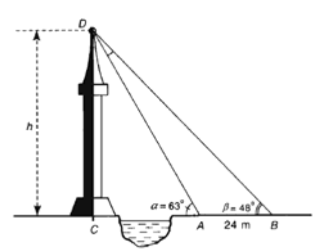
$$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin\widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \frac{AB.\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}} \approx 17\text{m}.$$

Câu 18: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = 63^0,\ \widehat{CBD} = 48^0$.

Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 18m. **B.** $18,5$m.

C. 60m. **D.** $60,5$m.



Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD, ta có $\dfrac{AD}{\sin\beta} = \dfrac{AB}{\sin D}$.

Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^0 - 48^0 = 15^0$.

Do đó $AD = \dfrac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{24.\sin 48^0}{\sin 15^0} \approx 68,91$ m.

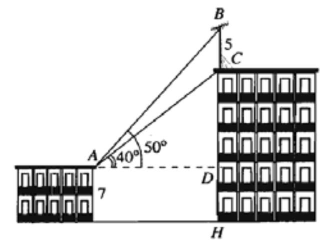
Trong tam giác vuông ACD, có $h = CD = AD.\sin\alpha \approx 61,4$ m.

Câu 19: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50^0 và 40^0 so với phương nằm ngang.

Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 12m. **B.** 19m.

C. 24m. **D.** 29m.



Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^0$ và $\widehat{ABD} = 180^0 - \left(\widehat{BAD} + \widehat{ADB}\right) = 180^0 - \left(50^0 + 90^0\right) = 40^0$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có

$\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}} \longrightarrow AC = \dfrac{BC.\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{BAC}} = \dfrac{5.\sin 40^0}{\sin 10^0} \approx 18,5$ m.

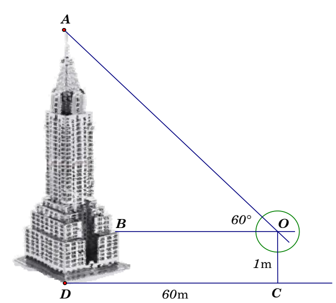
Trong tam giác vuông ADC, ta có $\sin\widehat{CAD} = \dfrac{CD}{AC} \longrightarrow CD = AC.\sin\widehat{CAD} = 11,9$ m.

Vậy $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9$ m.

Câu 20: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60$m, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1$m. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhình thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^0$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

A. 40m. **B.** 114m.

C. 105m. **D.** 110m.



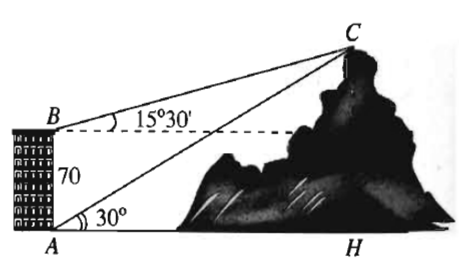
Lời giải

Chọn C

Tam giác OAB vuông tại B, có $\tan\widehat{AOB} = \dfrac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^0.OB = 60\sqrt{3}$ m.

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = \left(60\sqrt{3} + 1\right)$m.

Câu 21: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30^0, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^0 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so



với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 135m . **B.** 234m .

C. 165m . **D.** 195m .

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB}=60^0$, $\widehat{ABC}=105^0 30'$ và $c=70$.

Khi đó $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0 \Leftrightarrow \widehat{C}=180^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=180^0-165^0 30'=14^0 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ hay $\dfrac{b}{\sin 105^0 30'}=\dfrac{70}{\sin 14^0 30'}$

Do đó $AC=b=\dfrac{70.\sin 105^0 30'}{\sin 14^0 30'}\approx 269,4$ m.

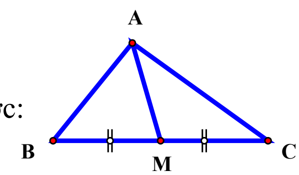
Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30^0 nên

$CH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{269,4}{2}=134,7$ m. Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

Câu 22: Tam giác ABC có $AB=6\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$ và $BC=10\text{cm}$. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng:

A. 4cm . **B.** $\sqrt{3}\text{cm}$. **C.** 7cm . **D.** 5cm .

Lời giải



Chọn D

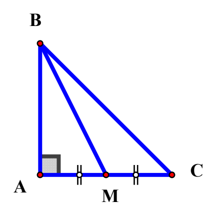
Áp dụng công thức đường trung tuyến $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ ta được:

$m_a^2=\dfrac{AC^2+AB^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{8^2+6^2}{2}-\dfrac{10^2}{4}=25\Rightarrow m_a=5.$

Câu 23: Tam giác ABC vuông tại A và có $AB=AC=a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

A. $BM=1,5a.$ **B.** $BM=a\sqrt{2}.$ **C.** $BM=a\sqrt{3}.$ **D.** $BM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải



Chọn D

M là trung điểm của $AC\Rightarrow AM=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}.$

Tam giác ΔBAM vuông tại A

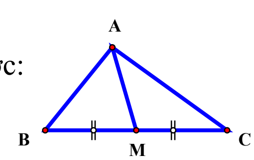
$\Rightarrow BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$

Câu 24: Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $AC=12$ cm và $BC=15$ cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

A. $AM=\dfrac{15}{2}$ cm. **B.** $AM=10$ cm. **C.** $AM=9$ cm. **D.** $AM=\dfrac{13}{2}$ cm.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng hệ thức đường trung tuyến $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ ta được:

$m_a^2=\dfrac{AC^2+AB^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{12^2+9^2}{2}-\dfrac{15^2}{4}=\dfrac{225}{4}.$

$\Rightarrow m_a = \dfrac{15}{2}.$

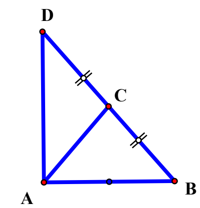
Câu 25: Tam giác ABC cân tại C, có $AB = 9\text{cm}$ và $AC = \dfrac{15}{2}\text{cm}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C. Tính độ dài cạnh AD.

A. $AD = 6$ cm. **B.** $AD = 9$ cm.

C. $AD = 12$ cm. **D.** $AD = 12\sqrt{2}$ cm.

Lời giải

Chọn C



Ta có: D là điểm đối xứng của B qua $C \Rightarrow C$ là trung điểm của $BD.$

$\Rightarrow$ AC là trung tuyến của tam giác $\Delta DAB.$

$BD = 2BC = 2AC = 15.$

Theo hệ thức trung tuyến ta có:

$AC^2 = \dfrac{AB^2 + AD^2}{2} - \dfrac{BD^2}{4} \Rightarrow AD^2 = 2AC^2 + \dfrac{BD^2}{2} - AB^2$

$\Rightarrow AD^2 = 2.\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 + \dfrac{15^2}{2} - 9^2 = 144 \Rightarrow AD = 12.$

Câu 26: Tam giác ABC có $AB = 3, BC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{5\sqrt{13}}{26}$ và $AM > 3$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC = \sqrt{13}$. **B.** $AC = \sqrt{7}$. **C.** $AC = 13$. **D.** $AC = 7$.

Lời giải

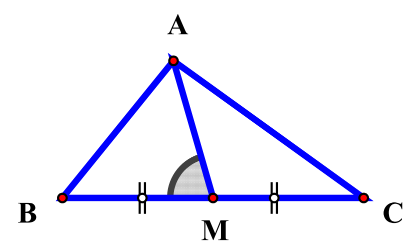
Chọn D

Ta có: M là trung điểm của $BC \Rightarrow BM = \dfrac{BC}{2} = 4.$

Trong tam giác ABM ta có: $\cos\widehat{AMB} = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.BM}$

$\Leftrightarrow AM^2 - 2AM.BM.\cos\widehat{AMB} + BM^2 - AB^2 = 0.$

$\Leftrightarrow AM^2 - \dfrac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AM = \sqrt{13} > 3 \text{ (thoả mãn)} \\ AM = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} < 3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$



$\Rightarrow AM = \sqrt{13}.$

Ta có: $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ là hai góc kề bù.

$\Rightarrow \cos\widehat{AMC} = -\cos\widehat{AMB} = -\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$

Trong tam giác ΔAMC ta có:

$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM.CM.\cos\widehat{AMC} = 13 + 16 - 2.\sqrt{13}.4.\left(-\dfrac{5\sqrt{13}}{26}\right) = 49 \Rightarrow AC = 7.$

Câu 27: Tam giác ABC có trọng tâm G. Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^0$. Tính độ dài cạnh AB.

A. $AB = \sqrt{11}$. **B.** $AB = \sqrt{13}$.

C. $AB = 2\sqrt{11}$. **D.** $AB = 2\sqrt{13}$.

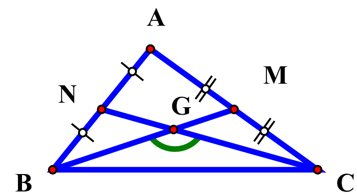
Lời giải

Chọn D

Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC}=120^0 \Rightarrow \widehat{BGN}=120^0$.

G là trọng tâm của tam giác ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} BG=\dfrac{2}{3}BM=4. \\ GN=\dfrac{1}{3}CN=3. \end{cases}$



Trong tam giác ΔBGN ta có:

$BN^2=GN^2+BG^2-2GN.BG.\cos\widehat{BGN}$

$\Rightarrow BN^2=9+16-2.3.4.\dfrac{1}{2}=13 \Rightarrow BN=\sqrt{13}.$

N là trung điểm của $AB \Rightarrow AB=2BN=2\sqrt{13}.$

Câu 28: Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là $9;\ 12;\ 15$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. 24.
B. $24\sqrt{2}$.
C. 72.
D. $72\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=81 \\ m_b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}=144 \\ m_c^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}=225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=292 \\ b^2=208 \\ c^2=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\sqrt{73} \\ b=4\sqrt{13} \\ c=10 \end{cases}$

Ta có: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{208+100-292}{2.4\sqrt{13}.10}=\dfrac{1}{5\sqrt{13}}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\dfrac{18\sqrt{13}}{65}.$

Diện tích tam giác $\Delta ABC: S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}.4\sqrt{13}.10.\dfrac{18\sqrt{13}}{65}=72$

Câu 29: Cho tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Nếu giữa $a,\ b,\ c$ có liên hệ $b^2+c^2=2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
C. $2a\sqrt{3}$.
D. $3a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác: $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$

Mà: $b^2+c^2=2a^2 \Rightarrow m_a^2=\dfrac{2a^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow m_a=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 30: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,\ BC=b,\ BD=m$ và $AC=n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng:

A. $m^2+n^2=3\left(a^2+b^2\right)$.
B. $m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

C. $2\left(m^2+n^2\right)=a^2+b^2$. **D.** $3\left(m^2+n^2\right)=a^2+b^2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O là giao điểm của AC và $BD.$ Ta có: $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{m}{2}.$

BO là trung tuyến của tam giác ΔABC

$\Rightarrow BO^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}\Leftrightarrow\frac{m^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{n^2}{4}\Leftrightarrow m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

Câu 31: Tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Các cạnh $a,\ b,\ c$ liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a^2+b^2=5c^2$. Góc giữa hai trung tuyến AM và BN là góc nào?

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $\Delta ABC.$

Ta có: $AM^2=\frac{AC^2+AB^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\ \Rightarrow AG^2=\frac{4}{9}AM^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}$

$BN^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\ \Rightarrow GN^2=\frac{1}{9}BN^2=\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}$

Trong tam giác ΔAGN ta có:

$$\cos\widehat{AGN}=\frac{AG^2+GN^2-AN^2}{2.AG.GN}=\frac{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}+\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}-\frac{b^2}{4}}{2.\sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}}.\sqrt{\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}}}$$

$$=\frac{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}+\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}-\frac{b^2}{4}}{2.\sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}}.\sqrt{\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}}}=\frac{10c^2-2\left(a^2+b^2\right)}{36.2.\sqrt{\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{9}-\frac{a^2}{9}}.\sqrt{\frac{c^2+a^2}{18}-\frac{b^2}{36}}}=0$$

$\Rightarrow\widehat{AGN}=90^0.$

Câu 32: Tam giác ABC có ba đường trung tuyến $m_a,\ m_b,\ m_c$ thỏa mãn $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác đều.

C. Tam giác vuông. **D.** Tam giác vuông cân.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\\m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}\\m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\end{cases}$

Mà: $5m_a^2=m_b^2+m_c^2\Rightarrow5\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$

$\Leftrightarrow10b^2+10c^2-5a^2=2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2$

$\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2 \Rightarrow$ tam giác ΔABC vuông.

Câu 33: Tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Gọi $m_a,\ m_b,\ m_c$ là độ dài ba đường trung tuyến, G trọng tâm. Xét các khẳng định sau:

(I). $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. (II). $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Trong các khẳng định đã cho có

A. (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai cùng sai. **D.** Cả hai cùng đúng.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4} \\ m_b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4} \\ m_c^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)=\frac{4}{9}.\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Câu 34: Tam giác ABC có $BC=10$ và $\widehat{A}=30^{\text{O}}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=\frac{10}{\sqrt{3}}$. **D.** $R=10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R \Rightarrow R=\frac{BC}{2.\sin\widehat{A}}=\frac{10}{2.\sin 30^0}=10.$

Câu 35: Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=6$ và $\widehat{A}=60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=3$. **B.** $R=3\sqrt{3}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=6$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí Cosin, ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$=3^2+6^2-2.3.6.\cos 60^0=27 \Leftrightarrow BC^2=27 \Leftrightarrow BC^2+AB^2=AC^2.$

Suy ra tam giác ABC vuông tại $B,$ do đó bán kính $R=\frac{AC}{2}=3.$

Câu 36: Tam giác ABC có $BC=21\text{cm},\ CA=17\text{cm},\ AB=10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=\frac{85}{2}\text{cm}$. **B.** $R=\frac{7}{4}\text{cm}$.

C. $R=\frac{85}{8}\text{cm}$. **D.** $R=\frac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=24.$ Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}=\sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)}=84\ cm^2.$

Vậy bán kính cần tìm là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{21.17.10}{4.84}=\dfrac{85}{8}\ cm.$

Câu 37: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Khi đó bán kính R bằng:

A. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh $a,$ gọi M là trung điểm của $BC.$

Ta có $AM\perp BC$ suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AM.BC=\dfrac{1}{2}.\sqrt{AB^2-BM^2}.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy bán kính cần tính là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{a^3}{4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

Câu 38: Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH=\dfrac{12}{5}$cm và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=\sqrt{3}\ cm.$ **B.** $R=1,5$cm.

C. $R=2$cm. **D.** $R=3,5$cm.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC vuông tại $A,$ có đường cao $AH\Rightarrow AB.AC=AH^2\quad(*).$

Mặt khác $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow AB=\dfrac{3}{4}AC$ thế vào $(*),$ ta được $\dfrac{3}{4}AC^2=\left(\dfrac{12}{5}\right)^2\Leftrightarrow AC=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}.$

Suy ra $AB=\dfrac{3}{4}.\dfrac{8\sqrt{3}}{5}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{3}.$

Vậy bán kính cần tìm là $R=\dfrac{BC}{2}=\sqrt{3}\ cm.$

Câu 39: Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3},\ BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABD.$

A. $R=\dfrac{9}{6}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=3\sqrt{3}$. **D.** $R=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì D là trung điểm của $BC\Rightarrow AD^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=27\Rightarrow AD=3\sqrt{3}.$

Tam giác ABD có $AB=BD=DA=3\sqrt{3}\Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\frac{\sqrt{3}}{3}AB=\frac{\sqrt{3}}{3}.3\sqrt{3}=3$.

Câu 40: Tam giác nhọn ABC có $AC=b, BC=a$, BB' là đường cao kẻ từ B và $\widehat{CBB'}=\alpha$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC được tính theo a, b và α là:

A. $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.
B. $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

C. $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\cos\alpha}$.
D. $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{2\cos\alpha}$.

Lời giải

Chọn D

Xét tam giác $BB'C$ vuông tại B', có $\sin\widehat{CBB'}=\frac{B'C}{BC}\Rightarrow B'C=a.\sin\alpha$.

Mà $AB'+B'C=AC \Leftrightarrow AB'=b-a.\sin\alpha$ và $BB'^2=a^2.\cos^2\alpha$.

Tam giác ABB' vuông tại B', có $AB=\sqrt{BB'^2+AB'^2}=\sqrt{(b-a.\sin\alpha)^2+a^2.\cos^2\alpha}$

$=\sqrt{b^2-2ab.\sin\alpha+a^2\sin^2\alpha+a^2\cos^2\alpha}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp cần tính là

$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=2R\Leftrightarrow R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\sin\alpha}}{2\cos\alpha}$.

Câu 40: Tam giác ABC có $AB=3, AC=6, \widehat{BAC}=60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$.
B. $S_{\Delta ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. $S_{\Delta ABC}=9$.
D. $S_{\Delta ABC}=\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 41: Tam giác ABC có $AC=4, \widehat{BAC}=30^\circ, \widehat{ACB}=75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=8$.
B. $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3}$.

C. $S_{\Delta ABC}=4$.
D. $S_{\Delta ABC}=8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC}=180^0-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\right)=75^\circ=\widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB=AC=4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC}=4$.

Câu 42: Tam giác ABC có $a=21, b=17, c=10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\Delta ABC}=16$.
B. $S_{\Delta ABC}=48$.

C. $S_{\Delta ABC}=24$.
D. $S_{\Delta ABC}=84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p=\dfrac{21+17+10}{2}=24$.

Do đó $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Câu 43: Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=6,\ \widehat{BAC}=60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a=3\sqrt{3}$. **B.** $h_a=\sqrt{3}$. **C.** $h_a=3$. **D.** $h_a=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=27\longrightarrow BC=3\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\dfrac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.BC.h_a\longrightarrow h_a=\dfrac{2S}{BC}=3.$

Câu 44: Tam giác ABC có $AC=4,\ \widehat{ACB}=60^\circ$. Tính độ dài đường cao h uất phát từ đỉnh A của tam giác.

A. $h=2\sqrt{3}$. **B.** $h=4\sqrt{3}$. **C.** $h=2$. **D.** $h=4$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A .

Tam giác vuông AHC , có $\sin\widehat{ACH}=\dfrac{AH}{AC}\longrightarrow AH=AC.\sin\widehat{ACH}=4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 45: Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

A. $BB'=8$. **B.** $BB'=\dfrac{84}{5}$.

C. $BB'=\dfrac{168}{17}$. **D.** $BB'=\dfrac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p=\dfrac{21+17+10}{2}=24$.

Suy ra $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Lại có $S=\dfrac{1}{2}b.BB'\longleftrightarrow 84=\dfrac{1}{2}.17.BB'\longrightarrow BB'=\dfrac{168}{17}$.

Câu 46: Tam giác ABC có $AB=8$ cm, $AC=18$ cm và có diện tích bằng $64\ \text{cm}^2$. Giá trị $\sin A$ ằng:

A. $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin A=\dfrac{3}{8}$.

C. $\sin A=\dfrac{4}{5}$. **D.** $\sin A=\dfrac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}\Leftrightarrow 64=\frac{1}{2}.8.18.\sin A\Leftrightarrow \sin A=\frac{8}{9}.$

Câu 47: Hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,\ BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=45^0$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$.　**B.** $a^2\sqrt{2}$.　**C.** a^2.　**D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác ABD là $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\sin 45^0=\frac{a^2}{2}.$

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABD}=2.\frac{a^2}{2}=a^2.$

Câu 48: Tam giác ABC vuông tại A có $AB=AC=30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC bằng:

A. 50 cm^2.　**B.** $50\sqrt{2}\text{ cm}^2$.

C. 75 cm^2.　**D.** $15\sqrt{105}\text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Vì F là trung điểm của $AC\Rightarrow FC=\frac{1}{2}AC=15\ cm.$

Đường thẳng BF cắt CE tại G suy ra G là trọng tâm tam giác $ABC.$

Khi đó $\frac{d\left(B;(AC)\right)}{d\left(G;(AC)\right)}=\frac{BF}{GF}=3\Rightarrow d\left(G;(AC)\right)=\frac{1}{3}d\left(B;(AC)\right)=\frac{AB}{3}=10\ cm.$

Vậy diện tích tam giác GFC là: $S_{\Delta GFC}=\frac{1}{2}.d\left(G;(AC)\right).FC=\frac{1}{2}.10.15=75\ cm^2.$

Câu 49: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R=4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2　**B.** $13\sqrt{2}\text{ cm}^2$

C. $12\sqrt{3}\text{ cm}^2$　**D.** 15 cm^2.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng $a.$

Theo định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Leftrightarrow\frac{a}{\sin 60^0}=2.4\Leftrightarrow a=8.\sin 60^0=4\sqrt{3}.$

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.\left(4\sqrt{3}\right)^2.\sin 60^0=12\sqrt{3}\ cm^2.$

Câu 50: Tam giác ABC có $BC=2\sqrt{3},\ AC=2AB$ và độ dài đường cao $AH=2$. Tính độ dài cạnh AB.

A. $AB=2$.　**B.** $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $AB = 2$ hoặc $AB = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. **D.** $AB = 2$ hoặc $AB = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \dfrac{AB + BC + CA}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 3AB}{2}$.

Suy ra $S = \sqrt{\left(\dfrac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)}$.

Lại có $S = \dfrac{1}{2}BC.AH = 2\sqrt{3}.$

Từ đó ta có $2\sqrt{3} = \left(\dfrac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)$

$\longleftrightarrow 12 = \dfrac{(9AB^2 - 12)(12 - AB^2)}{16} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} AB = 2 \\ AB = \dfrac{2\sqrt{21}}{3} \end{array}\right.\cdot$

Câu 51: Tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$. **B.** $3S$. **C.** $4S$. **D.** $6S$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S = \dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.(3AC).(2BC).\sin\widehat{ACB} = 6.\dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB} = 6S.$

Câu 52: Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 150^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Vì a, b không đổi và $\sin\widehat{ACB} \le 1,\ \forall C$ nên suy ra $S_{\Delta ABC} \le \dfrac{ab}{2}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\sin\widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^0.$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{ab}{2}.$

Câu 53: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^0$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$. **C.** $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. **D.** $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM \perp CN \longrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 5a^2 - 2bc\cos A \longrightarrow bc = \dfrac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a^2}{\cos A}.\sin A = a^2\tan A = 3\sqrt{3}$.

Câu 54: Tam giác ABC có $AB = 5,\ AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$. **B.** $r = 2$. **C.** $r = \sqrt{3}$. **D.** $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A = 49 \longrightarrow BC = 7$.

Diện tích $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{1}{2}.5.8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}$.

Câu 55: Tam giác ABC có $a = 21,\ b = 17,\ c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 16$. **B.** $r = 7$. **C.** $r = \dfrac{7}{2}$. **D.** $r = 8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \dfrac{21 + 17 + 10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{24(24 - 21)(24 - 17)(24 - 10)} = 84$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{84}{24} = \dfrac{7}{2}$.

Câu 56: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a.

A. $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $r = \dfrac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $S = pr \longrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 57: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm. **B.** $r = \sqrt{2}$ cm.

C. $r = 2$ cm. **D.** $r = 3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC=8$, suy ra $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=12$.

Diện tích tam giác vuông $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=24$ .Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=2$ cm.

Câu 58: Tam giác ABC vuông cân tại A, có $AB=a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=\dfrac{a}{2}$. **B.** $r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $r=\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$. **D.** $r=\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC=AB=a$ và $BC=a\sqrt{2}$.

Suy ra $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$.

Câu 59: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó tỉ số $\dfrac{R}{r}$ bằng:

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $AC=AB=a\longrightarrow BC=a\sqrt{2}$. Suy ra $R=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$. Vậy $\dfrac{R}{r}=1+\sqrt{2}$.

CHƯƠNG III PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét. Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b)$

$\longrightarrow$ phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$

Nhận xét. Nếu đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(a;b)$ thì có hệ số góc $k=\dfrac{b}{a}.$

3. Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

Nhận xét.

● Một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến.

● Nếu $\vec{u}=(a;b)$ là một VTCP của $\Delta \longrightarrow \vec{n}=(b;-a)$ là một VTPT của Δ.

● Nếu $\vec{n}=(A;B)$ là một VTPT của $\Delta \longrightarrow \vec{u}=(B;-A)$ là một VTPCT của Δ.

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B)$

$\longrightarrow$ phương trình tổng quát của đường thẳng Δ có dạng

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ hay $\boxed{Ax+By+C=0}$ với $C=-Ax_0-By_0.$

Nhận xét.

● Nếu đường thẳng Δ có VTPT $\vec{n}=(A;B)$ thì có hệ số góc $k=-\dfrac{A}{B}.$

● Nếu $A,\ B,\ C$ đều khác 0 thì ta có thể đưa phương trình tổng quát về dạng

$\dfrac{x}{a_0}+\dfrac{y}{b_o}=1$ với $a_0=-\dfrac{C}{A},\ b_0=-\dfrac{C}{B}.$

Phương trình này được gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn, đường thẳng này cắt Ox và Oy lần lượt tại $M(a_0;0)$ và $N(0;b_0)$.

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Xét hai đường thẳng có phương trình tổng quát là

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$.

● Nếu hệ có một nghiệm $(x_0;y_0)$ thì Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm $M_0(x_0;y_0)$.

● Nếu hệ có vô số nghiệm thì Δ_1 trùng với Δ_2.

● Nếu hệ vô nghiệm thì Δ_1 và Δ_2 không có điểm chung, hay Δ_1 song song với Δ_2.

Cách 2. Xét tỉ số

● Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì Δ_1 trùng với Δ_2.

● Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì Δ_1 song song Δ_2.

● Nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ thì Δ_1 cắt Δ_2.

6. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1} = (a_1;b_1)$;

$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2} = (a_2;b_2)$.

Gọi α là góc tạo bởi giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Khi đó

$$\boxed{\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{|a_1.a_2 + b_1.b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.}$$

7. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ được tính theo công thức

$$\boxed{d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

Nhận xét. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau thì phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng trên là:

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: viết phương trình tổng quát của đường thẳng.

1. Phương pháp giải:

- Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định

- Điểm $A(x_0;y_0) \in \Delta$

- Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}\left(a;b\right)$ của Δ

Khi đó phương trình tổng quát của Δ là $a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$

Chú ý:

- Đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là $ax+by+c=0,\ a^2+b^2\neq 0$ nhận $\vec{n}\left(a;b\right)$ làm vectơ pháp tuyến.
- Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì VTPT đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.
- Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ có dạng

$\Delta: a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0$ với $a^2+b^2\neq 0$

hoặc ta chia làm hai trường hợp

+ $x=x_0$: nếu đường thẳng song song với trục Oy

+ $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$: nếu đường thẳng cắt trục Oy

- Phương trình đường thẳng đi qua $A\left(a;0\right),B\left(0;b\right)$ với $ab\neq 0$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC biết $A\left(2;0\right),\ B\left(0;4\right),\ C(1;3)$. Viết phương trình tổng quát của

a) Đường cao AH

b) Đường trung trực của đoạn thẳng BC.

c) Đường thẳng AB.

d) Đường thẳng qua C và song song với đường thẳng AB.

Lời giải

a) Vì $AH\perp BC$ nên $\overrightarrow{BC}$ là vectơ pháp tuyến của AH

Ta có $\overrightarrow{BC}\left(1;-1\right)$ suy ra đường cao AH đi qua A và nhận $\overrightarrow{BC}$ là vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là $1.\left(x-2\right)-1.\left(y-0\right)=0$ hay $x-y-2=0$.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng BC đi qua trung điểm BC và nhận vectơ $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến.

Gọi I là trung điểm BC khi đó $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1}{2}$, $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$

Suy ra phương trình tổng quát của đường trung trực BC là $1.\left(x - \dfrac{1}{2}\right) - 1.\left(y - \dfrac{7}{2}\right) = 0$ hay

$x - y + 3 = 0$

c) Phương trình tổng quát của đường thẳng AB có dạng $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$ hay $2x + y - 4 = 0$.

d) Cách 1: Đường thẳng AB có VTPT là $\vec{n}(2;1)$ do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{n}(2;1)$ làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là

$2.(x - 1) + 1.(y - 3) = 0$ hay $2x + y - 5 = 0$.

Cách 2: Đường thẳng Δ song song với đường thẳng AB có dạng $2x + y + c = 0$.

Điểm C thuộc Δ suy ra $2.1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -5$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tổng quát là $2x + y - 5 = 0$.

Ví dụ 2: Cho đường thẳng $d : x - 2y + 3 = 0$ và điểm $M(-1;2)$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết:

a) Δ đi qua điểm M và có hệ số góc $k = 3$

b) Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d

c) Δ đối xứng với đường thẳng d qua M

Lời giải:

a) Đường thẳng Δ có hệ số góc $k = 3$ có phương trình dạng $y = 3x + m$. Mặt khác

$M \in \Delta \Rightarrow 2 = 3.(-1) + m \Rightarrow m = 5$

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y = 3x + 5$ hay $3x - y + 5 = 0$.

b) Ta có $x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ do đó hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = \dfrac{1}{2}$.

Vì $\Delta \perp d$ nên hệ số góc của Δ là k_Δ thì $k_d.k_\Delta = -1 \Rightarrow k_\Delta = -2$

Do đó $\Delta : y = -2x + m$, $M \in \Delta \Rightarrow 2 = -2.(-1) + m \Rightarrow m = -2$

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $y = -2x - 2$ hay $2x + y + 2 = 0$.

c) Cách 1: Ta có $-1 - 2.2 + 3 \neq 0$ do đó $M \notin d$ vì vậy đường thẳng Δ đối xứng với đường thẳng d qua M sẽ song song với đường thẳng d suy ra đường thẳng Δ có VTPT là $\vec{n}(1;-2)$.

Ta có $A\left(1;2\right)\in d$, gọi A' đối xứng với A qua M khi đó $A'\in\Delta$

Ta có M là trung điểm của AA'.

$$\Rightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}\\ y_M=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{A'}=2x_M-x_A=2.\left(-1\right)-1=-3\\ y_{A'}=2y_M-y_A=2.2-2=2\end{cases}\Rightarrow A'\left(-3;2\right)$$

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng Δ là $1.\left(x+3\right)-2\left(y-2\right)=0$ hay $x-2y+7=0$.

Cách 2: Gọi $A\left(x_0;y_0\right)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng d, $A'\left(x;y\right)$ là điểm đối xứng với A qua M.

Khi đó M là trung điểm của AA' suy ra $\begin{cases}x_M=\dfrac{x_0+x}{2}\\ y_M=\dfrac{y_0+y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=\dfrac{x_0+x}{2}\\ 2=\dfrac{y_0+y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-2-x\\ y_0=4-y\end{cases}$

Ta có $A\in d\Rightarrow x_0-2y_0+3=0$ suy ra $\left(-2-x\right)-2.\left(4-y\right)+3=0\Leftrightarrow x-2y+7=0$

Vậy phương trình tổng quát của Δ đối xứng với đường thẳng d qua M là $x-2y+7=0$.

Ví dụ 3: Biết hai cạnh của một hình bình hành có phương trình $x-y=0$ và $x+3y-8=0$, tọa độ một đỉnh của hình bình hành là $\left(-2;2\right)$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình bình hành.

