

Dạng 1.1. Câu hỏi lý thuyết

A. PHƯƠNG PHÁP

I - GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

Định lý 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$$- \lim(u_n + v_n) = a + b$$

$$- \lim(u_n - v_n) = a - b$$

$$- \lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$$

$$- \lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0\text{)}.$$

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

II. GIỚI HẠN VÔ CỰC

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Định lý 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

- b) Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$.

B.2. Bài tập trắc nghiệm.**Câu 1.** Phát biểu nào sau đây là **sai** ?

- A.** $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).
- B.** $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).
- C.** $\lim \frac{1}{n} = 0$.
- D.** $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

Lời giải**GVSB:** Phạm Quốc Toàn; **GVPB:** Thúy Kiều**Chọn B**Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$).**Câu 2.** Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau?

- A.** Nếu $\lim |u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = +\infty$.
- B.** Nếu $\lim |u_n| = +\infty$, thì $\lim u_n = -\infty$.
- C.** Nếu $\lim u_n = 0$, thì $\lim |u_n| = 0$.
- D.** Nếu $\lim u_n = -a$, thì $\lim |u_n| = a$.

Lời giải**GVSB:** Phạm Quốc Toàn; **GVPB:** Thúy Kiều**Chọn C**Ta có nếu $\lim u_n = 0$, thì $\lim |u_n| = 0$.**Câu 3.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** $\lim v_n = 0$ nếu $\lim (v_n + a) = 0$.
- B.** $\lim v_n = a$ nếu $\lim (v_n - a) = 0$.
- C.** $\lim v_n = 0$ nếu $\lim (v_n - a) = 0$.
- D.** $\lim v_n = a$ nếu $\lim (v_n + a) = 0$.

Lời giải**GVSB:** Phạm Quốc Toàn; **GVPB:** Thúy Kiều**Chọn B**

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số

$$\lim v_n = a \text{ nếu } \lim (v_n - a) = 0.$$

Câu 4. Trong các kết quả sau, kết quả nào **sai**?Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- A.** $\lim (u_n + v_n) = a + b$.
- B.** $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.
- C.** $\lim (u_n - v_n) = a - b$.
- D.** $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$

Lời giải**GVSB:** Phạm Quốc Toàn; **GVPB:** Thúy Kiều**Chọn B**Theo định lý về giới hạn hữu hạn, ta có: $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).**Câu 5.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Lời giải

GVSB: Phạm Quốc Toàn; **GVPB:** Thúy Kiều

Chọn C

Theo định nghĩa giới hạn vô cực

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 6. Cho $\lim u_n = -2$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$. Khi đó $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. ∞ .

B. $-\infty$.

C. 0 .

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Phạm Quốc Toàn; **GVPB:** Thúy Kiều

Chọn B

Ta có $\lim u_n = -2 < 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ nên theo định lý về giới hạn vô cực ta có $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$

Dạng 1.2 : Giới hạn dãy số đa thức, căn thức không liên hợp

A. Phương pháp :

B1: Đặt n mũ cao nhất làm thừa số chung.

B2: Áp dụng quy tắc sau để tìm giới hạn

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

B. Bài tập.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính giới hạn $\lim(n^2 - 3n + 1)$.

Lời giải

GVSB: Phạm Thái; **GVPB:** Thúy Kiều

Ta có $\lim(n^2 - 3n + 1) = \lim n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Bài 2. Tính giới hạn $\lim(5n - n^2 + 1)$.

Lời giải

Ta có $\lim(5n - n^2 + 1) = \lim n^2 \left(-1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = -\infty$.

Bài 3. Tính giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n)$.

Lời giải

GVSB: Phạm Thái; GVPB: Thúy Kiều

Ta có $\lim(\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n) = \lim n \left(\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1 \right) = +\infty$.

B. 2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Tính giới hạn $L = \lim(3n^2 + 5n - 3)$.

A. $L = 3$.

B. $L = -\infty$.

C. $L = 5$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải

GVSB: Phạm Thái; GVPB: Thúy Kiều

Chọn D

Ta có $L = \lim(3n^2 + 5n - 3) = \lim n^2 \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty$.

Câu 2. $\lim(n^3 - 2n + 1)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Phạm Thái; GVPB: Thúy Kiều

Chọn D

Ta có: $\lim(n^3 - 2n + 1) = \lim n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = +\infty$.

Câu 3. $\lim(n - \sqrt[3]{8n^3 + 3n + 2})$ bằng

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Phạm Thái; GVPB: Thúy Kiều

Chọn B

Ta có $\lim(n - \sqrt[3]{8n^3 + 3n + 2}) = \lim n \left(1 - \sqrt[3]{8 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^3}} \right) = -\infty$

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2}$ là:

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Phạm Thái; GVPB: Thúy Kiều

Chọn D

$\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2} = \lim n \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5} - 3 + \frac{2}{n^3}} \right) = -\infty$.

Dạng 1.3 Giới hạn dãy phân thức hữu tỷ

A. PHƯƠNG PHÁP

Giới hạn của (u_n) trong đó u_n là một phân thức hữu tỷ dạng $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó

$P(n), Q(n)$ là hai đa thức chứa của n).

Phương pháp:

Chia tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc là rút n^k làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn hữu hạn và $\lim \frac{a}{n^k} = 0 (k > 0)$ để tính.

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Câu 1. Tính $\lim \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Thúy Kiều

$$\text{Ta có: } \lim \frac{n^2 - 4n^3}{2n^3 + 5n - 2} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{1}{n} - 4 \right)}{n^3 \left(2 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3} \right)} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 4}{2 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Câu 2. Tính $\lim \frac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Thúy Kiều

$$\text{Ta có: } \lim \frac{n^3 - 7n}{1 + 2n^2} = \lim \frac{n^3 \left(1 - \frac{7}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} + 2 \right)} = \lim \left(n \cdot \frac{1 - \frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 2} \right) = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim \left(\frac{1 - \frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 2} \right) = \frac{1}{2} > 0; \lim n = +\infty.$$

Câu 3. Tính $\lim \frac{n+2}{n^2+n+1}$

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Thúy Kiều

$$\text{Ta có: } \lim \frac{n+2}{n^2+n+1} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Tính $I = \lim \frac{2n-3}{2n^2+3n+1}$

A. $I = -\infty$.

B. $I = +\infty$.

B. $I = 1$.

D. $I = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n^2+3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0.$$

Câu 2. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

- A. 0. B. -12. C. -6. D. -2.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Thúy Kiều

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left(a + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $a = 4$. Khi đó $a - a^2 = 4 - 4^2 = -12$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Lời giải

GVSB: Nguyễn My; GVPB: Thúy Kiều

Chọn C

* Cách 1:

$$\text{Ta có } \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \text{ suy ra}$$

$$\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \dots$$

...

$$u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

* Cách 2:

Ta có $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{2}{5}$; $u_3 = \frac{3}{7}$. Ta chứng minh $u_n = \frac{n}{2n+1}$ (*) bằng qui nạp

+ Với $n = 1$, công thức (*) đúng.

+ Giả sử công thức (*) đúng với $n = k \geq 1 \Rightarrow u_k = \frac{k}{2k+1}$. Ta cần chứng minh $u_{k+1} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$.

. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}. \text{ Vậy công thức } u_n = \frac{n}{2n+1} \text{ (*) đúng với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Khi đó $\lim u_n = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Câu 4. Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$.

Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Mỹ; **GVPB:** Thúy Kiều

Chọn D

Xét $g(n) = \frac{f(2n-1)}{f(2n)} \Rightarrow g(n) = \frac{(4n^2 - 2n + 1)^2 + 1}{(4n^2 + 2n + 1)^2 + 1}$.

$$g(n) = \frac{(4n^2 + 1)^2 - 4n(4n^2 + 1) + (4n^2 + 1)}{(4n^2 + 1)^2 + 4n(4n^2 + 1) + (4n^2 + 1)} = \frac{4n^2 + 1 - 4n + 1}{4n^2 + 1 + 4n + 1} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{26}{50} \dots \frac{(2n-3)^2 + 1}{(2n-1)^2 + 1} \cdot \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \lim \sqrt{\frac{2n^2}{4n^2 + 4n + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dạng 4.3. Giới hạn dãy phân thức (có mũ n)

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính giới hạn $\lim \frac{2 - 5^{n-2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; **GVPB:** Bùi Hà

$$\lim \frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n} = \lim \frac{2.\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{25}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{1}{50}.$$

Bài 2. Tính giới hạn $\lim \frac{3-5^{n+2}}{4^{n+1}+3.5^n}.$

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; GVPB: Bùi Hà

$$\lim \frac{3-5^{n+2}}{4^{n+1}+3.5^n} = \lim \frac{3-25.5^n}{4.4^n+3.5^n} = \lim \frac{3.\left(\frac{1}{5}\right)^n - 25}{4.\left(\frac{4}{5}\right)^n + 3} = -\frac{25}{3}.$$

Bài 3. Cho các số thực a, b thỏa $|a| < 1; |b| < 1$. Tìm giới hạn $I = \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}.$

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; GVPB: Bùi Hà

Ta có: $1, a, a^2, \dots, a^n$ là một cấp số nhân công bội a nên $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$

$1, b, b^2, \dots, b^n$ là một cấp số nhân công bội b nên $1+b+b^2+\dots+b^n = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}.$

$$\text{Suy ra } I = \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \lim \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

Vì $|a| < 1, |b| < 1$ nên $\lim a^{n+1} = \lim b^n = 0.$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{1}{2^n}$ là

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}.$

D. $\frac{1}{4}.$

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; GVPB: Bùi Hà

Chọn A

$$\lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Câu 2. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n-1}{5^n+1}$ là

- A. 0. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. -1.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; GVPB: Bùi Hà

Chọn A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{5^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^n} = 0.$$

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$ là

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. -1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; GVPB: Bùi Hà

Chọn A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n - 3^n}{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+2}}}$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Lan; GVPB: Bùi Hà

Chọn A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{4^n + 2 \cdot 2^n}{3^n + 16 \cdot 4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 16}} = \frac{1}{2}.$$

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n}{2n - 1}$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; GVPB: Bùi Hà

Ta có

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n}{2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right)}{n \left(2 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Bài 2. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n - 1} - \sqrt{4n^2 + 1}}{1 - 3n}$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; GVPB: Bùi Hà

Ta có

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\sqrt{n^2 \left(\frac{2n^2 + 3n + 5}{n^2} \right)} - n \right]}{n \left(\frac{1}{n} - 3 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right)}{n \left(\frac{1}{n} - 3 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{n} - 3 \right)} = -\frac{1}{3}$$

Bài 3. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; GVPB: Bùi Hà

Ta có

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{4 - \frac{5}{n}}} = \frac{\sqrt{2+0} - \sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; GVPB: Bùi Hà

Chọn C

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt{n+2}}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{2-0}{2} = 1.$

Câu 2. Cho $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 5} + n}{4n - \sqrt{n^2 + 1}}$. Khi đó giá trị của I là

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{5}{3}$.

