

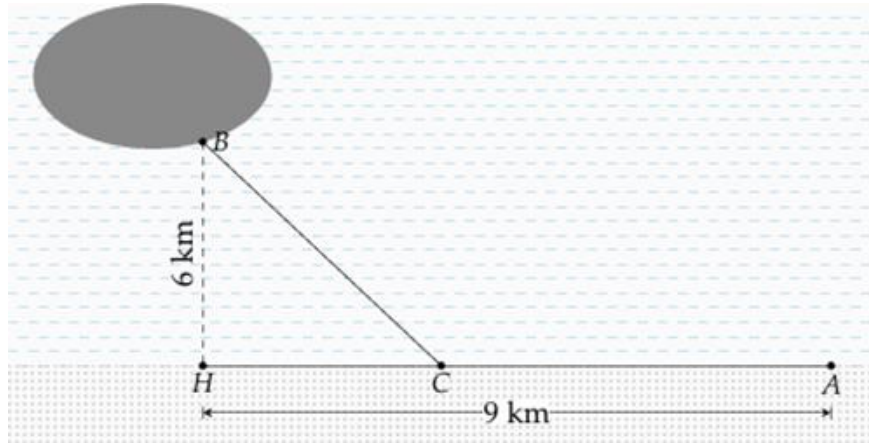
Đề có 01 trang

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu 1. (6 điểm)

- a. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = (x-6)\sqrt{x^2+4}$.
- b. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x(x-2)$. Tìm số các giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số $g(x) = f(x-1) + 2024(m^2-1)x + 2025$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 2. (3 điểm) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6\text{km}$ (tham khảo hình vẽ). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9\text{ km}$. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.



Câu 3. (2 điểm) Hai bạn An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn gồm 5 séc (mỗi séc chỉ có kết quả thắng hoặc thua), người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để An thắng mỗi séc là 0,4. Tính xác suất để An thắng chung cuộc.

Câu 4. (5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt đáy. Biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .
- b. Tính cosin của góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$.

Câu 5. (2 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Tam giác BCD là tam giác đều và $AB = a$, $BC = 2a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường AC và BD .

Câu 6. (2 điểm) Cho biểu thức $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2024}{2025}\right)$.

-----Hết-----

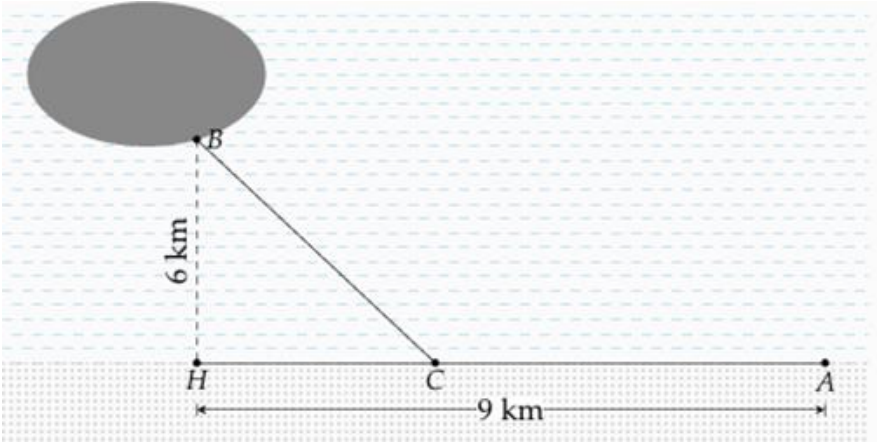
(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, không được sử dụng máy tính cầm tay)

Họ và tên thí sinh:.....

SỞ GD&ĐT THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG THPT LƯƠNG NGỌC QUYẾN

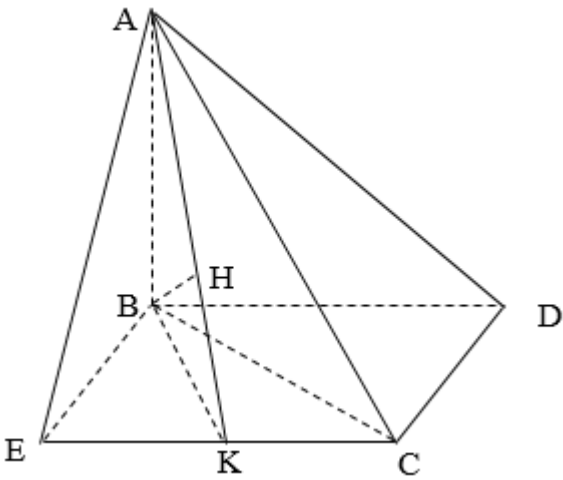
HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
MÔN: TOÁN 12
NĂM HỌC 2024-2025