Lời giải

Đặt tên hình bình hành là $ABCD$ với $A\left(-2;2\right)$, do tọa độ điểm A không là nghiệm của hai phương trình đường thẳng trên nên ta giả sử $BC: x-y=0$, $CD: x+3y-8=0$

Vì $AB//CD$ nên cạnh AB nhận $\overrightarrow{n_{CD}}\left(1;3\right)$ làm VTPT do đó có phương trình là $1.\left(x+2\right)+3.\left(y-2\right)=0$ hay $x+3y-4=0$

Tương tự cạnh AD nhận $\overrightarrow{n_{BC}}\left(1;-1\right)$ làm VTPT do đó có phương trình là $1.\left(x+2\right)-1.\left(y-2\right)=0$ hay $x-y+4=0$

Ví dụ 4: Cho điểm $M\left(1;4\right)$. Viết phương trình đường thẳng qua M lần lượt cắt hai tia Ox, tia Oy tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất .

Lời giải:

Giả sử $A\left(a;0\right)$, $B\left(0;b\right)$ với $a>0$, $b>0$. Khi đó đường thẳng đi qua A, B có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. Do $M\in AB$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=1$

Mặt khác $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}ab$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \ge 2\sqrt{\frac{4}{ab}} \Rightarrow ab \ge 16 \Rightarrow S_{OAB} \ge 8$

Suy ra S_{OAB} nhỏ nhất khi $\frac{1}{a} = \frac{4}{b}$ và $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ do đó $a = 2; b = 8$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1$ hay $4x + y - 8 = 0$

Dạng 2: xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

1. Phương pháp giải:

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0;\ d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Ta xét hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ (I)

+ Hệ (I) vô nghiệm suy ra $d_1 // d_2$.

+ Hệ (I) vô số nghiệm suy ra $d_1 \equiv d_2$

+ Hệ (I) có nghiệm duy nhất suy ra d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

Chú ý: Với trường hợp $a_2.b_2.c_2 \ne 0$ khi đó

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \ne \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối các cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1 : x + y - 2 = 0;\quad \Delta_2 : 2x + y - 3 = 0$

b) $\Delta_1 : -x - 2y + 5 = 0;\quad \Delta_2 : 2x + 4y - 10 = 0$

c) $\Delta_1 : 2x - 3y + 5 = 0;\quad \Delta_2 : x - 5 = 0$

d) $\Delta_1 : 2x + 3y + 4 = 0;\quad \Delta_2 : -4x - 6y = 0$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{1}{2} \ne \frac{1}{1}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2

b) Ta có $\frac{-1}{2}=\frac{-2}{4}=\frac{5}{-10}$ suy ra Δ_1 trùng Δ_2

c) Ta có $\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-3}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2

d) Ta có $\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}\neq\frac{0}{4}$ suy ra $\Delta_1 // \Delta_2$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là

$AB: 2x-y+2=0$; $BC: 3x+2y+1=0$; $CA: 3x+y+3=0$.

Xác định vị trí tương đối của đường cao kẻ từ đỉnh A và đường thẳng $\Delta: 3x-y-2=0$

Lời giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x-y+2=0\\3x+y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}\Rightarrow A(-1;0)$

Ta xác định được hai điểm thuộc đường thẳng BC là $M(-1;1)$, $N(1;-2)$

Đường cao kẻ từ đỉnh A vuông góc với BC nên nhận vectơ $\overrightarrow{MN}(2;-3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x+1)-3y=0$ hay $2x-3y+2=0$

Ta có $\frac{3}{2}\neq\frac{-1}{-3}$ suy ra hai đường thẳng cắt nhau.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: (m-3)x+2y+m^2-1=0$ và

$\Delta_2: -x+my+(m-1)^2=0$.

a) Xác định vị trí tương đối và xác định giao điểm (nếu có) của Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp $m=0, m=1$

b) Tìm m để hai đường thẳng song song với nhau.

Lời giải:

a) Với $m=0$ xét hệ $\begin{cases}-3x+2y-1=0\\-x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2 tại điểm có tọa độ $(1;2)$

Với $m=1$ xét hệ $\begin{cases}-2x+2y=0\\-x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ suy ra Δ_1 cắt Δ_2 tại gốc tọa độ

b) Với $m=0$ hoặc $m=1$ theo câu a hai đường thẳng cắt nhau nên không thỏa mãn

Với $m\neq 0$ và $m\neq 1$ hai đường thẳng song song khi và chỉ khi

$\frac{m-3}{-1}=\frac{2}{m}\neq\frac{m^2-1}{(m-1)^2}\Leftrightarrow m=2$

Vậy với $m = 2$ thì hai đường thẳng song song với nhau.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC, tìm tọa độ các đỉnh của tam giác trong trường hợp sau

a) Biết $A(2;2)$ và hai đường cao có phương trình $d_1 : x + y - 2 = 0$; $d_2 : 9x - 3y + 4 = 0$.

b) Biết $A(4;-1)$, phương trình đường cao kẻ từ B là $\Delta : 2x - 3y = 0$; phương trình trung tuyến đi qua đỉnh C là $\Delta' : 2x + 3y = 0$.

Lời giải

a) Tọa độ điểm A không là nghiệm của phương trình d_1, d_2 suy ra $A \notin d_1,\ A \notin d_2$ nên ta có thể giả sử $B \in d_1,\ C \in d_2$

Ta có AB đi qua A và vuông góc với d_2 nên nhận $\vec{u}(3;9)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x-2) + 9(y-2) = 0$ hay $3x + 9y - 24 = 0$; AC đi qua A và vuông góc với d_1 nên nhận $\vec{v}(-1;1)$ làm VTPT nên có phương trình là $-1.(x-2) + 1.(y-2) = 0$ hay $x - y = 0$

B là giao điểm của d_1 và AB suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + 9y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1;3)$$

Tương tự tọa độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 9x - 3y + 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

Vậy $A(2;2)$, $B(-1;3)$ và $C\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

b) Ta có AC đi qua $A(4;-1)$ và vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}(3;2)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x-4) + 2(y+1) = 0$ hay $3x + 2y - 10 = 0$

Suy ra toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow C(6;-4)$

Giả sử $B(x_B;y_B)$ suy ra trung điểm $I\left(\dfrac{x_B + 4}{2};\dfrac{y_B - 1}{2}\right)$ của AB thuộc đường thẳng Δ' do đó

$2.\dfrac{x_B + 4}{2} + 3.\dfrac{y_B - 1}{2} = 0$ hay $2x_B + 3y_B + 5 = 0$ (1)

Mặt khác $B \in \Delta$ suy ra $2x_B - 3y_B = 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{6}\right)$

Vậy $A(4;-1)$, $B\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{6}\right)$ và $C\left(6;-4\right)$.

Dạng 3: viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng.

1. Phương pháp giải:

- Để viết phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định

  - Điểm $A(x_0;y_0) \in \Delta$

  - Một vectơ chỉ phương $\vec{u}\left(a;b\right)$ của Δ

  Khi đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$, $t \in R$.

- Để viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần xác định

  - Điểm $A(x_0;y_0) \in \Delta$

  - Một vectơ chỉ phương $\vec{u}\left(a;b\right)$, $ab \neq 0$ của Δ

  Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$

  (*trường hợp* $ab = 0$ *thì đường thẳng không có phương trình chính tắc*)

Chú ý:

- Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì chúng có cùng VTCP và VTPT.
- Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì VTCP của đường thẳng này là VTPT của đường thẳng kia và ngược lại
- Nếu Δ có VTCP $\vec{u} = (a;b)$ thì $\vec{n} = (-b;a)$ là một VTPT của Δ.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho điểm $A\left(1;-3\right)$ và $B\left(-2;3\right)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua A và nhận vectơ $\vec{n}\left(1;2\right)$ làm vectơ pháp tuyến

b) Δ đi qua gốc tọa độ và song song với đường thẳng AB

c) Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB

Lời giải:

a) Vì Δ nhận vectơ $\vec{n}(1;2)$ làm vectơ pháp tuyến nên VTCP của Δ là $\vec{u}(-2;1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta:\begin{cases}x=1-2t\\ y=-3+t\end{cases}$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;6)$ mà Δ song song với đường thẳng AB nên nhận $\vec{u}(-1;2)$ làm VTCP

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\Delta:\begin{cases}x=-t\\ y=2t\end{cases}$

c) Vì Δ là đường trung trực của đoạn thẳng AB nên nhận $\overrightarrow{AB}(-3;6)$ làm VTPT và đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Ta có $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và Δ nhận $\vec{u}(-1;2)$ làm VTCP nên phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$\Delta:\begin{cases}x=-\frac{1}{2}-t\\ y=2t\end{cases}$.

Ví dụ 2: Viết phương trình tổng quát, tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm $A(3;0)$ và $B(1;3)$

b) Δ đi qua $N(3;4)$ và vuông góc với đường thẳng $d':\begin{cases}x=1-3t\\ y=4+5t\end{cases}$.

Lời giải:

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B nên nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;3)$ làm vectơ chỉ phương do đó

phương trình tham số là $\begin{cases}x=3-2t\\ y=3t\end{cases}$; phương trình chính tắc là $\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{3}$; phương trình tổng quát là $3(x-3)=-2y$ hay $3x+2y-9=0$

b) $\Delta\perp d'$ nên VTCP của d' cũng là VTPT của Δ nên đường thẳng Δ nhận $\vec{u}(-3;5)$ làm VTPT và $\vec{v}(-5;-3)$ làm VTCP do đó đó phương trình tổng quát là $-3(x-3)+5(y-4)=0$ hay

$3x-5y+11=0$; phương trình tham số là $\begin{cases}x=3-5t\\ y=4-3t\end{cases}$; phương trình chính tắc là $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-4}{-3}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $A(-2;1)$, $B(2;3)$ và $C(1;-5)$.

a) Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác.

b) Viết phương trình đường thẳng chứa đường trung tuyến AM.

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm D, G với D là chân đường phân giác trong góc A và G là trọng tâm của ΔABC.

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{BC}\left(-1;-8\right)$ suy ra đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình là $\begin{cases} x=2-t \\ y=3-8t \end{cases}$

b) M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{3}{2};-1\right)$ do đó đường thẳng chứa đường trung tuyến AM nhận $\overrightarrow{AM}\left(\frac{7}{2};-2\right)$ làm VTCP nên có phương trình là $\begin{cases} x=-2+\frac{7}{2}t \\ y=1-2t \end{cases}$

c) Gọi $D(x_D;y_D)$ là chân đường phân giác hạ từ A của tam giác ABC

Ta có $\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$

Mà $AB=\sqrt{\left(-2-2\right)^2+\left(3-1\right)^2}=2\sqrt{5}$ và

$AC=\sqrt{\left(1+2\right)^2+\left(-5-1\right)^2}=3\sqrt{5}$ suy ra

$\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases} x_D-2=\frac{2}{3}(1-x_D) \\ y_D-3=\frac{2}{3}(-5-y_D) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_D=\frac{8}{5} \\ y_D=\frac{-1}{5} \end{cases}\Rightarrow D(\frac{8}{5};-\frac{1}{5})$ $G\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $\overrightarrow{DG}\left(-\frac{19}{15};-\frac{2}{15}\right)$ suy ra đường thẳng DG nhận $\vec{u}\left(19;2\right)$ làm VTCP nên có phương trình là

$\begin{cases} x=\frac{1}{3}+19t \\ y=-\frac{1}{3}+2t \end{cases}$.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC biết $AB: x+y-1=0$, $AC: x-y+3=0$ và trọng tâm $G\left(1;2\right)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Lời giải:

Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}\Rightarrow A\left(-1;2\right)$

Gọi $M\left(x;y\right)$ là trung điểm của BC

Vì G là trọng tâm nên $\overrightarrow{AG} = 2.\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{AG}(2;0)$, $\overrightarrow{GM}(x-1;y-2)$ suy ra

$$\begin{cases} 2 = 2.(x-1) \\ 0 = 2.(y-2) \end{cases} \Rightarrow M(2;2)$$

$B(x_B;y_B) \in AB \Rightarrow x_B + y_B - 1 = 0 \Rightarrow y_B = 1 - x_B$ do đó $B(x_B;1-x_B)$

$C(x_C;y_C) \in AC \Rightarrow x_C - y_C + 3 = 0 \Rightarrow y_C = x_C + 3$ do đó $C(x_C;x_C+3)$

Mà M là trung điểm của BC nên ta có $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 4 \\ x_C - x_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ x_C = 2 \end{cases}$

Vậy $B(2;-1)$, $C(2;5) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(0;6)$ suy ra phương trình đường thẳng BC là $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$.

Dạng 4. Xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng.

1. Phương pháp giải.

Để xác định tọa độ điểm thuộc đường thẳng ta dựa vào nhận xét sau:

- Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in R$ (hoặc $\Delta : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$) có dạng $A(x_0 + at;\, y_0 + bt)$

- Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ (ĐK: $a^2 + b^2 \neq 0$) có dạng $A\left(t;\dfrac{-at-c}{b}\right)$ với $b \neq 0$ hoặc $A\left(\dfrac{-bt-c}{a};t\right)$ với $a \neq 0$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 12 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm A thuộc Δ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng bốn

b) Tìm điểm B thuộc Δ và cách đều hai điểm $E(5;0)$, $F(3;-2)$

c) Tìm tọa độ hình chiếu của điểm $M(1;2)$ lên đường thẳng Δ

Lời giải:

a) Dễ thấy $M(0;-3)$ thuộc đường thẳng Δ và $\vec{u}(4;3)$ là một vectơ chỉ phương của Δ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$.

Điểm A thuộc Δ nên tọa độ của điểm A có dạng $A(4t;-3+3t)$ suy ra

$OA = 4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(4t\right)^2 + \left(-3+3t\right)^2} = 4 \Leftrightarrow 25t^2 - 18t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-7}{25} \end{array}\right.$

Vậy ta tìm được hai điểm là $A_1\left(4;0\right)$ và $A_2\left(\dfrac{-28}{25};\dfrac{-96}{25}\right)$

b) Vì $B \in \Delta$ nên $B\left(4t;-3+3t\right)$

Điểm B cách đều hai điểm $E\left(5;0\right)$, $F\left(3;-2\right)$ suy ra

$EB^2 = FB^2 \Leftrightarrow \left(4t-5\right)^2 + \left(3t-3\right)^2 = \left(4t-3\right)^2 + \left(3t-1\right)^2 \Leftrightarrow t = \dfrac{6}{7}$

Suy ra $B\left(\dfrac{24}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$

c) Gọi H là hình chiếu của M lên Δ khi đó $H \in \Delta$ nên $H\left(4t;-3+3t\right)$

Ta có $\vec{u}\left(4;3\right)$ là vectơ chỉ phương của Δ và vuông góc với $\overrightarrow{HM}\left(4t-1;3t-5\right)$ nên

$\overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4\left(4t-1\right) + 3\left(3t-5\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{19}{25}$

Suy ra $H\left(\dfrac{76}{25};-\dfrac{18}{25}\right)$

Ví dụ 2*:* Cho hai đường thẳng $\Delta : x - 2y + 6 = 0$ và $\Delta' : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \end{cases}$.

a) Xác định tọa độ điểm đối xứng với điểm $A\left(-1;0\right)$ qua đường thẳng Δ

b) Viết phương trình đường thẳng đối xứng với Δ' qua Δ

Lời giải:

a) Gọi H là hình chiếu của A lên Δ khi đó $H\left(2t-6;t\right)$

Ta có $\vec{u}\left(2;1\right)$ là vectơ chỉ phương của Δ và vuông góc với $\overrightarrow{AH}\left(2t-5;t\right)$ nên

$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2\left(2t-5\right) + t = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow H\left(-2;2\right)$

A' là điểm đối xứng với A qua Δ suy ra H là trung điểm của AA' do đó

$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 4 \end{cases}$

Vậy điểm cần tìm là $A'\left(-3;4\right)$

b) Thay $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \end{cases}$ vào phương trình Δ ta được $-1 - t - 2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{3}$ suy ra giao điểm của Δ và Δ' là $K\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{5}{3}\right)$

Dễ thấy điểm A thuộc đường thẳng Δ' do đó đường thẳng đối xứng với Δ' qua Δ đi qua điểm A' và điểm K do đó nhận $\overrightarrow{A'K} = \left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\left(1;-7\right)$ nên có phương trình là $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 - 7t \end{cases}$

Nhận xét: Để tìm tọa độ hình chiếu H của A lên Δ ta có thể làm cách khác như sau: ta có đường thẳng AH nhận $\vec{u}\left(2;1\right)$ làm VTPT nên có phương trình là $2x + y + 2 = 0$ do đó tọa độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-2;2\right)$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông ở A. Biết $A\left(-1;4\right)$, $B\left(1;-4\right)$, đường thẳng BC đi qua điểm $K\left(\dfrac{7}{3};2\right)$. Tìm toạ độ đỉnh C.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{BK}\left(\dfrac{4}{3};6\right)$ suy ra đường thẳng BC nhận $\vec{u}\left(2;9\right)$ làm VTCP nên có phương trình là

$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 9t \end{cases}$

$C \in BC \Rightarrow C\left(1 + 2t;-4 + 9t\right)$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{AB}\left(2;-8\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(2 + 2t;-8 + 9t\right)$ suy ra

$2\left(2 + 2t\right) - 8\left(9t - 8\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $C\left(3;5\right)$

Ví dụ 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh CD, $D\left(3;\dfrac{3}{2}\right)$ và đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $\Delta : x - y + 1 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh B.

Lời giải:

Cách 1: Điểm I là trung điểm của CD nên $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_D = 4 \\ y_C = 2x_I - y_D = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$

Vì $A \in \Delta$ nên tọa độ điểm A có dạng $A\left(a;a + 1\right)$

Mặt khác $ABCD$ là hình bình hành tương đương với $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = 4 - 3 \\ y_B - a - 1 = \dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a + 1 \\ y_B = a + 3 \end{cases} \Rightarrow B\left(a+1; a+3\right)$$

$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ không cùng phương khi và chỉ khi $\dfrac{a-3}{1} \neq \dfrac{a+1-\dfrac{3}{2}}{2} \Leftrightarrow a \neq \dfrac{11}{2}$

Đường thẳng Δ là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nhận vectơ $\vec{u} = \left(1;1\right)$ làm vec tơ chỉ phương nên

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}; \vec{u}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AC}; \vec{u}\right) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{u}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\vec{u}\right|} (*)$$

Có $\overrightarrow{AB}\left(1;2\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(4-a; \dfrac{5}{2} - a\right)$ nên

$$\left(*\right) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\dfrac{13}{2} - 2a}{\sqrt{\left(4-a\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2} - a\right)^2}} \Leftrightarrow 2a^2 - 13a + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \dfrac{11}{2} (l) \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ điểm $B\left(2;4\right)$

Cách 2: Ta có $C\left(4; \dfrac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng d đi qua C vuông góc với Δ nhận $\vec{u}\left(1;1\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

$1.\left(x-4\right) + 1.\left(y - \dfrac{7}{2}\right) = 0$ hay $2x + 2y - 15 = 0$

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{4} \\ y = \dfrac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{4}; \frac{17}{4}\right)$$

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua Δ thì khi đó C' thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và H là trung điểm của CC' do đó $\begin{cases} x_{C'} = 2x_H - x_C \\ y_{C'} = 2y_H - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = \dfrac{5}{2} \\ y_{C'} = 5 \end{cases} \Rightarrow C'\left(\dfrac{5}{2}; 5\right)$

Suy ra đường thẳng chứa cạnh AB đi qua C' và nhận $\overrightarrow{DC}\left(1;2\right)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} + t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

Thay x, y từ phương trình đường thẳng chứa cạnh AB vào phương trình đường thẳng Δ ta được

$\dfrac{5}{2} + t - 5 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{2}$ suy ra $A(1;2)$

ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 1 = 1 \\ y_B - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 4 \end{cases}$

Suy ra $B(2;4)$

Chú ý: Bài toán có liên quan đến đường phân giác thì ta thường sử dụng nhận xét " Δ *là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau* Δ_1 *và* Δ_2 *khi đó điểm đối xứng với điểm* $M \in \Delta_1$ *qua* Δ *thuộc* Δ_2 "

Ví dụ 5: Cho đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0$ và 2 điểm $A(0;1)$ và $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ là nhỏ nhất.

Lời giải:

$M \in d \Rightarrow M(2t+2;t)$, $\overrightarrow{MA}(-2t-2;1-t)$, $\overrightarrow{MB}(1-2t;4-t)$ do đó

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (-6t;-3t+9)$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(-6t)^2 + (-3t+9)^2} = \sqrt{45\left(t - \dfrac{3}{5}\right) + \dfrac{314}{5}} \ge \sqrt{\dfrac{314}{5}}$

$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{3}{5}$ do đó $M\left(\dfrac{16}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ là điểm cần tìm.

Dạng 5. Bài toán liên quan đến khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

1.Phương pháp giải.

Để tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$ ta dùng công thức

$$d(M_0,\Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng Δ: $5x + 3y - 5 = 0$

a) Tính khoảng cách từ điểm $A(-1;3)$ đến đường thẳng Δ

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song Δ và Δ': $5x + 3y + 8 = 0$

Lời giải:

a) Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có: $d(B,\Delta) = \dfrac{\left|5.(-1)+3.3-5\right|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{34}}$

b) Do $M(1;0) \in \Delta$ nên ta có $d(\Delta;\Delta') = d(M,\Delta') = \dfrac{\left|5.1+3.0+8\right|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{34}}$

***Ví dụ 2*:** Cho 3 đường thẳng có phương trình

$$\Delta_1: x+y+3=0;\ \Delta_2: x-y-4=0;\ \Delta_3: x-2y=0$$

Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ_3 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến Δ_2.

Lời giải:

$M \in \Delta_3 \Rightarrow M(2t;t)$

Khoảng cách từ M đến Δ_1 bằng 2 lần khoảng cách từ M đến Δ_2 nên ta có

$$d(M;\Delta_1) = 2d(M;\Delta_2) \Leftrightarrow \frac{\left|2t+t+3\right|}{\sqrt{2}} = 2\frac{\left|2t-t-4\right|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t+3=2(t-4) \\ 3t+3=-2(t-4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-11 \\ t=1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(-22;-11)$, $M_2(2;1)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(2;0)$, $B(3;4)$ và $P(1;1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B

Lời giải:

Đường thẳng Δ đi qua P có dạng $a(x-1)+b(y-1)=0\left(a^2+b^2\neq 0\right)$ hay $ax+by-a-b=0$

Δ cách đều A và B khi và chỉ khi

$$d(A;\Delta) = d(B;\Delta) \Leftrightarrow \frac{\left|a-b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|2a+3b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=2a+3b \\ b-a=2a+3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4b \\ 3a=-2b \end{array}\right.$$

+ Nếu $a=-4b$, chọn $a=4, b=-1$ suy ra $\Delta: 4x-y-3=0$

+ Nếu $3a=-2b$. chọn $a=2, b=-3$ suy ra $\Delta: 2x-3y+1=0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_1: 4x - y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 1 = 0$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2,0)$. Hãy viết phương trình đường phân giác trong góc A.

Lời giải:

Cách 1: Dễ dàng viết đường thẳng AB, AC có phương trình

AB: $3x - 2y - 7 = 0$, AC: $2x + 3y + 4 = 0$

Ta có phương trình đường phân giác góc A là

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_1: \dfrac{3x - 2y - 7}{\sqrt{13}} = \dfrac{2x + 3y + 4}{\sqrt{13}} \\ \Delta_2: \dfrac{3x - 2y - 7}{\sqrt{13}} = -\dfrac{2x + 3y + 4}{\sqrt{13}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_1: x - 5y - 11 = 0 \\ \Delta_2: 5x + y - 3 = 0\end{array}\right.$$

Ta thấy $(5 - 5.4 - 11)(-2 - 5.0 - 11) > 0$ nên 2 điểm B,C nằm về cùng 1 phía đối với đường thẳng Δ_1. Vậy $\Delta_2: 5x + y - 3 = 0$ là phương trình đường phân giác trong cần tìm.

Cách 2: Gọi $D(x;y)$ là chân đường phân giác hạ từ A của tam giác ABC

Ta có $\overrightarrow{BD} = \dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$

Mà $AB = 2\sqrt{13},\ AC = \sqrt{13}$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 2(-2 - x) \\ y - 4 = 2(0 - y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{4}{3}\end{cases} \text{ suy ra } D(\frac{1}{3};\frac{4}{3})$$

Ta có phương trình đường phân giác AD: $\dfrac{y + 2}{\dfrac{4}{3} + 2} = \dfrac{x - 1}{\dfrac{1}{3} - 1}$ hay $5x + y - 3 = 0$

Cách 3: Gọi $M(x;y)$ thuộc đường thẳng Δ là đường phân giác góc trong góc A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$

Do đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$ (*)

Mà $\overrightarrow{AB} = (4;6)$; $\overrightarrow{AC} = (-3;2)$; $\overrightarrow{AM} = (x - 1; y + 2)$ thay vào (*) ta có

$$\frac{4(x - 1) + 6(y + 2)}{\sqrt{4^2 + 6^2}\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}} = \frac{-3(x - 1) + 2(y + 2)}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2}\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}} \Leftrightarrow$$

$2(x - 1) + 3(y + 2) = -3(x - 1) + 2(y + 2) \Leftrightarrow 5x + y - 3 = 0$

Vậy đường phân giác trong góc A có phương trình là: $5x + y - 3 = 0$

Ví dụ 5: Cho điểm $C(-2;5)$ và đường thẳng $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A, B đối xứng với nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ và diện tích tam giác ABC bằng 15.

Lời giải:

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua $M(0;1)$ và nhận $\vec{u}(4;3)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=4t \\ y=1+3t \end{cases}$

Vì $A\in\Delta$ nên $A(4t;1+3t)$, $t\in R$.

Hai điểm A, B đối xứng với nhau qua $I\left(2;\frac{5}{2}\right)$ suy ra $\begin{cases} 2=\dfrac{4t+x_B}{2} \\ \dfrac{5}{2}=\dfrac{1+3t+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=4-4t \\ y_B=4-3t \end{cases}$

Do đó $B(4-4t;4-3t)$

Ta có $AB=\sqrt{(4-8t)^2+(3-6t)^2}=5|2t-1|$ và $d(C;\Delta)=\dfrac{|3.(-2)-4.5+4|}{5}=\dfrac{22}{5}$

Suy ra $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.d(C;\Delta)=\dfrac{1}{2}.5|2t-1|.\dfrac{22}{5}=11|2t-1|$

Diện tích tam giác ABC bằng $15 \Leftrightarrow 11|2t-1|=15 \Leftrightarrow 2t-1=\pm\dfrac{15}{12} \Leftrightarrow t=\dfrac{13}{11}$ hoặc $t=-\dfrac{2}{11}$.

Với $t=\dfrac{13}{11} \Rightarrow A\left(\dfrac{52}{11};\dfrac{50}{11}\right)$, $B\left(-\dfrac{8}{11};\dfrac{5}{11}\right)$

Với $t=-\dfrac{2}{11} \Rightarrow A\left(-\dfrac{8}{11};\dfrac{5}{11}\right)$, $B\left(\dfrac{52}{11};\dfrac{50}{11}\right)$

Vậy $A\left(\dfrac{52}{11};\dfrac{50}{11}\right)$, $B\left(-\dfrac{8}{11};\dfrac{5}{11}\right)$ hoặc $A\left(-\dfrac{8}{11};\dfrac{5}{11}\right)$, $B\left(\dfrac{52}{11};\dfrac{50}{11}\right)$.

Dạng 6: bài toán liên quan đến góc giữa hai đường thẳng.

1.Phương pháp giải:

- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ có phương trình

$$(\Delta_1): a_1x+b_1y+c_1=0,\ (a_1^2+b_1^2\neq 0)$$
$$(\Delta_2): a_2x+b_2y+c_2=0,\ (a_2^2+b_2^2\neq 0)$$

được xác định theo công thức:

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véc tơ chỉ phương(hoặc vectơ pháp tuyến) của chúng $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|$.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $\Delta_1 : 3x - 2y + 1 = 0;$ $\quad\Delta_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \end{cases}\left(t \in R\right)$

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}\left(t \in R\right)$ $\quad\Delta_2 : \begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}\left(t' \in R\right)$

Lời giải:

a) $\overrightarrow{n_1}\left(3;-2\right)$, $\overrightarrow{n_2}\left(5;1\right)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 và Δ_2 suy ra

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right) = \dfrac{\left|3.5 - 2.1\right|}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ do đó $\left(\Delta_1;\Delta_2\right) = 45^0$

b) $\overrightarrow{u_1}\left(-1;2\right)$, $\overrightarrow{u_2}\left(-4;-2\right)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 và Δ_2 suy ra

$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right) = \dfrac{\left|-1.\left(-4\right) + 2.\left(-2\right)\right|}{\sqrt{17}.\sqrt{8}} = 0$ do đó $\left(\Delta_1;\Delta_2\right) = 90^0$

Ví dụ 2: Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1: $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và Δ_2: $mx + y + 1 = 0$ một góc bằng 30^0

Lời giải:

Ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2) = \dfrac{\left|m\sqrt{3} - 1\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}.\sqrt{m^2 + 1^2}}$

Theo bài ra góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 30^0 nên

$\cos 30^0 = \dfrac{\left|m\sqrt{3} - 1\right|}{2.\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left|m\sqrt{3} - 1\right|}{2.\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = \left|m\sqrt{3} - 1\right|$

Hay $3(m^2 + 1) = (m\sqrt{3} - 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 3 = 3m^2 - 2m\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $m = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $d : 3x - 2y + 1 = 0$ và $M\left(1;2\right)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45^o.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua M có dạng $\Delta: a\left(x-1\right)+b\left(y-2\right)=0,\ a^2+b^2\neq 0$ hay $ax+by-a-2b=0$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 45^0 nên:

$$\cos 45^0=\frac{\left|3a+(-2b)\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\left|3a-2b\right|}{\sqrt{13}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{26(a^2+b^2)}=2\left|3a-2b\right|\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5b\\5a=-b\end{array}\right.$$

+ Nếu $a=5b$, chọn $a=5,\ b=1$ suy ra $\Delta: 5x+y-7=0$

+ Nếu $5a=-b$, chọn $a=1,\ b=-5$ suy ra $\Delta: x-5y+9=0$

Vậy có 2 đường thẳng thoả mãn $\Delta_1: x-5y+9=0$ và $\Delta_2: 5x+y-7=0$

***Ví dụ 4*:** Cho 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x-y+1=0;\ \Delta_2: x+2y-7=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua gốc toạ độ sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 tam giác cân có đỉnh là giao điểm Δ_1 và Δ_2.