C. 1.

D. $I = \frac{3}{4}$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; GVPB: Bùi Hà

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 5} + n}{4n - \sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{5}{n^2}} + 1}{4 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Câu 3. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n = \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; **GVPB:** Bùi Hà

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{1+3+5+\dots+(2n-1)}}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 4. Tính $\lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Ân Trương; **GVPB:** Bùi Hà

Chọn A

$$\text{Ta có } 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}} = \frac{1}{6}.$$

Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính $\lim \left(\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} - \sqrt{4n^2+n-1} \right)$

Lời giải

GVSB: ThiênMinh Nguyễn; **GVPB:** Bùi Hà

$$\begin{aligned} & \lim \left(\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} - \sqrt{4n^2+n-1} \right) \\ &= \lim \left(\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} - 2n \right) + \lim \left(2n - \sqrt{4n^2+n-1} \right) \\ &= \lim \frac{8n^3-2n^2+3n-1-8n^3}{\left(\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} \right)^2 + 2n\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} + 4n^2} + \lim \frac{4n^2-4n^2-n+1}{2n+\sqrt{4n^2+n-1}} \\ &= \lim \frac{-2n^2+3n-1}{\left(\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} \right)^2 + 2n\sqrt[3]{8n^3-2n^2+3n-1} + 4n^2} + \lim \frac{-n+1}{2n+\sqrt{4n^2+n-1}} \\ &= \lim \frac{-2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}} \right)^2 + 2\sqrt[3]{8-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}} + 4} + \lim \frac{-1+\frac{1}{n}}{2+\sqrt{4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2}{(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} + \frac{-1}{2 + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{-1}{6} + \frac{-1}{4} = -\frac{5}{12}$$

Bài 2. Tính $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{4n^4+1} - 2n^2}$

Lời giải

GVSB: ThienMinh Nguyễn; GVPB: Bùi Hà

$$\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{4n^4+1} - 2n^2}$$

$$= \lim \frac{(n^6 + 1 - n^6)(\sqrt{4n^4+1} + 2n^2)}{(4n^4 + 1 - 4n^4) \left[n^4 - n^2 \sqrt[3]{1-n^6} + (\sqrt[3]{1-n^6})^2 \right]}$$

$$= \lim \frac{(\sqrt{4n^4+1} + 2n^2)}{\left[n^4 - n^2 \sqrt[3]{1-n^6} + (\sqrt[3]{1-n^6})^2 \right]}$$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{4 + \frac{1}{n^4}} + 2 \right)}{\left[1 - \sqrt[3]{\frac{1}{n^6}} - 1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^6}} - 1 \right)^2 \right]}$$

$$= \frac{4}{3}$$

Bài 3. Tính $\lim (\sqrt{n+2021} - \sqrt{n}) \cdot \sqrt{n}$

Lời giải

GVSB: ThienMinh Nguyễn; GVPB: Bùi Hà

$$\lim (\sqrt{n+2021} - \sqrt{n}) \cdot \sqrt{n}$$

$$= \lim \frac{2021}{\sqrt{n+2021} + \sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}$$

$$= \lim \frac{2021\sqrt{n}}{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2021}{n}} + 1 \right)}$$

$$= \lim \frac{2021}{\sqrt{1 + \frac{2021}{n}} + 1}$$

$$= \frac{2021}{2}$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Trong các biến đổi sau, đâu là biến đổi đúng ?

A. $\lim(\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \lim \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + n}{4n}.$

B. $\lim(\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}.$

C. $\lim(\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \lim(4n).$

D. $\lim(\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \lim \frac{1}{4n}.$

Lời giải

GVSB: ThienMinh Nguyễn; GVPB: Bùi Hà

Chọn B

$$\lim(\sqrt{n^2 + 4n} - n) = \lim \frac{n^2 + 4n - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}.$$

Câu 2. Tính $\lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$?

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 7.

D. 1.

Lời giải

GVSB: ThienMinh Nguyễn; GVPB: Bùi Hà

Chọn D

$$\begin{aligned} \lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - n) &= \lim \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = 1 \end{aligned}$$

Câu 3. Biết giới hạn $\lim[n\sqrt{9n^2 + 3} - \sqrt{9n^2 + 2}] = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của biểu thức $A = a^2 + b$ là bao nhiêu ?

A. 20.

B. 12.

C. 98.

D. 7.

Lời giải

GVSB: ThienMinh Nguyễn; GVPB: Bùi Hà

Chọn D

Ta có: $\lim[n\sqrt{9n^2 + 3} - \sqrt{9n^2 + 2}] = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$).

Xét $\lim[n\sqrt{9n^2 + 3} - \sqrt{9n^2 + 2}]$

$$= \lim \frac{n}{\sqrt{9n^2 + 3} + \sqrt{9n^2 + 2}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{9 + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{9 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{6}$$

Suy ra $a^2 + b = 1^2 + 6 = 7$

Câu 4. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ thỏa mãn $v_n = u_{n+1} - u_n, \forall n \geq 1$. Trong đó, $u_1 = 1$ và (v_n) là cấp số cộng có $v_1 = 3$, công sai là 3. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tính $\lim \left(\sqrt[3]{2S_n - 2n^2} - n \right)$. Biết rằng:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ và } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- A. $+\infty$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. 1.

Lời giải

GVSB: ThiênMinh Nguyễn; GVPB: Bùi Hà

Chọn B

Ta có: $v_n = v_1 + (n-1)d = 3 + 3n - 3 = 3n$.

Nên $v_{n-1} = 3n-3, v_{n-2} = 3n-6, \dots$

Xét $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1$

$$u_n = v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + 1$$

$$u_n = [(3n-3) + (3n-6) + \dots + 3] + 1$$

$$u_n = 3[(n-1) + (n-2) + \dots + 1] + 1$$

$$\text{Đặt } A = [(n-1) + (n-2) + \dots + 1]$$

$$\text{Nên } A = [(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n^2 + n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{Nên } u_n = 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$$

$$\text{Suy ra } u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{3}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - \frac{3}{2}(1 + 2 + \dots + n) + n$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 3n^2 - 3n + 4n}{4}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{2n^3 + 2n}{4} = \frac{n^3 + n}{2}$$

$$\text{Vậy } S_n = \frac{n^3 + n}{2}$$

$$\text{Suy ra } \lim \left(\sqrt[3]{2S_n - 2n^2} - n \right)$$

$$= \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + n} - n \right)$$

$$= \lim \frac{-2n^2 + n}{\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + n} \right)^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + n} + n^2}$$

$$= \lim \frac{-2 + \frac{1}{n}}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

$$= \frac{-2}{3}$$

Tự luận:

Câu 1. Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots; \frac{(-1)^n}{2^n}; \dots$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Ta có: Dãy số $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \dots; \frac{(-1)^n}{2^n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -\frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Do đó tổng của cấp số nhân lùi vô hạn trên là $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$.

Câu 2. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{6^{n-1}} + \dots$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Ta có: Dãy số $-1; \frac{1}{6}; -\frac{1}{6^2}; \dots; (-1)^n \frac{1}{6^{n-1}}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -1$ và công bội $q = -\frac{1}{6}$.

Do đó $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1+\frac{1}{6}} = -\frac{6}{7}$.

Câu 3. Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_1 = 1$ và u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) với $|q| < 1$.

Ta có: $u_2 = q; u_3 = q^2; u_4 = q^3$. Do u_1, u_3, u_4 theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp

$$\text{số cộng nên } u_1 + u_4 = 2u_3 \Leftrightarrow 1 + q^3 = 2q^2 \Leftrightarrow (q-1)(q^2 - q - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1(l) \\ q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(l) \\ q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}(tm) \end{cases}$$

Vậy tổng cấp số nhân lùi vô hạn là: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Trắc nghiệm:

Câu 1. (NB) Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) biết $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn A

Tổng cấp số nhân lùi vô hạn là: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

Câu 2. (TH) Tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn D

Ta có: Dãy số $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \dots; \frac{1}{3^n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 3. (VD) Bạn A thả quả bóng cao su từ độ cao $10m$ theo phương thẳng đứng. Mỗi khi chạm đất nó lại nảy lên theo phương thẳng đứng có độ cao bằng $\frac{3}{4}$ độ cao trước đó. Tính tổng quãng đường bóng đi được đến khi bóng dừng hẳn.

A. $40m$.

B. $70m$.

C. $50m$.

D. $80m$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn B

Đặt $10m = a$.

Quãng đường đi được của quả bóng từ khi thả đến khi nảy lên cao nhất ở lần 1 là:

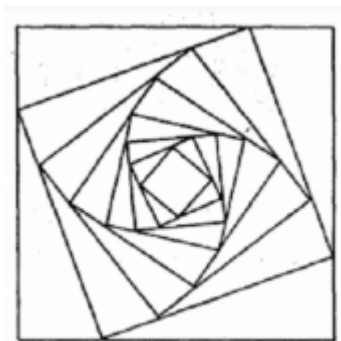
$$u_1 = a + \frac{3}{4}a.$$

Quãng đường đi được của quả bóng từ khi rơi xuống lần 2 đến khi nảy lên cao nhất ở lần 2 là: $u_2 = \frac{3}{4}a + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}u_1$.

Cứ lập luận như vậy ta được dãy số $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = a + \frac{3}{4}a = \frac{35}{4}m$ và công bội $q = \frac{3}{4}$.

$$\text{Vậy tổng quãng đường bóng đi được từ khi thả đến khi dừng là: } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{35}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 70m$$

Câu 4. (VDC) Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) .



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích hình vuông C_i ($i \in \{1; 2; 3; \dots\}$). Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$. Biết $T = \frac{32}{3}$, tính a ?

- A.** 2. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Ngọc Minh Châu; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn A

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó diện tích

$$S_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}S_1.$$

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a_2\right)^2} = \frac{a_2\sqrt{10}}{4} = \frac{5}{8}a$. Do đó diện tích

$$S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2 = \frac{5}{8}S_2. \text{ Lập luận tương tự ta có các } S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \text{ tạo thành một dãy cấp}$$

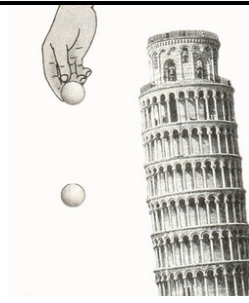
số nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{5}{8}$.

$$T = \frac{S_1}{1-q} = \frac{8a^2}{3}. \text{ Với } T = \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{8a^2}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2.$$

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tính giới hạn tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất.

**Lời giải***GVSĐ: Hồng Hà Nguyễn; GVPĐ: Tuyen Trinh*

Gọi h_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần rơi xuống thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Gọi l_n là độ dài đường đi của quả bóng ở lần nảy lên thứ n ($n \in \mathbb{N}^*$).