Câu	Nội dung	Điểm											
1a (2 điểm)	Câu 1. (6 điểm) a. Tìm các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = (x - 6)\sqrt{x^2 + 4}$. b. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x(x - 2)$. Tìm số các giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số $g(x) = f(x - 1) + 2024(m^2 - 1)x + 2025$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.												
	TXĐ: $D = \mathbb{R}$ $y' = (x - 6)' \sqrt{x^2 + 4} + (x - 6) \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)' = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{x(x - 6)}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}}$ $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$	1,0											
	Lập BBT của hàm số và kết luận Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(2; -8\sqrt{2})$, điểm cực đại $(1; -5\sqrt{5})$	1,0											
1b (4 điểm)	Ta có $g'(x) = f'(x - 1) + 2024(m^2 - 1) = (x - 1)(x - 3) + 2024m^2 - 2024$	0,5											
	Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;3)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;3)$ (dấu “=” xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc khoảng $(0;3)$).	0,5											
	$y' \geq 0, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2021 + 2024m^2 \geq 0, \forall x \in (0;3)$ $\Leftrightarrow 2024m^2 \geq -x^2 + 4x + 2021, \forall x \in (0;3)$	1,0											
	Đặt $h(x) = -x^2 + 4x + 2021$ với $x \in (0;3)$. Có $h'(x) = -2x + 4; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (0;3)$ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên khoảng $(0;3)$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$h'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>2021</td><td>2025</td><td>2024</td></tr></table>	x	0	2	3	$h'(x)$	+	0	-	$h(x)$	2021	2025	2024
x	0	2	3										
$h'(x)$	+	0	-										
$h(x)$	2021	2025	2024										

	Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ trên khoảng $(0;3)$ thì $2024m^2 \geq 2025, \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{\frac{2025}{2024}} \\ m \leq -\sqrt{\frac{2025}{2024}} \end{cases}.$ Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-10;10] \Rightarrow m \in \{-10; -9; -8; \dots; -2; 2; 3; 4; \dots; 10\}$. Vậy có 18 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.	1,0
2	Câu 2. (3 điểm) Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6\text{km}$ (tham khảo hình vẽ). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9\text{ km}$. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất. 	
	Đặt $HC = x(\text{km}) \Rightarrow AC = 9 - x(\text{km}), (0 \leq x \leq 9)$. Khi đó $BC = \sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2} (\text{km})$	0,5
	Độ dài đường gấp khúc ACB là $AC + BC = 9 - x + \sqrt{36 + x^2} (\text{km})$ Chi phí để lắp ống theo đường gấp khúc ACB là $T = 50000.(9 - x) + 130.000\sqrt{36 + x^2} (\text{USD})$ $\Leftrightarrow T = 10^4 (45 - 5x + 13\sqrt{36 + x^2})$	1,0
	Đặt $f(x) = 45 - 5x + 13\sqrt{36 + x^2}, (0 \leq x \leq 9)$ $\Rightarrow f'(x) = -5 + \frac{13x}{\sqrt{36 + x^2}} = \frac{13x - 5\sqrt{36 + x^2}}{\sqrt{36 + x^2}}, (0 \leq x \leq 9)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5\sqrt{36 + x^2} = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,5 \\ x = -2,5(l) \end{cases}$	0,5

	BBT của f(x) trên [0;9] <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2,5</td><td>9</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>123</td><td>117</td><td>39√13</td></tr></table> f(x) đạt GTNN tại x =2,5, suy ra chi phí T thấp nhất khi x = 2,5. Vậy điểm C trên đoạn AH để chi phí lắp đường ống thấp nhất khi AC = 6,5(km)	x	0	2,5	9	f'(x)	-	0	+	f(x)	123	117	39√13	1,0
x	0	2,5	9											
f'(x)	-	0	+											
f(x)	123	117	39√13											
3	Câu 3. (2 điểm) Hai bạn An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn gồm 5 séc, người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để An thắng mỗi séc là 0,4. Tính xác suất để An thắng chung cuộc.													
	Giả sử số séc đấu của An và Bình là x thì 3≤ x≤ 5, xác suất An thua mỗi séc là 0,6 TH1: An và Bình đấu 3 séc, khi đó An thắng cả 3 séc Xác suất An thắng chung cuộc là (0,4) ³ = 0,064	0,5												
	TH2: Trận đấu có 4 séc, để An thắng chung cuộc thì An thua 1 trong 3 séc 1 hoặc 2 hoặc 3 và thắng séc 4 Chọn 1 séc để An thua là C ₃ ¹ Xác suất để An thắng chung cuộc là C ₃ ¹ .0,6.(0,4) ³ = 0,1152	0,5												
	TH3: Trận đấu có 5 séc, để An thắng chung cuộc thì An thua 2 trong 4 séc 1; 2; 3; 4 và thắng séc 5 Chọn 2 séc để An thua là C ₄ ² Xác suất để An thắng chung cuộc là C ₄ ² .(0,6) ² .(0,4) ³ = 0,13824	0,5												
	Xác suất để An thắng chung cuộc là 0,064+0,1152+0,13824 = 0,31744	0,5												
4	Câu 4. (5 điểm) Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt đáy. Biết AB = a, AD = a√2 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a. b. Tính cosin của góc phẳng nhị diện [B,SC,D].													