Lời giải:

Đường thẳng Δ qua gốc toạ độ có dạng $ax+by=0$ với $a^2+b^2\neq 0$

Theo giả thiết ta có $\cos\left(\Delta;\Delta_1\right)=\cos\left(\Delta;\Delta_2\right)$ hay

$$\frac{\left|2a-b\right|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|a+2b\right|}{\sqrt{5}.\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a-b=a+2b\\b-2a=a+2b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3b\\3a=-b\end{array}\right.$$

+ Nếu $a=3b$, chọn $a=3,\ b=1$ suy ra $\Delta: 3x+y=0$

+ Nếu $3a=-b$, chọn $a=1,\ b=-3$ suy ra $\Delta: x-3y=0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_1: 3x+y=0$ và $\Delta_2: x-3y=0$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG – VECTƠ PHÁP TUYẾN

Câu 1: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;0)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(0;-1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(-1;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1)$.

Lời giải

Chọn A.

Trục *Ox*: $y=0$ có VTCP $\vec{i}\,(1;0)$ nên một đường thẳng song song với *Ox* cũng có VTCP là

$\vec{i}(1;0)$.

Câu 2: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Oy?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(0;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Trục *Oy*: $x=0$ có VTCP $\vec{j}(0;1)$ nên một đường thẳng song song với *Oy* cũng có VTCP là $\vec{j}(0;1)$.

Câu 3: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3;2)$ và $B(1;4)$?

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(-2;6)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3;2)$ và $B(1;4)$ có VTCP là $\overrightarrow{AB}=(4;2)$ hoặc $\vec{u}(2;1)$.

Câu 4: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $M(a;b)$?

A. $\overrightarrow{u_1}=(0;a+b)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(a;b)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(a;-b)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-a;b)$.

Lời giải

Chọn B.

$\overrightarrow{OM}=(a;b)\longrightarrow$ đường thẳng *OM* có VTCP: $\vec{u}=\overrightarrow{OM}=(a;b)$.

Câu 5: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$?

A. $\overrightarrow{u_1}=(a;-b)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(a;b)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(b;a)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-b;a)$.

Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{AB}=(-a;b)\longrightarrow$ đường thẳng *AB* có VTCP:

$\overrightarrow{AB}=(-a;b)$ hoặc $\vec{u}=-\overrightarrow{AB}=(a;-b)$.

Câu 6: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường phân giác góc phần tư thứ nhất?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(0;-1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A.

Đường phân giác góc phần tư (I): $x-y=0 \longrightarrow$ VTPT: $\vec{n}(1;-1)$

$\longrightarrow$ VTCP: $\vec{u}(1;1)$.

Câu 7: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục Ox?

A. $\overrightarrow{n_1}=(0;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;0)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-1;0)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(1;1)$.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng song song với Ox: $y+m=0\ (m\neq 0) \longrightarrow$ VTPT: $\vec{n}(0;1)$.

Câu 8: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục Oy?

A. $\overrightarrow{n_1}=(1;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(0;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-1;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(1;0)$.

Lời giải

Chọn D.

Đường thẳng song song với Oy: $x+m=0\ (m\neq 0) \longrightarrow$ VTPT: $\vec{n}(1;0)$.

Câu 9: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;3)$ và $B(4;1)$?

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;-2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;-1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(1;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(1;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

$\overrightarrow{AB}=(2;-2) \longrightarrow$ đường thẳng AB có VTCP $\vec{u}(1;-1) \longrightarrow$ VTPT $\vec{n}(1;1)$.

Câu 10: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $A(a;b)$?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-a;b)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;0)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(b;-a)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(a;b)$.

Lời giải

Chọn C.

$\overrightarrow{OA}=(a;b) \longrightarrow$ đường thẳng AB có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(a;b) \longrightarrow$ VTPT $\vec{n}(b;-a)$.

Câu 11: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(a;0)$ và $B(0;b)$?

A. $\overrightarrow{n_1}=(b;-a)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-b;a)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(b;a)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(a;b)$.

Lời giải

Chọn C.

$\overrightarrow{AB}=(-a;b) \longrightarrow$ đường thẳng AB có VTCP $\vec{u}=(-a;b) \longrightarrow$ VTPT $\vec{n}=(b;a)$.

Câu 12: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của đường phân giác góc phần tư thứ hai?

A. $\overrightarrow{n_1}=(1;1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(0;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(1;0)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A.

Góc phần tư (II): $x+y=0\longrightarrow$ VTPT $\vec{n}=(1;1)$.

Câu 13: Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;-1)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ pháp tuyến của d ?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-3;6)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;6)$.

Lời giải

Chọn D.

Đường thẳng d có VTCP: $\vec{u}(2;-1)\longrightarrow$ VTPT $\vec{n}(1;2)$ hoặc $3\vec{n}=(3;6)$.

Câu 14: Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;-2)$. Trong các vectơ sau, vectơ nào là một vectơ chỉ phương của d ?

A. $\overrightarrow{u_1}=(2;-4)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-2;4)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng d có VTPT: $\vec{n}(4;-2)\longrightarrow$ VTCP $\vec{u}(2;4)$ hoặc $\frac{1}{2}\vec{u}=(1;2)$.

Câu 15: Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;-3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases}\vec{u}_d=(3;-4)\\ \Delta\perp d\end{cases}\longrightarrow \vec{n}_\Delta=\vec{u}_d=(3;-4).$$

Câu 16: Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}\vec{n}_d=(-2;-5)\\ \Delta\perp d\end{cases}\longrightarrow \vec{u}_\Delta=\vec{n}_d=(-2;-5)\text{ hay chọn } -\vec{n}_\Delta=(2;5).$$

Câu 17: Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;-4)$. Đường thẳng Δ song song với d có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(4;3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-4;3)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;4)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;-4)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}\vec{u}_d=(3;-4)\\ \Delta \parallel d\end{cases}\longrightarrow \vec{u}_\Delta=\vec{u}_d=(3;-4)\longrightarrow \vec{n}_\Delta=(4;3).$$

Câu 18: Đường thẳng d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;-5)$. Đường thẳng Δ song song với d có một vectơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(5;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-5;-2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;5)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-5)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}\vec{n}_d=(-2;-5)\\ \Delta \parallel d\end{cases}\longrightarrow \vec{n}_\Delta=\vec{u}_d=(-2;-5)\longrightarrow \vec{u}_\Delta=(5;-2).$$

Câu 19: Một đường thẳng có bao nhiêu vectơ chỉ phương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Câu 20: Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;5)$ có phương trình tham số là:

A. $d:\begin{cases}x=3+t\\ y=5-2t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1+3t\\ y=-2+5t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+5t\\ y=-2-3t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=3+2t\\ y=5+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases}M(1;-2)\in d\\ \vec{u}_d=(3;5)\end{cases}\xrightarrow[\text{PTTS}]{} d:\begin{cases}x=1+3t\\ y=-2+5t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Câu 21: Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2)$ có phương trình tham số là:

A. $d:\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=2t\\ y=t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=t\\ y=-2t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=-2t\\ y=t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

$\begin{cases} O(0;0)\in d \\ \vec{u}_d=-\vec{u}=(1;-2) \end{cases} \xrightarrow[\text{PTTS}]{} d:\begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

Câu 22: Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;0)$ có phương trình tham số là:

A. $d:\begin{cases} x=3+2t \\ y=0 \end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases} x=0 \\ y=-2+3t \end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases} x=3 \\ y=-2t \end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases} x=3t \\ y=-2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases} M(0;-2)\in d \\ \vec{u}_d=\vec{u}=(3;0) \end{cases} \xrightarrow[\text{PTTS}]{} d:\begin{cases} x=3t \\ y=-2 \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

Câu 23: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d:\begin{cases} x=2 \\ y=-1+6t \end{cases}$?

A. $\overrightarrow{u_1}=(6;0)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-6;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;6)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(0;1)$.

Lời giải

Chọn D.

$d:\begin{cases} x=2 \\ y=-1+6t \end{cases} \longrightarrow$ VTCP $\vec{u}=(0;6)=6(0;1)$ hay chọn $\vec{u}=(0;1)$.

Câu 24: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=5-\frac{1}{2}t \\ y=-3+3t \end{cases}$?

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;6)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(5;-3)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-5;3)$.

Lời giải

Chọn A.

$\Delta:\begin{cases} x=5-\frac{1}{2}t \\ y=-3+3t \end{cases} \xrightarrow[\text{VTCP}]{} \vec{u}=\left(-\frac{1}{2};3\right)=\frac{1}{2}(-1;6)$ hay chọn $\vec{u}(-1;6)$.

Câu 25: Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$.

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1+6t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2t \\ y=-6t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=5+6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=2+6t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

$\begin{cases} A(2;-1)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(0;6) \end{cases} \longrightarrow AB:\begin{cases} x=2 \\ y=-1+6t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$

Câu 26: Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;3)$ và $B(3;1)$.

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=3-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=3+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases} A(-1;3)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(4;-2)=-2(-2;1) \end{cases} \longrightarrow AB:\begin{cases} x=-1-2t \\ y=3+t \end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Câu 27: Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;1)$ và $B(2;2)$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases} A(1;1)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(1;1) \end{cases} \longrightarrow AB:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \end{cases}(t\in\mathbb{R})$

$\xrightarrow{t=-1} O(0;0)\in AB \longrightarrow AB:\begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Câu 28: Đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-7)$ và $B(1;-7)$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=-7-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3-t \\ y=1-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=7 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} A(3;-7)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(-2;0)=-2(1;0) \end{cases} \longrightarrow AB:\begin{cases} x=3+t \\ y=-7 \end{cases}$

$\xrightarrow{t=-3} M(0;-7)\in AB \longrightarrow AB:\begin{cases} x=t \\ y=-7 \end{cases}.$

Câu 29: Phương trình nào dưới đây **không** phải là phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $O(0;0)$ và $M(1;-3)$?

A. $\begin{cases} x=1-t \\ y=3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3-3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+6t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-t \\ y=3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Kiểm tra đường thẳng nào không chứa $O(0;0) \longrightarrow$ loại A.

Nếu cần thì có thể kiểm tra đường thẳng nào không chứa điểm $M(1;-3)$.

Câu 30: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-1)$. Đường thẳng đi qua điểm B và song song với AC có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 + 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC. Ta có

$$\begin{cases} B(0;3) \in d \\ \vec{u}_d = \overrightarrow{AC} = (-5;-1) = -1.(5;1) \end{cases} \longrightarrow d : \begin{cases} x = 5t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Câu 31: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;2)$, $P(4;0)$ và $Q(0;-2)$. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với PQ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với PQ.

Ta có: $\begin{cases} A(3;2) \in d \\ \vec{u}_d = \overrightarrow{PQ} = (-4;-2) = -2(2;1) \end{cases} \to d : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$$\xrightarrow{t=-2} M(-1;0) \in d \to d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 32: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2;1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB.

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} A(-2;1) \in AB,\ \vec{u}_{CD} = (4;3) \\ AB \parallel CD \to \vec{u}_{AB} = -\vec{u}_{CD} = (-4;-3) \end{cases} \longrightarrow AB : \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 33: Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

Góc phần tư (I) : $x-y=0 \longrightarrow VTCP: \vec{u}(1;1)=\vec{u}_d \longrightarrow d:\begin{cases}x=-3+t\\ y=5+t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Câu 34: Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4;-7)$ và song song với trục Ox.

A. $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=4\\ y=-7+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-7+t\\ y=4\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=t\\ y=-7\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

$\vec{u}_{Ox}=(1;0) \longrightarrow \vec{u}_d=(1;0) \longrightarrow d:\begin{cases}x=4+t\\ y=-7\end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(0;-7)\in d \to d:\begin{cases}x=t\\ y=-7\end{cases}.$

Câu 35: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$ và $C(7;3)$. Viết phương trình tham số của đường trung tuyến CM của tam giác.

A. $\begin{cases}x=7\\ y=3+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3-5t\\ y=-7\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=7+t\\ y=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2\\ y=3-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

$\begin{cases}A(1;4)\\ B(3;2)\end{cases} \to M(2;3) \to \overrightarrow{MC}=(5;0)=5(1;0) \to CM:\begin{cases}x=7+t\\ y=3\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$

Câu 36: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(5;0)$ và $C(2;1)$. Trung tuyến BM của tam giác đi qua điểm N có hoành độ bằng 20 thì tung độ bằng:

A. -12. **B.** $-\frac{25}{2}$. **C.** -13. **D.** $-\frac{27}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases}A(2;4)\\ C(2;1)\end{cases} \longrightarrow M\left(2;\frac{5}{2}\right) \to \overrightarrow{MB}=\left(3;-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}(6;-5) \longrightarrow MB:\begin{cases}x=5+6t\\ y=-5t\end{cases}.$

Ta có: $N(20;y_N)\in BM \longrightarrow \begin{cases}20=5+6t\\ y_N=-5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=\frac{5}{2}\\ y_N=-\frac{25}{2}\end{cases}$

Câu 37: Một đường thẳng có bao nhiêu vectơ pháp tuyến?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Câu 38: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d: x-2y+2017=0$?

A. $\overrightarrow{n_1}=(0;-2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(1;-2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-2;0)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(2;1)$.

Lời giải

Chọn B.

$d: x-2y+2017=0 \longrightarrow \vec{n}_d=(1;-2)$.

Câu 39: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d:-3x+y+2017=0$?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-3;0)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-3;-1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(6;2)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(6;-2)$.

Lời giải

Chọn D.

$d:-3x+y+2017=0 \longrightarrow \vec{n}_d=(-3;1)$ hay chọn $-2\vec{n}_d=(6;-2)$.

Câu 40: Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của $d: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-t \end{cases}$?

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;-1)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-1;2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(1;2)$.

Lời giải

Chọn D.

$d: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-t \end{cases} \longrightarrow \vec{u}_d=(2;-1) \longrightarrow \vec{n}_d=(1;2)$.

Câu 41: Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của $d: 2x-3y+2018=0$?

A. $\overrightarrow{u_1}=(-3;-2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;3)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(-3;2)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(2;-3)$.

Lời giải

Chọn A.

$d: 2x-3y+2018=0 \longrightarrow \vec{n}_d=(2;-3) \longrightarrow \vec{u}_d=(3;2)$ hay chọn $-\vec{n}_d=(-3;-2)$.

Câu 42: Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A=(-3;2)$, $B=(-3;3)$ có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\overrightarrow{n_1}=(6;5)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(0;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(-3;5)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi d là trung trực đoạn AB, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0;1) \\ d\perp AB \end{cases} \longrightarrow \vec{n}_d=\overrightarrow{AB}=(0;1)$.

Câu 43: Cho đường thẳng $\Delta: x-3y-2=0$. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ pháp tuyến của Δ ?

A. $\overrightarrow{n_1}=(1;-3)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(-2;6)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=\left(\frac{1}{3};-1\right)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;1)$.

Lời giải

Chọn D.

$$\Delta: x-3y-2=0 \longrightarrow \vec{n}_d=(1;-3) \longrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1(1;-3)=\vec{n}_d \\ \vec{n}_2(-2;6)=-2\vec{n}_d \\ \vec{n}_3\left(\frac{1}{3};-1\right)=\frac{1}{3}\vec{n}_d \end{cases}.$$

Câu 44: Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-2;4)$ có phương trình tổng quát là:

A. $d: x+2y+4=0$. **B.** $d: x-2y-5=0$. **C.** $d: -2x+4y=0$. **D.** $d: x-2y+4=0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} A(1;-2)\in d \\ \vec{n}_d=(-2;4) \end{cases} \longrightarrow d: -2(x-1)+4(y+2)=0$$

$$\Leftrightarrow d: -2x+4y+10=0 \Leftrightarrow d: x-2y-5=0.$$

Câu 45: Đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;0)$ có phương trình tổng quát là:

A. $d: x=0$. **B.** $d: y+2=0$. **C.** $d: y-2=0$. **D.** $d: x-2=0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} M(0;-2)\in d \\ \vec{u}_d=(3;0)=3(1;0)\to \vec{n}_d=(0;1) \end{cases} \longrightarrow d: y+2=0.$$

Câu 46: Đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;2)$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x=-4-2t \\ y=5+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2t \\ y=1+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=5-2t \\ y=-4+3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} A(-4;5)\in d \\ \vec{n}_d=(3;2)\to\vec{u}_d=(-2;3)\end{cases}\longrightarrow d:\begin{cases} x=-4-2t \\ y=5+3t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Câu 47: Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của đường thẳng $d:\begin{cases} x=3-5t \\ y=1+4t\end{cases}$?

A. $4x+5y+17=0$. **B.** $4x-5y+17=0$. **C.** $4x+5y-17=0$. **D.** $4x-5y-17=0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $d:\begin{cases} x=3-5t \\ y=1+4t\end{cases}\to\begin{cases} A(3;1)\in d \\ \vec{u}_d=(-5;4)\to\vec{n}_d=(4;5)\end{cases}\longrightarrow d:4(x-3)+5(y-1)=0 \Leftrightarrow d:4x+5y-17=0.$

Câu 48: Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của đường thẳng $d:\begin{cases} x=15 \\ y=6+7t\end{cases}$?

A. $x-15=0$. **B.** $x+15=0$. **C.** $6x-15y=0$. **D.** $x-y-9=0$.

Lời giải

Chọn A.

$$d:\begin{cases} x=15 \\ y=6+7t\end{cases}\to\begin{cases} A(15;6)\in d \\ \vec{u}_d=(0;7)=7(0;1)\to\vec{n}_d=(1;0)\end{cases}\longrightarrow d:x-15=0.$$

Câu 49: Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng $d:x-y+3=0$?

A. $\begin{cases} x=t \\ y=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=3-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3 \\ y=t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

$$d:x-y+3=0\to\begin{cases} x=0\Rightarrow y=3 \\ \vec{n}_d=(1;-1)\end{cases}\to\begin{cases} A(0;3)\in d \\ \vec{u}_d=(1;1)\end{cases}\longrightarrow d:\begin{cases} x=t \\ y=3+t\end{cases}(t\in\mathbb{R}).$$

Câu 50: Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng $d:3x-2y+6=0$?

A. $\begin{cases} x=3t \\ y=2t+3\end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{3}{2}t+3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=-\dfrac{3}{2}t+3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2t \\ y=\dfrac{3}{2}t+3\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$d:3x-2y+6=0\to\begin{cases} x=0\Rightarrow y=3 \\ \vec{n}_d=(3;-2)\end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A(0;3) \in d \\ \vec{u}_d = (2;3) = 2\left(1;\dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \longrightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 51: Cho đường thẳng $d: 3x + 5y + 2018 = 0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;5)$.

B. d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;-3)$.

C. d có hệ số góc $k = \dfrac{5}{3}$.

D. d song song với đường thẳng $\Delta: 3x + 5y = 0$.

Lời giải

Chọn C.

$$d: 3x + 5y + 2018 = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_d = (3;5) \\ \vec{u}_d = (5;-3) \\ k_d = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \vec{n} = (3;5) = \vec{n}_d \\ \vec{u} = (5;-3) = \vec{u}_d \\ k = \dfrac{5}{3} \neq k_d \end{cases} \longrightarrow$$

$d: 3x + 5y + 2018 = 0 \rightarrow d \parallel \Delta: 3x + 5y = 0 \longrightarrow$ D đúng.

Câu 52: Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 2x + 3y - 12 = 0$ có phương trình tổng quát là:

A. $2x + 3y - 8 = 0$. **B.** $2x + 3y + 8 = 0$. **C.** $4x + 6y + 1 = 0$. **D.** $4x - 3y - 8 = 0$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} M(1;2) \in d \\ d \parallel \Delta: 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(1;2) \in d \\ d: 2x + 3y + c = 0 (c \neq -12) \end{cases}$$

$\rightarrow 2.1 + 3.2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8.$ Vậy $d: 2x + 3y - 8 = 0.$

Câu 53: Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua O và song song với đường thẳng $\Delta: 6x - 4x + 1 = 0$ là:

A. $3x - 2y = 0.$ **B.** $4x + 6y = 0.$ **C.** $3x + 12y - 1 = 0.$ **D.** $6x - 4y - 1 = 0.$

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} O(0;0) \in d \\ d \parallel \Delta: 6x - 4x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} O(0;0) \in d \\ d: 6x - 4x + c = 0\ (c \neq 1) \end{cases} \longrightarrow 6.0 - 4.0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Vậy $d: 6x - 4y = 0 \Leftrightarrow d: 3x - 2y = 0.$

Câu 54: Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và vuông góc với đường thẳng

$\Delta: 2x+y-3=0$ có phương trình tổng quát là:

A. $2x+y=0$. **B.** $x-2y-3=0$. **C.** $x+y-1=0$. **D.** $x-2y+5=0$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d\perp\Delta: 2x+y-3=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d: x-2y+c=0 \end{cases} \longrightarrow -1-2.2+c=0 \Leftrightarrow c=5.$$

Vậy $d: x-2y+5=0.$

Câu 55: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(4;-3)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases} x=3-2t \\ y=1+3t \end{cases}$.

A. $3x+2y+6=0$. **B.** $-2x+3y+17=0$. **C.** $3x+2y-6=0$. **D.** $3x-2y+6=0$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\begin{cases} A(4;-3)\in d \\ \vec{u}_d=(-2;3) \\ \Delta \parallel d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(4;-3)\in d \\ \vec{u}_\Delta=(-2;3)\rightarrow \vec{n}_\Delta=(3;2) \end{cases}$

$\rightarrow \Delta: 3(x-4)+2(y+3)=0 \Leftrightarrow \Delta: 3x+2y-6=0.$

Câu 56: Cho tam giác ABC có $A(2;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;1)$. Đường thẳng d đi qua B và song song với AC có phương trình tổng quát là:

A. $5x-y+3=0$. **B.** $5x+y-3=0$. **C.** $x+5y-15=0$. **D.** $x-15y+15=0$.

Lời giải

$$\begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{u}_{AC}=\overrightarrow{AC}=(-5;1) \\ d\parallel AC \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(0;3)\in d \\ \vec{n}_d=(1;5) \end{cases}$$

$\rightarrow d: 1(x-0)+5(y-3)=0 \Leftrightarrow d: x+5y-15=0.$

Câu 57: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;0)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-2t \end{cases}$.

A. $2x+y+2=0$. **B.** $2x-y+2=0$. **C.** $x-2y+1=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} M(-1;0)\in d \\ \vec{u}_\Delta=(1;-2) \\ d\perp\Delta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(-1;0)\in d \\ \vec{n}_d=(1;-2) \end{cases} \rightarrow d: 1(x+1)-2(y-0)=0 \Leftrightarrow d: x-2y+1=0.$$

Câu 58: Đường thẳng d đi qua điểm $M\left(-2;1\right)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1-3t\\y=-2+5t\end{cases}$ có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases}x=-2-3t\\y=1+5t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+5t\\y=1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-3t\\y=2+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=2+3t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases}M\left(-2;1\right)\in d\\\vec{u}_{\Delta}=\left(-3;5\right)\\d\perp\Delta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}M\left(-2;1\right)\in d\\\vec{n}_d=\left(-3;5\right)\rightarrow\vec{u}_d=\left(5;3\right)\end{cases}\rightarrow d:\begin{cases}x=-2+5t\\y=1+3t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right).$$

Câu 59: Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A\left(-1;2\right)$ và song song với đường thẳng $\Delta:3x-13y+1=0$.

A. $\begin{cases}x=-1+13t\\y=2+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+13t\\y=-2+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1-13t\\y=2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=2-13t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}A\left(-1;2\right)\in d\\\vec{n}_{\Delta}=\left(3;-13\right)\\d\parallel\Delta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A\left(-1;2\right)\in d\\\vec{n}_d=\left(3;-13\right)\rightarrow\vec{u}_d=\left(13;3\right)\end{cases}\rightarrow d:\begin{cases}x=-1+13t\\y=2+3t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right).$$

Câu 60: Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm $A\left(-1;2\right)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:2x-y+4=0$.

A. $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=4+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}A\left(-1;2\right)\in d\\\vec{n}_{\Delta}=\left(2;-1\right)\\d\perp\Delta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A\left(-1;2\right)\in d\\\vec{u}_d=\left(2;-1\right)\end{cases}\rightarrow d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right).$$

Câu 61: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M\left(-2;-5\right)$ và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

A. $x+y-3=0$. **B.** $x-y-3=0$. **C.** $x+y+3=0$. **D.** $2x-y-1=0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} M(-2;-5)\in d \\ (\mathrm{I}): x-y=0\ (\Delta) \\ d \parallel \Delta \end{cases} \to \begin{cases} M(-2;-5)=0 \\ d: x-y+c=0\ (c\neq 0) \end{cases} \to -2-(-5)+c=0 \Leftrightarrow c=-3.$$

Vậy $d: x-y-3=0.$

Câu 62: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $x+y-4=0$. **B.** $x-y-4=0$. **C.** $x+y+4=0$. **D.** $x-y+4=0$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} M(3;-1)\in d \\ (\mathrm{II}): x+y=0\ (\Delta) \\ d \perp \Delta \end{cases} \to \begin{cases} M(3;-1) \\ d: x-y+c=0 \end{cases}$$

$\to 3-(-1)+c=0 \Leftrightarrow c=-4 \to d: x-y-4=0.$ **Chọn B.**

Câu 63: Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-4;0)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $\begin{cases} x=t \\ y=-4+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-4+t \\ y=-t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=4-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} M(-4;0)\in d \\ (\mathrm{II}): x+y=0\ (\Delta) \to \vec{n}_\Delta=(1;1) \\ d \perp \Delta \to \vec{u}_d=(1;1) \end{cases} \to \begin{cases} x=-4+t \\ y=t \end{cases} \xrightarrow{t=4} A(0;4)\in d$$

$\to d: \begin{cases} x=t \\ y=4+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. **Chọn** C.

Câu 64: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2)$ và song song với trục Ox .

A. $y+2=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $y-2=0$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases} M(-1;2)\in d \\ d \parallel Ox: y=0 \end{cases} \longrightarrow d: y=2.$$

Câu 65: Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(6;-10)$ và vuông góc với trục Oy .

A. $\begin{cases} x=10+t \\ y=6 \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=-10 \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x=6 \\ y=-10-t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x=6 \\ y=-10+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} M(6;-10)\in d \\ d\perp Oy: x=0 \to \vec{u}_d=(1;0) \end{cases} \longrightarrow d:\begin{cases} x=6+t \\ y=-10 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(2;-10)\in d$

$\to d:\begin{cases} x=2+t \\ y=-10 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 66: Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-1)$ và $B(1;5)$ là:

A. $-x+3y+6=0.$ **B.** $3x-y+10=0.$ **C.** $3x-y+6=0.$ **D.** $3x+y-8=0.$

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases} A(3;-1)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(-2;6)\to \vec{n}_{AB}=(3;1) \end{cases}$

$\to AB: 3(x-3)+1(y+1)=0 \Leftrightarrow AB: 3x+y-8=0.$ **Chọn D.**

Câu 67: Phương trình đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại $A(-2;0)$ và $B(0;3)$ là:

A. $2x-3y+4=0$. **B.** $3x-2y+6=0$. **C.** $3x-2y-6=0$. **D.** $2x-3y-4=0$.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} A(-2;0)\in Ox \\ B(0;3)\in Oy \end{cases} \longrightarrow AB: \dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x-2y+6=0.$

Câu 68: Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;-1)$ và $B(2;5)$ là:

A. $x+y-1=0.$ **B.** $2x-7y+9=0.$ **C.** $x+2=0.$ **D.** $x-2=0.$

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases} A(2;-1)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(0;6)\to \vec{n}_{AB}=(1;0) \end{cases} \longrightarrow AB: x-2=0.$

Câu 69: Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3;-7)$ và $B(1;-7)$ là:

A. $y-7=0.$ **B.** $y+7=0.$ **C.** $x+y+4=0.$ **D.** $x+y+6=0.$

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} A(3;-7)\in AB \\ \vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(-4;0)\to \vec{n}_{AB}=(0;1) \end{cases} \longrightarrow AB: y+7=0.$

Câu 70: Cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;-2)$, $C(4;2)$. Lập phương trình đường trung tuyến của tam

giác ABC kẻ từ
A

A. $x+y-2=0$. **B.** $2x+y-3=0$. **C.** $x+2y-3=0$. **D.** $x-y=0$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi M là trung điểm của BC. Ta cần viết phương trình đường thẳng AM.

Ta có :

$$\begin{cases} B(0;-2) \\ C(4;2) \end{cases} \to M(2;0) \to \vec{u}_{AM} = \overrightarrow{AM} = (1;-1) \to \vec{n}_{AM} = (1;1) \to AM : x+y-2=0.$$

Câu 71: Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(5;2)$ có phương trình là:

A. $2x+3y-3=0$. **B.** $3x+2y+1=0$. **C.** $3x-y+4=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(1;-4), B(5;2) \to I(3;-1) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (4;6) = 2(2;3) \end{cases} \longrightarrow d : 2x+3y-3=0.$$

Câu 72: Đường trung trực của đoạn AB với $A(4;-1)$ và $B(1;-4)$ có phương trình là:

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=0$. **C.** $y-x=0$. **D.** $x-y=1$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(4;-1), B(1;-4) \to I\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (-3;-3) = -3(1;1) \end{cases} \longrightarrow d : x+y=0.$$

Câu 73: Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(1;2)$ có phương trình là:

A. $y+1=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $y-1=0$. **D.** $x-4y=0$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(1;-4), B(1;2) \to I(1;-1) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (0;6) = 6(0;1) \end{cases} \longrightarrow d : y+1=0.$$

Câu 74: Đường trung trực của đoạn AB với $A(1;-4)$ và $B(3;-4)$ có phương trình là :

A. $y+4=0$. **B.** $x+y-2=0$. **C.** $x-2=0$. **D.** $y-4=0$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB. Ta có

$$\begin{cases} A(1;-4), B(3;-4) \to I(2;-4) \in d \\ d \perp AB \to \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (2;0) = 2(1;0) \end{cases} \longrightarrow d: x-2=0.$$

Câu 75: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ A.

A. $7x+3y-11=0$. **B.** $-3x+7y+13=0$. **C.** $3x+7y+1=0$. **D.** $7x+3y+13=0$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi h_A là đường cao kẻ từ A của tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases} A(2;-1) \in h_A \\ h_A \perp BC \to \vec{n}_{h_A} = \overrightarrow{BC} = (-7;-3) = -(7;3) \end{cases} \to h_A: 7x+3y-11=0.$$

Câu 76: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ B.

A. $3x-5y-13=0$. **B.** $3x+5y-20=0$. **C.** $3x+5y-37=0$. **D.** $5x-3y-5=0$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi h_B là đường cao kẻ từ B của tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases} B(4;5) \in h_B \\ h_B \perp AC \to \vec{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (-5;3) = -(5;-3) \end{cases} \to h_B: 5x-3y-5=0.$$

Câu 77: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;-1)$, $B(4;5)$ và $C(-3;2)$. Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ C.