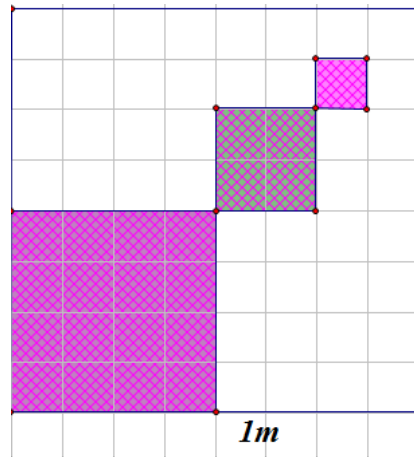
Theo bài ra ta có $h_1 = 55,8$, $l_1 = \frac{1}{10} \cdot 55,8 = 5,58$ và các dãy số (h_n) , (l_n) là các cấp số nhân lùi

vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$.

Từ đó ta suy ra giới hạn tổng độ dài đường đi của quả bóng là:

$$\lim S = \frac{h_1}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{l_1}{1 - \frac{1}{10}} = 68,2(m).$$

Bài 2. Để trang trí cho quán trà sữa sắp mở cửa của mình, bạn Việt quyết định tô màu một mảng tường hình vuông cạnh bằng 1m. Phần tô màu dự kiến là các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3...n,... (các hình vuông được tô màu chấm bi), trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó (hình vẽ). Giả sử quá trình tô màu của Việt có thể tiến ra vô hạn. Gọi u_n là diện tích của hình vuông được tô thứ n . Với $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tính $\lim S_n$.

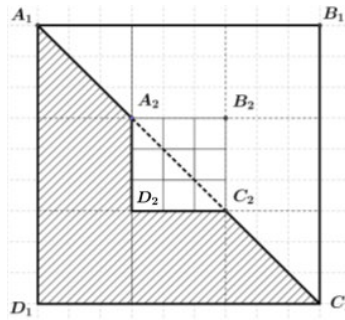
**Lời giải***GVSĐ: Hồng Hà Nguyễn; GVPĐ: Tuyen Trinh*

Diện tích của hình vuông lập thành cấp số nhân với số hạng đầu tiên là $u_1 = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{4}$.

Do đó số hạng tổng quát là $u_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^n}$ ($n \geq 1$).

$$\text{Suy ra } \lim S_n = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Bài 3. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu “đẹp”. Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



Bước 1: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy.

Gọi diện tích được tô màu ở mỗi bước là u_n , $n \in \mathbb{N}^*$

Với $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tính $\lim S_n$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Tuyen Trinh

Do diện tích được tô màu ở mỗi bước là u_n , $n \in \mathbb{N}^*$. Dễ thấy dãy các giá trị u_n là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{4}{9}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$.

Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu trong cấp số nhân đang xét thì $S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

$$\lim S_n = \lim \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim \frac{\frac{4}{9} \left[\left(\frac{1}{9} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{9} - 1} = \frac{1}{2}.$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a . Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$

...

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $2a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn C

Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

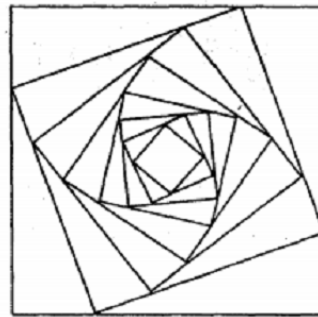
Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng $a \Rightarrow$ tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác

$A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow$ tam giác $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

Và $S_{A_1B_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_{A_2B_2C_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \frac{3}{4}$, $S_{A_3B_3C_3} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2$, ..., $S_{A_nB_nC_n} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Như vậy (S_n) là một CSN lùi vô hạn với $q = \frac{3}{4}$. Vậy $S_1 + S_2 + \dots = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}a^2$.

Câu 2. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng 2. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) (Hình vẽ).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1, 2, 3, \dots\}$). Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$.

Tính $\lim T$?

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{35}{3}$.

C. $\frac{23}{3}$.

D. $\frac{33}{2}$.

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Tuyết Trinh

Chọn A

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4} \cdot 2\right)^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot 2\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Do đó diện tích $S_2 = \frac{5}{8}2^2 = \frac{5}{2}$
 $= \frac{5}{8}S_1$.

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a_2\right)^2} = \frac{a_2\sqrt{10}}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Do đó diện tích

$S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 2^2 = \frac{5}{8}S_2$. Lý luận tương tự ta có các $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ tạo thành một dãy cấp số

nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1$ và công bội $q = \frac{5}{8}$.

$$\lim T = \frac{S_1}{1 - q} = \frac{32}{3}.$$

Câu 3. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

A. $S = \frac{15\pi}{4} \dots$

B. $S = 4\pi \dots$

C. $S = \frac{9\pi}{2} \dots$

D. $S = 5\pi \dots$

Lời giải

GVSB: Hồng Hà Nguyễn; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn B

Tam giác đều cạnh 3 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow S = \pi r^2 = 3\pi$

Với mỗi tam giác đề bài cho, độ dài cạnh của tam giác sau bằng $\frac{1}{2}$ độ dài cạnh của tam giác trước nên diện tích đường tròn ngoại tiếp giảm đi 4 lần

Khi đó $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = 3\pi \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$

Khi $n \rightarrow +\infty \Rightarrow S = 3\pi \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4\pi \dots$

Câu 1. [NB] Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng $a \in \mathbb{R}$ khi x tiến đến x_0 được kí hiệu là

- A. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = x_0$. B. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$. C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(a)$.

Lời giải

GVSB: Lưu Anh Bảo; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng $a \in \mathbb{R}$ khi x tiến đến x_0 được kí hiệu là $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Câu 2. [NB] Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng $a \in \mathbb{R}$ khi x tiến đến x_0 khi và chỉ khi

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - a] < 0$. B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - a] > 0$. C. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = a$. D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - a] = 0$.

Lời giải

GVSB: Lưu Anh Bảo; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - a] = 0.$$

Câu 3. [NB] Với c là hằng số cho trước, giá trị $\lim_{x \rightarrow x_0} c$ bằng.

- A. 0. B. c . C. x_0 . D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Lưu Anh Bảo; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn B

Công thức $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

Câu 4. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thỏa: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ($a > 0, a \in \mathbb{R}$) và

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$. Khi ấy, kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ bằng

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 1.

Lời giải

GVSB: Lưu Anh Bảo; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn A

Câu 5. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thỏa: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ($a < 0, a \in \mathbb{R}$) và

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$. Khi ấy, kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$ bằng

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 1.

Lời giải

GVSB: Lưu Anh Bảo; GVPB: Tuyen Trinh

Chọn B

Câu 6. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thỏa: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Xét các mệnh đề sau: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$; $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = ab; \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{a}{b}.$$

Số mệnh đề đúng là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Số mệnh đề đúng là: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$; $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = ab.$$

Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{a}{b}$ chỉ đúng khi có thêm điều kiện $b \neq 0$.

B. BÀI TẬP.**B.1. Bài tập tự luận.**

Bài 1. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = 1$.

Bài 2. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 + 4}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3}}{x^2 + 4} = \frac{3}{8}$.

Bài 3. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \rightarrow 2$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + 1) = 2a + 6$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - x + 1) = 7$

Hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2a + 6 = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Vậy $a = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

B.2. Bài tập trắc nghiệm.**Nhận biết (3 câu)**

Câu 1. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

A. $-\infty$.**B.** -2 .**C.** 1 .**D.** $+\infty$.**Lời giải**

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Chọn B

Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = 1$ ta có: $\lim \frac{x_n + 1}{x_n - 2} = -2$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$.

Câu 2. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $+\infty$.B. $-\infty$.C. $-\frac{1}{6}$.

D. 1.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Chọn C

$$\text{Ta có } A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4} = -\frac{1}{6}.$$

Câu 3. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+2} - x + 1}{3x+1}$.

A. $+\infty$.B. $-\infty$.C. $\sqrt[3]{2} + 1$.

D. 1.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Chọn C

$$\text{Ta có } C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+2} - x + 1}{3x+1} = \sqrt[3]{2} + 1.$$

Thông hiểu (2 câu)

Câu 1. Tìm giới hạn $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan x + 1}{\sin x + 1}$.

A. $\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$.

B. 1.

C. $+\infty$.D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Chọn A

$$\text{Ta có } B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan x + 1}{\sin x + 1} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{6} + 1}{\sin \frac{\pi}{6} + 1} = \frac{4\sqrt{3}+6}{9}.$$

Câu 2. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x^2 - 3x}$.

A. $K = 0$.B. $K = -\frac{2}{3}$.C. $K = \frac{2}{3}$.D. $K = \frac{4}{3}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Đức Tài; GVPB: Giang Trần

Chọn B

$$\text{Ta có } K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-3)(\sqrt{4x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-3)(\sqrt{4x+1}+1)} = -\frac{2}{3}.$$

GIỚI HẠN HÀM SỐ (TẠI MỘT ĐIỂM) – KHỬ VÔ ĐỊNH CHỈ TẠO NHÂN TỬ - 3 TỰ LUẬN + 4 TRẮC NGHIỆM

TỰ LUẬN:

Câu 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4-x^2}{x+2} \right)$.

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4-x^2}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(2-x)(2+x)}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} (2-x) = 4.$$

Câu 2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \right] \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{1+x+x^2} \right) = -1 \end{aligned}$$

Câu 3. Tìm a, b biết giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b-1}{x^2-1} = \frac{3}{2}.$

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Đặt $f(x) = x^2 + ax + b - 1 \Rightarrow f(1) = 0$

Khi đó $f(x) = (x-1)(x-x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-x_0)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x_0}{x+1} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 \Rightarrow a = 1; b = -1.$

TRẮC NGHIỆM:

Câu 1. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{2x-4}$ bằng

A. $+\infty.$

B. $\frac{1}{2}.$

C. $-\frac{1}{2}.$

D. $\frac{3}{2}.$

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 2. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ bằng

A. $\frac{2-a}{3}.$

B. $\frac{-2-a}{3}.$

C. $-\frac{a}{3}.$

D. $\frac{a}{3}.$

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-(a+1)x+a+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)-(a+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a-1}{x^2+x+1} = -\frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-(3a+2)x+b}{x^2-3x+2} = 4.$ Giá trị của biểu thức $T = a^2 + b^2$ là:

A. $T = 90$.

B. $T = 80$.

C. $T = 16$.

D. $T = 20$.

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Chọn D

Đặt $f(x) = 3x^2 + (2a+1)x + b \Rightarrow f(2) = 0$

Khi đó: $f(x) = (x-2)(3x-m) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - (3a+2)x + b}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x-m)}{(x-2)(x-1)} = 4$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-m}{x-1} = 4 \Leftrightarrow 6-m=4 \Leftrightarrow m=2$

Suy ra $f(x) = (x-2)(3x-2) = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow T=20$.

