

Câu 1 (3,0 điểm). Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi

$$x_0 = 1; x_1 = 2017 \text{ và } x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{1 + (n+1)x_n} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = nx_n$ và $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k-1}}$.

a. Chứng minh rằng (y_n) là dãy số giảm.

b. Tìm giới hạn của dãy (z_n) .

Câu 2 (2,0 điểm). Cho ba số thực $a, b, c > 2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c - 8$.

Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 9 \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}.$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi D là trung điểm cạnh AC và M là trung điểm cạnh BC . Đoạn thẳng AM cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại điểm E . Đường thẳng BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại điểm F khác B . Đường thẳng AF cắt đường thẳng BE tại I , đường thẳng CI cắt đường thẳng BD tại K .

a. Chứng minh rằng $DA = DF$.

b. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABK .

Câu 4 (1,0 điểm). Một số nguyên dương a được gọi là số k -phương ($k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2$) nếu tồn tại số nguyên dương b sao cho $a = b^k$. Cho cấp số cộng $(a_n)_{n \geq 0}$ với các số hạng là số nguyên dương và có công sai bằng 2017. Biết rằng có hai số hạng a_m và a_n của cấp số cộng tương ứng là số i -phương và số j -phương, trong đó $(i, j) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại một số hạng của cấp số cộng là số ij -phương.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho S là một số nguyên dương sao cho S chia hết cho tất cả các số nguyên dương từ 1 đến 2017. Xét k số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_k$ (không nhất thiết phân biệt) thuộc tập hợp $\{1, 2, \dots, 2017\}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq 2S$. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra từ các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ một vài số sao cho tổng của chúng bằng S .

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

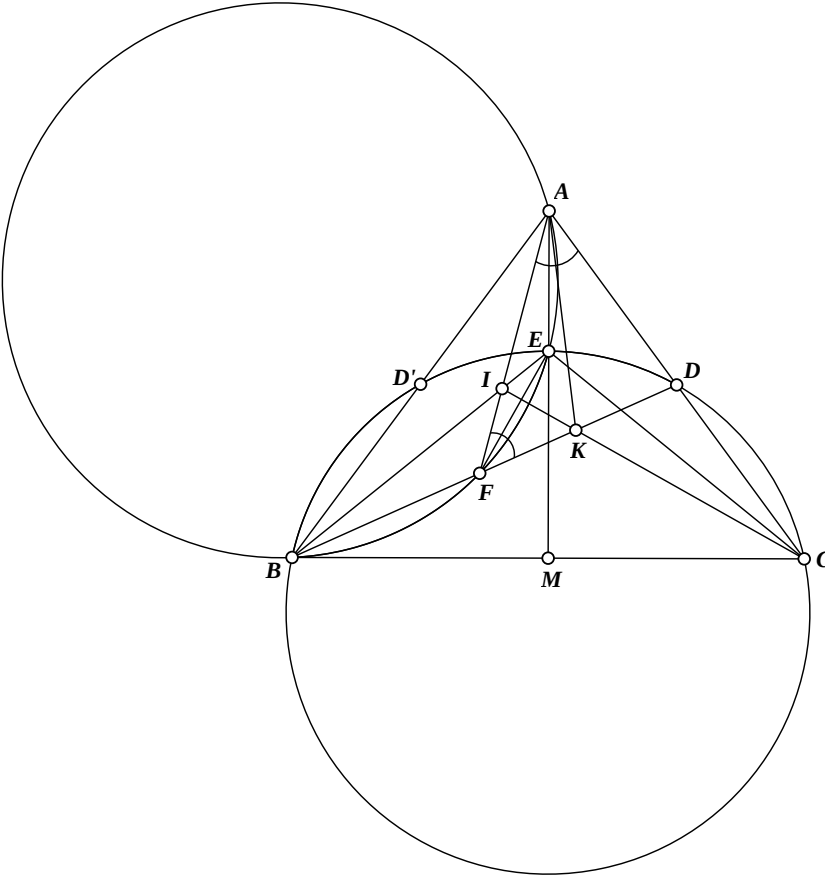
Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	a (2,0 điểm)	
	Ta thấy ngay $x_n > 0, \forall n \geq 0$.	0,5
	Ta có $y_n - y_{n+1} = nx_n - (n+1)x_{n+1} = nx_n - \frac{n(n+1)x_n^2}{1+(n+1)x_n} = \frac{nx_n}{1+(n+1)x_n} > 0, \forall n \geq 1$.	1,0
	Suy ra dãy (y_n) giảm.	0,5
	b (1,0 điểm)	
	Dãy (y_n) giảm và $y_n > 0, \forall n$ nên (y_n) hội tụ. Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \geq 0$.	0,25
	Ta có $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - y_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx_n}{1+(n+1)x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx_n}{1+\frac{n+1}{n}(nx_n)} = \frac{a}{1+a}$. Do đó $a = 0$.	
	Từ giả thiết suy ra $x_{n+1} + (n+1)x_n x_{n+1} = nx_n^2 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = nx_n - (n+1)x_{n+1}$.	0,25
	Do đó $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_1}{x_0} + \sum_{k=2}^n \frac{x_k}{x_{k-1}} = \frac{x_1}{x_0} + x_1 - nx_n = 4034 - y_n, \forall n \geq 1$.	0,25
	Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 4034$.	0,25
2	(2,0 điểm)	
	Đặt $x = a + b + c$. Ta có $a + b + c - 8 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow x - 8 \geq \frac{9}{x}$.	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 9$. Vậy bất đẳng thức thứ nhất được chứng minh.	0,5
	Ta có $2x - 16 = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{a-2}{a} + \frac{b-2}{b} + \frac{c-2}{c} = 19 - 2x$ (1) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwazt ta được: $\frac{a-2}{a} + \frac{b-2}{b} + \frac{c-2}{c} \geq \frac{[(a-2)+(b-2)+(c-2)]^2}{a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)} = \frac{(x-6)^2}{a^2+b^2+c^2-2x}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $19 - 2x \geq \frac{(x-6)^2}{a^2+b^2+c^2-2x} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 2x + \frac{(x-6)^2}{19-2x}$ (3).	0,25
	BĐT thứ hai tương đương với $ab+bc+ca \leq 27 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \leq 54$ $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq x^2 - 54.$	0,25