A. $x+y-1=0$. **B.** $x+3y-3=0$. **C.** $3x+y+11=0$. **D.** $3x-y+11=0$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi h_C là đường cao kẻ từ C của tam giác ABC. Ta có

$$\begin{cases} C(-3;2) \in h_C \\ h_C \perp AB \to \vec{n}_{h_C} = \overrightarrow{AB} = (2;6) = 2(1;3) \end{cases} \to h_C: x+3y-3=0.$$

Câu 78: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d_1: x-2y+1=0 \text{ và } d_2: -3x+6y-10=0.$$

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} d_1: x-2y+1=0 \\ d_2: -3x+6y-10=0 \end{cases} \rightarrow \dfrac{1}{-3}=\dfrac{-2}{6}\neq\dfrac{1}{-10} \longrightarrow d_1 \parallel d_2.$

Câu 79: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$d_1: 3x-2y-6=0$ và $d_2: 6x-2y-8=0$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases} d_1: 3x-2y-6=0 \rightarrow \vec{n}_1=(3;-2) \\ d_2: 6x-2y-8=0 \rightarrow \vec{n}_2=(6;-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{6}\neq\dfrac{-2}{-2} \\ \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\neq 0 \end{cases} \longrightarrow d_1, d_2$ cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 80: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1$ và $d_2: 3x+4y-10=0$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn C.

$\begin{cases} d_1: \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1 \rightarrow \vec{n}_1=\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{4}\right) \\ d_2: 3x+4y-10=0 \rightarrow \vec{n}_2=(3;4) \end{cases} \rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \rightarrow d_1 \perp d_2.$

Câu 81: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-2-2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2-2t' \\ y=-8+4t' \end{cases}$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn A.

$\left.\begin{array}{l} d_1: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-2-2t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_1=(1;-2) \\ d_2: \begin{cases} x=2-2t' \\ y=-8+4t' \end{cases} \rightarrow B(2;-8)\in d_2, \vec{u}_2=(-2;4) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{-2}=\dfrac{-2}{4} \\ B\in d_1 \leftrightarrow t=3 \end{cases} \rightarrow d_1 \equiv d_2.$

Câu 82: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\y=2-6t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2-2t'\\y=-8+4t'\end{cases}$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn B.

$$\left.\begin{array}{l}d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\y=2-6t\end{cases}\to A(-3;2)\in d_1,\ \vec{u}_1=(2;-3)\\ d_2:\begin{cases}x=1-2t'\\y=4+3t'\end{cases}\to \vec{u}_2=(-2;3)\end{array}\right\}\to\begin{cases}\dfrac{2}{-2}=\dfrac{-3}{3}\\A\notin d_2\end{cases}\to d_1\parallel d_2.$$

Câu 83: Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1:\begin{cases}x=3+\dfrac{3}{2}t\\y=-1+\dfrac{4}{3}t\end{cases}\text{ và }\Delta_2:\begin{cases}x=\dfrac{9}{2}+9t'\\y=\dfrac{1}{3}+8t'\end{cases}.$$

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn A.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1:\begin{cases}x=3+\dfrac{3}{2}t\\y=-1+\dfrac{4}{3}t\end{cases}\to A(3;-1)\in\Delta_1,\ \vec{u}_1=\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{4}{3}\right)\\ \Delta_2:\begin{cases}x=\dfrac{9}{2}+9t'\\y=\dfrac{1}{3}+8t'\end{cases}\to\vec{u}_2=(9;8)\end{array}\right\}\to\begin{cases}\dfrac{\frac{3}{2}}{9}=\dfrac{\frac{4}{3}}{8}\\A\in\Delta_2\leftrightarrow t'=-\dfrac{1}{6}\end{cases}\to\Delta_1\equiv\Delta_2.$$

Câu 84: Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$\Delta_1:7x+2y-1=0$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=4+t\\y=1-5t\end{cases}$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn D.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1: 7x+2y-1=0 \to \vec{n}_1=(7;2)\\ \Delta_2: \begin{cases}x=4+t\\ y=1-5t\end{cases} \to \vec{u}_2=(1;-5) \to \vec{n}_2=(5;1)\end{array}\right\} \to \begin{cases}\dfrac{7}{5} \neq \dfrac{2}{1}\\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0\end{cases} \to \Delta_1, \Delta_2$$ cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 85: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases}x=4+2t\\ y=1-3t\end{cases} \text{ và } d_2: 3x+2y-14=0.$$

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn A.

$$\left.\begin{array}{l}d_1: \begin{cases}x=4+2t\\ y=1-3t\end{cases} \to A(4;1) \in d_1, \vec{u}_1=(2;-3)\\ d_2: 3x+2y-14=0 \to \vec{n}_2=(3;2) \to \vec{u}_2=(2;-3)\end{array}\right\} \to \begin{cases}\vec{u}_1=\vec{u}_2\\ A \in d_2\end{cases} \to d_1 \equiv d_2.$$

Câu 86: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases}x=4+2t\\ y=1-5t\end{cases}$ và $d_2: 5x+2y-14=0$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn B.

$$\left.\begin{array}{l}d_1: \begin{cases}x=4+2t\\ y=1-5t\end{cases} \to A(4;1) \in d_1, \vec{u}_1=(2;-5)\\ d_2: 5x+2y-14=0 \to \vec{n}_2=(5;2) \to \vec{u}_2=(2;-5)\end{array}\right\} \to \begin{cases}\vec{u}_1=\vec{u}_2\\ A \notin d_2\end{cases} \to d_1 \parallel d_2.$$

Câu 87: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases}x=2+3t\\ y=-2t\end{cases}$ và $d_2: \begin{cases}x=2t'\\ y=-2+3t'\end{cases}$.

A. Trùng nhau. **B.** Song song.

C. Vuông góc với nhau. **D.** Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn C.

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\begin{cases}x=2+3t\\ y=-2t\end{cases}\to \vec{u}_1=(3;-2)\\ d_2:\begin{cases}x=2t'\\ y=-2+3t'\end{cases}\to \vec{u}_2=(2;3)\end{array}\right\}\to \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0\to d_1\perp d_2.$$

Câu 88: Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=-3+2t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=5-t_1\\ y=-7+3t_1\end{cases}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. d_1 song song d_2.

B. d_1 và d_2 cắt nhau tại $M(1;-3)$.

C. d_1 trùng với d_2.

D. d_1 và d_2 cắt nhau tại $M(3;-1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=-3+2t\end{cases}\to d_1:2x-y-7=0\\ d_2:\begin{cases}x=5-t_1\\ y=-7+3t_1\end{cases}\to d_2:3x+y-8=0\end{array}\right\}$$

$$\to\begin{cases}d_1:2x-y-7=0\\ d_2:3x+y-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-1\end{cases}\to d_1\cap d_2=M(3;-1).$$

Câu 89: Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1-t\\ y=5+3t\end{cases}$ và $d_2:\ x-2y+1=0$.

Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. d_1 song song d_2.

B. d_2 song song với trục Ox.

C. d_2 cắt trục Oy tại $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

D. d_1 và d_2 cắt nhau tại $M\left(\frac{1}{8};\frac{3}{8}\right)$.

Lời giải

Chọn C.

$$d_1:\begin{cases}x=1-t\\ y=5+3t\end{cases}\to d_1:3x+y-8=0\to\begin{cases}d_1:3x+y-8=0\\ d_2:\ x-2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{15}{7}\\ y=\dfrac{11}{7}\end{cases}\to \text{A, B, D sai.}$$

$$Oy\cap d_2:\ x-2y+1=0\leftrightarrow x=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}\to d_2\cap Oy=M\left(0;\frac{1}{2}\right).$$

Câu 90: Cho bốn điểm $A(4;-3)$, $B(5;1)$, $C(2;3)$ và $D(-2;2)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn D.

$\begin{cases}\vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(1;4)\\ \vec{u}_{CD}=\overrightarrow{CD}=(-4;-1)\end{cases}\to\begin{cases}\dfrac{1}{-4}\neq\dfrac{4}{-1}\\ \vec{u}_{AB}\cdot\vec{u}_{CD}\neq 0\end{cases}\to AB,\, CD$ cắt nhau nhưng không vuông góc.

Câu 91: Cho bốn điểm $A(1;2)$, $B(4;0)$, $C(1;-3)$ và $D(7;-7)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD.

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases}A(1;2)\in AB,\,\vec{u}_{AB}=\overrightarrow{AB}=(3;-2)\to\vec{n}_{AB}=(2;3)\to AB:2x+3y-8=8\\ C(1;-3)\in CD,\,\vec{u}_{CD}=\overrightarrow{CD}=(6;-4)\end{cases}\to\begin{cases}\dfrac{3}{6}=\dfrac{-2}{-4}\\ C\notin AB\end{cases}$ nên $AB\parallel CD.$

Câu 92: Các cặp đường thẳng nào sau đây vuông góc với nhau?

A. $d_1:\begin{cases}x=t\\ y=-1-2t\end{cases}$ và $d_2:2x+y-1=0.$

B. $d_1:x-2=0$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}.$

C. $d_1:2x-y+3=0$ và $d_2:x-2y+1=0.$

D. $d_1:2x-y+3=0$ và $d_2:4x-2y+1=0.$

Lời giải

Chọn B.

(i) $\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=t\\ y=-1-2t\end{cases}\to\vec{u}_1=(1;-2)\\ d_2:2x+y-1=0\to\vec{n}_2=(2;1)\to\vec{u}_2=(1;-2)\end{cases}\to\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\neq 0\to$ loại A.

(ii) $\begin{cases}d_1:x-2=0\to\vec{n}_1=(1;0)\\ d_2:d_2:\begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}.\to\vec{u}_2=(1;0)\to\vec{n}_2=(0;1)\end{cases}\to\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\to d_1\perp d_2.$

Tương tự, kiểm tra và loại các đáp án C, D.

Câu 93: Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $2x+3y-1=0$?

A. $2x+3y+1=0$.

B. $x-2y+5=0$.

C. $2x-3y+3=0$.

D. $4x-6y-2=0$.

Lời giải

Chọn A.

Xét đáp án A: $\begin{cases} d: 2x+3y-1=0 \\ d_A: 2x+3y+1=0 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{2}=\frac{3}{3}\neq\frac{-1}{-1} \rightarrow d \parallel d_A.$

Để ý rằng một đường thẳng song song với $2x+3y-1=0$ sẽ có dạng $2x+3y+c=0\ (c\neq -1)$.
Do đó kiểm tra chỉ thấy có đáp án A thỏa mãn, các đáp án còn lại không thỏa mãn.

Câu 94: Đường thẳng nào sau đây không có điểm chung với đường thẳng $x-3y+4=0$?

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Kí hiệu $d: x-3y+4=0 \rightarrow \vec{n}_d=(1;-3)$.

(i) Xét đáp án A: $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_1=(1;3) \rightarrow \vec{n}_1, \vec{n}$ không cùng phương nên loại A.

(ii) Xét đáp án B: $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2=(3;1) \rightarrow \vec{n}_2, \vec{n}$ không cùng phương nên loại B.

(iii) Xét đáp án C: $d_3: \begin{cases} x=1-3t \\ y=2+t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_3=(1;3) \rightarrow \vec{n}_3, \vec{n}$ không cùng phương nên loại C.

(iv) Xét đáp án D: $d_4: \begin{cases} x=1-3t \\ y=2-t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(1;2)\in d_4 \\ \vec{n}_4=(1;-3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_4=\vec{n} \\ M\notin d \end{cases} \rightarrow d \parallel d_4.$

Câu 95: Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $4x-3y+1=0$?

A. $\begin{cases} x=4t \\ y=-3-3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=4t \\ y=-3+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-4t \\ y=-3-3t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=8t \\ y=-3+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Kí hiệu $d: 4x-3y+1=0 \rightarrow \vec{n}_d=(4;-3)$.

(i) Xét đáp án A: $d_1: \begin{cases} x=4t \\ y=-3-3t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_1=(3;4) \rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_d=0$

(ii) Tương tự kiểm tra và loại các đáp án B, C, D.

Câu 96: Đường thẳng nào sau đây có vô số điểm chung với đường thẳng $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases}$?

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1+2018t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1+2018t \\ y=-1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

Hai đường thẳng có hai điểm chung thì chúng trùng nhau. Như vậy bài toán trở thành tìm đường thẳng trùng với đường thẳng đã cho lúc đầu. Ta có

$d:\begin{cases}x=t\\y=-1\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}A(0;-1)\in d\\\vec{u}_d=(1;0)\end{cases}\longrightarrow$ kiểm tra đường thẳng nào chứa điểm $A(0;-1)$ và có VTCP cùng phương với $\vec{u}_d\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 97: Đường thẳng nào sau đây có đúng một điểm chung với đường thẳng $\begin{cases}x=-2+3t\\y=5-7t\end{cases}$?

A. $7x+3y-1=0.$ **B.** $7x+3y+1=0.$

C. $3x-7y+2018=0.$ **D.** $7x+3y+2018=0.$

Lời giải

Chọn C.

Ta cần tìm đường thẳng cắt $d:\begin{cases}x=-2+3t\\y=5-7t\end{cases}\longrightarrow d:7x+3y-1=0.$

$d_1:7x+3y-1=0\longrightarrow d_1\equiv d\longrightarrow$ loại A.

$d_2:7x+3y+1=0$ & $d_3:7x+3y+2018=0\longrightarrow d_2,\ d_3\parallel d\longrightarrow$ loại B, D.

Câu 98: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:3x+4y+10=0$ và $d_2:(2m-1)x+m^2y+10=0$ trùng nhau?

A. $m\pm 2$. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}d_2:(2m-1)x+m^2y+10=0\\d_1:3x+4y+10=0\end{cases}\xrightarrow{d_1\equiv d_2}\frac{2m-1}{3}=\frac{m^2}{4}=\frac{10}{10}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2m-1=3\\m^2=4\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$ **Chọn C.**

Câu 99: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng có phương trình $d_1:mx+(m-1)y+2m=0$ và $d_2:2x+y-1=0$. Nếu d_1 song song d_2 thì:

A. $m=2.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=-2.$ **D.** $m=1.$

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}d_1:mx+(m-1)y+2m=0\\d_2:2x+y-1=0\end{cases}\xrightarrow{d_1\parallel d_2}\frac{m}{2}=\frac{m-1}{1}\neq\frac{2m}{-1}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\neq 2\\m=2m-2\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$ **Chọn A.**

Câu 100: Tìm m để hai đường thẳng $d_1: 2x-3y+4=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2-3t\\y=1-4mt\end{cases}$ cắt nhau.

A. $m\neq -\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m\neq \dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}d_1: 2x-3y+4=0\\ d_2:\begin{cases}x=2-3t\\y=1-4mt\end{cases}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=(2;-3)\\ \vec{n}_2=(4m;-3)\end{cases}\xrightarrow{d_1\cap d_2=M}\frac{4m}{2}\neq\frac{-3}{-3}\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}.$$

Câu 101: Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng

$d_1: 2x-4y+1=0$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+at\\y=3-(a+1)t\end{cases}$ vuông góc với nhau?

A. $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$\begin{cases}d_1: 2x-4y+1=0\\ d_2:\begin{cases}x=-1+at\\y=3-(a+1)t\end{cases}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\vec{n}_1=(1;-2)\\ \vec{n}_2=(a+1;a)\end{cases}\xrightarrow{d_1\perp d_2}\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0\Leftrightarrow a+1-2a=0\Leftrightarrow a=1.$$

Câu 102: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2+mt\\y=-6+(1-2m)t\end{cases}$ trùng nhau?

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m\neq\pm 2$.

Lời giải

Chọn C.

$$\left.\begin{array}{l}d_1:\begin{cases}x=-2+2t\\y=-3t\end{cases}\to\vec{u}_1=(2;-3)\\ d_2:\begin{cases}x=2+mt\\y=-6+(1-2m)t\end{cases}\to A(2;-6)\in d_2,\ \vec{u}_2=(m;1-2m)\end{array}\right\}\xrightarrow{d_1\equiv d_2}\begin{cases}A\in d_1\\ \dfrac{m}{2}=\dfrac{1-2m}{-3}\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

Câu 103: Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+mt\end{cases}$ và $d_2: 4x-3y+m=0$ trùng nhau.

A. $m=-3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn D.

$$\left.\begin{array}{l} d_1:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+mt \end{cases}\rightarrow A(2;1)\in d_1,\vec{u}_1=(2;m) \\ d_2:4x-3y+m=0\rightarrow \vec{u}_2=(3;4) \end{array}\right\}\xrightarrow{d_1\equiv d_2}\begin{cases} A\in d_2 \\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{m}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 5+m=0 \\ m=\dfrac{8}{3} \end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Câu 104: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:2x+y+4-m=0$ và $d_2:(m+3)x+y+2m-1=0$ song song?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Chọn B.

Với $m=4\longrightarrow\begin{cases} d_1:2x+y=0 \\ d_2:7x+y+7=0 \end{cases}\longrightarrow d_1\cap d_2\neq\varnothing\longrightarrow$ loại $m=4$.

Với $m\neq 4$ thì

$$\begin{cases} d_1:2x+y+4-m=0 \\ d_2:(m+3)x+y-2m-1=0 \end{cases}\xrightarrow{d_1\parallel d_2}\frac{m+3}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-2m-1}{4-m}\Leftrightarrow\begin{cases} m=-1 \\ m\neq -5 \end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$$

Câu 105: Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng

$\Delta_1:2x-3my+10=0$ và $\Delta_2:mx+4y+1=0$ cắt nhau.

A. $1<m<10$. **B.** $m=1$. **C.** Không có m. **D.** Với mọi m.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases} \Delta_1:2x-3my+10=0 \\ \Delta_2:mx+4y+1=0 \end{cases}\rightarrow\left[\begin{array}{l} m=0\rightarrow\begin{cases} \Delta_1:x+5=0 \\ \Delta_2:4y+1=0 \end{cases}\rightarrow m=0\text{ (thoả mãn)} \\ m\neq 0\xrightarrow{\Delta_1\cap\Delta_2=M}\dfrac{2}{m}\neq\dfrac{-3m}{4}\Leftrightarrow\forall m\neq 0 \end{array}\right..$$

Câu 106: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$\Delta_1:mx+y-19=0$ và $\Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0$ vuông góc?

A. Với mọi m. **B.** $m=2$. **C.** Không có m. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có : $\begin{cases} \Delta_1:mx+y-19=0\rightarrow\vec{n}_1=(m;1) \\ \Delta_2:(m-1)x+(m+1)y-20=0\rightarrow\vec{n}_2=(m-1;m+1) \end{cases}$

$\xrightarrow{\Delta_1\perp\Delta_1}m(m-1)+1(m+1)=0\Leftrightarrow m\in\varnothing.$ **Chọn C.**

Câu 107: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1:3mx+2y+6=0$ và $d_2:(m^2+2)x+2my+6=0$ cắt nhau?

A. $m \neq -1$. **B.** $m \neq 1$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m \neq 1$ và $m \neq -1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} d_1: 3mx + 2y + 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (3m;2) \\ d_2: (m^2+2)x + 2my + 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (m^2+2;2m) \end{cases}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \rightarrow \begin{cases} d_1: y+3=0 \\ d_2: x+y+3=0 \end{cases} \rightarrow m = 0 (\text{thoả mãn}) \\ m \neq 0 \xrightarrow{d_1 \cap d_2 = M} \dfrac{m^2+2}{3m} \neq \dfrac{2m}{2} \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \end{array}\right. .$$

Câu 108: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 2x - 3y - 10 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$ vuông góc?

A. $m = \dfrac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{9}{8}$. **C.** $m = -\dfrac{9}{8}$. **D.** $m = -\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} d_1: 2x - 3y - 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (2;-3) \\ d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2 = (4m;-3) \end{cases} \xrightarrow{d_1 \perp d_2} 2.4m + (-3).(-3) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}.$$

Câu 109: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 4x - 3y + 3m = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + mt \end{cases}$ trùng nhau?

A. $m = -\dfrac{8}{3}$. **B.** $m = \dfrac{8}{3}$. **C.** $m = -\dfrac{4}{3}$. **D.** $m = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} d_1: 4x - 3y + 3m = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (4;-3) \\ d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + mt \end{cases} \rightarrow A(1;4) \in d_2, \vec{n}_2 = (m;-2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d_1 \equiv d_2} \begin{cases} A \in d_1 \\ \dfrac{m}{4} = \dfrac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 8 = 0 \\ m = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}.$$

Câu 110: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: 3mx + 2y - 6 = 0$ và $d_2: (m^2+2)x + 2my - 3 = 0$ song song?

A. $m = 1; m = -1$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} d_1: 3mx+2y-6=0 \to \vec{n}_1=(3m;2) \\ d_2: (m^2+2)x+2my-3=0 \to \vec{n}_2=(m^2+2;2m) \end{cases}$

$\to \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: y-3=0 \\ d_2: 2x+2y-3=0 \end{cases} \to m=0 \,(\text{không thoả mãn}) \\ m\neq 0 \xrightarrow{d_1 \| d_2} \dfrac{m^2+2}{3m}=\dfrac{2m}{2}\neq\dfrac{-3}{-6} \Leftrightarrow m=\pm 1 \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 111: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases} \text{ và } d_2: mx+2y-14=0 \text{ song song?}$$

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} d_1: \begin{cases} x=8-(m+1)t \\ y=10+t \end{cases} \to A(8;10)\in d_1,\ \vec{n}_1=(1;m+1) \\ d_2: mx+2y-14=0 \to \vec{n}_2=(m;2) \end{cases}$

$\xrightarrow{d_1 \| d_2} \begin{cases} A\notin d_2 \\ \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} \vec{n}_1=(1;1) \\ \vec{n}_2=(0;2) \end{cases} \to \text{không thoả mãn} \\ m\neq 0 \to \dfrac{1}{m}=\dfrac{m+1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m+6\neq 0 \\ m\neq 0 \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Câu 112: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$d_1: (m-3)x+2y+m^2-1=0$ và $d_2: -x+my+m^2-2m+1=0$ cắt nhau?

A. $m\neq 1$. **B.** $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} d_1: (m-3)x+2y+m^2-1=0 \\ d_2: -x+my+m^2-2m+1=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{d_1\cap d_2=M} \left[\begin{array}{l} m=0 \to \begin{cases} d_1: -3x+2y-1=0 \\ d_2: -x+1=0 \end{cases} \to \text{thoả mãn} \\ m\neq 0 \to \dfrac{m-3}{-1}\neq\dfrac{2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Câu 113: Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$$\Delta_1:\begin{cases}x=m+2t\\ y=1+\left(m^2+1\right)t\end{cases} \text{ và } \Delta_2:\begin{cases}x=1+mt\\ y=m+t\end{cases} \text{ trùng nhau?}$$

A. Không có m. **B.** $m=\frac{4}{3}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}\Delta_1:\begin{cases}x=m+2t\\ y=1+\left(m^2+1\right)t\end{cases}\to A(m;1)\in d_1,\ \vec{u}_1=\left(2;m^2+1\right)\\ \Delta_2:\begin{cases}x=1+mt\\ y=m+t\end{cases}\to \vec{u}_2=(m;1)\end{cases}\xrightarrow{d_1\equiv d_2}\begin{cases}A\in d_2\\ \dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{m^2+1}\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m=1+mt\\ 1=m+t\\ m^3+m-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1+m(1-m)\\ (m-1)\left(m^2+m+2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1=0\\ m-1=0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.$$

Câu 114: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta:5x+2y-10=0$ và trục hoành.

A. $(0;2)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(2;0)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

Chọn C.

$$Ox\cap\Delta:5x+2y-10=0\longrightarrow\begin{cases}y=0\\ 5x+2y-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}.$$

Câu 115: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d:\begin{cases}x=2t\\ y=-5+15t\end{cases}$ và trục tung.

A. $\left(\frac{2}{3};0\right)$. **B.** $(0;-5)$. **C.** $(0;5)$. **D.** $(-5;0)$.

Lời giải

Chọn A.

$$Oy\cap d:\begin{cases}x=2t\\ y=-5+15t\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}y=0\\ x=2t\\ y=-5+15t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{3}\\ x=\dfrac{2}{3},\ y=0\end{cases}.$$

Câu 116: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x-3y+16=0$ và $x+10=0$.

A. $(-10;-18)$. **B.** $(10;18)$. **C.** $(-10;18)$. **D.** $(10;-18)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}d_1:7x-3y+16=0\\ d_2:x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-10\\ y=-18\end{cases}.$$

Câu 117: Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng

$d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}$.

A. $(1;7)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(5;1)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=-3+4t\\ y=2+5t\end{cases}\\ d_2:\begin{cases}x=1+4t'\\ y=7-5t'\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3+4t=1+4t'\\ 2+5t=7-5t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-t'=1\\ t+t'=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\xrightarrow{\to d_1}\begin{cases}x=1\\ y=7\end{cases}.\\ t'=0\end{cases}$$

Câu 118: Cho hai đường thẳng $d_1:2x+3y-19=0$ và $d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}$. Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

A. $(2;5)$. **B.** $(10;25)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $(5;2)$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}d_1:2x+3y-19=0\\ d_2:\begin{cases}x=22+2t\\ y=55+5t\end{cases}\end{cases}\xrightarrow{d_1\cap d_2}2(22+2t)+3(55+5t)-19=0\Leftrightarrow t=-10\to\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}.$$

Câu 119: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;0)$, $B(1;4)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và d.

A. $(2;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;-2)$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases}A(-2;0),\ B(1;4)\to AB:4x-3y+8=0\\ d:\begin{cases}x=-t\\ y=2-t\end{cases}\to d:x-y+2=0\end{cases}\xrightarrow{AB\cap d}\begin{cases}4x-3y+8=0\\ x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}.$$

Câu 120: Xác định a để hai đường thẳng $d_1:ax+3y-4=0$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3+3t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

A. $a=1$. **B.** $a=-1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-2$.

Lời giải

Chọn D.

$$Ox\cap d_2\leftrightarrow\begin{cases}x=-1+t\\y=3+3t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}\to Ox\cap d_2=A(-2;0)\in d_1$$

$$\to -2a-4=0\Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 121: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $d_1: 4x+3my-m^2=0$ và $d_2:\begin{cases}x=2+t\\y=6+2t\end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

A. $m=0$ hoặc $m=-6$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$.

C. $m=0$ hoặc $m=-2$. **D.** $m=0$ hoặc $m=6$.

Lời giải

Chọn D.

$$Oy\cap d_2\leftrightarrow\begin{cases}x=2+t=0\\y=6+2t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\to Oy\cap d_2=A(0;2)\in d_1$$

$$\Leftrightarrow 6m-m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=6\end{array}\right..$$

Câu 122: Cho ba đường thẳng $d_1: 3x-2y+5=0$, $d_2: 2x+4y-7=0$, $d_3: 3x+4y-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2, và song song với d_3 là:

A. $24x+32y-53=0$. **B.** $24x+32y+53=0$. **C.** $24x-32y+53=0$. **D.** $24x-32y-53=0$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}d_1: 3x-2y+5=0\\d_2: 2x+4y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{8}\\y=\dfrac{31}{16}\end{cases}\to d_1\cap d_2=A\left(-\frac{3}{8};\frac{31}{16}\right).$$ Ta có

$$\begin{cases}A\in d\\d\parallel d_3: 3x+4y-1=0\end{cases}\to\begin{cases}A\in d\\d: 3x+4y+c=0\ (c\neq -1)\end{cases}\to -\frac{9}{8}+\frac{31}{4}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{53}{8}.$$

Vậy $d: 3x+4y-\dfrac{53}{8}=0\Leftrightarrow d_3: 24x+32y-53=0.$

Câu 123: Lập phương trình của đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x+3y-1=0$, $d_2: x-3y-5=0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3: 2x-y+7=0$.

A. $3x+6y-5=0$. **B.** $6x+12y-5=0$. **C.** $6x+12y+10=0$. **D.** $x+2y+10=0$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}d_1: x+3y-1=0\\d_2: x-3y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}\to d_1\cap d_2=A\left(3;-\frac{2}{3}\right).$$ Ta có

$$\begin{cases} A \in d \\ d \perp d_3 : 2x - y + 7 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A \in d \\ d : x + 2y + c = 0 \end{cases} \to 3 + 2.\left(-\frac{2}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{5}{3}.$$

Vậy $d : x + 2y - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow d : 3x + 6y - 5 = 0.$

Câu 124: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1 : 3x - 4y + 15 = 0$, $d_2 : 5x + 2y - 1 = 0$ và $d_3 : mx - (2m - 1)y + 9m - 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

A. $m = \frac{1}{5}$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = -\frac{1}{5}$. **D.** $m = 5$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\begin{cases} d_1 : 3x - 4y + 15 = 0 \\ d_2 : 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d_3$

$$\to -m - 6m + 3 + 9m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 125: Nếu ba đường thẳng

$$d_1 :\ 2x + y - 4 = 0,\ d_2 : 5x - 2y + 3 = 0 \text{ và } d_3 : mx + 3y - 2 = 0$$

đồng quy thì m nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{12}{5}$. **B.** $-\frac{12}{5}$. **C.** 12. **D.** -12.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases} d_1 :\ 2x + y - 4 = 0 \\ d_2 : 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{26}{9} \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A\left(\frac{5}{9};\frac{26}{9}\right) \in d_3$$

$$\to \frac{5m}{9} + \frac{26}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -12.$$

Câu 126: Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1 : 3x - 4y + 15 = 0$, $d_2 : 5x + 2y - 1 = 0$ và $d_3 : mx - 4y + 15 = 0$ đồng quy?

A. $m = -5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} d_1 : 3x - 4y + 15 = 0 \\ d_2 : 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(-1;3) \in d$$

$$\to -m - 12 + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 127: Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d_2 : x + 2y + 1 = 0$ và $d_3 : mx - y - 7 = 0$

đồng quy?

A. $m=-6$. **B.** $m=6$. **C.** $m=-5$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} d_1: 2x+y-1=0 \\ d_2: x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;-1) \in d_3 \Leftrightarrow m+1-7=0 \Leftrightarrow m=6.$$

Câu 128: Đường thẳng $d: 51x-30y+11=0$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$. **B.** $N\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $P\left(1;\frac{3}{4}\right)$. **D.** $Q\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $f(x;y)=51x-30y+11 \longrightarrow \begin{cases} f(M)=f\left(-1;-\frac{4}{3}\right)=0 \to M \in d \\ f(N)=f\left(-1;\frac{4}{3}\right)=-80 \neq 0 \to N \notin d \\ f(P) \neq 0 \\ f(Q) \neq 0 \end{cases}$.

Câu 129: Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \end{cases}$?

A. $M(2;-1)$. **B.** $N(-7;0)$. **C.** $P(3;5)$. **D.** $Q(3;\ 2)$.

Lời giải

Chọn D.

$$M(2;-1) \xrightarrow{x=2,\, y=-1 \to d} \begin{cases} 2=1+2t \\ -1=3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=4 \end{cases} (VN) \to M \notin d.$$

$$N(-7;0) \xrightarrow{x=-7,\, y=0 \to d} \begin{cases} -7=1+2t \\ 0=3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-4 \\ t=3 \end{cases} (VN) \to N \notin d.$$

$$P(3;5) \xrightarrow{x=3,\, y=5 \to d} \begin{cases} 3=1+2t \\ 5=3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} (VN) \to P \notin d.$$

$$Q(3;\ 2) \xrightarrow{x=3,\, y=2 \in d} \begin{cases} 3=1+2t \\ 2=3-t \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \to Q \in d.$$

Câu 130: Đường thẳng $12x-7y+5=0$ **không** đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(1;1)$. **B.** $N(-1;-1)$. **C.** $P\left(-\frac{5}{12};0\right)$. **D.** $Q\left(1;\frac{17}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $12x-7y+5=0$.