Câu 4. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1}$ bằng

A. 2018.

B. $\frac{2019}{2018}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. $\frac{2018}{2}$.

Lời giải

GVSB: Dương Quang; GVPB: Giang Trần

Chọn C

$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2018} - 1) + (x^{2017} - 1) + \dots + (x - 1)}{x^{2018} - 1}$

Xét $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^{2018} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{(x-1)(x^{2017} + x^{2016} + \dots + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1}{x^{2017} + x^{2016} + \dots + 1} = \frac{n}{2018}$

Do đó $I = \frac{2018 + 2017 + \dots + 1}{2018} = \frac{\frac{2019 \cdot 2018}{2}}{2018} = \frac{2019}{2}$.

Dạng 2.4. Khử vô định – dùng liên hợp

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; GVPB: Giang Trần

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$.

Bài 2. Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1} - 4}{3 - \sqrt{x+4}}$

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; GVPB:Giang Trần

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{[(3x+1)-16](3+\sqrt{x+4})}{[9-(x+4)](\sqrt{3x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3(3+\sqrt{x+4})}{\sqrt{3x+1}+4} = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}.$$

Bài 3. Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt{5x-1}}{x-1}$.

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; GVPB:Giang Trần

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2 - (\sqrt{5x-1} - 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{x-1} = I - J \\ I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4} = \frac{7}{12}. \\ J &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{\sqrt{5x-1} + 1} = \frac{5}{3} \\ \text{Vậy } A &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ kết quả là

- A. 0. B. $\frac{1}{6}$. C. 2. D. -2.

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; GVPB:Giang Trần

Chọn B

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1-9}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-8}{(x^2-4)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Câu 2. Giới hạn của $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x+5}-1}{x^2-4}$ là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; GVPB:Giang Trần

Chọn B

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x+5}-1}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{2x+5}-1)(\sqrt{2x+5}+1)}{(x^2-4)(\sqrt{2x+5}+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{(x-2)(x+2)(\sqrt{2x+5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+1)} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Câu 3. Giới hạn của $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{x+2}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; **GVPB:** Giang Trần

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1+\sqrt[3]{1+x}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(1+\sqrt[3]{1+x})(1-\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2})}{(x+2)(1-\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(1-\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2})} = \frac{1}{3}$$

Câu 4. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \frac{a\sqrt{2}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

- A. 5. B. 37. C. 13. D. 51.

Lời giải

GVSB: Hoàng Văn Quảng; **GVPB:** Giang Trần

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2+2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = I + J.$$

$$\text{Tính } I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2-4}{\sqrt{2}(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{2}(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{\sqrt{2}(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

$$\text{và } J = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8-7x-1}{\sqrt{2}(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+(\sqrt[3]{7x+1})^2\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{\sqrt{2}\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+(\sqrt[3]{7x+1})^2\right]} = \frac{-7}{12\sqrt{2}}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = I + J = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Suy ra $a = 1$, $b = 12$, $c = 0$. Vậy $a + b + c = 13$.

Chương IV. GIỚI HẠN

Dạng 2.4. Giới hạn tại điểm có kết quả là vô cực.

A. PHƯƠNG PHÁP

○ Dạng tích:

$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

○ Dạng thương:

$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	<u>Dấu của</u> $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	<u>Tùy ý</u>	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} \cdot (x+1).$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 < 0.$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Bài 2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2}.$

Do $\lim_{x \rightarrow 1} (-1) = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+.$

Nên $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x^3-3x^2+3x-1} = -\infty.$

Bài 3. Biết $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^4}.$

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4 > 0.$

Do $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^4 = 0$ và với $\forall x \neq -1$ thì $(x+1)^4 > 0.$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^4} = +\infty.$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(x-3)^2}$ bằng:

A. $L = -\infty.$

B. $L = -5.$

C. $L = +\infty.$

D. $L = 5.$

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+.$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{(x-3)^2} = +\infty$

Câu 2. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right)$ bằng:

A. $L = -\infty.$

B. $L = -\frac{1}{2}.$

C. $L = +\infty.$

D. $0.$

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+1)^2}$

Do $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x+2}{(x-1)} = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0^+.$

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = -\infty.$

Câu 3. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^5} \right)$ bằng:

A. $L = -\infty.$

B. $L = \frac{1}{4}.$

C. $L = +\infty.$

D. $4.$

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^5 (\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4 (\sqrt{x+4}+2)}$

Do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4} > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0^+$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^5} \right) = +\infty$.

Câu 4. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+6}}{x^3} \right)$ bằng:

A. $L = -\infty$.

B. $L = \frac{1}{6}$.

C. $L = +\infty$.

D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

GVSB: Trần Tín; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+6}}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2 - (\sqrt[3]{x+6}-2)}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{x}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4}}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{1}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4}}{x^2} \right)$$

Do $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} - \frac{1}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} \right) = \frac{1}{6} > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+6}}{x^3} \right) = +\infty$.

Dạng 2.6. Giới hạn của hàm số lượng giác

A. PHƯƠNG PHÁP

○ Định lý kẹp chặt.

Nếu $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

○ Giới hạn hàm lượng giác

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Hệ quả: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$

○ Tìm giới hạn của hàm số lượng giác có dạng $\frac{0}{0}$ ta làm như sau:

- Biến đổi tổng thành tích

- Biến đổi để áp dụng giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. BÀI TẬP.**B.1. Bài tập tự luận.**

Bài 1. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}}$.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Phan Thanh Lộc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{2x}{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{2x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{x}{2}} \cdot 4 = 4.$$

Bài 2. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos x - \cos 2x - \cos 3x}{1 - \cos x}$.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Phan Thanh Lộc

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos x - \cos 2x - \cos 3x}{1 - \cos x} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 1 - \cos 2x + 1 - \cos 3x}{1 - \cos x} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x} \right) \\ & = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ & = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 4 \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 9 \right) = 1 + 4 + 9 = 14. \end{aligned}$$

Bài 3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Phan Thanh Lộc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x) \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} = 1.$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$?

A. $\frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1$.

(Do $\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$ khi $x \rightarrow \infty$, mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$).

Câu 2. Tìm giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$?

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $\frac{16}{81}$.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

$$D = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^4 \cdot \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^4 \cdot \frac{16}{81} = \frac{16}{81}.$$

Câu 3. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{1 - \cos 2x}$?

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Cô Long

Chọn C

Ta có $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{1 - \cos 2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{2 \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{\frac{x^2}{2 \sin^2 x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - (x+1) + (x+1) - \sqrt{1+2x}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - (x+1)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - \sqrt{1+2x}}{x^2} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2(x+3)}{x^2 \left[\sqrt[3]{(1+3x)^2} + (x+1)\sqrt[3]{1+3x} + (x+1)^2 \right]} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left[(x+1) + \sqrt{1+2x} \right]} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x+3)}{\left[\sqrt[3]{(1+3x)^2} + (x+1)\sqrt[3]{1+3x} + (x+1)^2 \right]} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left[(x+1) + \sqrt{1+2x} \right]} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\
&= \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Câu 4. Tìm giới hạn $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\tan x)}$?

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Hien Nguyen; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn D

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\tan x)} \\
\text{Ta có } E &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\tan x}}{\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}} \\
E &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\tan x)} \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} = 1) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)\right)}{\tan x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\pi \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{\tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \left(\pi \sin^2 \frac{x}{2} \right) \sin^4 \frac{x}{2}}{\left(\pi \sin^2 \frac{x}{2} \right)^2 \left(\frac{x}{2} \right)^4} \cdot \frac{x}{\tan x} \cdot \frac{\pi^2}{8} x^3 = 0. \end{aligned}$$

Thiếu tóm tắt lý thuyết nhà thầy

Dạng XX. Câu hỏi lý thuyết

A. PHƯƠNG PHÁP

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$, $(x_0 \in R)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0^+.$$

- Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; x_0)$, $(x_0 \in R)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(a; x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0^-.$$

- Các định nghĩa $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự
- Các định lý về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bởi $x \rightarrow x_0^-$ hoặc $x \rightarrow x_0^+$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Chọn khẳng định đúng:

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
- B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$
- C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$
- D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?.

- A. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$. B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$.
- C. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$. D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -5$.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

Ta có

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 1$. Xác định giá trị của a sao cho tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

A. $a = 1$.

B. $a = 3$.

C. Không tồn tại a .

D. $a = -1$.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn A

Ta có

$$\text{Để tồn tại } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} [3 + f(x)] = m$. Xác định giá trị của m sao cho tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

A. $m = 2$.

B. $m = 5$.

C. Không tồn tại m .

D. $m = -1$.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [3 + f(x)] = m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (3) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m - 3.$$

$$\text{Hàm số có giới hạn tại } x = 1 \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = m - 3 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = m + 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = m^2 - 1$. Tổng các giá trị của m sao cho tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ bằng.

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn A

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow m + 1 = m^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Tổng giá trị của m là: $-1 + 2 = 1$

Câu 6. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x + m & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 0$.

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + m = m, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 + 1 = 1$$

$$\text{Hàm số có giới hạn tại } x = 0 \text{ khi } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 7. Biết hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x + b, & \text{khi } x \leq -1 \\ x + a, & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$. Tính giá trị của $a - b$?

A. 2.

B. -2.

C. 4.

D. -1.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn B

Tại điểm $x = -1$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x + b), \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + a) = -1 + a \text{ và } f(-1) = -3 + b$$

Hàm số có giới hạn tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1)$

$$\Leftrightarrow -3 + b = -1 + a \Leftrightarrow a - b = -2.$$

Câu 8. Biết hàm số $y = f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{khi } x < 1 \\ \sqrt{x + 3}, & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ 2x + b, & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 1$ và $x = 2$. Tính giá trị của $4a + b$?

A. $\sqrt{5} + 8$.

B. $\sqrt{5} + 4$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{5} - 4$.

Lời giải

GVSB: Hồ Minh Tường; GVPB: Phan Thanh Lộc

Chọn C

♦ Tại điểm $x = 1$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 1) = a + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x + 3} = 2 \text{ và } f(1) = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 1 = 2 \Leftrightarrow a = 1$

♦ Tại điểm $x = 2$ ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x + 3} = \sqrt{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + b) = b + 4 \text{ và } f(2) = 2 \cdot 2 + b = b + 4.$$

Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\Leftrightarrow b + 4 = \sqrt{5} \Leftrightarrow b = \sqrt{5} - 4.$$

$$\text{Do đó: } 4a + b = \sqrt{5}.$$

1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1} = \frac{\sqrt{4} + 1}{-1 - 1} = -\frac{3}{2}.$$

Bài 2. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+4}{x-2} = \frac{-3 \cdot 3 + 4}{3-2} = -5.$

Bài 3. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^5 - 3x^2 + 2x - 1}{4 - 2x}.$

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Ta có $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^5 - 3x^2 + 2x - 1}{4 - 2x} = \frac{4^5 - 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 1}{4 - 2 \cdot 4} = -\frac{983}{4}.$

2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

B. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án A.