	Ta cần chứng minh $2x + \frac{(x-6)^2}{19-2x} \geq x^2 - 54$ (4). Thật vậy $(4) \Leftrightarrow (x-9)(x^2 - 2x - 59) \geq 0$. BĐT này luôn đúng do $x \geq 9$. Từ (3) và (4) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra ở cả hai BĐT khi $a = b = c = 3$.	0,25
3	(3,0 điểm) 	
	3a (1,5 điểm)	
	Do tứ giác $ABFE$ nội tiếp nên $AFD = 180^\circ - AFB = 180^\circ - AEB = BEM$ (1)	0,5
	Mặt khác do AM là trung trực của BC và tứ giác $BEDC$ nội tiếp nên $BEM = \frac{1}{2} BEC = \frac{1}{2} BDC \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $AFD = \frac{1}{2} BDC \Rightarrow AFD = DAF$. Vậy tam giác DAF cân tại D, tức là $DA = DF$.	0,5
	3b (1,5 điểm)	
	Dễ thấy do tam giác ABC cân nên đường tròn ngoại tiếp BCD đi qua trung điểm D' của AB. Từ đó hai cung ED và ED' bằng nhau, suy ra BE là phân giác của góc ABD (3).	0,25
	Áp dụng định lý Mênelaus cho tam giác ADF và cát tuyến CIK ta được: $\frac{CA}{CD} \cdot \frac{KD}{KF} \cdot \frac{IF}{IA} = 1$	0,5