Đặt $f(x;y)=12x-7y+5 \longrightarrow \begin{cases} f(M(1;1))=10\neq 0 \to M\notin d \\ f(N(-1;-1))=0 \to N\in d \\ f(P)=0,\ f(Q)=0 \end{cases}$.

Câu 131: Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-5t \end{cases}$?

A. $M(-1;3)$. **B.** $N(1;-2)$. **C.** $P(3;1)$. **D.** $Q(-3;8)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $d:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3-5t \end{cases}$. $M(-1;3) \xrightarrow{x=-1,\,y=3\to d} \begin{cases} -1=-1+2t \\ 3=3-5t \end{cases} \Leftrightarrow t=0 \to M\in d$.

$N(1;-2) \xrightarrow{x=1,\,y=-2\to d} \begin{cases} 1=-1+2t \\ -2=3-5t \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \to N\in d$.

$P(3;1) \xrightarrow{x=3,\,y=1\to d} \begin{cases} 3=-1+2t \\ 1=3-5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\dfrac{2}{5} \end{cases} \to P\notin d$.

$Q(-3;8) \xrightarrow{x=-3,\,y=8\to d} \begin{cases} -3=-1+2t \\ 8=3-5t \end{cases} \Leftrightarrow t=-1 \to Q\in d$.

Câu 132: Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$$d_1: 2x-y-10=0 \text{ và } d_2: x-3y+9=0.$$

A. 30^{o}. **B.** 45^{o}. **C.** 60^{o}. **D.** 135^{o}.

Lời giải

Chọn B.

Ta có

$\begin{cases} d_1: 2x-y-10=0 \to \vec{n}_1=(2;-1) \\ d_2: x-3y+9=0 \to \vec{n}_2=(1;-3) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \dfrac{|2.1+(-1).(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\to \varphi = 45^\circ$.

Câu 133: Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$$d_1: 7x-3y+6=0 \text{ và } d_2: 2x-5y-4=0.$$

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 7x-3y+6=0 \to \vec{n}_1=(7;-3) \\ d_2: 2x-5y-4=0 \to \vec{n}_2=(2;-5) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|14+15|}{\sqrt{49+9}.\sqrt{4+25}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 134: Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2: y-6=0$.

A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 2x+2\sqrt{3}y+5=0 \to \vec{n}_1=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: y-6=0. \to \vec{n}_2=(0;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{0+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \varphi = 30^\circ.$$

Câu 135: Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x+\sqrt{3}y=0$ và $d_2: x+10=0$.

A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} d_1: x+\sqrt{3}y=0 \to \vec{n}_1=(1;\sqrt{3}) \\ d_2: x+10=0 \to \vec{n}_2=(1;0) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1+0|}{\sqrt{1+3}.\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

$\to \varphi = 60^\circ$.

Câu 136: Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng

$$d_1: 6x-5y+15=0 \text{ và } d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases}.$$

A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases} d_1: 6x-5y+15=0 \to \vec{n}_1=(6;-5) \\ d_2: \begin{cases} x=10-6t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n}_2=(5;6) \end{cases} \to \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \varphi=90^\circ.$$

Câu 137: Cho đường thẳng $d_1: x+2y-7=0$ và $d_2: 2x-4y+9=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} d_1: x+2y-7=0 \to \vec{n}_1=(1;2) \\ d_2: 2x-4y+9=0 \to \vec{n}_2=(1;-2) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1-4|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+4}} = \frac{3}{5}.$$

Câu 138: Cho đường thẳng $d_1: x+2y-2=0$ và $d_2: x-y=0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} d_1: x+2y-2=0 \to \vec{n}_1=(1;2) \\ d_2: x-y=0 \to \vec{n}_2=(1;-1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|1-2|}{\sqrt{1+4}.\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 139: Cho đường thẳng $d_1: 10x+5y-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} d_1: 10x+5y-1=0 \to \vec{n}_1=(2;1) \\ d_2: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \end{cases} \to \vec{n}_2=(1;1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|2+1|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Câu 140: Cho đường thẳng $d_1: 3x+4y+1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{56}{65}$. **B.** $-\frac{33}{65}$. **C.** $\frac{6}{65}$. **D.** $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn D.

$$\begin{cases} d_1: 3x+4y+1=0 \to \vec{n}_1=(3;4) \\ d_2: \begin{cases} x=15+12t \\ y=1+5t \end{cases} \to \vec{n}_2=(5;-12) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|15-48|}{\sqrt{9+16}.\sqrt{25+144}} = \frac{33}{65}.$$

Câu 141: Cho đường thẳng $d_1: 2x+3y+m^2-1=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2m-1+t \\ y=m^4-1+3t \end{cases}$.

Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

A. $\frac{3}{\sqrt{130}}$. **B.** $\frac{2}{5\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} d_1: 2x+3y+m^2-1=0 \to \vec{n}_1=(2;3) \\ d_2: \begin{cases} x=2m-1+t \\ y=m^4-1+3t \end{cases} \to \vec{n}_2=(3;-1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos\varphi = \frac{|6-3|}{\sqrt{4+9}.\sqrt{9+1}} = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

Câu 142: Cho hai đường thẳng $d_1: 3x+4y+12=0$ và $d_2: \begin{cases} x=2+at \\ y=1-2t \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để d_1 và d_2 hợp với nhau một góc bằng 45^0.

A. $a=\frac{2}{7}$ hoặc $a=-14$. **B.** $a=\frac{7}{2}$ hoặc $a=3$. **C.** $a=5$ hoặc $a=-14$. **D.** $a=\frac{2}{7}$ hoặc $a=5$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$\begin{cases} d_1: 3x+4y+12=0 \to \vec{n}_1=(3;4) \\ d_2: \begin{cases} x=2+at \\ y=1-2t \end{cases} \to \vec{n}_2=(2;a) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)=45^\circ} \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \cos\varphi = \frac{|6+4a|}{\sqrt{25}.\sqrt{a^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow 25(a^2+4) = 8(4a^2+12a+9) \Leftrightarrow 7a^2+96a-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-14 \\ a=\frac{2}{7} \end{array}\right..$$

Câu 143: Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$ và $d_2: x-2y+1=0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3: y-1=0$ một góc 45^0 có phương trình:

A. $\Delta: 2x+y=0$ hoặc $\Delta: x-y-1=0$. **B.** $\Delta: x+2y=0$ hoặc $\Delta: x-4y=0$.

C. $\Delta: x-y=0$ hoặc $\Delta: x+y-2=0$. **D.** $\Delta: 2x+1=0$ hoặc $\Delta: x-3y=0$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases} d_1: 2x+y-3=0 \\ d_2: x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \to d_1 \cap d_2 = A(1;1) \in \Delta.$$

Ta có $d_3: y-1=0 \to \vec{n}_3=(0;1)$, gọi $\vec{n}_\Delta=(a;b)$, $\varphi=(\Delta;d_3)$. Khi đó

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{0+1}} \Leftrightarrow a^2+b^2=2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \to a=b=1 \to \Delta: x+y-2=0 \\ a=-b \to a=1, b=-1 \to \Delta: x-y=0 \end{array}\right..$$

Câu 144: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2;0)$ và tạo với trục hoành một góc $45°$?

A. Có duy nhất. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B.

Cho đường thẳng d và một điểm $A.$ Khi đó.

(i) Có duy nhất một đường thẳng đi qua A song song hoặc trùng hoặc vuông góc với d.

(ii) Có đúng hai đường thẳng đi qua A và tạo với d một góc $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Câu 145: Đường thẳng Δ tạo với đường thẳng $d: x+2y-6=0$ một góc 45^0. Tìm hệ số góc k của đường thẳng Δ.

A. $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3.$ **B.** $k=\frac{1}{3}$ hoặc $k=3.$ **C.** $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=-3.$ **D.** $k=-\frac{1}{3}$ hoặc $k=3.$

Lời giải

Chọn A.

$d: x+2y-6=0 \to \vec{n}_d=(1;2),$ gọi $\vec{n}_\Delta=(a;b) \to k_\Delta=-\frac{a}{b}.$ Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ=\frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5\left(a^2+b^2\right)=2a^2+8ab+8b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3}b \to k_\Delta=\frac{1}{3} \\ a=3b \to k_\Delta=-3 \end{array}\right..$$

Câu 146: Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số k để đường thẳng $d: y=kx$ tạo với đường thẳng $\Delta: y=x$ một góc 60^0. Tổng hai giá trị của k bằng:

A. $-8.$ **B.** $-4.$ **C.** $-1.$ **D.** $-1.$

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} d: y=kx \to \vec{n}_d=(k;-1) \\ \Delta: y=x \to \vec{n}_\Delta=(1;-1) \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{2}=\cos 60^\circ=\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}.\sqrt{2}} \Leftrightarrow k^2+1=2k^2+4k+2$$

$$\Leftrightarrow k^2+4k+1=0 \xrightarrow{\text{sol}: k=k_1,\, k=k_2} k_1+k_2=-4.$$

Câu 147: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ và hai điểm $M\left(x_m;y_m\right)$, $N\left(x_n;y_n\right)$ không thuộc Δ. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. M, N khác phía so với Δ khi $(ax_m+by_m+c).(ax_n+by_n+c)>0.$

B. M, N cùng phía so với Δ khi $(ax_m+by_m+c).(ax_n+by_n+c)\geq 0.$

C. M, N khác phía so với Δ khi $(ax_m+by_m+c).(ax_n+by_n+c)\leq 0.$

D. M, N cùng phía so với Δ khi $(ax_m+by_m+c).(ax_n+by_n+c)>0.$

Lời giải

Chọn D.

Câu 148: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x+4y-5=0$ và hai điểm $A(1;3)$, $B(2;m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để A và B nằm cùng phía đối với d.

A. $m<0$. **B.** $m>-\frac{1}{4}$. **C.** $m>-1$. **D.** $m=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

$A(1;3)$, $B(2;m)$ nằm cùng phía với $d: 3x+4y-5=0$ khi và chỉ khi

$(3x_A+4y_A-5)(3x_B+4y_B-5)>0 \Leftrightarrow 10(1+4m)>0 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{4}.$

Câu 149: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 4x-7y+m=0$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(-3;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d và đoạn thẳng AB có điểm chung.

A. $10\le m\le 40$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>40 \\ m<10 \end{array}\right.$. **C.** $10<m<40$. **D.** $m<10$.

Lời giải

Chọn A.

Đoạn thẳng AB và $d: 4x-7y+m=0$ có điểm chung khi và chỉ khi

$(4x_A-7y_A+m)(4x_B-7y_B+m)\le 0 \Leftrightarrow (m-10)(m-40)\le 0 \Leftrightarrow 10\le m\le 40.$

Câu 150: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để A và B nằm cùng phía đối với d.

A. $m>13$. **B.** $m\ge 13$. **C.** $m<13$. **D.** $m=13$.

Lời giải

Chọn C.

$d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \end{cases} \longrightarrow d: 3x+y-7=0.$ Khi đó điều kiện bài toán trở thành

$(3x_A+y_A-7)(3x_B+y_B-7)>0 \Leftrightarrow -2(m-13)>0 \Leftrightarrow m<13.$

Câu 151: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=m+2t \\ y=1-t \end{cases}$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(-3;4)$. Tìm m để d cắt đoạn thẳng AB.

A. $m<3$. **B.** $m=3$. **C.** $m>3$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B.

$d:\begin{cases}x=m+2t\\y=1-t\end{cases}\rightarrow d:x+2y-m-2=0.$ Đoạn thẳng AB cắt d khi và chỉ khi

$(x_A+2y_A-m-2)(x_B+2y_B-m-2)\le 0\Leftrightarrow (3-m)^2\le 0\Leftrightarrow m=3.$

Câu 152: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-2;4)$ và $C(-1;5)$. Đường thẳng $d:2x-3y+6=0$ cắt cạnh nào của tam giác đã cho?

A. Cạnh AC. **B.** Cạnh AB. **C.** Cạnh BC. **D.** Không cạnh nào.

Lời giải

Chọn D.

Đặt $f(x;y)=2x-3y+6\longrightarrow\begin{cases}f(A(1;3))=-1<0\\f(B(-2;4))=-10<0\\f(C(-1;5))=-11<0\end{cases}\longrightarrow d$ không cắt cạnh nào của tam giác ABC.

Câu 153: Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1:x+2y-3=0$ và $\Delta_2:2x-y+3=0$.

A. $3x+y=0$ và $x-3y=0$. **B.** $3x+y=0$ và $x+3y-6=0$.

C. $3x+y=0$ và $-x+3y-6=0$. **D.** $3x+y+6=0$ và $x-3y-6=0$.

Lời giải

Chọn C.

Điểm $M(x;y)$ thuộc đường phân giác của các góc tạo bởi $\Delta_1;\Delta_2$ khi và chỉ khi

$$d(M;\Delta_1)=d(M;\Delta_2)\Leftrightarrow\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+y=0\\x-3y+6=0\end{array}\right..$$

Câu 154: Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi đường thẳng $\Delta:x+y=0$ và trục hoành.

A. $(1+\sqrt{2})x+y=0$; $x-(1-\sqrt{2})y=0$. **B.** $(1+\sqrt{2})x+y=0$; $x+(1-\sqrt{2})y=0$.

C. $(1+\sqrt{2})x-y=0$; $x+(1-\sqrt{2})y=0$. **D.** $x+(1+\sqrt{2})y=0$; $x+(1-\sqrt{2})y=0$.

Lời giải

Chọn D.

Điểm $M(x;y)$ thuộc đường phân giác của các góc tạo bởi $\Delta;Ox:y=0$ khi và chỉ khi

$$d(M;\Delta)=d(M;Ox)\Leftrightarrow\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=\frac{|y|}{\sqrt{1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+(1+\sqrt{2})y=0\\x+(1-\sqrt{2})y=0\end{array}\right..$$

Câu 155: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\left(\frac{7}{4};3\right)$, $B(1;2)$ và $C(-4;3)$.

Phương trình đường phân giác trong của góc A là:

A. $4x+2y-13=0.$ **B.** $4x-8y+17=0.$ **C.** $4x-2y-1=0.$ **D.** $4x+8y-31=0.$

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} A\left(\frac{7}{4};3\right), B(1;2) \to AB: 4x-3y+2=0 \\ A\left(\frac{7}{4};3\right), C(-4;3) \to AC: y-3=0 \end{cases}.$$

Suy ra các đường phân giác góc A là:

$$\frac{|4x-3y+2|}{5}=\frac{|y-3|}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+2y-13=0 \to f(x;y)=4x+2y-13 \\ 4x-8y+17=0 \end{array}\right.$$

$$\to \begin{cases} f(B(1;2))=-5<0 \\ f(C(-4;3))=-23<0 \end{cases}$$

suy ra đường phân giác trong góc A là $4x-8y+17=0.$

Câu 156: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;5)$, $B(-4;-5)$ và $C(4;-1)$. Phương trình đường phân giác ngoài của góc A là:

A. $y+5=0.$ **B.** $y-5=0.$ **C.** $x+1=0.$ **D.** $x-1=0.$

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} A(1;5), B(-4;-5) \to AB: 2x-y+3=0 \\ A(1;5), C(4;-1) \to AC: 2x+y-7=0 \end{cases}.$$

Suy ra các đường phân giác góc A là:

$$\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y-7|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \to f(x;y)=x-1 \\ y-5=0 \end{array}\right. \to \begin{cases} f(B(-4;-5))=-5<0 \\ f(C(4;-1))=3>0 \end{cases}$$

suy ra đường phân giác trong góc A là $y-5=0.$

Câu 157: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 3x-4y-3=0$ và $d_2: 12x+5y-12=0$. Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

A. $3x+11y-3=0.$ **B.** $11x-3y-11=0.$ **C.** $3x-11y-3=0.$ **D.** $11x+3y-11=0.$

Lời giải

Chọn B.

Các đường phân giác của các góc tạo bởi

$d_1: 3x-4y-3=0$ và $d_2: 12x+5y-12=0$ là:

$$\frac{|3x-4y-3|}{5}=\frac{|12x+5y-12|}{13}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+11y-3=0\\11x-3y-11=0\end{array}\right..$$

Gọi $I=d_1\cap d_2\to I(1;0)$; $d:3x+11y-3=0\to M(-10;3)\in d$,

Gọi H là hình chiếu của M lên d_1.

Ta có: $IM=\sqrt{130}$, $MH=\dfrac{|-30-12-3|}{5}=9$, suy ra

$$\sin\widehat{MIH}=\frac{MH}{IM}=\frac{9}{\sqrt{130}}\to\widehat{MIH}>52^\circ\to2\widehat{MIH}>90^\circ.$$

Suy ra $d:3x+11y-3=0$ là đường phân giác góc tù, suy ra đường phân giác góc nhọn là $11x-3y-11=0$.

Câu 158: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng $\Delta:ax+by+c=0$. Khoảng cách từ điểm M đến Δ được tính bằng công thức:

A. $d(M,\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

B. $d(M,\Delta)=\dfrac{ax_0+by_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. $d(M,\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

D. $d(M,\Delta)=\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 159: Khoảng cách từ điểm $M(-1;1)$ đến đường thẳng $\Delta:3x-4y-3=0$ bằng:

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{25}$.

Lời giải

Chọn B.

$$d(M;\Delta)=\frac{|-3-4-3|}{\sqrt{9+16}}=2.$$

Câu 160: Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x-3y+4=0$ và $2x+3y-1=0$ đến đường thẳng $\Delta:3x+y+4=0$ bằng:

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}x-3y+4=0\\2x+3y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\to A(-1;1)\to d(A;\Delta)=\frac{|-3+1+4|}{\sqrt{9+1}}=\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Câu 161: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;3)$ và $C(4;0)$. Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh A bằng:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

$\begin{cases} A(1;2) \\ B(0;3),\ C(4;0) \to BC: 3x+4y-12=0 \end{cases} \to h_A = d(A;BC) = \frac{|3+8-12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}.$

Câu 162: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;-4)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. 10. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $\begin{cases} A(3;-4) \\ B(1;5), C(3;1) \end{cases} \to \begin{cases} A(3;-4) \\ BC = 2\sqrt{5} \\ BC: 2x+y-7=0 \end{cases} \to \begin{cases} BC = 2\sqrt{5} \\ h_A = d(A;BC) = \sqrt{5} \end{cases}$

$\to S_{ABC} = \frac{1}{2}.2\sqrt{5}.\sqrt{5} = 5.$

Cách 2: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}.$

Câu 163: Khoảng cách từ điểm $M(0;3)$ đến đường thẳng

$\Delta: x\cos\alpha + y\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha) = 0$ bằng:

A. $\sqrt{6}$. **B.** 6. **C.** $3\sin\alpha$. **D.** $\frac{3}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

Lời giải

Chọn B.

$d(M;\Delta) = \frac{|3\sin\alpha + 3(2-\sin\alpha)|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} = 6.$

Câu 164: Khoảng cách từ điểm $M(2;0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+4t \end{cases}$ bằng:

A. 2. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{10}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\Delta:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+4t\end{cases}\to\Delta:4x-3y+2=0\to d\left(M;\Delta\right)=\frac{\left|8+0+2\right|}{\sqrt{16+9}}=2.$$

Câu 165: Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M\left(15;1\right)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=t\end{cases}$ bằng:

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\frac{16}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\Delta:\begin{cases}x=2+3t\\y=t\end{cases}\to\Delta:x-3y-2=0\xrightarrow{\forall N\in\Delta}MN_{\min}=d\left(M;\Delta\right)=\frac{\left|15-3-2\right|}{\sqrt{1+9}}=\sqrt{10}.$$

Câu 166: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ điểm $A\left(-1;2\right)$ đến đường thẳng $\Delta:mx+y-m+4=0$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn B.

$$d\left(A;\Delta\right)=\frac{\left|-m+2-m+4\right|}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\left|m-3\right|=\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}\Leftrightarrow 4m^2+6m-4=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Câu 167: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=2-t\end{cases}$ và $d_2:x-2y+m=0$ đến gốc toạ độ bằng 2.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=4\\m=-2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}d_1:\begin{cases}x=t\\y=2-t\end{cases}\\d_2:x-2y+m=0\end{cases}\to\begin{cases}d_1:x+y-2=0\\d_2:x-2y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4-m\\y=m-2\end{cases}$$

$$\to M\left(4-m;m-2\right)=d_1\cap d_2.$$

Khi đó: $OM = 2 \Leftrightarrow (4-m)^2 + (m-2)^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Câu 168: Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 8x+6y+100=0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng:

A. $R=4$. **B.** $R=6$. **C.** $R=8$. **D.** $R=10$.

Lời giải

Chọn D.

$R = d(O;\Delta) = \dfrac{|100|}{\sqrt{64+36}} = 10.$

Câu 169: Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 5x+12y-10=0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng:

A. $R = \dfrac{44}{13}$. **B.** $R = \dfrac{24}{13}$. **C.** $R=44$. **D.** $R = \dfrac{7}{13}$.

Lời giải

Chọn A.

$R = d(I;\Delta) = \dfrac{|-10-24-10|}{\sqrt{25+144}} = \dfrac{44}{13}.$

Câu 170: Với giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2=1$?

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\sqrt{2}$. **D.** $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

(Δ) tiếp xúc đường tròn

$(C): x^2+y^2=1: \begin{cases} I = O(0;0) \\ R=1 \end{cases} \leftrightarrow d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{1}} = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$

Câu 171: Cho đường thẳng $d: 21x-11y-10=0$. Trong các điểm $M(21;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào gần đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

Chọn D.

$$f(x;y)=|21x-11y-10| \to \begin{cases} f(M(21;-3))=464 \\ f(N(0;4))=54 \\ f(P(-19;5))=464 \\ f(Q(1;5))=44 \end{cases}.$$

Câu 172: Cho đường thẳng $d:7x+10y-15=0$. Trong các điểm $M(1;-3)$, $N(0;4)$, $P(-19;5)$ và $Q(1;5)$ điểm nào cách xa đường thẳng d nhất?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

Chọn C.

$$f(x;y)=|7x+10y-15| \to \begin{cases} f(M(1;-3))=38 \\ f(N(0;4))=25 \\ f(P(-19;5))=98 \\ f(Q(1;5))=42 \end{cases}.$$

Câu 173: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm A và B ?

A. $x-y+2=0.$ **B.** $x+2y=0.$ **C.** $2x-2y+10=0.$ **D.** $x-y+100=0.$

Lời giải

Đường thẳng cách đều hai điểm A, B thì đường thẳng đó hoặc song song (hoặc trùng) với AB, hoặc đi qua trung điểm I của đoạn AB.

Chọn A.

Ta có: $\begin{cases} A(2;3) \\ B(1;4) \end{cases} \to \begin{cases} I\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-1;1) \to \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases} \to AB \parallel d: x-y-2=0.$

Câu 174: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;1)$, $B(12;5)$ và $C(-3;0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm A, B và C.

A. $x-3y+4=0$. **B.** $-x+y+10=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $5x-y+1=0$.

Lời giải

Chọn A.

Dễ thấy ba điểm A, B, C thẳng hàng nên đường thẳng cách điều A, B, C khi và chỉ khi chúng song song hoặc trùng với AB.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(12;4) \to \vec{n}_{AB}=(1;-3) \to AB \parallel d: x-3y+4=0.$

Câu 175: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(-2;4)$ và đường thẳng $\Delta: mx-y+3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ cách đều hai điểm A, B.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=1\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là trung điểm đoạn $AB \to \begin{cases} I\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \\ \overrightarrow{AB}=(-3;3) \to \vec{n}_{AB}=(1;1) \end{cases}$.

Khi đó: $\Delta: mx-y+3=0 \left(\vec{n}_{\Delta}=(m;-1)\right)$ cách đều A,B

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I\in\Delta \\ \frac{m}{1}=\frac{-1}{1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{m}{2}-\frac{5}{2}+3=0 \\ m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 176: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

$\Delta_1: 6x-8y+3=0$ và $\Delta_2: 3x-4y-6=0$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} A(2;0)\in\Delta_2 \\ \Delta_2 \parallel \Delta_1: 6x-8y+3=0 \end{cases} \to d(\Delta_1;\Delta_2)=d(A;\Delta_1)=\frac{|12+3|}{\sqrt{100}}=\frac{3}{2}$.

Câu 177: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d: 7x+y-3=0$ và $\Delta: \begin{cases} x=-2+t \\ y=2-7t \end{cases}$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** 15. **C.** 9. **D.** $\frac{9}{\sqrt{50}}$.

Lời giải

Chọn A.

$\begin{cases} A(-2;2)\in\Delta, \vec{n}_{\Delta}=(7;1) \\ d: 7x+y-3=0 \to \vec{n}_d=(7;1) \end{cases}$

$\to \Delta \uparrow\uparrow d \to d(d;\Delta)=d(A;d)=\frac{|-14+2-3|}{\sqrt{50}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 178: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

$d_1: 6x-8y-101=0$ và $d_2: 3x-4y=0$ bằng:

A. $10{,}1$. **B.** $1{,}01$. **C.** 101. **D.** $\sqrt{101}$.

Lời giải

Chọn A.

$\begin{cases} A(4;3) \in d_2 \\ d_2 \parallel d_1 : 6x - 8y - 101 = 0 \end{cases} \to d(d_1; d_2) = \dfrac{|24 - 24 - 101|}{\sqrt{100}} = \dfrac{101}{10} = 10{,}1.$

Câu 179: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;1)$, $B(4;-3)$ và đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$. Tìm điểm M thuộc d có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 6.

A. $M(3;7)$. **B.** $M(7;3)$. **C.** $M(-43;-27)$. **D.** $M\left(3;-\dfrac{27}{11}\right)$.

Lời giải

Chọn B.

$\begin{cases} M \in d : x - 2y - 1 = 0 \to M(2m+1; m),\ m \in \mathbb{Z} \\ AB : 4x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$. Khi đó

$6 = d(M; AB) = \dfrac{|8m + 4 + 3m - 7|}{5} \Leftrightarrow |11m - 3| = 30 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{27}{11}\ (l) \end{array}\right. \to M(7;3).$

Câu 180: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(0;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d và cách A một khoảng bằng 5, biết M có hoành độ âm.

A. $M(4;4)$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M(-4;4) \\ M\left(-\dfrac{24}{5};-\dfrac{2}{5}\right) \end{array}\right.$. **C.** $M\left(-\dfrac{24}{5};-\dfrac{2}{5}\right)$. **D.** $M(-4;4)$.

Lời giải

Chọn C.

$M \in d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \to M(2 + 2t; 3 + t)$ với $2 + 2t < 0 \Leftrightarrow t < -1.$ Khi đó

$5 = AM \Leftrightarrow (2t+2)^2 + (t+2)^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\ (l) \\ t = -\dfrac{17}{5} \end{array}\right. \to M\left(-\dfrac{24}{5};;-\dfrac{2}{5}\right).$

Câu 181: Biết rằng có đúng hai điểm thuộc trục hoành và cách đường thẳng $\Delta: 2x - y + 5 = 0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$. Tích hoành độ của hai điểm đó bằng:

A. $-\dfrac{75}{4}$. **B.** $-\dfrac{25}{4}$. **C.** $-\dfrac{225}{4}$. **D.** Đáp số khác.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $M(x;0) \in Ox$ thì hoành độ của hai điểm đó là nghiệm của phương trình:

$$d(M;\Delta)=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{|2x+5|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{2}=x_1 \\ x=-\frac{15}{2}=x_2 \end{array}\right. \longrightarrow x_1\cdot x_2=-\frac{75}{4}.$$

Câu 182: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(0;3)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l} M\left(\frac{7}{2};0\right) \\ M(1;0) \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} M\left(\frac{14}{3};0\right) \\ M\left(\frac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} M\left(-\frac{7}{2};0\right) \\ M(-1;0) \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} M\left(-\frac{14}{3};0\right) \\ M\left(-\frac{4}{3};0\right) \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} M(x;0) \\ AB:4x+3y-9=0 \end{cases} \to 1=d(M;AB)=\frac{|4x-9|}{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7}{2}\to M\left(\frac{7}{2};0\right) \\ x=1\to M(1;0) \end{array}\right..$$

Câu 183: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;0)$ và $B(0;-4)$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MAB bằng 6.

A. $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;-8) \end{array}\right.$.
B. $M(0;-8)$.
C. $M(6;0)$.
D. $\left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(0;6) \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có

$$\begin{cases} AB:4x-3y-12=0 \\ AB=5 \\ M(0;y)\to h_M=d(M;AB)=\frac{|3y+12|}{5} \end{cases} \to 6=S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}.5.\frac{|3y+12|}{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\to M(0;0) \\ y=-8\to M(0;-8) \end{array}\right..$$

Câu 184: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1:3x-2y-6=0$ và $\Delta_2:3x-2y+3=0$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho M cách đều hai đường thẳng đã cho.

A. $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.
B. $M\left(\frac{1}{2};0\right)$.
C. $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$.
D. $M\left(\sqrt{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases} M(x;0) \\ d(M;\Delta_1)=d(M;\Delta_2) \end{cases} \to \frac{|3x-6|}{\sqrt{13}}=\frac{|3x+3|}{\sqrt{13}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\to M\left(\frac{1}{2};0\right).$$

Câu 185: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;-6)$ và đường thẳng

$d:\begin{cases}x=t\\y=1+2t\end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho M cách đều hai điểm A, B.

A. $M(3;7)$. **B.** $M(-3;-5)$. **C.** $M(2;5)$. **D.** $M(-2;-3)$

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{cases}M\in d:\begin{cases}x=t\\y=1+2t\end{cases}\to M(t;1+2t)\\MA=MB\end{cases}\to(t+2)^2+(2t-1)^2=(t-4)^2+(2t+7)^2$$

$\Leftrightarrow 20t+60=0\Leftrightarrow t=-3\to M(-3;-5)$.

Câu 186: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(-3;2)$ và đường thẳng $d:2x-y+3=0$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại C.

A. $C(-2;-1)$. **B.** $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $C(-1;1)$. **D.** $C(0;3)$

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases}M\in d:2x-y+3=0\to M(m;2m+3)\\MA=MB\end{cases}\to(m+1)^2+(2m+1)^2=(m+3)^2+(2m+1)^2$$

$\Leftrightarrow m=-2\to M(-2;-1)$.

Câu 187: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(0;3)$ và đường thẳng $d:y=2$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại B.

A. $C(1;2)$. **B.** $C(4;2)$. **C.** $\left[\begin{array}{l}C(1;2)\\C(-1;2)\end{array}\right.$. **D.** $C(-1;2)$.

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{cases}C\in d:y=2\to C(c;2)\\BA=BC\end{cases}\to 2=c^2+1\Leftrightarrow c=\pm1\to\left[\begin{array}{l}C(1;2)\\C(-1;2)\end{array}\right..$$

Câu 188: Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:3x-4y+1=0$ và cách d một khoảng bằng 1 có phương trình:

A. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

B. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

C. $3x-4y+6=0$ hoặc $3x-4y+4=0$.

D. $3x-4y-6=0$ hoặc $3x-4y-4=0$.

Lời giải

Chọn A.

$$\begin{cases} d: 3x-4y+1=0 \to M(1;1)\in d \\ \Delta \parallel d \to \Delta: 3x-4y+c=0 \end{cases} \to 1 = d(d;\Delta) = d(M;\Delta) = \frac{|c-1|}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-4 \\ c=6 \end{array}\right..$$

Câu 189: Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: 3x-4y+2=0$ một khoảng bằng 2 là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

B. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y+12=0$.