Câu 2. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty.$

B. $-\frac{5}{2}$

C. $\frac{2}{3}.$

D. $\frac{1}{3}.$

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -\frac{5}{2}.$

Câu 3. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{1}{x-a}, a \neq 0$ bằng:

A. $-\frac{1}{2a}.$

B. $0.$

C. $+\infty.$

D. $\frac{1}{a}.$

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2a^-} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a}.$

Câu 4. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. Kết quả khác.

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x} \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = 0.$$

Câu 5. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x-1}$.

- A. 4. B. 6. C. $\frac{13}{2}$. D. 1.

Lời giải

GVSB: Lưu Thị Minh; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{5^2+1}{5-1} = \frac{13}{2}$$

Dạng 2.3. Khử dạng vô định – Giới hạn một bên

A. PHƯƠNG PHÁP

- ☐ Nếu giới hạn là hàm phân thức hữu tỉ thì ta phân tích thành nhân tử rồi khử dạng vô định.
- ☐ Nếu giới hạn chứa dấu giá trị tuyệt đối thì ta khai triển bỏ dấu giá trị tuyệt đối rồi khử dạng vô định.
- ☐ Nếu giới hạn chứa căn thức thì ta nhân liên hợp để khử dạng vô định.

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tính các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$.

Lời giải

GVSB: Kiều Hưng; GVPB: Phạm Tuyền

$$\text{Ta có } |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1$$

Bài 2. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2}$

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1 > 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$ và $x-2 > 0, \forall x > 2$.

Bài 3. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-1} - 1}$

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x-1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3)(\sqrt{x-1}+1) = -2 \end{aligned}$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x}$

A. 2.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) = 2.$$

Câu 2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$.

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0.$$

Câu 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{\sqrt{x-1} + 1 - x}$

A. -1.

B. 1.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{\sqrt{x-1} + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(1 + \sqrt{x-1} - x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} = 1.$$

Câu 4. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$.

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. Không tồn tại.

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-1) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}. \text{ Do đó không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x > 1 \\ mx+3 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.

A. $m = -1$.B. $m = 2$.C. $m = -2$.D. $m = 1$.

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

Chọn C

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx+3) = m+3.$$

Hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow 1 = m+3 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 6. Cho a, b là hai số thực khác 0. Biết giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{a}{x^2-6x+8} - \frac{b}{x^2-5x+6} \right)$ là hữu hạn.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 - 2b^2 + a - 6b - 8$.

A. -10.

B. -8.

C. -12.

D. -5.

Lời giải

GVSB: *Kieu Hung*; GVPB: *Phạm Tuyến*

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{a}{x^2-6x+8} - \frac{b}{x^2-5x+6} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{a}{(x-2)(x-4)} - \frac{b}{(x-2)(x-3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(a-b)x - 3a + 4b}{(x-2)(x-3)(x-4)} \end{aligned}$$

Theo giả thiết giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{a}{x^2-6x+8} - \frac{b}{x^2-5x+6} \right)$ là hữu hạn nên $x=2$ là nghiệm của

$$\text{biểu thức } (a-b)x - 3a + 4b \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$$

$$\text{Do đó } P = a^2 - 2b^2 + a - 6b - 8 = 2b^2 - 4b - 8 = 2(b-1)^2 - 10$$

$$\text{Có } (b-1)^2 \geq 0, \forall b \Rightarrow P \geq -10.$$

$$\text{Vậy } \min P = -10 \text{ khi } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

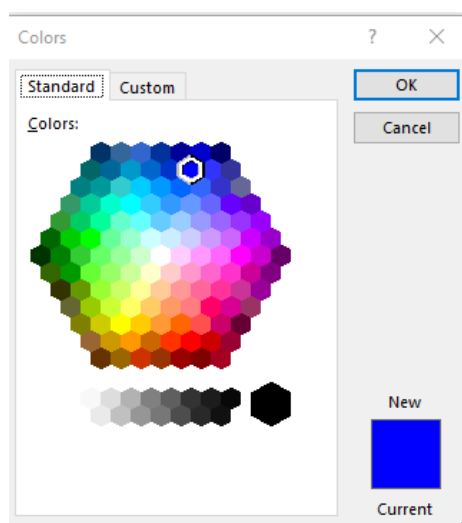
MỘT SỐ QUY ĐỊNH ĐÁNH MÁY (SẢN PHẨM PHẢI XÓA BỎ PHẦN HƯỚNG DẪN NÀY)

(có tham khảo chuẩn của BTN – cảm ơn thầy Trần Quốc Nghĩa)

THÔNG THƯỜNG

Diễn đàn GV Toán

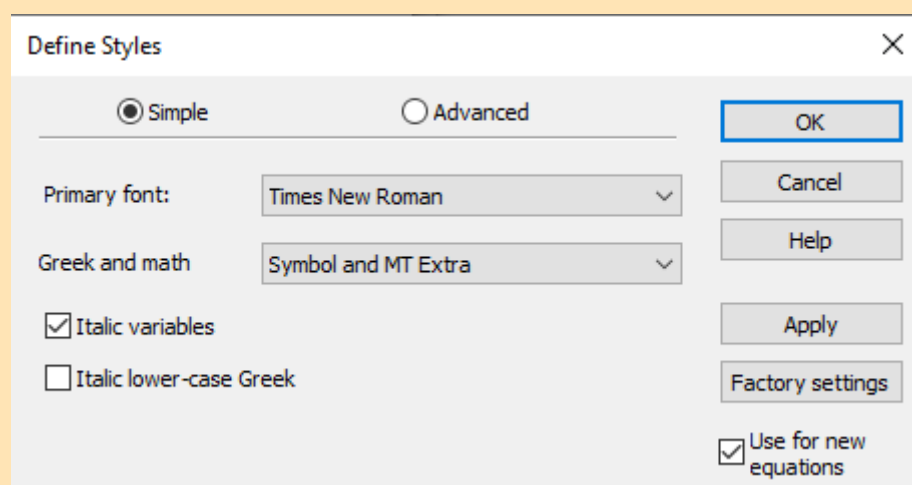
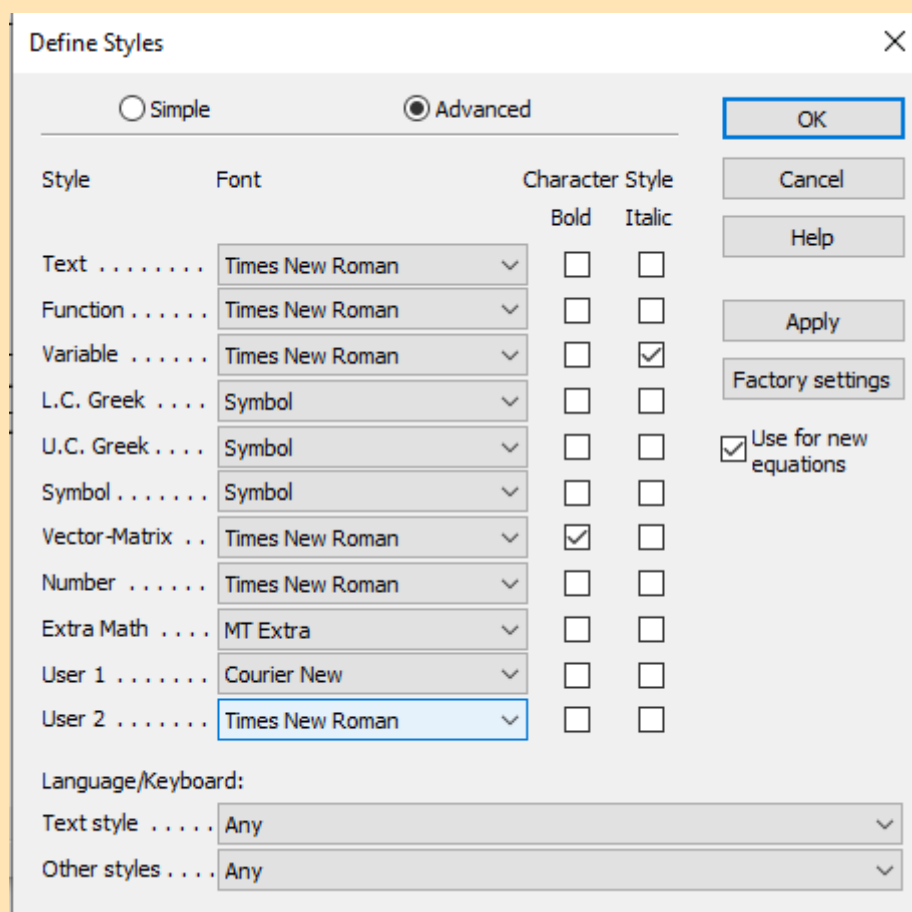
- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Dấu độ 90^0 2. Dấu phẩy d' hoặc A' 3. Cặp ngoặc tròn $(3;4)$ 4. Cặp ngoặc vuông $[3;4]$ 5. Tọa độ vectơ $\vec{a}(1;2)$ 6. Dấu song song $a // b$ 7. Các tập số $N, Z, R \dots$ 8. Các chữ số tự nhiên không đi cùng bất kì kí tự nào khác có thể gõ bằng Word bình thường, không cần gõ trong Mathtype. 9. Các biến số như $x, y, t \dots$ và các chữ cái như $a, b, m, A, B \dots$ đều phải được gõ trong Mathtype và in nghiêng. 10. Bảng biến thiên phải hóa ảnh, hình vẽ canh giữa trang, để chế độ In line with Text. 11. Đáp án đúng chỉ gạch chân chữ cái, không gạch chân dấu chấm. VD: <u>A</u>. chứ không phải là <u>A.</u> 12. Dấu chấm cuối 4 phương án là màu đen, không in đậm. 13. Màu xanh chuẩn cho các đáp án, chữ Bài, Lời giải, Chọn là màu xanh bên dưới | <ol style="list-style-type: none"> 1. 90° Nhấn Ctrl Shift K, buông ra nhấn D 2. d' hoặc A' Nhấn Ctrl Alt ' ' 3. $(3;4)$ Nhấn Ctrl (4. $[3;4]$ Nhấn Ctrl [5. $\vec{a} = (1;2)$ có dấu bằng. 6. $a // b$ (Bôi đen dấu // rồi nhấn Ctrl Shift E) 7. N, Z, R (nhấn Ctrl D, buông ra nhấn Shift N) |
|--|--|



Quy định về gõ MATHTYPE

- Font: Time New Roman

• Size: 12



3. GIỚI HẠN MỘT BÊN

Dạng 2.5. Giới hạn tại điểm có kết quả là vô cực

A. PHƯƠNG PHÁP

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
$L > 0$	0	-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
$L < 0$	0	-	$+\infty$

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-15) = -13 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \\ x-2 > 0 \text{ khi } x \rightarrow 2^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2} = -\infty.$$

Bài 2. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0 \\ \sqrt{x-2} > 0 \text{ khi } x \rightarrow 2^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

Bài 3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2}$

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{(-x-1)(-x+4)}}{(-x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-1}(x-1)}$$

Do

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \sqrt{-x+4} = \sqrt{5} > 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{-x-1}(x-1)) = 0 \\ \sqrt{-x-1}(x-1) < 0, \forall x < -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{-x+4}}{\sqrt{-x-1}(x-1)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{1-x^2} = -\infty.$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây *sai*?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty.$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^3} = -\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0 \text{ do } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x^3 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ do } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \text{ do } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1; \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 \text{ do } x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^3} = +\infty.$$

Câu 2. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 3}{x}$ là

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn D

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x - 3) = -3 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ x \rightarrow 0^- \Rightarrow x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 3}{x} = +\infty.$$

Câu 3. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2021x^3 - 2022}{x - 1}$

A. 2021.

B. 2022.

C. $-\infty$.D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2021x^3 - 2022) = 2021 \cdot 1^3 - 2022 = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0 \\ x - 1 < 0 \text{ khi } x \rightarrow 1^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2021x^3 - 2022}{x - 1} = +\infty.$$

Câu 4. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3 + 2x}{x + 2}$

A. $-\infty$.

B. 2.

C. $+\infty$.D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} (3 + 2x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) = 0 \\ x + 2 > 0 \text{ khi } x > -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3 + 2x}{x + 2} = -\infty.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{khi } x < 1 \\ \sqrt{2x - 2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 4.