4a (3 điểm)	Vì $SA \perp ABCD \Rightarrow SA \perp BC$, mà $AB \perp BC$ ($ABCD$ là hình chữ nhật) $\Rightarrow BC \perp SAB \Rightarrow SBC \perp SAB$. Kẻ AH vuông góc với SB thì $AH \perp SBC$ Hay $AH = d(A, SBC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$	1,0
	Trong tam giác SAB vuông tại A có $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{AB \cdot SA}{\sqrt{AB^2 + SA^2}} \Leftrightarrow \frac{6a^2}{9} = \frac{a^2 \cdot SA^2}{a^2 + SA^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$	1,0
	Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2\sqrt{2}$ Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{2a^3}{3}$	1,0
4b (2 điểm)	Trong tam giác SAD kẻ AK vuông góc với SD tại K, gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của SO và HK. Trong (SAC) kéo dài AI cắt SC tại E. Khi đó A, H, E, K đồng phẳng. Ta có $SAB \perp SBC$; $SAD \perp SCD \Rightarrow AH \perp SBC$; $AK \perp SCD$ $\Rightarrow AH \perp SC$; $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp AHK \Rightarrow SC \perp HE$; $SC \perp KE$ Suy ra $B, SC, D = HEK$. Vì $AH \perp SBC \Rightarrow AH \perp HE$; $AK \perp SCD \Rightarrow AK \perp KE$ Tứ giác $AHEK$ có $AHE + AKE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow HAK + HEK = 180^\circ$	1,0
	Ta có $SB = a\sqrt{3}$; $BD = a\sqrt{3}$; $SD = 2a$; $SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Do tam giác SAD vuông cân tại A nên K là trung điểm của SD và $AK = a$; $SK = a$ Xét tam giác SBD có $\cos BSD = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2 \cdot SB \cdot SD} = \frac{3a^2 + 4a^2 - 3a^2}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot 2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Suy ra $\cos HSK = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Trong tam giác SHK có $HK^2 = SH^2 + SK^2 - 2SH \cdot SK \cdot \cos HSK = a^2 \Rightarrow HK = a$	0,5

	Trong tam giác AHK có $\cos HAK = \frac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2.AH.AK} = \frac{\frac{2a^2}{3} + a^2 - a^2}{2.\frac{a\sqrt{6}}{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ Vì $HAK + HEK = 180^\circ \Rightarrow \cos HEK = -\frac{1}{\sqrt{6}}$. Vậy cosin của góc B, SC, D bằng $-\frac{1}{\sqrt{6}}$.	0,5
5	Câu 5. (2 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Tam giác BCD là tam giác đều và $AB = a$, $BC = 2a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường AC và BD. 	
	Kẻ $CE // BD, CE = BD \Rightarrow BD // (ACE)$ Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AC bằng khoảng cách giữa đường thẳng BD và (ACE) và bằng khoảng cách từ B đến (ACE). Kẻ BK vuông góc với CE thì $CE \perp (ABK) \Rightarrow \perp (ACE) \perp (ABK)$ Mà $(ACE) \cap (ABK) = AK$. Trong (ABK) kẻ Bh vuông góc với AK thì $BH \perp (ACE) \Rightarrow d(B, (ACE)) = BH$	1,0
	Do tam giác BCD đều cạnh $2a$ nên tam giác BCE đều cạnh $2a$, BK là đường trung tuyến của tam giác BCE nên $BK = a\sqrt{3}$. Xét tam giác ABK vuông tại B có BH là đường cao nên $BH = \frac{AB.BK}{\sqrt{AB^2 + BK^2}} = \frac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$ Vậy $d(BD, AC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	1,0
	Câu 6. (2 điểm) Cho biểu thức $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$	

6	Xét hai số a và b sao cho $a+b=1$ Ta có $f(a)+f(b)=\frac{9^a-2}{9^a+3}+\frac{9^b-2}{9^b+3}=\frac{(9^a-2)(9^b+3)+(9^b-2)(9^a+3)}{(9^a+3)(9^b+3)}=\frac{6+9^a+9^b}{18+39^a+39^b}=\frac{1}{3}$ (*)	1,0
	Xét các cặp số $\frac{1}{2025}$ và $\frac{2024}{2025}$; $\frac{2}{2025}$ và $\frac{2023}{2025}$ Mỗi cặp đều có tổng bằng 1 và từ $\frac{1}{2025}$ đến $\frac{2024}{2025}$ có 1012 cặp như thế. Theo kết quả (*) thì $f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2024}{2025}\right)=\frac{1}{3}; f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{2023}{2025}\right)=\frac{1}{3}; \dots\dots (Có 1012 tổng như này)$ Do đó ta có $S=f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2}{2025}\right)+\dots+f\left(\frac{2024}{2025}\right)$ $=\left[f\left(\frac{1}{2025}\right)+f\left(\frac{2024}{2025}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2025}\right)+f\left(\frac{2023}{2025}\right)\right]+\dots$ $=\frac{1}{3}.1012=\frac{1012}{3}$	1,0

Ghi chú: Học sinh giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.