C. $3x-4y-8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

D. $3x-4y+8=0$ hoặc $3x-4y-12=0$.

Lời giải

Chọn B.

$$d\left(M(x;y);\Delta\right)=2 \Leftrightarrow \frac{|3x-4y+2|}{5}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-4y+12=0 \\ 3x-4y-8=0 \end{array}\right..$$

Câu 190: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: 5x+3y-3=0$ và $d_2: 5x+3y+7=0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với d_1, d_2 là:

A. $5x+3y-2=0.$ **B.** $5x+3y+4=0.$ **C.** $5x+3y+2=0.$ **D.** $5x+3y-4=0.$

Lời giải

Chọn C.

$$d\left(M(x;y);d_1\right)=d\left(M(x;y);d_2\right) \Leftrightarrow \frac{|5x+3y-3|}{\sqrt{34}}=\frac{|5x+3y+7|}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow 5x+3y+2=0.$$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phương trình đường tròn có tâm và bán kính cho trước

Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính R có phương trình:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.}$$

Chú ý. Phương trình đường tròn có tâm là gốc tọa độ O và bán kính R là $x^2+y^2=R^2$.

2. Nhận xét

● Phương trình đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có thể viết dưới dạng

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$$

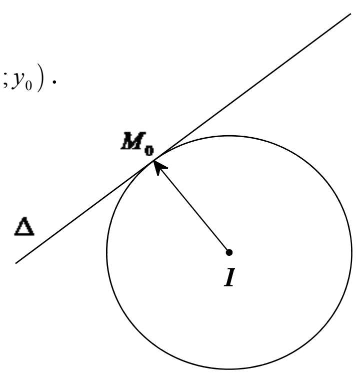
trong đó $c=a^2+b^2-R^2$.

● Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của đường tròn (C) khi $a^2+b^2-c>0$. Khi đó, đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0)$.



Ta có

● $M_0(x_0;y_0)$ thuộc Δ.

● $\overrightarrow{IM_0}=(x_0-a;y_0-b)$ là vectơ pháp tuyến của Δ.

Do đó Δ có phương trình là

$$\boxed{(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: nhận dạng phương trinh dường tron. Tim tam va ban kinh dường tron.

1. Phương pháp giải.

Cách 1: + Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1)

+ Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$

Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).

Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào biểu diễn đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

$a)\ x^2+y^2+2x-4y+9=0$ (1)

$b)\ x^2+y^2-6x+4y+13=0$ (2)

$c)\ 2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$ (3)

$d)\ 2x^2+y^2+2x-3y+9=0$ (4)

Lời giải:

a) Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;\ b=2;\ c=9$

Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có: $a^2+b^2-c=9+4-13=0$

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có: $\left(3\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{5}{2}$

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$ bán kính $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4\left(m-2\right)y+6-m=0$ (1)

a) Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và bán kính theo m

Lời giải:

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$

Với $a=m;b=2\left(m-2\right);c=6-m$

Hay $m^2+4\left(m-2\right)^2-6+m>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I\left(m;2\left(m-2\right)\right)$ và bán kính:

$R=\sqrt{5m^2-15m+10}$

Ví dụ 3: Cho phương trình đường cong $\left(C_m\right): x^2+y^2+\left(m+2\right)x-\left(m+4\right)y+m+1=0$ (2)

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn $\left(C_m\right)$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải:

a) Ta có $a^2+b^2-c=\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\dfrac{\left(m+2\right)^2+4}{2}>0$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đường tròn có tâm I : $\begin{cases} x_I=-\dfrac{m+2}{2} \\ y_I=\dfrac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_I+y_I-1=0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$

c) Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định mà họ $\left(C_m\right)$ luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2+y_0^2+\left(m+2\right)x_0-\left(m+4\right)y_0+m+1=0, \forall m$

$\Leftrightarrow \left(x_0-y_0-1\right)m+x_o^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-y_0+1=0 \\ x_0^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$

Vậy có hai điểm cố định mà họ $\left(C_m\right)$ luôn đi qua với mọi m là $M_1\left(-1;0\right)$ và $M_2\left(1;2\right)$

Dạng 2: Viết Phương Trình Đường Tròn

1. Phương pháp giải.

Cách 1: + Tìm toạ độ tâm $I\left(a;b\right)$ của đường tròn (C)

+ Tìm bán kính R của đường tròn (C)

+ Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

+ Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.

+ Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

* $A \in \left(C\right) \Leftrightarrow IA = R$

* $\left(C\right)$ tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d\left(I;\Delta\right) = R$

* $\left(C\right)$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d\left(I;\Delta_1\right) = d\left(I;\Delta_2\right) = R$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1 : Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I\left(1;-5\right)$ và đi qua $O\left(0;0\right)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A\left(1;1\right)$, $B\left(7;5\right)$.

c) Đi qua ba điểm: $M\left(-2;4\right)$, $N\left(5;5\right)$, $P\left(6;-2\right)$

Lời giải:

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ nên có phương trình là $\left(x-1\right)^2 + \left(y+5\right)^2 = 26$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I\left(4;3\right)$

$AI = \sqrt{\left(4-1\right)^2 + \left(3-1\right)^2} = \sqrt{13}$

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I\left(4;3\right)$ làm tâm và bán kính $R = AI = \sqrt{13}$ nên có phương trình là $\left(x-4\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 13$

c) Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 + 16 + 4a - 8b + c = 0 \\ 25 + 25 - 10a - 10b + c = 0 \\ 36 + 4 - 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

Nhận xét: Đối với ý c) ta có thể làm theo cách sau

Gọi $I\left(x;y\right)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

Vì $IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-5)^2\\(x+2)^2+(y-4)^2=(x-6)^2+(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

b) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy

c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải:

a) Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R=d(I;\Delta)=\frac{|-1-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là : $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$

b) Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I(R;-R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

Ta có: $R^2=IA^2\Leftrightarrow R^2=(2-R)^2+(-1+R)^2\Leftrightarrow R^2-6R+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=1\\R=5\end{array}\right.$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ và

$(x-5)^2+(y+5)^2=25$

c) Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}\Leftrightarrow|22a+35|=|21a+35|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{-70}{43}\end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$

- Với $a=\frac{-70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43};\frac{-70}{43}\right)$ và $R=\frac{7}{43}$ suy ra $(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$\left(C\right):\left(x-10\right)^2+y^2=49$ và $\left(C\right):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$

Ví dụ 3: Cho hai điểm $A\left(8;0\right)$ và $B\left(0;6\right)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Lời giải:

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I\left(4;3\right)$ và Bán kính $R=IA=\sqrt{\left(8-4\right)^2+\left(0-3\right)^2}=5$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $\left(x-4\right)^2+\left(y-3\right)^2=25$

b) Ta có $OA=8;\ OB=6;\ AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$

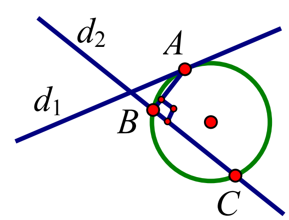
Mặt khác $\frac{1}{2}OA.OB=pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC)

Suy ra $r=\frac{OA.OB}{OA+OB+AB}=2$

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $\left(2;2\right)$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là: $\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$. và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.



Hình 3.1

Lời giải (hình 3.1)

Vì $A\in d_1\Rightarrow A\left(a;-\sqrt{3}a\right),\ a>0;\ B,C\in d_2\Rightarrow B\left(b;\sqrt{3}b\right),\ C\left(c;\sqrt{3}c\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\sqrt{3}\left(a+b\right)\right),\ \overrightarrow{AC}\left(c-a;\sqrt{3}\left(c+a\right)\right)$

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn C.

Do đó $AC\perp d_1\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1}=0\Leftrightarrow-1.\left(c-a\right)+\sqrt{3}.\sqrt{3}\left(a+c\right)=0\Leftrightarrow2a+c=0$ (1)

$AB\perp d_2\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow1.\left(b-a\right)+3\left(a+b\right)=0\Leftrightarrow2b+a=0$ (2)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}d\left(A;d_2\right).BC \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\left|2\sqrt{3}a\right|}{2}\sqrt{\left(c-b\right)^2+3\left(c-b\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2a\left|c-b\right| = 1$ (3)

Từ (1), (2) suy ra $2\left(c-b\right) = -3a$ thế vào (3) ta được $a\left|-3a\right| = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó $b = -\frac{\sqrt{3}}{6}$, $c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right)$, $C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2\right)$

Suy ra (C) nhận $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là $R = \frac{AC}{2} = 1$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $\left(C\right):\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = 1$

Dạng 3: Vị Trí Tương Đối Của Điểm; Đường Thẳng; Đường Tròn Với Đường Tròn

1. Phương pháp giải.

- *Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

+ Nếu $IM < R$ suy ra M nằm trong đường tròn

+ Nếu $IM = R$ suy ra M thuộc đường tròn

+ Nếu $IM > R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

- *Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d\left(I;\Delta\right)$

+ Nếu $d\left(I;\Delta\right) < R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d\left(I;\Delta\right) = R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d\left(I;\Delta\right) > R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

- *Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')*

Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R+R'$, $\left|R-R'\right|$

+ Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau

+ Nếu $II' = R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau

+ Nếu $II' < \left|R - R'\right|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau

+ Nếu $II' = \left|R - R'\right|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau

+ Nếu $\left|R - R'\right| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và đường tròn $\left(C\right) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh điểm $M\left(2;1\right)$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa Δ và $\left(C\right)$

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

Lời giải:

a) Đường tròn (C) có tâm $I\left(2;-1\right)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $IM = \sqrt{\left(2-2\right)^2 + \left(1+1\right)^2} = 2 < 3 = R$ do đó M nằm trong đường tròn.

b) Vì $d\left(I;\Delta\right) = \dfrac{\left|2+1+1\right|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt.

c) Vì Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất nên Δ' vuông góc với Δ và đi qua tâm I của đường tròn (C).

Do đó Δ' nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta} = \left(1;1\right)$ làm vectơ pháp tuyến suy ra $\Delta' : 1\left(x-2\right) + 1\left(y+1\right) = 0$ hay $x + y - 1 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta' : x + y - 1 = 0$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $\left(C\right) : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và $\left(C'\right) : x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

Lời giải

a) Cách 1: $\left(C\right)$ có tâm $I\left(1;3\right)$ và bán kính $R = 5$, $\left(C\right)$ có tâm $I'\left(3;1\right)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$

$II' = \sqrt{\left(3-1\right)^2 + \left(1-3\right)^2} = 2\sqrt{2}$

Ta thấy $\left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < \left|R_1 + R_2\right|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y+3\right)^2 + y^2 - 2\left(y+3\right) - 6y - 15 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 3 \end{array}\right. \\ x = y + 3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A\left(1;-2\right)$ và $B\left(6;3\right)$

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A, B nhận $\overrightarrow{AB}\left(5;5\right)$ làm vectơ chỉ phương suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

c) Cách 1: Đường tròn cần tìm (C") có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

(C") đi qua ba điểm A, B và O nên ta có hệ $\begin{cases} 1 + 4 - 2a + 4b + c = 0 \\ 36 + 9 - 12a - 6b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$

Vậy (C") : $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

Cách 2: Vì A, B là giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ đều thỏa mãn phương trình

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 + m\left(x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3\right) = 0$ (*)

Tọa độ điểm O thỏa mãn phương trình (*) khi và chỉ khi $-15 + m.\left(-3\right) = 0 \Leftrightarrow m = -5$

Khi đó phương trình (*) trở thành $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$

Ví dụ 3: Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$

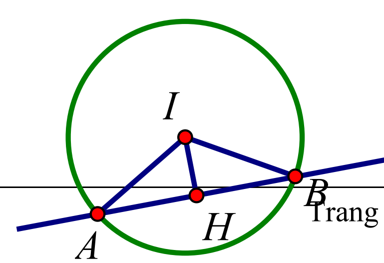
a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Lời giải (hình 3.2)

a) Đường tròn (C) có tâm $I\left(1;-2\right)$, bán kính $R = 3$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi



Hình 3.2

$d\left(I;\Delta\right) < R \Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}} < 3$

$\Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0$ (đúng với mọi m)

b) Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB} = \frac{9}{2}\sin\widehat{AIB} \le \frac{9}{2}$

Suy $\max S_{IAB} = \frac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^0$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH} = 45^0 \Rightarrow IH = IA.\cos 45^0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Ta có $d\left(I;\Delta\right) = IH \Leftrightarrow \frac{\left|1-2m\right|}{\sqrt{2+m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2+8m+16=0 \Leftrightarrow m=-4$

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4: Viết Phương Trình Tiếp Tuyến Với Đường Tron

1. Phương pháp giải.

Cho đường tròn (C) tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính R

- Nếu biết tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}\left(x_0-a;y_0-b\right)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $\left(x_0-a\right)\left(x-x_0\right)+\left(y_0-b\right)\left(y-y_0\right)=0$
- Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d\left(I;\Delta\right)=R$ để xác định tiếp tuyến.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A\left(1;-1\right)$; $B\left(1;3\right)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I\left(3;-1\right)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA = 2 = R; IB = 2\sqrt{5} > R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA} = (2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1) + 0(y+1) = 0$ hay $x = 1$

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$a(x-1) + b(y-3) = 0$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) hay $ax + by - a - 3b = 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I;\Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a - b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow (a-2b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 3b = 4a \end{array}\right.$$

+ Nếu $b = 0$, chọn $a = 1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x = 1$.

+ Nếu $3b = 4a$, chọn $a = 3, b = 4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x + 4y - 15 = 0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (*C*) có phương trình là $x = 1$ và $3x + 4y - 15 = 0$

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$ trong trường

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta' : 2x + 3y + 4 = 0$

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0

Lời giải:

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R = 3$

Vì $\Delta \perp \Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3;2)$ làm VTPT do đó phương trình có dạng

$-3x + 2y + c = 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-10 + c|}{\sqrt{13}} = 3 \Leftrightarrow c = 10 \pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta : -3x + 2y + 10 \pm 3\sqrt{13} = 0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a - 2b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow (2a - 2b + c)^2 = 9(a^2 + b^2) (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45^0 suy ra

$\cos\left(\Delta;Ox\right)=\dfrac{\left|b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow \cos 45^0=\dfrac{\left|b\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow a=b$ hoặc $a=-b$

TH1: Nếu $a=b$ thay vào (*) ta có $18a^2=c^2\Leftrightarrow \pm c=3\sqrt{2}a$, chọn $a=b=1\Rightarrow c=\pm 3\sqrt{2}$

suy ra $\Delta: x+y\pm 3\sqrt{2}=0$

TH2: Nếu $a=-b$ thay vào (*) ta có $18a^2=\left(4a+c\right)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a \\ c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a\end{array}\right.$

Với $c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a$, chọn $a=1,\ b=-1,\ c=\left(3\sqrt{2}-4\right)\Rightarrow \Delta: x-y+3\sqrt{2}-4=0$

Với $c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a$, chọn $a=1,\ b=-1,\ c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)\Rightarrow \Delta: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_{1,2}: x+y\pm 3\sqrt{2}=0,\ \Delta_3: x-y+3\sqrt{2}-4=0$ và $\Delta_4: x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Ví dụ 3: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau:

$\left(C_1\right): x^2+y^2-4y-5=0$ và $\left(C_2\right): x^2+y^2-6x+8y+16=0$

Lời giải:

Đường tròn $\left(C_1\right)$ có tâm $I_1\left(0;2\right)$ bán kính $R_1=3$

Đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $I_2\left(3;-4\right)$ bán kính $R_2=3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta: ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq 0$

Δ là tiếp tuyến chung của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)\Leftrightarrow \begin{cases} d(I_1,\Delta)=3 \\ d(I_2,\Delta)=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left|2b+c\right|=3\sqrt{a^2+b^2}\ (*) \\ \left|3a-4b+c\right|=3\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$

Suy ra $\left|2b+c\right|=\left|3a-4b+c\right|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ c=\dfrac{-3a+2b}{2}\end{array}\right.$

TH1: Nếu $a=2b$ chọn $a=2,\ b=1$ thay vào (*) ta được $c=-2\pm 3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0$

TH2: Nếu $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$ thay vào (*) ta được $\left|2b-a\right|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a=0$ hoặc $3a+4b=0$

+ Với $a=0\Rightarrow c=b$, chọn $b=c=1$ ta được $\Delta: y+1=0$

+ Với $3a+4b=0\Rightarrow c=3b$, chọn $a=4,\ b=-3,\ c=-9$ ta được $\Delta: 4x-3y-9=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là :

$2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0, y+1=0,\ 4x-3y-9=0$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=16$ là:

A. $I(-1;3),\ R=4.$ **B.** $I(1;-3),\ R=4.$

C. $I(1;-3),\ R=16.$ **D.** $I(-1;3),\ R=16.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=16 \longrightarrow I(1;-3),\ R=\sqrt{16}=4.$

Câu 2: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C):x^2+(y+4)^2=5$ là:

A. $I(0;-4),\ R=\sqrt{5}.$ **B.** $I(0;-4),\ R=5.$ **C.** $I(0;4),\ R=\sqrt{5}.$ **D.** $I(0;4),\ R=5.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C):x^2+(y+4)^2=5 \longrightarrow I(0;-4), R=\sqrt{5}.$

Câu 3: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C):(x+1)^2+y^2=8$ là:

A. $I(-1;0),\ R=8.$ **B.** $I(-1;0),\ R=64.$

C. $I(-1;0),\ R=2\sqrt{2}.$ **D.** $I(1;0),\ R=2\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C):(x+1)^2+y^2=8 \longrightarrow I(-1;0), R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$

Câu 4: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C):x^2+y^2=9$ là:

A. $I(0;0),\ R=9.$ **B.** $I(0;0),\ R=81.$ **C.** $I(1;1),\ R=3.$ **D.** $I(0;0),\ R=3.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(C):x^2+y^2=9 \longrightarrow I(0;0),\ R=\sqrt{9}=3.$

Câu 5: Đường tròn $(C):x^2+y^2-6x+2y+6=0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(3;-1),\ R=4.$ **B.** $I(-3;1),\ R=4.$ **C.** $I(3;-1),\ R=2.$ **D.** $I(-3;1),\ R=2.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C): x^2+y^2-6x+2y+6=0 \to a=\dfrac{-6}{-2}=3,\ b=\dfrac{2}{-2}=-1,\ c=6$

$\to I(3;-1), R=\sqrt{3^2+(-1)^2-6}=2$.

Câu 6: Đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-12=0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(2;-3),\ R=5.$ **B.** $I(-2;3),\ R=5.$

C. $I(-4;6),\ R=5.$ **D.** $I(-2;3),\ R=1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C): x^2+y^2-4x+6y-12=0 \to a=2, b=-3, c=-12 \to I(2;-3),\ R=\sqrt{4+9+12}=5$.

Câu 7: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-3=0$ là:

A. $I(2;-1),\ R=2\sqrt{2}.$ **B.** $I(-2;1),\ R=2\sqrt{2}.$ **C.** $I(2;-1),\ R=8.$ **D.** $I(-2;1),\ R=8.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C): x^2+y^2-4x+2y-3=0 \to a=2, b=-1, c=-3 \to I(2;-1), R=\sqrt{4+1+3}=2\sqrt{2}$.

Câu 8: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): 2x^2+2y^2-8x+4y-1=0$ là:

A. $I(-2;1),\ R=\dfrac{\sqrt{21}}{2}.$ **B.** $I(2;-1),\ R=\dfrac{\sqrt{22}}{2}.$

C. $I(4;-2),\ R=\sqrt{21}.$ **D.** $I(-4;2),\ R=\sqrt{19}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $(C): 2x^2+2y^2-8x+4y-1=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-\dfrac{1}{2}=0 \to \begin{cases} a=2, b=-1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$\to I(2;-1), R=\sqrt{4+1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.

Câu 9: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): 16x^2+16y^2+16x-8y-11=0$ là:

A. $I(-8;4),\ R=\sqrt{91}.$ **B.** $I(8;-4),\ R=\sqrt{91}.$

C. $I(-8;4),\ R=\sqrt{69}.$ **D.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}\right),\ R=1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(C): 16x^2+16y^2+16x-8y-11=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{11}{16}=0$

$\rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right), R=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{11}{16}}=1$.

Câu 10: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2+y^2-10x-11=0$ là:

A. $I(-10;0),\ R=\sqrt{111}.$ **B.** $I(-10;0),\ R=\sqrt{89}.$ **C.** $I(-5;0),\ R=6.$ **D.** $I(5;0),\ R=6.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C): x^2+y^2-10x-11=0 \rightarrow I(-5;0), R=\sqrt{25+0+11}=6.$

Câu 11: Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2+y^2-5y=0$ là:

A. $I(0;5),\ R=5.$

B. $I(0;-5),\ R=5.$

C. $I\left(0;\frac{5}{2}\right),\ R=\frac{5}{2}.$

D. $I\left(0;-\frac{5}{2}\right),\ R=\frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C): x^2+y^2-5y=0 \rightarrow I\left(0;\frac{5}{2}\right), R=\sqrt{0+\frac{25}{4}-0}=\frac{5}{2}.$

Câu 12: Đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=25$ có dạng khai triển là:

A. $(C): x^2+y^2-2x+4y+30=0.$

B. $(C): x^2+y^2+2x-4y-20=0.$

C. $(C): x^2+y^2-2x+4y-20=0.$

D. $(C): x^2+y^2+2x-4y+30=0.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-20=0.$

Câu 13: Đường tròn $(C): x^2+y^2+12x-14y+4=0$ có dạng tổng quát là:

A. $(C): (x+6)^2+(y-7)^2=9.$

B. $(C): (x+6)^2+(y-7)^2=81.$

C. $(C): (x+6)^2+(y-7)^2=89.$

D. $(C): (x+6)^2+(y-7)^2=\sqrt{89}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $(C): x^2+y^2+12x-14y+4=0 \rightarrow \begin{cases} I(-6;7) \\ R=\sqrt{36+49-4}=9 \end{cases} \rightarrow (C): (x+6)^2+(y-7)^2=81.$

Câu 14: Tâm của đường tròn $(C): x^2+y^2-10x+1=0$ cách trục Oy một khoảng bằng:

A. -5 . **B.** 0 . **C.** 10 . **D.** 5 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $(C): x^2+y^2-10x+1=0 \to I(5;0) \to d[I;Oy]=5.$

Câu 15: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+5x+7y-3=0$. Tính khoảng cách từ tâm của (C) đến trục Ox.

A. 5. **B.** 7. **C.** $3,5$. **D.** $2,5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C): x^2+y^2+5x+7y-3=0 \to I\left(-\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right) \to d[I;Ox]=\left|-\frac{7}{2}\right|=\frac{7}{2}.$

Câu 16: Đường tròn có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính $R=1$ có phương trình là:

A. $x^2+(y+1)^2=1.$ **B.** $x^2+y^2=1.$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=1.$ **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $(C): \begin{cases} I(0;0) \\ R=1 \end{cases} \to (C): x^2+y^2=1.$

Câu 17: Đường tròn có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$ có phương trình là:

A. $x^2+y^2+2x+4y-4=0.$ **B.** $x^2+y^2+2x-4y-4=0.$

C. $x^2+y^2-2x+4y-4=0.$ **D.** $x^2+y^2-2x-4y-4=0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C): \begin{cases} I(1;2) \\ R=3 \end{cases} \to (C): (x-1)^2+(y-2)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0.$

Câu 18: Đường tròn (C) có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y-5)^2=26.$ **B.** $(x+1)^2+(y-5)^2=\sqrt{26}.$

C. $(x-1)^2+(y+5)^2=26.$ **D.** $(x-1)^2+(y+5)^2=\sqrt{26}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C): \begin{cases} I(1;-5) \\ R=OI=\sqrt{26} \end{cases} \to (C): (x-1)^2+(y+5)^2=26.$

Câu 19: Đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;-3)$ có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=\sqrt{52}.$ **B.** $(x-2)^2+(y+3)^2=52.$

C. $x^2+y^2+4x-6y-57=0.$ **D.** $x^2+y^2+4x-6y-39=0.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(C):\begin{cases} I(-2;3) \\ R=IM=\sqrt{(2+2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{52} \end{cases} \rightarrow (C):(x+2)^2+(y-3)^2=52.$

$(C): x^2+y^2+4x-6y-39=0.$

Câu 20: Đường tròn đường kính AB với $A(3;-1)$, $B(1;-5)$ có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=5.$ **B.** $(x+1)^2+(y+2)^2=17.$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=\sqrt{5}.$ **D.** $(x-2)^2+(y+3)^2=5.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(C):\begin{cases} I(2;-3) \\ R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1-3)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow (C):(x-2)^2+(y+3)^2=5.$

Câu 21: Đường tròn đường kính AB với $A(1;1)$, $B(7;5)$ có phương trình là:

A. $x^2+y^2-8x-6y+12=0$. **B.** $x^2+y^2+8x-6y-12=0$.

C. $x^2+y^2+8x+6y+12=0$. **D.** $x^2+y^2-8x-6y-12=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C):\begin{cases} I(4;3) \\ R=IA=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13} \end{cases} \rightarrow (C):(x-4)^2+(y-3)^2=13$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x-6y+12=0.$

Câu 22: Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và tiếp xúc với trục Ox có phương trình là:

A. $(x-2)^2+(y-3)^2=9.$ **B.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4.$

C. $(x-2)^2+(y-3)^2=3.$ **D.** $(x+2)^2+(y+3)^2=9.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C):\begin{cases} I(2;3) \\ R=d[I;Ox]=3 \end{cases} \rightarrow (C):(x-2)^2+(y-3)^2=9.$

Câu 23: Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=4.$ **B.** $(x+2)^2+(y-3)^2=9.$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=4.$ **D.** $(x-2)^2+(y+3)^2=9.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(C):\begin{cases} I(2;-3) \\ R=d[I;Oy]=2 \end{cases} \to (C):(x-2)^2+(y+3)^2=4.$

Câu 24: Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x-4y+5=0$ có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2=1.$ **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2=\frac{1}{25}.$

C. $(x-2)^2+(y+1)^2=1.$ **D.** $(x+2)^2+(y-1)^2=4.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C):\begin{cases} I(-2;1) \\ R=d[I;\Delta]=\frac{|-6-4+5|}{\sqrt{9+16}}=1 \end{cases} \to (C):(x+2)^2+(y-1)^2=1.$

Câu 25: Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:\ x-2y+7=0$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{25}.$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}.$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{2}{\sqrt{5}}.$ **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2=5.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $(C):\begin{cases} I(-1;2) \\ R=d[I;\Delta]=\frac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \to (C):(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}.$

Câu 26: Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$.

A. $I(0;0)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có . $A,B,C\in(C):x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16+8b+c=0 \\ 20+4a+8b+c=0 \\ 16+8a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \to I(1;1). \\ c=-8 \end{cases}$$

Câu 27: Tìm bán kính R của đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4)$, $B(3;4)$, $C(3;0)$.

A. $R=5$. **B.** $R=3$. **C.** $R=\sqrt{10}$. **D.** $R=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BA}=(-3;0) \\ \overrightarrow{BC}=(0;-4) \end{cases} \to BA \perp BC \to R=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2}}{2}=\frac{5}{2}.$

Câu 28: Đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-3;-1)$, $B(-1;3)$ và $C(-2;2)$ có phương trình là:

A. $x^2+y^2-4x+2y-20=0.$ **B.** $x^2+y^2+2x-y-20=0.$

C. $(x+2)^2+(y-1)^2=25.$ **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2=20.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $A,B,C \in (C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10-6a-2b+c=0 \\ 10-2a+6b+c=0 \\ 8-4a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}.$

Vậy $(C): x^2+y^2-4x+2y-20=0.$

Câu 29: Cho tam giác ABC có $A(-2;4)$, $B(5;5)$, $C(6;-2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2x-y+20=0.$ **B.** $(x-2)^2+(y-1)^2=20.$

C. $x^2+y^2-4x-2y+20=0.$ **D.** $x^2+y^2-4x-2y-20=0.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $A,B,C \in (C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 20-4a+8b+c=0 \\ 50+10a+10b+c=0 \\ 40+12a-4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=-20 \end{cases}.$

Vậy $(C): x^2+y^2-4x-2y-20=0.$

Câu 30: Cho tam giác ABC có $A(1;-2)$, $B(-3;0)$, $C(2;-2)$. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn có phương trình là:

A. $x^2+y^2+3x+8y+18=0.$ **B.** $x^2+y^2-3x-8y-18=0.$

C. $x^2+y^2-3x-8y+18=0.$ **D.** $x^2+y^2+3x+8y-18=0.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $A,B,C\in(C): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5+2a-4b+c=0\\9-6a+c=0\\8+4a-4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=-4,c=-18\end{cases}$. Vậy $(C): x^2+y^2-3x-8y-18=0.$

Câu 31: Đường tròn (C) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(8;0)$ và $B(0;6)$ có phương trình là:

A. $(x-4)^2+(y-3)^2=25.$ **B.** $(x+4)^2+(y+3)^2=25.$

C. $(x-4)^2+(y-3)^2=5.$ **D.** $(x+4)^2+(y+3)^2=5.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $O(0;0),\ A(8;0),\ B(0;6)\to OA\perp OB\to\begin{cases}I(4;3)\\R=\dfrac{AB}{2}=5\end{cases}\to(C):(x-4)^2+(y-3)^2=25.$

Câu 32: Đường tròn (C) đi qua ba điểm $O(0;0),\ A(a;0),\ B(0;b)$ có phương trình là:

A. $x^2+y^2-2ax-by=0$. **B.** $x^2+y^2-ax-by+xy=0$.

C. $x^2+y^2-ax-by=0.$ **D.** $x^2-y^2-ay+by=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $O(0;0),\ A(a;0),\ B(0;b)\to OA\perp OB$

$\to\begin{cases}I\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right)\\R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\end{cases}\to(C):\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{4}$

$\longrightarrow(C): x^2+y^2-ax-by=0.$

Câu 33: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(5;3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là:

A. $(x+4)^2+y^2=10.$ **B.** $(x-4)^2+y^2=10.$

C. $(x-4)^2+y^2=\sqrt{10}.$ **D.** $(x+4)^2+y^2=\sqrt{10}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $I(a;0) \to IA = IB = R \Leftrightarrow R^2 = (a-1)^2 + 1^2 = (a-5)^2 + 3^2 \to \begin{cases} a = 4 \\ I(4;0) \\ R^2 = 10 \end{cases}$.

Vậy đường tròn cần tìm là: $(x-4)^2 + y^2 = 10$.