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn A

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0$.

Khi $x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = +\infty$.

Câu 6. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 2} \right)$ là:

A. -11.

B. 0.

C. $+\infty$.D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Thúy Bình Đình; GVPB: Phạm Tuyền

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{(x + 1)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - (x + 1)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x - 2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 - (x + 1)(\sqrt{x + 2} + 2)) = -11 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \\ x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - (x + 1)(\sqrt{x + 2} + 2)}{x - 2} = -\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 2} \right) = -\infty.$$

2.1. Câu hỏi lí thuyết

B. BÀI TẬP.

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Mức độ nhận biết

Câu 1. Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Loan; GVPB: Be Nho

Chọn B

Mệnh đề $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ sai vì thiếu điều kiện $b \neq 0$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Loan; GVPB: Be Nho

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ do $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ và $x > 0$. Vậy phương án $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ đúng.

Suy ra phương án $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$ sai.

Các phương án $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ đúng.

Giải thích tương tự phương án $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Câu 3. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $a_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nếu n chẵn.

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nếu n lẻ và $a_n < 0$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Loan; GVPB: Be Nho

Chọn B

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right) = +\infty \text{ nếu } n \text{ lẻ và } a_n < 0.$$

Mức độ thông hiểu

- Câu 1:** Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$. Khi đó, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [3f(x) - 4g(x)]$ bằng
- A. 5. B. 2. C. -6. D. 3.

Lời giải*GVSB: Nguyễn Loan; GVPB: Be Nho***Chọn C**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} [3f(x) - 4g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} 4g(x) = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -6.$$

- Câu 2.** Xét các mệnh đề sau:

- (I) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$, với k là số nguyên dương.
- (II) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, với k là số nguyên dương.
- (III) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$, với k là số nguyên dương.

- A. (I), (II), (III) đều đúng. B. Chỉ (I) đúng.
- C. Chỉ (I), (II) đúng. D. Chỉ (III) đúng.

Lời giải*GVSB: Nguyễn Loan; GVPB: Be Nho***Chọn C**

Mệnh đề đúng là (I), (II).

Mệnh đề (III) sai vì với k là một số nguyên dương chẵn thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$.

- Câu 3.** Xét các mệnh đề sau:

- (I) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = +\infty$, với k là số nguyên.
- (II) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty$ với k là số nguyên dương.
- (III) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = -\infty$, ($k \neq 0$, n nguyên dương).

- A. (I), (II), (III) đều đúng. B. Chỉ (II) đúng.
- C. Chỉ (I), (II) đúng. D. Chỉ (III) đúng.

Lời giải*GVSB: Nguyễn Loan; GVPB: Be Nho***Chọn B**

Mệnh đề (I) sai vì với k là số nguyên âm thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = 0$.

Mệnh đề (II) đúng.

Mệnh đề (III) sai vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0, (k \neq 0, n \text{ nguyên dương})$.

2.2. Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức

A. PHƯƠNG PHÁP

Quy tắc tìm giới hạn tại vô cực. Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty; \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$. Ta có:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	$\pm$	$\pm\infty$
$-\infty$	$\pm$	$\mp\infty$

Phương pháp tìm giới hạn tại vô cực của hàm đa thức :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bước 1: Rút x có lũy thừa bậc cao nhất ra làm nhân tử chung.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

Bước 2: Tìm các giới hạn

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ nếu n là số tự nhiên chẵn ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = -\infty$ nếu n là số tự nhiên lẻ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n .$$

Bước 3: Áp dụng quy tắc tìm giới hạn tại vô cực suy ra kết quả.

(Tương tự khi tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0)$).

B. BÀI TẬP

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 4x + 5)$

Lời giải

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = -2 + 0 + 0 = -2 < 0 .$$

$$\Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = -\infty.$$

Bài 2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2021)$.

Lời giải

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2021) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^4 \left(3 + 5\frac{1}{x^2} - 9\sqrt{2}\frac{1}{x^3} - 2021\frac{1}{x^4} \right) \right] = +\infty.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + 5\frac{1}{x^2} - 9\sqrt{2}\frac{1}{x^3} - 2021\frac{1}{x^4} \right) = 3 > 0 \end{cases}$$

Bài 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-2021x)]$.

Lời giải

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x)(1-2x)(1-3x)\dots(1-2021x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{2021} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \left(\frac{1}{x} - 3 \right) \dots \left(\frac{1}{x} - 2021 \right) \right] = -\infty$$

Vì:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2021} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \left(\frac{1}{x} - 3 \right) \dots \left(\frac{1}{x} - 2021 \right) \right] = (-1)(-2)(-3)\dots(-2021) = -(1.2.3\dots 2021) < 0 \end{cases}$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 1)$

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = 2 > 0 \end{cases}$$

Câu 2. Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 + 3x^3 + x + 1)$.

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 + 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^5 \left(-4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) \right] = +\infty.$

Vì

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = -4 < 0 \end{cases}.$$

Câu 3. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 3x^2 + 2021)$ bằng**A.** $-\infty.$ **B.** $+\infty.$ **C.** 1.**D.** 0.**Lời giải**

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 3x^2 + 2021) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^4 \left(-1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2021}{x^4} \right) \right] = -\infty$

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{3}{x^2} + \frac{2021}{x^4} \right) = -1 < 0.$

Câu 4. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^{2021} + 4x + 5)$ bằng**A.** $I = -\infty.$ **B.** $I = +\infty.$ **C.** $I = -2.$ **D.** $I = 5.$ **Lời giải**

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

Chọn A

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^{2021} + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{2021} \left(-2 + \frac{4}{x^{2020}} + \frac{5}{x^{2021}} \right) \right].$$

Vì

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2021} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{4}{x^{2020}} + \frac{5}{x^{2021}} \right) = -2 + 0 + 0 = -2 < 0.$$

$$\Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{2021} \left(-2 + \frac{4}{x^{2020}} + \frac{5}{x^{2021}} \right) \right] = -\infty.$$

Câu 5. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 - 4|x| + 5)$ bằng**A.** $I = +\infty.$ **B.** $I = -\infty.$ **C.** $I = 0.$ **D.** $I = 1.$ **Lời giải**

Chọn A

$$I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x|^3 + 2x^2 - 4|x| + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x^3 + 2x^2 + 4x + 5 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) \right] = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = -1 < 0.$$

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(mx + 2)(m - 3x^2)] = -\infty$

A. 21.**B.** 22.**C.** 20.**D.** 41.**Lời giải**

GVSB: Tô Thị Lan; GVPB: Be Nho

Chọn A

$$\text{- Với } m \neq 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} [(mx + 2)(m - 3x^2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(m + \frac{2}{x} \right) \left(\frac{m}{x^2} - 3 \right) \right]$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(m + \frac{2}{x} \right) \left(\frac{m}{x^2} - 3 \right) \right] = -3m \end{cases}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow -\infty} [(mx + 2)(m - 3x^2)] = -\infty.$$

$$\Rightarrow -3m > 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

$$\text{Mà } m \in [-20; 20] \Rightarrow m \in \{-20; -19; \dots; -1\}.$$

$$\text{- Với } m = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx + 2)(m - 3x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-6x^2) = -\infty.$$

$$\text{Vậy } m \in \{-20; -19; \dots; -1; 0\}.$$

2.3. Giới hạn tại vô cực của hàm phân thức

A. PHƯƠNG PHÁP

Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức.

Phương pháp giải: Chia cả tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong mẫu thức.

Xét hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ có hệ số của hạng tử bậc cao nhất của $f(x)$, $g(x)$ lần lượt là a, b .

- Nếu bậc cao nhất của $f(x)$ lớn hơn bậc cao nhất của $g(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.
- Nếu bậc cao nhất của $f(x)$ bằng bậc cao nhất của $g(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.
- Nếu bậc cao nhất của $f(x)$ nhỏ hơn bậc cao nhất của $g(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

B. BÀI TẬP**B.1. Bài tập tự luận.**

Bài 1. Tính $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$.

Lời giải**GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho**

Ta có: $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$.

Bài 2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-x^2}{x}$

Lời giải**GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1) \right) = +\infty$.

Bài 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 10x - 3}{x^3 + 7x + 5}$.

Lời giải**GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 10x - 3}{x^3 + 7x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{10}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = 2$.

Bài 4. Tính $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$.

Lời giải**GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho**

Ta có: $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x^3 \sqrt[3]{8 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}} = \frac{0}{2} = 0$.

Bài 5. Tính $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 7 \cdot 3^x - 4^x + 3}{8 \cdot 5^x - 5 \cdot 4^x + 2^x}$.

Lời giải**GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho**

$$\text{Ta có } C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 7 \cdot 3^x - 4^x + 3}{8 \cdot 5^x - 5 \cdot 4^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^x + \frac{3}{5^x}}{8 - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x} = \frac{1}{8}.$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. 3 .

D. 2 .

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

Câu 2: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 2 .

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = -\infty.$$

Câu 3: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$ là

A. -2 .

B. $+\infty$.

C. 0 .

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{11}{x^6}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^6}} = 0.$$

Câu 4: Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)(3x+2)(4x-5)}{8x^3 + 2x + 7}$.

A. $L = 3$.

B. $L = \frac{3}{4}$.

C. $L = \frac{4}{3}$.

D. $L = -3$.

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn A

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x}\right) \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(4 - \frac{5}{x}\right)}{x^3 \left(8 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right) \left(3 + \frac{2}{x}\right) \left(4 - \frac{5}{x}\right)}{8 + \frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3}} = 3.$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{4x^2 + x + 2}{ax^2 + 5}$. Để hàm số có giới hạn bằng 2 khi $x \rightarrow +\infty$ thì giá trị của a là

- A. $a = -4$. B. $a = 4$. C. $a = 3$. D. $a = 2$.