	Mà $CA = 2CD$ và BI là phân giác góc ABF nên $\frac{IF}{IA} = \frac{BF}{BA}$. Từ đó ta được $1 = 2 \cdot \frac{KD}{KF} \cdot \frac{BF}{AB} = 2 \cdot \frac{KD}{KF} \cdot \frac{BF}{2AD} = \frac{KD}{KF} \cdot \frac{BF}{AD}.$	
	Suy ra $\frac{BF}{AD} = \frac{KF}{KD}$, do đó $\frac{BD}{AD} = \frac{BF + FD}{AD} = \frac{BF}{AD} + 1 = \frac{KF}{KD} + 1 = \frac{DF}{DK} = \frac{AD}{DK}$ Từ đó suy ra hai tam giác ADK và BDA đồng dạng, suy ra $DAK = ABD$	0,5
	Khi đó $IAB = AFD - ABD = DAF - DAK = IAK$, suy ra AI là phân giác góc BAK (4). Từ (3) và (4) suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABK.	0,25
4	(1,0 điểm)	
	Theo giả thiết, ta có $a_m = x^i, a_n = y^j$ ($i, j \geq 2$); x, y nguyên dương. Đặt $p = 2017$ là công sai của cấp số cộng (a_n), ta thấy p là số nguyên tố. Ta có $a_m = a_0 + mp \Rightarrow a_0 \equiv a_m \equiv x^i \pmod{p}$, tương tự $a_0 \equiv y^j \pmod{p}$	0,25
	Do $(i, j) = 1$ nên tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}$ sao cho $ui + vj = 1$. Chọn các số nguyên dương r, s sao cho $r \equiv u \pmod{p-1}, s \equiv v \pmod{p-1}$, khi đó $ri + sj \equiv ui + vj \equiv 1 \pmod{p-1}$	0,25
	Suy ra $ri + sj = 1 + k(p-1), k \in \mathbb{Z}^+$. Do đó: $(x^s y^r)^{ij} = (x^i)^{sj} \cdot (y^j)^{ri} \equiv a_0^{sj} \cdot a_0^{ri} = a_0^{ri+sj} = a_0^{1+k(p-1)} \equiv a_0 \pmod{p}$	0,25
	Như vậy tồn tại số nguyên dương h sao cho $(x^s y^r)^{ij} = a_0 + hp = a_h$. Vậy a_h là số ij-phương (đpcm).	0,25
5	(1,0 điểm)	
	Do S chia hết cho 2015, 2016, 2017 nên $S \geq 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$ Giả sử mỗi số nguyên $1, 2, 3, \dots, 2017$ xuất hiện nhiều nhất 2015 lần trong các số $a_1, a_2, \dots, a_k$ thì $2S \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq 2015(1 + 2 + 3 + \dots + 2017) < 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$, mâu thuẫn. Do đó tồn tại một số $a \in \{1, 2, 3, \dots, 2017\}$ xuất hiện ít nhất 2016 lần trong các số $a_1, a_2, \dots, a_k$.	0,25
	Ta để 2016 số a vào một tập A. Xét $k - 2016$ số còn lại, ta để các số này vào một tập B. Tổng các số trong B là $a_1 + a_2 + \dots + a_k - 2016a \geq 2S - 2016a \geq 2S - 2016 \cdot 2017 > S.$ Nếu $k - 2016 \leq a$ thì $k \leq 2016 + 2017 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq (2016 + 2017) \cdot 2017 < 2S$, mâu thuẫn, suy ra $k - 2016 > a$. Từ tập B ta chọn ra a số bất kì là $b_1, b_2, \dots, b_a$. - Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, a\}$ mà $(b_1 + b_2 + \dots + b_i) : a$ thì ta chọn i số này vào một tập hợp T. - Nếu ngược lại thì theo nguyên lý Dirichlet sẽ tồn tại $i < r$ sao cho	0,25

	$b_1 + b_2 + \dots + b_i \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_r \pmod{a}, \text{ suy ra } (b_{i+1} + b_{i+2} + \dots + b_r) : a.$ Khi đó ta chọn $(r-i)$ số này vào tập T.	
	Như vậy ta luôn chọn được một số vào tập T mà có tổng chia hết cho a. Ta tiếp tục làm như vậy với các số còn lại của tập B để bổ sung thêm các phần tử vào T cho đến khi tổng các số trong T (kí hiệu $\sum T$) lớn hơn $S - 2017a$ thì dừng lại. Thật vậy, nếu $\sum T \leq S - 2017a$ thì tổng các số còn lại trong B sẽ lớn hơn hoặc bằng $2S - 2016a - (S - 2017a) = S + a > 2017a$,tức là vẫn còn ít nhất a số để thực hiện thao tác.	0,25
	Như vậy, ta đã xây dựng được tập hợp T thỏa mãn hai điều kiện: $(\sum T) : a \text{ và } \sum T > S - 2017a$ Chú ý là $S : a$ nên ta được $\sum T \geq S - 2017a + a \Rightarrow \sum T \geq S - 2016a$ Do đó $\sum T = S - ma$ với $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2016\}$. Đến lúc này ta chỉ cần bổ sung m số a từ tập A vào T thì ta sẽ được tổng các phần tử trong T bằng S (đpcm).	0,25

-----Hết-----