Câu 34: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;1)$, $B(3;5)$ và có tâm I thuộc trục tung có phương trình là:

A. $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$. **B.** $x^2 + (y-4)^2 = 6$.

C. $x^2 + (y+4)^2 = 6$. **D.** $x^2 + y^2 + 4y + 6 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I(0;a) \to IA = IB = R \Leftrightarrow R^2 = 1^2 + (a-1)^2 = 3^2 + (a-5)^2 \to \begin{cases} a = 4 \\ I(0;4) \\ R^2 = 10 \end{cases}$

Vậy đường tròn cần tìm là: $x^2 + (y-4)^2 = 10$.

Câu 35: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1;2), B(-2;3)$ và có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y + 10 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}$. **B.** $(x-3)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{5}$.

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$. **D.** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $I \in \Delta \to I(a;3a+10) \to IA = IB = R$

$$\Leftrightarrow R^2 = (a+1)^2 + (3a+8)^2 = (a+2)^2 + (3a+7)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ I(-3;1). \\ R^2 = 5 \end{cases}$$

Vậy đường tròn cần tìm là: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Câu 36: Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: x + 3y + 8 = 0$, đi qua điểm $A(-2;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 10 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$. **B.** $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 16$.

C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$. **D.** $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Lời giải

Chọn D

Dễ thấy $A \in \Delta$ nên tâm I của đường tròn nằm trên đường thẳng qua A vuông góc với Δ là

$$\Delta': 4x+3y+5=0 \to I = \Delta' \cap d: \begin{cases} 4x+3y+5=0 \\ x+3y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \to \begin{cases} I(1;-3) \\ R=IA=5 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+(y+3)^2=25.$

Câu 37: Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: x+3y-5=0$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-y-1=0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=8$ hoặc $(x-5)^2+y^2=8$.

B. $(x+1)^2+(y-2)^2=8$ hoặc $(x+5)^2+y^2=8$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ hoặc $(x-5)^2+y^2=8$.

D. $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ hoặc $(x+5)^2+y^2=8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I \in d \to I(5-3a;a) \to d[I;\Delta] = R = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|4-4a|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} I(5;0) \\ I(-1;2) \end{array}\right.$.

Vậy các phương trình đường tròn là: $(x-5)^2+y^2=8$ hoặc $(x+1)^2+(y-2)^2=8.$

Câu 38: Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$, bán kính $R=5$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-11=0$. Biết tâm I có hoành độ dương. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x+8)^2+(y-3)^2=25$.

B. $(x-2)^2+(y+2)^2=25$ hoặc $(x+8)^2+(y-3)^2=25$.

C. $(x+2)^2+(y-2)^2=25$ hoặc $(x-8)^2+(y+3)^2=25$.

D. $(x-8)^2+(y+3)^2=25$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I \in d \to I(2-2a;a),\ a<1 \to d[I;\Delta] = R = 5$.

$$\Leftrightarrow \frac{|10a+5|}{5} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2\ (l) \\ a=-3 \end{array}\right. \to I(8;-3)$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x-8)^2+(y+3)^2=25.$

Câu 39: Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d: x+5y-12=0$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ có phương trình là:

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

B. $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

D. $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I\in d \to I(12-5a;a) \to R=d[I;Ox]=d[I;Oy]=|12-5a|=|a|$

$$\to \left[\begin{array}{l} a=3\to I(-3;3), R=3 \\ a=2\to I(2;2), R=2 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình các đường tròn là : $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ hoặc $(x+3)^2+(y-3)^2=9.$

Câu 40: Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x=5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1: 3x-y+3=0,\ d_2: x-3y+9=0$ có phương trình là:

A. $(x-5)^2+(y+2)^2=40$ hoặc $(x-5)^2+(y-8)^2=10.$

B. $(x-5)^2+(y+2)^2=40.$

C. $(x-5)^2+(y-8)^2=10.$

D. $(x-5)^2+(y-2)^2=40$ hoặc $(x-5)^2+(y+8)^2=10.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $I\in\Delta \to I(5;a) \to R=d[I;d_1]=d[I;d_2]=\dfrac{|18-a|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|14-3a|}{\sqrt{10}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=8\to I(5;8), R=\sqrt{10} \\ a=-2\to I(5;-2), R=2\sqrt{10} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình các đường tròn: $(x-5)^2+(y-8)^2=10$ hoặc $(x-5)^2+(y+2)^2=40.$

Câu 41: Đường tròn (C) đi qua điểm $A(1;-2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$ tại $M(1;2)$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x-6)^2+y^2=29.$ **B.** $(x-5)^2+y^2=20.$

C. $(x-4)^2+y^2=13.$ **D.** $(x-3)^2+y^2=8.$

Lời giải

Chọn D

Ta có Tâm I của đường tròn nằm trên đường thẳng qua M vuông góc với Δ là

$\Delta' : x + y - 3 = 0 \rightarrow I(a;3-a)$.

Ta có: $R^2 = IA^2 = IM^2 = (a-1)^2 + (a-5)^2 = (a-1)^2 + (a-1)^2$

$\Leftrightarrow a = 3 \rightarrow \begin{cases} I(3;0) \\ R^2 = 8 \end{cases} \rightarrow (C):(x-3)^2 + y^2 = 8.$

Câu 42: Đường tròn (C) đi qua điểm $M(2;1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ hoặc $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25.$

C. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$

Lời giải

Chọn A

Vì $M(2;1)$ thuộc góc phần tư (I) nên $A(a;a)$, $a > 0.$

Khi đó: $R = a^2 = IM^2 = (a-2)^2 + (a-1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \rightarrow I(1;1), R = 1 \rightarrow (C):(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ a = 5 \rightarrow I(5;5), R = 5 \rightarrow (C):(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \end{array}\right.$.

Câu 43: Đường tròn (C) đi qua điểm $M(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ hoặc $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25.$

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$.

C. $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25.$

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ hoặc $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25.$

Lời giải

Chọn D

Vì $M(2;-1)$ thuộc góc phần tư (IV) nên $A(a;-a)$, $a > 0.$

Khi đó: $R = a^2 = IM^2 = (a-2)^2 + (a-1)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \rightarrow I(1;-1), R = 1 \rightarrow (C):(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ a = 5 \rightarrow I(5;-5), R = 5 \rightarrow (C):(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25 \end{array}\right.$.

Câu 44: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2), B(3;4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+y-3=0$. Viết phương trình đường tròn (C), biết tâm của (C) có tọa độ là những số nguyên.

A. $x^2+y^2-3x-7y+12=0.$ **B.** $x^2+y^2-6x-4y+5=0.$

C. $x^2+y^2-8x-2y-10=0.$ **D.** $x^2+y^2-8x-2y+7=0.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $AB: x-y+1=0,$ đoạn AB có trung điểm $M(2;3) \to$ trung trực của đoạn AB

là $d: x+y-5=0 \to I(a;5-a), a \in \mathbb{Z}.$

Ta có: $R = IA = d[I;\Delta] = \sqrt{(a-1)^2+(a-3)^2} = \dfrac{|2a+2|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow a=4 \to I(4;1), R=\sqrt{10}.$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x-4)^2+(y-1)^2=10 \Leftrightarrow x^2+y^2-8x-2y+7=0.$

Câu 45: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y+8=0$. Viết phương trình đường tròn (C), biết tâm của (C) có hoành độ nhỏ hơn 5.

A. $(x-3)^2+(y+2)^2=25.$ **B.** $(x+3)^2+(y-2)^2=5.$

C. $(x+5)^2+(y+2)^2=5.$ **D.** $(x-5)^2+(y-2)^2=25$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB: x-2y+5=0,$ đoạn AB có trung điểm $M(1;2) \to$ trung trực của đoạn AB là $d: 2x+y-4=0 \to I(a;4-2a), a<5.$ Ta có

$R = IA = d[I;\Delta] = \sqrt{(a+1)^2+(2a-3)^2} = \dfrac{|11a-8|}{5} \Leftrightarrow a=3 \to I(3;-2), R=5.$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x-3)^2+(y+2)^2=25.$

Câu 46: Cho phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad (1)$. Điều kiện để (1) là phương trình đường tròn là:

A. $a^2-b^2>c$. **B.** $a^2+b^2>c$. **C.** $a^2+b^2<c$. **D.** $a^2-b^2<c$.

Lời giải

Chọn B

Câu 47: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $4x^2+y^2-10x-6y-2=0.$ **B.** $x^2+y^2-2x-8y+20=0.$

C. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0.$ **D.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0.$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình dạng : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$ lần lượt tính các hệ số a,b,c và kiểm tra điều kiện $a^2+b^2-c>0.$

$x^2+y^2-4x+6y-12=0 \to a=2,b=-3,c=-12 \to a^2+b^2-c>0.$

Các phương trình $4x^2+y^2-10x-6y-2=0,\ x^2+2y^2-4x-8y+1=0$ không có dạng đã nêu loại các đáp án A và C.

Đáp án $x^2+y^2-2x-8y+20=0$ không thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2-c>0.$

Câu 48: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2+2x-4y+9=0.$ **B.** $x^2+y^2-6x+4y+13=0.$

C. $2x^2+2y^2-8x-4y-6=0.$ **D.** $5x^2+4y^2+x-4y+1=0.$

Lời giải

Chọn D

Ta có Loại các đáp án D vì không có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$

Xét đáp án A :

$x^2+y^2+2x-4y+9=0 \to a=-1,b=2,c=-9 \to a^2+b^2-c<0 \to$ loại A.

Xét đáp án B :

$x^2+y^2-6x+4y+13=0 \to a=3,b=-2,c=13 \to a^2+b^2-c<0 \to$ loại B.

Xét đáp án D :

$$2x^2+2y^2-8x-4y-6=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y-3=0 \to \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases} \to a^2+b^2-c>0.$$

Câu 49: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2-x-y+9=0$. **B.** $x^2+y^2-x=0$.

C. $x^2+y^2-2xy-1=0.$ **D.** $x^2-y^2-2x+3y-1=0.$

Lời giải

Chọn B

Loại các đáp án C và D vì không có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$

Xét đáp án A : $x^2+y^2-x-y+9=0 \to a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}, c=9 \to a^2+b^2-c<0 \to$ loại A.

Xét đáp án B : $x^2+y^2-x=0 \to a=\frac{1}{2}, b=c=0 \to a^2+b^2-c>0$.

Câu 50: Trong các phương trình sau, phương trình nào **không** phải là phương trình của đường tròn?

A. $x^2+y^2-x+y+4=0.$ **B.** $x^2+y^2-100y+1=0.$

C. $x^2+y^2-2=0.$ **D.** $x^2+y^2-y=0.$

Lời giải

Chọn A

Xét A : $x^2+y^2-x+y+4=0 \to a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=4 \to a^2+b^2-c<0$.

Các đáp án còn lại các hệ số a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2-c>0.$

Câu 51: Cho phương trình $x^2+y^2+2mx+2(m-1)y+2m^2=0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

A. $m<\frac{1}{2}$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $m>1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^2+y^2+2mx+2(m-1)y+2m^2=0$

$$\to \begin{cases} a=-m \\ b=1-m \\ c=2m^2 \end{cases} \to a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow -2m+1>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}.$$

Câu 52: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

A. $m\in\mathbb{R}.$ **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty).$

C. $m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty).$ **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty).$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0 \to \begin{cases} a=m \\ b=2(m-2) \\ c=6-m \end{cases} \to a^2+b^2-c>0$

$$\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right..$$

Câu 53: Cho phương trình $x^2+y^2-2x+2my+10=0$ (1). Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương không vượt quá 10 để (1) là phương trình của đường tròn?

A. Không có. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x^2+y^2-2x+2my+10=0 \to \begin{cases} a=1 \\ b=-m \\ c=10 \end{cases} \to a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow m^2-9>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=4;5\ldots;10.$

Câu 54: Cho phương trình $x^2+y^2-8x+10y+m=0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn có bán kính bằng 7.

A. $m=4$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-8$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^2+y^2-8x+10y+m=0 \to \begin{cases} a=4 \\ b=-5 \\ c=m \end{cases} \to a^2+b^2-c=R^2=49 \Leftrightarrow m=-8.$

Câu 55: Cho phương trình $x^2+y^2-2(m+1)x+4y-1=0$ (1). Với giá trị nào của m để (1) là phương trình đường tròn có bán kính nhỏ nhất?

A. $m=2.$ **B.** $m=-1.$ **C.** $m=1.$ **D.** $m=-2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2+y^2-2(m+1)x+4y-1=0 \to \begin{cases} a=m+1 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$

$\to R^2=a^2+b^2-c=(m+1)^2+5 \to R_{\min}=5 \Leftrightarrow m=-1.$

Câu 56: Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y+2)^2=25$ tại điểm $M(2;1)$ là:

A. $d:-y+1=0.$ **B.** $d:4x+3y+14=0.$

C. $d:3x-4y-2=0.$ **D.** $d:4x+3y-11=0.$

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2)$ nên tiếp tuyến tại M có VTPT là $\vec{n}=\overrightarrow{IM}=(4;3),$ nên có phương trình là: $4(x-2)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-11=0.$

Câu 57: Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=8$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $A(3;-4)$.

A. $d:x+y+1=0.$

B. $d:x-2y-11=0.$

C. $d:x-y-7=0.$

D. $d:x-y+7=0.$

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ nên tiếp tuyến tại A có VTPT là $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(2;-2)=2(1;-1)$,

Nên có phương trình là: $1.(x-3)-1.(y+4)=0 \Leftrightarrow x-y-7=0.$

Câu 58: Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $(C):x^2+y^2-3x-y=0$ tại điểm $N(1;-1)$ là:

A. $d:x+3y-2=0.$

B. $d:x-3y+4=0.$

C. $d:x-3y-4=0.$

D. $d:x+3y+2=0.$

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ nên tiếp tuyến tại N có VTPT là $\vec{n}=\overrightarrow{IN}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}(1;3)$,

Nên có phương trình là: $1(x-1)+3(y+1)=0 \Leftrightarrow x+3y+2=0.$

Câu 59: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:2x+y+7=0$.

A. $2x+y+1=0$ hoặc $2x+y-1=0.$

B. $2x+y=0$ hoặc $2x+y-10=0.$

C. $2x+y+10=0$ hoặc $2x+y-10=0.$

D. $2x+y=0$ hoặc $2x+y+10=0.$

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1), R=\sqrt{5}$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta:2x+y+c=0\ (c\neq 7)$.

Ta có $R=d[I;\Delta] \Leftrightarrow \frac{|c+5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-10 \end{array}\right.$.

Câu 60: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):x^2+y^2+4x+4y-17=0$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:3x-4y-2018=0$.

A. $3x-4y+23=0$ hoặc $3x-4y-27=0.$

B. $3x-4y+23=0$ hoặc $3x-4y+27=0.$

C. $3x-4y-23=0$ hoặc $3x-4y+27=0.$

D. $3x-4y-23=0$ hoặc $3x-4y-27=0.$

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-2), R=5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 3x-4y+c=0\ (c\neq -2018)$.

Ta có $R=d[I;\Delta]\Leftrightarrow \dfrac{|c+2|}{5}=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=23 \\ c=-27 \end{array}\right.$.

Câu 61: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 4x+3y+14=0$.

A. $4x+3y+14=0$ hoặc $4x+3y-36=0.$ **B.** $4x+3y+14=0.$

C. $4x+3y-36=0.$ **D.** $4x+3y-14=0$ hoặc $4x+3y-36=0.$

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1), R=5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 4x+3y+c=0\ (c\neq 14)$.

Ta có $R=d[I;\Delta]\Leftrightarrow \dfrac{|c+11|}{5}=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=14(l) \\ c=-36 \end{array}\right.$.

Câu 62: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+4)^2=25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$.

A. $4x-3y+5=0$ hoặc $4x-3y-45=0.$ **B.** $4x+3y+5=0$ hoặc $4x+3y+3=0.$

C. $4x+3y+29=0.$ **D.** $4x+3y+29=0$ hoặc $4x+3y-21=0.$

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-4), R=5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 4x+3y+c=0$.

Ta có $R=d[I;\Delta]\Leftrightarrow \dfrac{|c-4|}{5}=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=29 \\ c=-21 \end{array}\right.$.

Câu 63: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-2y-8=0$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 2x-3y+2018=0$.

A. $3x+2y-17=0$ hoặc $3x+2y-9=0.$ **B.** $3x+2y+17=0$ hoặc $3x+2y+9=0.$

C. $3x+2y+17=0$ hoặc $3x+2y-9=0.$ **D.** $3x+2y-17=0$ hoặc $3x+2y+9=0.$

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1), R=\sqrt{13}$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 3x+2y+c=0$.

Ta có $R=d[I;\Delta]\Leftrightarrow \dfrac{|c-4|}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=17 \\ c=-9 \end{array}\right.$.

Câu 64: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$, biết tiếp tuyến vuông góc với trục hoành.

A. $x=0$.
B. $y=0$ hoặc $y-4=0$.
C. $x=0$ hoặc $x-4=0$
D. $y=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2), R=2$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: x+c=0$.

Ta có $R=d[I;\Delta] \Leftrightarrow |c+2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-4 \end{array}\right.$.

Câu 65: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=8$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(5;-2)$.

A. $\Delta: x-5=0$.
B. $\Delta: x+y-3=0$ hoặc $\Delta: x-y-7=0$.
C. $\Delta: x-5=0$ hoặc $\Delta: x+y-3=0$.
D. $\Delta: y+2=0$ hoặc $\Delta: x-y-7=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2), R=2\sqrt{2}$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: ax+by-5a+2b=0\ \left(a^2+b^2 \neq 0\right)$.

Ta có: $d[I;\Delta]=R \Leftrightarrow \dfrac{|4a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2-b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \rightarrow a=b=1 \\ a=-b \rightarrow a=1, b=-1 \end{array}\right.$.

Câu 66: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $B(4;6)$.

A. $\Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta: 3x+4y-36=0$.
B. $\Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta: y-6=0$.
C. $\Delta: y-6=0$ hoặc $\Delta: 3x+4y-36=0$.
D. $\Delta: x-4=0$ hoặc $\Delta: 3x-4y+12=0$.

Lời giải

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2), R=2$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: ax+by-4a-6b=0\ \left(a^2+b^2 \neq 0\right)$.

Ta có: $d[I;\Delta]=R \Leftrightarrow \dfrac{|2a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow b(3b+4a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \rightarrow a=1, b=0 \\ 3b=-4a \rightarrow a=3, b=-4 \end{array}\right.$.

Câu 67: Cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-1)^2=25$ và điểm $M(9;-4)$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C), biết Δ đi qua M và không song song với các trục tọa độ. Khi đó khoảng cách từ điểm $P(6;5)$ đến Δ bằng:

A. $\sqrt{3}$.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;1), R=5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: ax+by-9a+4b=0\ (ab\neq 0)$.

Ta có: $d[I;\Delta]=R \Leftrightarrow \dfrac{|10a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5 \Leftrightarrow a(3a-4b)=0$

$\Leftrightarrow 3a=4b \to a=4, b=3 \to \Delta: 4x+3y-24=0.$ Suy ra $d[P;\Delta]=\dfrac{|24+15-24|}{5}=3.$

Câu 68: Có bao nhiêu đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-11=0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2), R=4 \to OI=\sqrt{5}<R \to$ không có tiếp tuyến nào của đường tròn kẻ từ O.

Câu 69: Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+3)^2=1$. Qua điểm $M(4;-3)$ có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C)?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có Vì $M\in(C)$ nên có đúng 1 tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ M.

Câu 70: Có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $N(-2;0)$ tiếp xúc với đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=4$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

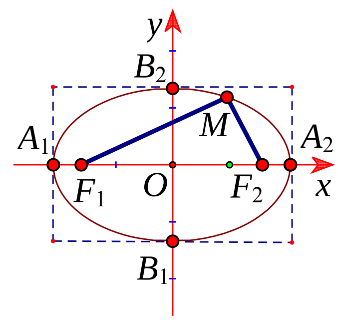
Chọn C

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3), R=2 \to IN=\sqrt{16+9}=5>R \to$ có đúng hai tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ N.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ELIP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ (a không đổi và $a > c > 0$) là một đường Elip.



Hình 3.3

- F_1, F_2 là hai tiêu điểm.
- $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự của Elip.

2. Phương trình chính tắc của Elip

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a^2 = b^2 + c^2.$$

Do đó điểm $M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ và $|x_0| \le a$, $|y_0| \le b$.

3. Tính chất và hình dạng của Elip

- Trục đối xứng Ox (chứa trục lớn), Oy (chứa trục bé).
- Tâm đối xứng O.
- Tọa độ các đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.
- Độ dài trục lớn $2a$. Độ dài trục bé $2b$.
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
- Tiêu cự $2c$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip khi biết phương trình chính tắc của elip.

1.Phương pháp giải.

Từ phương trình chính tắc ta xác định các đại lượng a, b và $b^2 = a^2 - c^2$ ta tìm được c elip từ đó ta suy ra được các yếu tố cần tìm.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Xác định các đỉnh, độ dài trục, tiêu cự, tiêu điểm , tâm sai của elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ b) $4x^2 + 25y^2 = 100$

Lời giải:

a) Từ phương trình của (E) ta có $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A_1(-2;0)$; $A_2(2;0)$; $B_1(0;-1)$; $B_2(0;1)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 4$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{3}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{3};0\right);\ F_2\left(\sqrt{3};0\right)$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Ta có $4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ suy ra $a = 5;\ b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$

Do đó tọa độ các đỉnh là $A_1\left(-5;0\right);\ A_2\left(5;0\right);\ B_1\left(0;-2\right);\ B_2\left(0;-2\right)$

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 10$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 4$

Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{21}$, tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{21};0\right);\ F_2\left(\sqrt{21};0\right)$,

Tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Dạng 2. Viết phương trình chính tắc của đường elip.

1. Phương pháp giải.

Để viết phương trình chính tắc của elip ta làm như sau:

+ Gọi phương trình chính tắc elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$

+ Từ giả thiết của bài toán ta thiết lập các phương trình, hệ phương trình từ giải thiết của bài toán để tìm các đại lượng a,b của elip từ đó viết được phương trình chính tắc của nó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a) (E) có độ dài trục lớn là 6 và tâm sai $e = \frac{2}{3}$

b) (E)có tọa độ một đỉnh là $\left(0;\sqrt{5}\right)$ và đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5};-1\right)$

c) (E) có tiêu điểm thứ nhất $\left(-\sqrt{3};0\right)$ và đi qua điểm $M(1;\frac{4\sqrt{33}}{5})$.

d) Hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $y + 2 = 0$ và có diện tích bằng 48.

e) (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Lời giải:

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$

a) (E) có độ dài trục lớn là 6 suy ra $2a=6\Leftrightarrow a=3$, Tâm sai $e=\frac{2}{3}$ nên

$\frac{c}{a}=\frac{2}{3}\Rightarrow c=2,\, b^2=a^2-c^2=5$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

b) (E) có một đỉnh có tọa độ là $\left(0;\sqrt{5}\right)$ nằm trên trục tung nên $b=\sqrt{5}$ do đó phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1\left(a>\sqrt{5}\right)$.

Mặt khác (E) đi qua điểm $M\left(\frac{4\sqrt{10}}{5};-1\right)$ nên $\frac{160}{25a^2}+\frac{1}{5}=1\Rightarrow a^2=8$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$

c) (E) có tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$ nên $c=\sqrt{3}$ suy ra $a^2=b^2+c^2=b^2+3$ (1)

Mặt khác $M(1;\frac{4\sqrt{33}}{5})\in(E)\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{528}{25b^2}=1$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được

$\frac{1}{b^2+3}+\frac{528}{25b^2}=1\Leftrightarrow 25b^4-478b^2-1584=0\Leftrightarrow b^2=22\Rightarrow a^2=25$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{22}=1$

d) (E) có hình chữ nhật cơ sở có một cạnh nằm trên đường thẳng $y+2=0$ suy ra $b=2$

Mặt khác hình chữ nhật cơ sở diện tích bằng 48 nên $2a.2b=48\Rightarrow b=6$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$

e) (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ suy ra $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ hay $4a^2=9b^2$ (3)

Hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20 suy ra $4\left(a+b\right)=20$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $a=3,\, b=2$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Dạng 3. Xác định điểm nằm trên đường elip thỏa mãn điều kiện cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc elip có phương trình chính tắc là

$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2.

Tìm điểm M trên (E) sao cho

a) Điểm M có tung gấp ba lần hoành độ

b) $MF_1 = 2MF_2$

c) $\widehat{F_1MF_2} = 60^0$

d) Diện tích tam giác ΔOAM lớn nhất với $A(1;1)$

Lời giải

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (E)$ suy ra $\frac{{x_M}^2}{25} + \frac{{y_M}^2}{9} = 1(*)$

a) Điểm M có tung gấp ba lần hoành độ do đó $y_M = 3x_M$ thay vào (*) ta được

$$\frac{x_M^2}{25} + \frac{(3x_M)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 26x_M^2 = 25 \Leftrightarrow x_M = \pm\frac{5}{\sqrt{26}}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1\left(\frac{5}{\sqrt{26}}; \frac{15}{\sqrt{26}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}; -\frac{15}{\sqrt{26}}\right)$

b) Từ phương trình (E) có $a^2 = 25, b^2 = 9$ nên $a = 5, b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$

Theo công thức tính bán kính qua tiêu điểm ta có :

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M = 5 + \frac{4}{5}x_M \text{ và } MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M = 5 - \frac{4}{5}x_M$$

Theo giải thiết $MF_1 = 2MF_2$ suy ra $5 + \frac{4}{5}x_M = 2\left(5 - \frac{4}{5}x_M\right) \Leftrightarrow x_M = \frac{25}{12}$

Thay vào (*) ta có : $\frac{25}{144}+\frac{y_M^2}{9}=1 \Leftrightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{119}}{4}$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn là: $M_1\left(\frac{25}{12};\frac{\sqrt{119}}{4}\right)$ và $M_2\left(\frac{25}{12};-\frac{\sqrt{119}}{4}\right)$

c) Ta có $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0) \Rightarrow \overrightarrow{MF_1}(x_M+4;y_M)$, $\overrightarrow{MF_2}(x_M-4;y_M)$

Vì $\widehat{F_1MF_2}=60^0$ nên $\cos 60^0=\frac{\overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2}}{\left|\overrightarrow{MF_1}\right|.\left|\overrightarrow{MF_2}\right|}=\frac{x_M^2+y_M^2-16}{\left(5+\frac{4}{5}x_M\right)\left(5-\frac{4}{5}x_M\right)}$

$\Leftrightarrow x_M^2+y_M^2-16=\frac{1}{2}\left(25-\frac{16}{25}x_M^2\right)$

Suy ra $\frac{x_M^2}{25}=\frac{57}{66}-\frac{y_M^2}{33}$ thế vào (*) ta được $\frac{57}{66}-\frac{y_M^2}{33}+\frac{{y_M}^2}{9}=1 \Rightarrow y_M=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}$ và $x_M=\pm\frac{5\sqrt{13}}{4}$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là $M_1\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$,

$M_2\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};\frac{3\sqrt{3}}{4}\right), M_3\left(\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ và $M_4\left(-\frac{5\sqrt{13}}{4};-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

d) Ta có $\overrightarrow{OA}(1;1)$ nên đường thẳng đi qua hai điểm O, A nhận $\vec{n}(-1;1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $-x+y=0$

$S_{OAM}=\frac{1}{2}OA.d(M;OA)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\left|-x_M+y_M\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left|-x_M+y_M\right|$

Áp dụng bất đẳng thức Bnhiacốpxki ta có

$S_{OAM}=\frac{1}{2}\left|-5.\frac{x_M}{5}+3.\frac{y_M}{3}\right|\le\frac{1}{2}.34.\left(\frac{{x_M}^2}{25}+\frac{{y_M}^2}{9}\right)=\frac{34}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $-\frac{x_M}{25}=\frac{y_M}{9}$ kết hợp với (*) ta được

$\begin{cases} x_M=\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_M=-\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_M=-\frac{25}{\sqrt{34}} \\ y_M=\frac{9}{\sqrt{34}} \end{cases}$

Vậy có hai điểm $M_1\left(\frac{25}{\sqrt{34}};-\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ và $M_2\left(-\frac{25}{\sqrt{34}};\frac{9}{\sqrt{34}}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Ví dụ 2: Cho elip (E) : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và $C\left(2;0\right)$. Tìm A,B thuộc (E) biết A,B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

Lời giải

Giả sử $A\left(x_0;y_0\right)$. Vì A,B đối xứng nhau qua trục hoành nên $B\left(x_0;-y_0\right)$ với $y_0>0$.

Vì $A\in\left(E\right)$ nên $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{1}=1\Leftrightarrow y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$ (1)

Vì tam giác ABC đều nên $AB^2=AC^2\Rightarrow\left(-2y_0\right)^2=\left(2-x_0\right)^2+\left(-y_0\right)^2$

$\Leftrightarrow 3y_0^2=4-4x_0+x_0^2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có

$$3\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)=4-4x_0+x_0^2\Leftrightarrow 7x_0^2-16x_0+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=\frac{2}{7}\end{array}\right.$$

+ Nếu $x_0=2$ thay vào (1) ta có $y_0=0$. Trường hợp này loại vì $A\equiv C$

+ Nếu $x_0=\frac{2}{7}$ thay vào (1) ta có $y_0=\pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7};-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\frac{2}{7};\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ có độ dài trục lớn bằng:

A. 5. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 50.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có độ dài trục lớn $A_1A_2=2a.$

Xét $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\begin{cases}a^2=25\\b^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}\longrightarrow A_1A_2=2.5=10.$

Câu 2: Elip $(E):4x^2+16y^2=1$ có độ dài trục lớn bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có độ dài trục lớn $A_1A_2=2a.$

Xét $(E): 4x^2+16y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{16}}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{1}{4} \\ b^2=\frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2} \longrightarrow A_1A_2=2.\frac{1}{2}=1.$

Câu 3: Elip $(E): x^2+5y^2=25$ có độ dài trục lớn bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có độ dài trục lớn $A_1A_2=2a.$

Xét $(E): x^2+5y^2=25 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ b^2=5 \end{cases} \Rightarrow a=5 \longrightarrow A_1A_2=2.5=10.$

Câu 4: Elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ có độ dài trục bé bằng:

A. 8. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có độ dài trục bé $B_1B_2=2b.$

Xét $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=100 \\ b^2=64 \end{cases} \Rightarrow b=8 \longrightarrow B_1B_2=2.8=16.$

Câu 5: Elip $(E): \frac{x^2}{16}+y^2=4$ có tổng độ dài trục lớn và trục bé bằng:

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có độ dài trục lớn $A_1A_2=2a$ và độ dài trục bé là $B_1B_2=2b.$ Khi đó, xét $(E):\frac{x^2}{16}+y^2=4\Leftrightarrow\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=64\\b^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=2\end{cases}\longrightarrow A_1A_2+B_1B_2=2.8+2.2=20.$$

Câu 6: Elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ có tiêu cự bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có tiêu cự là $2c.$

Xét $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=25\\b^2=16\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2-b^2=9\Rightarrow c=3\longrightarrow 2c=6.$

Câu 7: Elip $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ có tiêu cự bằng:

A. $\sqrt{5}.$ **B.** $5.$ **C.** $10.$ **D.** $2\sqrt{5}.$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có tiêu cự là $2c.$

Xét $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=9\\b^2=4\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2-b^2=5\Rightarrow c=\sqrt{5}\longrightarrow 2c=2\sqrt{5}.$ **Chọn D.**

Câu 8: Elip $(E):\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$, với $p>q>0$ có tiêu cự bằng:

A. $p+q$. **B.** $p-q$. **C.** p^2-q^2. **D.** $2\sqrt{p^2-q^2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình của Elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có tiêu cự là $2c.$

Xét $(E): \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=p^2 \\ b^2=q^2 \end{cases} \Rightarrow c^2=p^2-q^2 \Rightarrow c=\sqrt{p^2-q^2} \longrightarrow 2c=2\sqrt{p^2-q^2}$.