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn D

$$2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x + 2}{ax^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{a + \frac{5}{x^2}} = \frac{4}{a} \quad (a \neq 0) \Rightarrow a = 2.$$

Câu 6: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2+4}{x-2}$. C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+4}{x-2}$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty.$$

Câu 7: Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+2}{x^2+x-2} + a^2 - 4a \right) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải

GVSB: Ngọc Lý; GVPB: Be Nho

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+2}{x^2+x-2} + a^2 - 4a \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (a^2 - 4a) = 3 + a^2 - 4a = 0$$

$$3 + a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 4.$$

B.1. Bài tập tự luận

Bài 1. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

$$\text{Ta có: } K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -2.$$

Bài 2. Tìm giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2} + \sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

$$\text{Ta có: } C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x^2}} + x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{2}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Bài 3. Giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x^2+x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}+1\right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. [NB] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2022}-1}$.

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2022}-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{2021}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x^{2021}}} = 0.$$

Câu 2. [NB] Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}$.

A. $-\frac{1}{4}$.

B. 1.

C. 0.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}{4x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{4 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 3. [TH] Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$.

A. 0.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x+3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = 0.$$

Câu 4. [TH] Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x+1}$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Câu 5. [VD] Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$. Khi đó giá trị a là

A. -6.

B. 10.

C. -10.

D. 6.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 5}{\sqrt{x^2 + ax + 5} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \frac{5}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a + \frac{5}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1} = -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = -10$.

Câu 6. [VDC] Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = -2$. Tính

$P = a + b + 5c$.

A. $P = 18$

B. $P = 12$

C. $P = 9$

D. $P = 5$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thành Thái; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - c^2)x^2 + bx}{\sqrt{ax^2 + bx} + cx} = -2$.

Điều này xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a - c^2 = 0 & (a, c > 0) \\ \frac{b}{\sqrt{a} + c} = -2 \end{cases}$.

(Vì nếu $c \leq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = +\infty$).

Mặt khác, ta cũng có $c^2 + a = 18$.

Do đó, $\begin{cases} a = c^2 = 9 \\ b = -2(\sqrt{a} + c) \end{cases} \Leftrightarrow a = 9, b = -12, c = 3$.

Vậy $P = a + b + 5c = 12$.

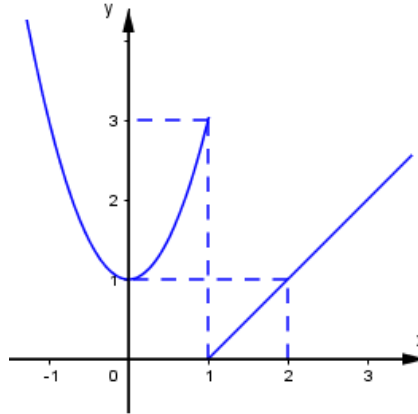
HÀM SỐ LIÊN TỤC

Dạng 5.1. Các câu hỏi lý thuyết

B. BÀI TẬP.

B.2. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?



A. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

C. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

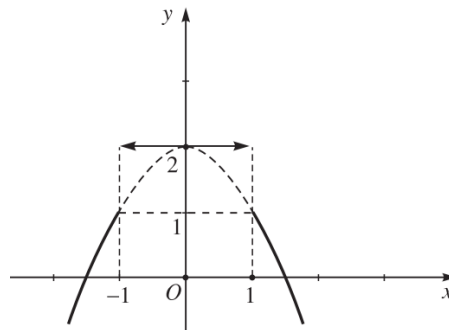
D. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Giang; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn A

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?



A. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

D. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Giang; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn B

Câu 3. Cho $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $2x_0$.

B. Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm x_0 .

C. Hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại điểm x_0^2 .

D. Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm x_0 .

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Giang; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn D**Câu 4.** Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = 0$.

2. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $(b; c)$ thì liên tục trên $(a; c)$.

A. Chỉ 1 đúng.**B.** Chỉ 2 đúng.**C.** Cả 1 và 2 đều đúng.**D.** Cả 1 và 2 đều sai.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Giang; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn A**Câu 5.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?**A.** Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$.**B.** Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.**C.** Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $c \in (a; b)$.**D.** Phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a; b)$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Giang; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn D**Câu 6.** Hàm số nào trong các hàm số sau không liên tục trên $\mathbb{R}$?**A.** $y = x^2 + 2$.**B.** $y = x^3 - 2x + 3$.**C.** $y = \sin x$.**D.** $y = \frac{1}{x}$.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Hương Giang; GVPB: Đỗ Hải Thu

Chọn D

Hàm số $y = \frac{1}{x}$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ nên hàm số đó không liên tục trên $\mathbb{R}$

Dạng 5.2. Xét tính liên tục bằng đồ thị.**Dạng 5.3. Hàm số liên tục tại một điểm.****B.1. Bài tập tự luận.****Bài 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x_0 = -3$.

Lời giải

GVSB: Lương Nguyễn Thị; GVPB: Phạm Văn Lãm

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = [0; +\infty)$. Ta có $-3 \notin D$.

Vậy hàm số đã cho không liên tục tại $x_0 = -3$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

GVSB: Lương Nguyễn Thị; GVPB: Phạm Văn Lãm

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$f(2) = \sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{6}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{2^2 + 2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

Bài 3. Tìm giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{khi } x \neq -1 \\ m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = -1$.

Lời giải

GVSB: Lương Nguyên Thị; **GVPB:** Phạm văn Lãm

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$f(-1) = m.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (3x+1) = 3 \cdot (-1) + 1 = -2.$$

$$\text{Hàm số đã cho liên tục tại } x_0 = -1 \text{ khi } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy $m = -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

2. Trắc nghiệm

Câu 1. (NB) Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3+x^2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng** nhất?

A. Hàm số liên tục tại $x = 3$.

B. Hàm số gián đoạn tại $x = 3$.

C. $f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

D. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

Lời giải

Chọn A

GVSB: Lương Nguyên Thị; **GVPB:** Phạm văn Lãm

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có

$$f(3) = \sqrt{3+3^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3+x^2} = \sqrt{3+3^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3).$$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 3$.

Câu 2. (TH) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ 3 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Trong biểu thức xác định $f(x)$, cần thay số

3 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

GVSB: Lương Nguyên Thị; **GVPB:** Phạm văn Lãm

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 4} = 0.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 0$.

Vậy cần thay số 3 bởi số 0.

Câu 3. (VD) Tìm giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x - m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại

$x_0 = 1$.

A. $m = -5$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn B

GVSB: Lương Nguyên Thị; **GVPB:** Phạm văn Lãm

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có:

$$f(1) = 3 - m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 - m = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4: (VDC) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị

của a để hàm số liên tục tại $x = 1$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

GVSB: Lương Nguyên Thị; **GVPB:** Phạm văn Lãm

Tập xác định: $D = [-3; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+2)(\sqrt{x+3}+2) = 4(a+2).$$

$$f(1) = 8 + a^2.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4(a+2) = 8 + a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Dạng 5.4. Hàm số liên tục trên khoảng- đoạn.**A. PHƯƠNG PHÁP**

- Để xét sự liên tục của hàm số f trên khoảng, ta áp dụng định nghĩa hoặc áp dụng định lý:
- a) Nếu hai hàm số f và g liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f \pm g, fg, cf$ (c là một hằng số) đều liên tục tại điểm x_0 .
- b) Hàm đa thức và hàm số phân thức hữu tỉ và các hàm lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.

B. BÀI TẬP.**B.1. Bài tập tự luận.**

Bài 1. Chứng minh các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & x > 1 \\ -\sqrt{5 - x} & x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải*GVSB: Trần Quang Thắng; GVPB: Phạm Văn Lãm*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & x > 1 \\ -\sqrt{5 - x} & x \leq 1 \end{cases}.$$

Tập xác định của $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x_0 \in (1; +\infty)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{x_0^2 - 4x_0 + 3}{x_0 - 1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty; 1)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{5 - x}) = -\sqrt{5 - x_0} = f(x_0)$. Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$ (2).

Ta xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x_0 = 1$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 3) = -2.$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt{5 - x}) = -2.$$

$$\text{Và có } f(1) = -\sqrt{5 - 1} = -2.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{Hàm số liên tục tại } 1 \text{ (3).}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 3 \\ ax + b & 3 < x < 5 \\ 7 & x \geq 5 \end{cases}$. Xác định a, b để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Lời giải*GVSB: Trần Quang Thắng; GVPB: Phạm Văn Lãm*Ta có tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$.Ta có: hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 3), (3; 5), (5; +\infty)$ (vì là hàm đa thức).

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x = 3$ và $x = 5$

.

+ Tại $x = 3$:

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (ax + b) = 3a + b$ và $f(3) = 1$.

Do đó hàm số liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 3a + b = 1 \quad (1)$$

+ Tại $x = 5$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 5a + b$ và $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 7 = f(5)$.

Do đó hàm số liên tục tại $x = 5$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow 5a + b = 7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ 5a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$.

Vậy với $a = 3, b = -8$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} & \text{khi } x > -2 \\ -3 & \text{khi } x = -2 \\ \sqrt{3+x} - 5 & \text{khi } -3 \leq x < -2 \end{cases}$. Tìm các khoảng, nửa khoảng mà trên

đó hàm số $f(x)$ liên tục.

Lời giải

GVSB: Trần Quang Thắng; **GVPB:** Phạm Văn Lãm

Vì $x^2 - 4 \neq 0$ với mọi $x > -2$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$ xác định trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Ta có $\forall x_0 \in (-2; +\infty)$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} = \frac{x_0^3 + 8}{x_0^2 - 4} = f(x_0)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Với mọi $x \in [-3; -2)$ thì $3 + x \geq 0$, do đó hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} - 5$ xác định trên nửa khoảng $[-3; -2)$.

$\forall x_0 \in [-3; -2)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt{3+x} - 5) = \sqrt{3+x_0} - 5 = f(x_0)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-3; -2)$.

Tại $x_0 = -2$, ta có $f(-2) = -3$. Và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (\sqrt{3+x} - 5) = -4 \neq f(-2)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = -2$.

Kết luận hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-2; +\infty)$ và trên $[-3; -2)$.

A.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là:

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải

GVSB: Trần Quang Thắng; GVPB: Phạm Văn Lâm

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là liên tục phải tại a và liên tục trái tại b , tức là $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 2. Hàm số $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}$ liên tục trên:

A. $(3; 10)$.

B. $[-3; 4]$.

C. $[-3; +\infty)$.

D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải

GVSB: Trần Quang Thắng; GVPB: Phạm Văn Lâm

Chọn B

Tập xác định của hàm số $[-3; 4]$.

Vì với mọi $x_0 \in (-3; 4)$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-3; 4)$. Ngoài ra ta có:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (\sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}) = \sqrt{7} = f(-3) \text{ nên hàm số liên tục phải tại } x = -3$$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow (4)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (4)^-} (\sqrt{3+x} + \sqrt{4-x}) = \sqrt{7} = f(4) \text{ nên hàm số liên tục trái tại } x = 4.$$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-3; 4]$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x+1} - 3} & \text{khi } x > 2 \\ 2mx - 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m = \frac{-3}{2}$.

B. $m = \frac{-1}{8}$.

C. $m = \frac{1}{8}$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

GVSB: Trần Quang Thắng; GVPB: Phạm Văn Lâm

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Khi $x \in (2; +\infty)$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x+1} - 3}$ là hàm sơ cấp xác định trên $(2; +\infty)$ nên hàm số

$f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$.

Khi $x \in (-\infty; 2)$ thì $f(x) = 2mx - 1$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 2$.

Ta có: $f(2) = 4m - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x+1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{4x+1} + 3)}{(4x+1-9)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4} = \frac{-3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2mx - 1) = 4m - 1.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4m - 1 = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{8}.$$

Câu 4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{khi } \sin x \geq 0 \\ 3 - \cos x & \text{khi } \sin x < 0 \end{cases}$ có bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2019)$?

A. Vô số.

B. 320.

C. 321.

D. 319.

Lời giải

GVSB: Trần Quang Thắng; **GVPB:** Phạm Văn Lãm

Chọn C

Ta thấy hàm số liên tục với mọi x thỏa mãn $\sin x \neq 0$.

Ta chỉ cần xét tại $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{N}^*)$, (Do $x \in (0; 2019)$).

+) Xét $x = k2\pi (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow (k2\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (k2\pi)^+} (1 + \cos x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (k2\pi)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (k2\pi)^-} (3 - \cos x) = 2$$

$$f(k2\pi) = 2.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow (k2\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (k2\pi)^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow k2\pi} f(x) = 2 = f(k2\pi)$$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục khi $x = k2\pi (k \in \mathbb{N}^*)$.

+) Xét $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + k2\pi)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + k2\pi)^-} (1 + \cos x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + k2\pi)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi + k2\pi)^+} (3 - \cos x) = 4$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow (\pi + k2\pi)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (\pi + k2\pi)^+} f(x), \text{ suy ra không tồn tại } \lim_{x \rightarrow \pi + k2\pi} f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ gián đoạn với $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{N}^*)$.

$$\text{Vì } 0 < x < 2019 \Rightarrow 0 < \pi + k2\pi < 2019 \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{2019 - \pi}{2\pi} \Rightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{2019 - \pi}{2\pi} < 320,9.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ suy ra $k \in \{0; 1; 2; \dots; 320\}$. Do đó có 321 giá trị k thỏa mãn.

Dạng 5.5. Tìm m để hàm số liên tục tại 1 điểm.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tìm giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x_0 = 3 \in D$.

$$\text{Đặt } y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}.$$

$$f(3) = 2m + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 4) = 3 - 4 = -1.$$

Hàm số liên tục tại $x = 3$ khi $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Leftrightarrow 2m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1.$

Bài 2. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} & \text{khi } x > 5 \\ (x - 5)^2 + m^2 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 5.$

Lời giải

GVSB: Trần Thanh Toàn; GVPB: Thanh Hoa

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x_0 = 5 \in D.$

$$f(5) = m^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} [(x - 5)^2 + m^2] = m^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x^2 - 25)}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x - 5)(x + 5)}{(x + 1)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x + 5)}{(x + 1)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Để } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 5 \Leftrightarrow f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \Leftrightarrow m^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x_0 = 2$?

Lời giải

GVSB: Trần Thanh Toàn; GVPB: Thanh Hoa

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x_0 = 2 \in D.$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$$

$$f(2) = a.$$

Hàm liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $a = 1.$

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ và $f(2) = m^2 - 2$ với $x \neq 2$. Giá trị của m để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ là:

A. $\sqrt{3}.$

B. $-\sqrt{3}.$

C. $\pm\sqrt{3}.$

D. ± 3

Lời giải

GVSB: Trần Thanh Toàn; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x_0 = 1 \in D$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1$.

Vậy $m^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} \\ m = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 2: Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 4$.

Lời giải

GVSB: Trần Thanh Toàn; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 2 \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $x \neq 2$ thì hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

+ Tại $x = 2$: Ta có $f(2) = 2m + 3$.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 7$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$\Leftrightarrow 2m + 3 = 7 \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy $m = 2$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m - 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$

?

A. $m = \frac{4}{3}$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = \frac{13}{9}$.

Lời giải

GVSB: Trần Thanh Toàn; GVPB: Thanh Hoa

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x_0 = 1 \in D$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Ta có: $f(1) = 3m - 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{x-2} + x}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{x^3 + x - 2}{(x-1)(x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 + \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}} \right] = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

$$\text{Nên hàm số liên tục tại } x_0 = 1 \Leftrightarrow 3m - 2 = \frac{7}{3} \Leftrightarrow m = \frac{13}{9}.$$

Vậy $m = \frac{13}{9}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} & x \neq 1 \\ 2ax - 1, & x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Tính $a - b$

A. 0

B. -1

C. -5

D. 7

Lời giải

GVSB: Trần Thanh Toàn; GVPB: Thanh Hoa

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $x_0 = 1 \in D$.

Ta có $f(1) = 2a - 1$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì phải tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$ thì $(x^2 + ax + b) : (x-1) \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+2 = 2a-1 \Leftrightarrow a=3$$

Khi đó: $b = -a - 1 = -4$

Do đó để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $a - b = 3 - (-4) = 7$.

Dạng 5.6. Tìm m để hàm số liên tục trên khoảng- đoạn.

B. BÀI TẬP.

B.1. Bài tập tự luận.

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} - m$ là hàm số liên tục.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$ hàm số $f(x) = mx + 2$ là hàm số liên tục.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - m) = -m = f(0)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 2) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -2ax + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

Ta có $f(1) = 1 - 2a$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2ax + 1) = 1 - 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 4) = 5.$$

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 - 2a = 5 \Leftrightarrow a = -2.$$

Bài 3. Xác định a, b để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2) \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 2 \\ b & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Hàm số liên tục trên $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$.

Xét tại $x = 0$ ta có:

$$f(0) = b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1.$$

Xét tại $x = 2$ ta có:

$$f(2) = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1.$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy $a = 1; b = -1$.

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{khi } x \geq -1 \\ x+m & \text{khi } x < -1 \end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = -3$.

B. $m = 5$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1$.

$$\text{Có } f(-1) = -2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ và } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 + m.$$

$$\text{Để hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thì } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \Leftrightarrow -2 = -1 + m \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, a là tham số. Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. -1 .

B. 1 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Chọn B

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

$$f(1) = a - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(ax - \frac{1}{2} \right) = a - \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Để hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thì } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{khi } x > 2 \\ 2mx-1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số liên

tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{-3}{2}$.

C. $m = \frac{-1}{8}$.

D. $m = \frac{1}{8}$.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Khi $x \in (2; +\infty)$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x+1} - 3}$ là hàm sơ cấp xác định trên $(2; +\infty)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$.

Khi $x \in (-\infty; 2)$ thì $f(x) = 2mx - 1$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 2$.

Ta có: $f(2) = 4m - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x+1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)(\sqrt{4x+1} + 3)}{(4x+1-9)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4} = \frac{-3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2mx - 1) = 4m - 1.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4m - 1 = \frac{-3}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-1}{8}.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên

tục trên $\mathbb{R}$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

GVSB: Đỗ Minh Vũ; GVPB: Thanh Hoa

Chọn A

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$.

Tại $x_0 = 2$, ta có:

$$f(2) = a - \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x} \right) = a - \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-3) = -1. \end{aligned}$$

$$\text{Để hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thì } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Với } a = -\frac{3}{4}, \text{ xét bất phương trình } -x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 1$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Dạng 5.7. Bài toán về số nghiệm của phương trình.**B. BÀI TẬP.****B.1. Bài tập tự luận.**

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2, f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải*GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa*

Ta có : $f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) - 5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1) = f(-1) - 5 = 2 - 5 = -3 \\ g(4) = f(4) - 5 = 7 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-1) \cdot g(4) < 0.$$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 4)$ hay phương trình $f(x) = 5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 4)$.

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi m thì phương trình sau có nghiệm $m(x-1)(x+2) + 2x + 1 = 0$.

Lời giải*GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa*

Đặt $f(x) = m(x-1)(x+2) + 2x + 1$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(1) = 3; f(-2) = -3 \Rightarrow f(1) \cdot f(-2) < 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi m .

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $2a + 6b + 19c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Lời giải*GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa*

Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = c, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{18}(2a + 6b + 18c) = -\frac{c}{18}$.

Suy ra $f(0) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{c^2}{18}$.

Nếu $c = 0$ thì $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$, suy ra phương trình có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

Nếu c khác 0 thì $f(0) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{c^2}{18} < 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm thuộc $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

B.2. Bài tập trắc nghiệm.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.

D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa

Chọn D

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \rightarrow A$ đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 < 0 \\ f(-2) = 23 > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_1 trên $(-2; 1)$,

mà $(-2; -1) \subset (-2; 0) \subset (-\infty; 1) \rightarrow B$ sai và C đúng.

(iii) Ta có $\begin{cases} f(x) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Kết hợp với (1) suy ra

$f(x) = 0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < \frac{1}{2} \rightarrow D$ đúng.

Câu 2: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa

Chọn D

Hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $(-1; 0)$.

(ii) $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0; 1)$.

(iii) $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm x_3 thuộc $(1; 2)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x \in [0; 2) \\ (x-4)^2 + 6 & x \in [2; 4] \end{cases}$. Phương trình $f(x) = 7$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa

- Xét phương trình: $x^2 + 4 = 7$ trên $[0; 2)$.

$$\text{Ta có: } x^2 + 4 = 7 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -\sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

- Xét phương trình: $(x-4)^2 + 6 = 7$ trên $[2; 4]$.

$$\text{Ta có: } (x-4)^2 + 6 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 5 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình $f(x) = 7$ có đúng hai nghiệm.

Câu 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

A. 19.

B. 18.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

GVSB: Lê Văn Quý; GVPB: Thanh Hoa

Chọn C

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Khi đó

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

$$\text{Ta có: } f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3) > 0 \text{ (do } x_1 < -1 < x_2 < x_3).$$

$$\text{Mà } f(-1) = -m - 5 \text{ nên suy ra } -m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5.$$

Thử lại: với $m < -5$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ nên tồn tại } a < -1 \text{ sao cho } f(a) < 0 \text{ (1).}$$

$$\text{Do } m < -5 \text{ nên } f(-1) = -m - 5 > 0 \text{ (2).}$$

$$f(0) = m - 3 < 0 \text{ (3).}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại } b > 0 \text{ sao cho } f(b) > 0 \text{ (4).}$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -1)$.

Từ (2) và (3) suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Từ (3) và (4) suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy $m < -5$ và m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6\}$.