Câu 9: Elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ có một đỉnh nằm trên trục lớn là:

A. $(100;0)$. **B.** $(-100;0)$. **C.** $(0;10)$. **D.** $(-10;0)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là điểm nằm trên trục lớn của $(E) \Rightarrow M \in Ox \Rightarrow M(m;0)$.

Mặt khác $M \in (E)$ suy ra $\frac{m^2}{100}=1 \Leftrightarrow m^2=10^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(10;0) \\ M(-10;0) \end{array}\right.$.

Câu 10: Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ có một đỉnh nằm trên trục bé là:

A. $(4;0)$. **B.** $(0;12)$. **C.** $\left(0;2\sqrt{3}\right)$. **D.** $(4;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi N là điểm nằm trên trục bé của $(E) \Rightarrow N \in Oy \Rightarrow N(0;n)$.

Mặt khác $N \in (E)$ suy ra $\frac{n^2}{12}=1 \Leftrightarrow n^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2\sqrt{3} \\ n=-2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N\left(0;2\sqrt{3}\right) \\ N\left(0;-2\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$.

Câu 11: Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ có một tiêu điểm là:

A. $(0;3)$. **B.** $\left(0;\sqrt{6}\right)$. **C.** $\left(-\sqrt{3};0\right)$. **D.** $(3;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình của (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, có tọa độ tiêu điểm $F(\pm c;0)$.

Xét $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow c^2=a^2-b^2=3 \Rightarrow c=\sqrt{3}$.

Vậy tiêu điểm của Elip là $F_1\left(\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{3};0\right)$.

Câu 12: Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip $(E): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$?

A. $F_1(-1;0)$ và $F_2(1;0)$.
B. $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$.
C. $F_1(0;-1)$ và $F_2(0;1)$.
D. $F_1(-2;0)$ và $F_2(2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình của (E) là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ có tọa độ tiêu điểm $F(\pm c;0).$

Xét $(E): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=5 \\ b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow c^2=a^2-b^2=1 \Rightarrow c=1.$

Vậy tiêu điểm của Elip là $F_1(1;0),\ F_2(-1;0).$

Câu 13: Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Tỉ số e của tiêu cự và độ dài trục lớn của elip bằng:

A. $e=1.$
B. $e=\frac{\sqrt{7}}{4}.$
C. $e=\frac{3}{4}.$
D. $e=\frac{5}{4}.$

Lời giải

Chọn B

Xét $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ b^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ c^2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ c=\sqrt{7} \end{cases} \longrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$

Câu 14: Elip $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Tỉ số f của độ dài trục lớn và tiêu cự của elip bằng:

A. $f=\frac{3}{2}$.
B. $f=\frac{3}{\sqrt{5}}$.
C. $f=\frac{2}{3}$.
D. $f=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ c^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=\sqrt{5} \end{cases}.$

Vậy tỉ số f cần tính là $f=\frac{2a}{2c}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$

Câu 15: Elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$. Tỉ số k của tiêu cự và độ dài trục bé của elip bằng:

A. $k=8$. **B.** $k=\sqrt{8}$. **C.** $k=1$. **D.** $k=-1$.

Lời giải

Chọn C

Xét $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=8 \\ c^2=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2\sqrt{2} \\ c=2\sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy tỉ số k cần tính là $k=\dfrac{2c}{2b}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1$. **Chọn C.**

Câu 16: Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. (E) có các tiêu điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$.

B. (E) có tỉ số $\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$.

C. (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$.

D. (E) có độ dài trục nhỏ bằng 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow (E): \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1 \longrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4 \end{cases}$

Do đó, độ dài trục nhỏ của (E) là 6.

Câu 17: Cho elip $(E): x^2+4y^2=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Elip có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$. **B.** Elip có trục nhỏ bằng 2.

C. Elip có một tiêu điểm là $F\left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$. **D.** Elip có trục lớn bằng 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(E): x^2+4y^2=1 \Leftrightarrow (E): \dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1 \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Do đó:

- (E) có tiêu cự $F_1F_2 = 2c = \sqrt{3}$.

- (E) có trục nhỏ bằng 1, trục lớn bằng 2.

- (E) có tiêu điểm là $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Câu 18: Cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. (E) có trục lớn bằng 6. **B.** (E) có trục nhỏ bằng 4.

C. (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{5}$. **D.** (E) có tỉ số $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ta có $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow (E): \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5} \end{cases}$.

Do đó, (E) có tiêu cự bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 19: Phương trình của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục nhỏ bằng 6 là:

A. $9x^2 + 16y^2 = 144.$ **B.** $9x^2 + 16y^2 = 1.$

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$ **D.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$

Lời giải

Chọn A

Xét đáp án A. Ta có $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144 \Leftrightarrow (E): \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$.

Do đó (E) có độ dài trục lớn là 8, độ dài trục nhỏ là 6.

Câu 20: Tìm phương trình chính tắc của elip có tiêu cự bằng 6 và trục lớn bằng 10.

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **B.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1.$ **C.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$ **D.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Lời giải

Chọn D

Elip (E) có $\begin{cases} F_1F_2 = 6 = 2c \\ A_1A_2 = 10 = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$.

Do đó, phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 21: Elip có độ dài trục lớn là 10 và có một tiêu điểm $F(-3;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **B.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1.$ **C.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1.$ **D.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Lời giải

Chọn D

Elip (E) có độ dài trục lớn là 10 $\longrightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Elip (E) có một tiêu điểm $F(-3;0) \longrightarrow c = 3$.

Khi đó, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Câu 22: Elip có độ dài trục nhỏ là $4\sqrt{6}$ và có một tiêu điểm $F(5;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{96} = 1.$ **B.** $\frac{x^2}{101} + \frac{y^2}{96} = 1.$ **C.** $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1.$ **D.** $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{24} = 1.$

Lời giải

Chọn C

Elip (E) có độ dài trục nhỏ là $4\sqrt{6} \longrightarrow 2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$.

Elip (E) có một tiêu điểm $F(5;0) \longrightarrow c = 5$. Khi đó, $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 7$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$.

Câu 23: Elip có một đỉnh là $A(5;0)$ và có một tiêu điểm $F_1(-4;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$ **B.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$ **C.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$ **D.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1.$

Lời giải

Chọn C

Elip (E) có một đỉnh là $A(5;0) \in Ox \longrightarrow a = 5$.

Elip (E) có một tiêu điểm $F(-4;0) \longrightarrow c = 4$.

Khi đó, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 24: Elip có hai đỉnh là $(-3;0);(3;0)$ và có hai tiêu điểm là $(-1;0);(1;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{9}=1.$

Lời giải

Chọn C

Elip (E) có hai đỉnh là $(-3;0)\in Ox$ và $(3;0)\in Ox \longrightarrow a=3$.

Elip (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-1;0)$ và $F_2(1;0) \longrightarrow c=1$.

Khi đó, $b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{2}$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 25: Tìm phương trình chính tắc của elip nếu trục lớn gấp đôi trục bé và có tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$.

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{24}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1.$

Lời giải

Chọn A

Elip (E) có trục lớn gấp đôi trục bé $\Rightarrow A_1A_2=2B_1B_2 \Leftrightarrow 2a=2.2b \Leftrightarrow a=2b$.

Elip (E) có tiêu cự bằng $4\sqrt{3} \longrightarrow 2c=4\sqrt{3} \Rightarrow c=2\sqrt{3}$.

Ta có $a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow (2b)^2=b^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow b=2$. Khi đó, $a=2b=4$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 26: Lập phương trình chính tắc của elip biết độ dài trục lớn hơn độ dài trục nhỏ 4 đơn vị, độ dài trục nhỏ hơn độ dài tiêu cự 4 đơn vị.

A. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{60}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1.$

Lời giải

Chọn C

Elip (E) có độ dài trục lớn hơn độ dài trục nhỏ 4 đơn vị $\longrightarrow 2a-2b=4$.

Elip (E) có độ dài trục nhỏ hơn độ dài tiêu cự 4 đơn vị $\longrightarrow 2b-2c=4$.

Ta có

$$\begin{cases} a-b=2 \\ b-c=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a^2=b^2+(b-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2 \\ (b+2)^2=2b^2-4b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2 \\ b^2-8b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=8 \end{cases}$$

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

Câu 27: Lập phương trình chính tắc của elip biết tỉ số giữa độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $\sqrt{2}$, tổng bình phương độ dài trục lớn và tiêu cự bằng 64.

A. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$

Lời giải

Chọn A

Elip (E) có tỉ số độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng $\sqrt{2} \longrightarrow \frac{2b}{2c}=\sqrt{2} \Rightarrow c=\frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác, $(2a)^2+(2c)^2=64 \Leftrightarrow a^2+c^2=16$.

Ta có $\begin{cases} c=\frac{b\sqrt{2}}{2} \\ a^2+c^2=16 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+\frac{1}{2}b^2=16 \\ a^2-\frac{3}{2}b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=12 \\ b^2=8 \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 28: Elip có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{5}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{16}=1.$

Lời giải

Chọn A

Elip (E) có một tiêu điểm $F(-2;0) \longrightarrow c=2$.

Elip (E) có tích độ dài trục lớn với trục bé bằng $12\sqrt{5} \longrightarrow 2a.2b=12\sqrt{5} \Rightarrow ab=3\sqrt{5}$.

Ta có $\begin{cases} ab=3\sqrt{5} \\ a^2-b^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3\sqrt{5}}{b} \\ \left(\frac{3\sqrt{5}}{b}\right)^2-b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\sqrt{5} \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

Câu 29: Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 26 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{12}{13}$.

A. $\frac{x^2}{26}+\frac{y^2}{25}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{25}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{5}=1.$

Lời giải

Chọn B

Elip (E) có độ dài trục lớn bằng $26 \longrightarrow 2a=26 \Rightarrow a=13$.

Elip (E) có tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{12}{13} \longrightarrow \frac{2c}{2a}=\frac{12}{13} \Rightarrow c=\frac{12}{13}a=12$.

Do đó, $b=\sqrt{a^2-c^2}=5$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

Câu 30: Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 6 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3}$.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1.$

Lời giải

Chọn A

Elip (E) có độ dài trục lớn bằng $6 \longrightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$.

Elip (E) có tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{2c}{2a}=\frac{1}{3} \Rightarrow c=\frac{1}{3}a=1$.

Do đó, $b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{2}$.

Phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

Câu 31: Lập phương trình chính tắc của elip có độ dài trục nhỏ bằng 12 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{4}{5}$.

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Độ dài trục nhỏ của Elip là 12 suy ra $2b=12 \Leftrightarrow b=6.$

Tiêu cự của Elip là $2c,$ độ dài trục lớn là $2a$ suy ra tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow c=\frac{4}{5}a.$

Mặt khác $a^2-b^2=c^2 \Leftrightarrow a^2-6^2=\frac{16}{25}a^2 \Leftrightarrow \frac{9}{25}a^2=36 \Leftrightarrow a^2=100.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$

Câu 32: Elip có tổng độ dài hai trục bằng 18 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{3}{5}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Tổng độ dài hai trục của Elip là $2a+2b=18 \Leftrightarrow a+b=9 \Leftrightarrow b=9-a.$

Tiêu cự của Elip là $2c,$ độ dài trục lớn là $2a$ suy ra tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow c=\frac{3}{5}a.$

Mà $a^2-b^2=c^2$ suy ra:

$a^2-(9-a)^2=\frac{9}{25}a^2 \Leftrightarrow a=5$ $(a=45$ loại vì $b=9-45=-36<0)$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

Câu 33: Elip có tổng độ dài hai trục bằng 10 và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Tổng độ dài hai trục của Elip là ..

Tiêu cự của Elip là $2c,$ độ dài trục lớn là $2a$ suy ra tỉ số $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a.$

Mà $a^2-b^2=c^2$ suy ra $a^2-(5-a)^2=\frac{5}{9}a^2 \Leftrightarrow a=3$ $(a=15$ loại vì $b=5-15=-10<0)$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

Câu 34: Lập phương trình chính tắc của elip, biết elip đi qua hai điểm $A(7;0)$ và $B(0;3)$.

A. $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{9}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1.$

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip đi qua điểm $A(7;0)$ suy ra $\frac{7^2}{a^2}=1\Leftrightarrow a^2=49.$

Elip đi qua điểm $B(0;3)$ suy ra $\frac{3^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=9.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1.$

Câu 35: Elip đi qua các điểm $M(0;3)$ và $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$ có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip đi qua điểm $M(0;3)$ suy ra $\frac{0^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=9.$

Elip đi qua điểm $N\left(3;-\frac{12}{5}\right)$ suy ra $\frac{3^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{12}{5}\right)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{9}{a^2}=1-\frac{144}{25}.\frac{1}{b^2}\Leftrightarrow a^2=25.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

Câu 36: Elip đi qua các điểm $A(0;1)$ và $N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ có phương trình chính tắc là:

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1.$

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip đi qua điểm $A(0;1)$ suy ra $\frac{0^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=1$.

Elip đi qua điểm $N\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ suy ra $\frac{1^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}=1-\frac{3}{4}.\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a^2=4$.

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

Câu 37: Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó có trục lớn gấp đôi trục bé và đi qua điểm $M(2;-2)$.

A. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. **B.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$. **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Elip có độ dài trục lớn gấp đôi trục bé suy ra $2a=2.2b \Leftrightarrow a=2b$.

Elip đi qua điểm $M(2;-2)$ suy ra $\frac{2^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}$.

Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} a=2b \\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4b^2 \\ \frac{1}{4b^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=20 \\ b^2=5 \end{cases}$.

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

Câu 38: Tìm phương trình chính tắc của elip, biết elip có tiêu cự bằng 6 và đi qua $A(5;0)$.

A. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **D.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{81}=1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Elip có tiêu cự bằng 6 suy ra $2c=6 \Leftrightarrow c=3 \Leftrightarrow a^2-b^2=c^2=9$.

Elip đi qua điểm $A(5;0)$ suy ra $\frac{5^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow a^2=25$.

Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^2-b^2=9 \\ a^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=25 \\ b^2=16 \end{cases}$.

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Câu 39: Tìm phương trình chính tắc của elip, biết elip có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ và đi qua $A(2;1)$.

A. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. **B.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. **C.** $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Elip có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$ suy ra $2c=2\sqrt{3}\Leftrightarrow c=\sqrt{3}\Leftrightarrow a^2-b^2=c^2=3$ (1).

Elip đi qua điểm $A(2;1)$ suy ra $\frac{2^2}{a^2}+\frac{1^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases}a^2-b^2=3\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2+3\\ \frac{4}{b^2+3}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2+3\\ b^4-2b^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=6\\ b^2=3\end{cases}$.

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 40: Tìm phương trình chính tắc của elip, biết elip có tiêu cự bằng 8 và đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$.

A. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, với $a>b>0$.

Elip có tiêu cự bằng 8 suy ra $2c=8\Leftrightarrow c=4\Leftrightarrow a^2-b^2=c^2=16$ (1).

Elip đi qua điểm $M\left(\sqrt{15};-1\right)$ suy ra $\frac{\left(\sqrt{15}\right)^2}{a^2}+\frac{(-1)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{15}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases}a^2-b^2=16\\ \frac{15}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2+16\\ \frac{15}{b^2+16}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=b^2+16\\ b^4=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=20\\ b^2=4\end{cases}$.

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 41: Elip qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ và có một tiêu điểm $F(-2;0)$. Phương trình chính tắc của elip là:

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **C.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip có một tiêu điểm là $F(-2;0)$ suy ra $c=2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2=b^2+4 \ (1).$

Elip đi qua điểm $M\left(2;\frac{5}{3}\right)$ suy ra $\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1 \ (2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} a^2=b^2+4 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+4 \\ \frac{4}{b^2+4}+\frac{25}{9b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=5 \end{cases}.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$

Câu 42: Phương trình chính tắc của elip có hai tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$ và đi qua điểm $M(2;3)$ là:

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1.$

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip có hai tiêu điểm là $F_1(-2;0), F_2(2;0) \Rightarrow c=2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2=b^2+4 \ (1).$

Elip đi qua điểm $M(2;3)$ suy ra $\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \ (2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} a^2=b^2+4 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+4 \\ \frac{4}{b^2+4}+\frac{9}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+4 \\ b^4-4b^2-36=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=16 \\ b^2=12 \end{cases}.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$

Câu 43: Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm $A(6;0)$ và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{2}$.

A. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1.$

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip đi qua điểm $A(6;0)$ suy ra $\frac{6^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow a^2=36.$

Tỉ số của tiêu cực với độ dài trục lớn bằng $\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{2c}{2a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow c^2=\frac{a^2}{4}.$

Kết hợp với điều kiện $b^2=a^2-c^2,$ ta được $b^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2=\frac{3}{4}.36=27.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$

Câu 44: Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm $N\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ và tỉ số của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng $\frac{2}{3}$.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1.$

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip đi qua điểm $N\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ suy ra $\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(-\frac{5}{3}\right)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1 \qquad (1).$

Tỉ số của tiêu cực với độ dài trục lớn bằng $\frac{2}{3}$ suy ra $\frac{2c}{2a}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow c^2=\frac{4}{9}a^2.$

Kết hợp với điều kiện $b^2=a^2-c^2,$ ta được $b^2=a^2-\frac{4}{9}a^2=\frac{5}{9}a^2 \Leftrightarrow 9b^2=5a^2 \qquad (2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{25}{9b^2}=1\\ 9b^2=5a^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{25}{5a^2}=1\\ 9b^2=5a^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{9}{a^2}=1\\ 9b^2=5a^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=9\\ b^2=5\end{cases}.$

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1.$

Câu 45: Tìm phương trình chính tắc của elip nếu nó đi qua điểm $A\left(2;\sqrt{3}\right)$ và tỉ số của độ dài trục lớn với tiêu cự bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1.$

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ với $a>b>0.$

Elip đi qua điểm $A\left(2;\sqrt{3}\right)$ suy ra $\frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$ (1).

Tỉ số của độ dài trục lớn với tiêu cự bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$ suy ra $\frac{2a}{2c}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow c^2=\frac{3}{4}a^2$.

Kết hợp với điều kiện $b^2=a^2-c^2$, ta được $b^2=a^2-\frac{3}{4}a^2=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow a^2=4b^2$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\\a^2=4b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{4b^2}+\frac{3}{b^2}=1\\a^2=4b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{b^2}=1\\a^2=4b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=16\\b^2=4\end{cases}$.

Vậy phương trình cần tìm là $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 46: Cho elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$. Gọi $2c$ là tiêu cự của (E). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $c^2=a^2+b^2$. **B.** $b^2=a^2+c^2$. **C.** $a^2=b^2+c^2$. **D.** $c=a+b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $c^2=a^2-b^2\longleftrightarrow a^2=b^2+c^2$.

Câu 47: Cho elip có hai tiêu điểm F_1, F_2 và có độ dài trục lớn bằng $2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $2a=F_1F_2$. **B.** $2a>F_1F_2$. **C.** $2a<F_1F_2$. **D.** $4a=F_1F_2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a>c\longleftrightarrow 2a>2c$

$\longleftrightarrow 2a>F_1F_2$.

Câu 48: Cho elip $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Hai điểm A, B là hai đỉnh của elip lần lượt nằm trên hai trục Ox, Oy. Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng:

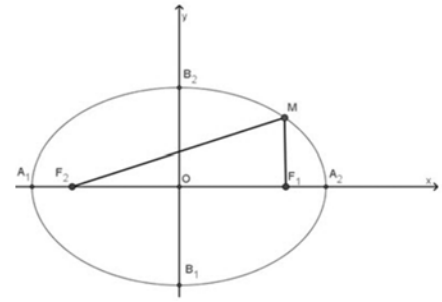
A. 34. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{136}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^2 = 25 \longrightarrow a = 5$

và $b^2 = 9 \longrightarrow b = 3$



Tam giác OAB vuông, có

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{34}.$

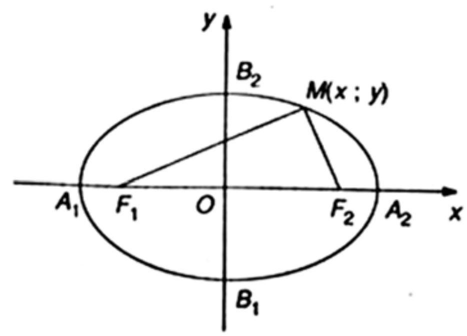
Vậy $AB = \sqrt{34}$.

Câu 49: Một elip (E) có trục lớn dài gấp 3 lần trục nhỏ. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng:

A. $e = \dfrac{1}{3}.$ **B.** $e = \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$ **C.** $e = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

Lời giải

Chọn D



. Ta có $A_1A_2 = 3B_1B_2 \longrightarrow a = 3b$

$\longrightarrow a^2 = 9b^2 = 9\left(a^2 - c^2\right) \longrightarrow 9c^2 = 8a^2$

$\longrightarrow \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{8}{9} \longrightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

Vậy $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.$

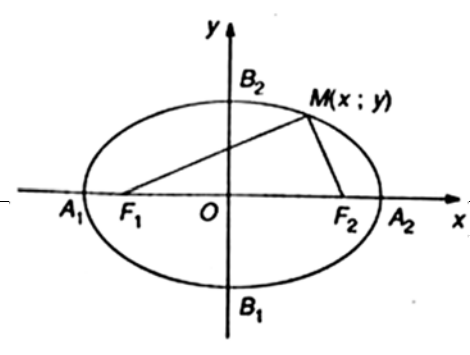
Câu 50: Một elip (E) có khoảng cách giữa hai đỉnh kế tiếp nhau gấp $\dfrac{3}{2}$ lần tiêu cự của nó. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn bằng:

A. $e = \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$ **B.** $e = \dfrac{2}{5}.$ **C.** $e = \dfrac{\sqrt{3}}{5}.$ **D.** $e = \dfrac{\sqrt{2}}{5}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB = \dfrac{3}{2}F_1F_2 \longrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 3c$



$\longrightarrow a^2+b^2=9c^2 \longrightarrow a^2+\left(a^2-c^2\right)=9c^2$

$\longrightarrow 2a^2=10c^2$

$\longrightarrow \dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{5} \longrightarrow \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Vậy $e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Câu 51: Cho điểm $M(2;3)$ nằm trên đường elip (E) có phương trình chính tắc: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Trong các điểm sau đây điểm nào không nằm trên (E):

A. $M_1(-2;3)$. **B.** $M_2(2;-3)$. **C.** $M_3(-2;-3)$. **D.** $M_4(3;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm M đối xứng qua Ox có tọa độ là $(2;-3)$.

Điểm M đối xứng qua Oy có tọa độ là $(-2;3)$.

Điểm M đối xứng qua gốc tọa độ O có tọa độ là $(-2;-3)$.

Câu 52: Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (E) không có trục đối xứng.

B. (E) có một trục đối xứng là trục hoành.

C. (E) có hai trục đối xứng là trục hoành và trục tung.

D. (E) có vô số trục đối xứng.

Lời giải

Chọn C

Ta có (E) có hai trục đối xứng là trục hoành và trục tung.

Câu 53: Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (E) không có tâm đối xứng. **B.** (E) có đúng một tâm đối xứng.

C. (E) có hai tâm đối xứng . **D.** (E) có vô số tâm đối xứng.

Lời giải

Chọn B

Ta có (E) có đúng một tâm đối xứng là gốc tọa độ O.

Câu 54: Elip (E) có độ dài trục bé bằng tiêu cự. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn của (E) bằng:

A. $e=1$. **B.** $e=\sqrt{2}$. **C.** $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $e=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $B_1B_2=F_1F_2 \longleftrightarrow b=c$

$\longrightarrow b^2=c^2 \longrightarrow \left(a^2-c^2\right)=c^2$

$\longrightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Vậy $e=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 55: Elip (E) có hai đỉnh trên trục nhỏ cùng với hai tiêu điểm tạo thành một hình vuông. Tỉ số e của tiêu cự với độ dài trục lớn của (E) bằng:

A. $e=1$. **B.** $e=\sqrt{2}$. **C.** $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $e=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{F_1B_1F_2}=90^0 \longrightarrow OB_1=\frac{F_1F_2}{2} \longrightarrow b=c$

$\longrightarrow b^2=c^2 \longrightarrow \left(a^2-c^2\right)=c^2$

$\longrightarrow \frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

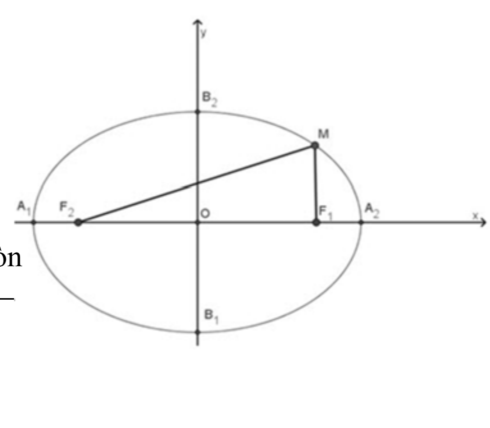
Vậy $e=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 56: Elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của elip cùng nằm trên một đường tròn. Độ dài trục nhỏ của (E) bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B



Ta có $A_1A_2=4\sqrt{2} \longrightarrow a=2\sqrt{2}$

Và bốn điểm F_1,B_1,F_2,B_2 cùng nằm trên một đường tròn

$\longrightarrow b = c \longrightarrow b^2 = c^2$

$\longrightarrow b^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow b = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = 2.$

Vậy độ dài trục nhỏ của (E) là 4.

Câu 57: Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và M là một điểm tùy ý trên (E). Khi đó:

A. $3 \le OM \le 4$. **B.** $4 \le OM \le 5$. **C.** $OM \ge 5$. **D.** $OM \le 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2 = 16 \longrightarrow a = 4$ và $b^2 = 9 \longrightarrow b = 3$.

Mà $OB \le OM \le OA \longleftrightarrow 3 \le OM \le 4$.

Câu 58: Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu M có hoành độ bằng -13 thì khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm bằng:

A. 10 và 6. **B.** 8 và 18. **C.** 13 $\pm\sqrt{5}$. **D.** 13 $\pm\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^2 = 169 \longrightarrow a = 13$, $b^2 = 144 \longrightarrow b = 12$ và $c^2 = \sqrt{a^2 - b^2} = 5$

Tọa độ hai tiêu điểm $F_1(-5;0), F_2(5;0)$

M có hoành độ bằng $-13 \longrightarrow y = 0, M(-13;0)$.

$\longrightarrow MF_1 = 8, MF_2 = 18.$

Câu 59: Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ và điểm M nằm trên (E). Nếu M có hoành độ bằng 1 thì khoảng cách từ M đến hai tiêu điểm bằng:

A. $3{,}5$ và $4{,}5$. **B.** 3 và 5. **C.** $4 \pm \sqrt{2}$. **D.** $4 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2 = 16 \longrightarrow a = 4$, $b^2 = 12 \longrightarrow b = 2\sqrt{3}$ và $c^2 = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$

Tọa độ hai tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$

M có hoành độ bằng $1 \longrightarrow y = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Do tính đối xứng của (E) nên chọn $M\left(1;\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

$\longrightarrow MF_1 = \frac{9}{2}, MF_2 = \frac{7}{2}$.

Câu 60: Cho elip có phương trình $16x^2 + 25y^2 = 100$. Tính tổng khoảng cách từ điểm M thuộc elip có hoành độ bằng 2 đến hai tiêu điểm.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $16x^2 + 25y^2 = 100 \longleftrightarrow \frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{4} = 1$

$a^2 = \frac{25}{4} \longrightarrow a = \frac{5}{2}$, $b^2 = 4 \longrightarrow b = 2$

$MF_1 + MF_2 = 2a = 5.$

Câu 61: Cho elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Qua một tiêu điểm của (E) dựng đường thẳng song song với trục Oy và cắt (E) tại hai điểm M và N.

Tính độ dài MN.

A. $\frac{48}{5}$. **B.** $\frac{36}{5}$. **C.** 25. **D.** $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64.$

Khi đó, Elip có tiêu điểm là $F_1(-8;0) \Rightarrow$ đường thẳng $d // Oy$ và đi qua F_1 là $x = -8$.

Giao điểm của d và (E) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = -8 \\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = \pm\frac{24}{5} \end{cases}.$$

Vậy tọa độ hai điểm $M\left(-8;\frac{24}{5}\right)$, $N\left(-8;-\frac{24}{5}\right) \Rightarrow MN = \frac{48}{5}$

Câu 62: Cho $(E): \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$. Một đường thẳng đi qua điểm $A(2;2)$ và song song với trục hoành cắt (E) tại hai điểm phân biệt M và N. Tính độ dài MN.

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $15\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{15}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2;2)$ và song song trục hoành có phương trình là $y=2$.

Ta có $d\cap(E)\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1\\ y=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ \frac{x^2}{20}+\frac{2^2}{16}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ x^2=15\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\ \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{15}\\ x=-\sqrt{15}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}M\left(\sqrt{15};2\right)\\ N\left(-\sqrt{15};2\right)\end{cases}$

Vậy độ dài đoạn thẳng $MN=2\sqrt{15}$.

Câu 63: Dây cung của elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài bằng:

A. $\frac{2c^2}{a}$. **B.** $\frac{2b^2}{a}$. **C.** $\frac{2a^2}{c}$. **D.** $\frac{a^2}{c}$.

Lời giải

Chọn B

Hai tiêu điểm có tọa độ lần lượt là $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Đường thẳng chứa dây cung vuông góc với trục lớn (trục hoành) tại tiêu điểm F có phương trình là $\Delta: x=c$.

Suy ra $\Delta\cap(E)\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=c\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=c\\ \frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=c\\ y^2=\frac{b^2\left(a^2-c^2\right)}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=c\\ y=\pm\frac{b^2}{a}\end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (E) là $M\left(c;\frac{b^2}{a}\right)$, $N\left(c;-\frac{b^2}{a}\right)\Rightarrow MN=\frac{2b^2}{a}$.

Câu 64: Đường thẳng $d: 3x+4y-12=0$ cắt elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ tại hai điểm phân biệt M và N. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và (E) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+4y-12=0\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-\dfrac{3x}{4}\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{\left(3-\dfrac{3x}{4}\right)^2}{9}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-\dfrac{3x}{4}\\ x^2-4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3-\dfrac{3x}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.\end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm là $\begin{cases}M(0;3)\\ N(4;0)\end{cases} \Rightarrow MN=5.$