

Chuyên đề

Nguyên lý Cực hạn

Huỳnh Kim Linh

GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa

Lời giới thiệu

Tổ hợp là một lĩnh vực không thể thiếu trong *Toán học*, nó thường xuyên xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi các cấp. Khác với các bài toán trong lĩnh vực *Giải tích*, *Đại số*, *Lượng giác*, ... các bài toán *Tổ hợp* thường liên quan đến các đối tượng là các tập hợp hữu hạn. Chính vì thế các bài toán này thường mang những nét đặc trưng riêng của Toán học rời rạc.

Nguyên lý cực hạn hay còn gọi là *nguyên lý khởi nguồn cực hạn* có phát biểu khá đơn giản : Một tập hợp hữu hạn (khác rỗng) các số thực bất kì đều có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Nhờ có nguyên lý này ta có thể xét các phần tử của một đại lượng nào đó có giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn:

- Xét đoạn thẳng lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn đoạn thẳng.
- Xét góc lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn góc .
- Xét đa giác có diện tích hoặc chu vi lớn nhất (nhỏ nhất) trong một hữu hạn đa giác.
- Xét khoảng cách lớn nhất (nhỏ nhất) trong một số hữu hạn khoảng cách giữa hai điểm hoặc khoảng cách từ một điểm đến một khoảng cách.
- Xét các điểm là đầu mút của một đoạn thẳng, xét các điểm ở phía trái nhất hoặc ở phía phải nhất của đoạn thẳng.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Chúng ta sẽ tìm hiểu về những ứng dụng của phương pháp này trong các bài toán Hình học, Đại số, Số học, ... Trong Hình học, chúng ta sẽ áp dụng vào các Đại lượng đa dạng như độ dài các cạnh, đại lượng góc, khoảng cách đoạn thẳng,.... Còn trong Đại số và Số học, Đại lượng cực hạn là số nhỏ nhất, số lớn nhất,....

Nội dung gồm 4 phần

Phần 1. MỘT SỐ VÍ DỤ MỞ ĐẦU

Phần 2. NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG HÌNH HỌC

- 2.1. Góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất
- 2.2. Khoảng cách lớn nhất hoặc nhỏ nhất
- 2.3. Diện tích và chu vi lớn nhất hoặc nhỏ nhất
- 2.4. Bao lồi và đường thẳng tựa
- 2.5. Bài tập

Phần 3. SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG ĐẠI SỐ VÀ SỐ HỌC

- 3.1. Các bài toán số học
- 3.2. Các bài toán đại số
- 3.3. Bài tập

Phần 4. NGUYÊN LÝ THỨ TỰ TRONG TẬP SỐ TỰ NHIÊN

- 4.1 Nguyên lý thứ tự
- 4.2 .Nguyên lý quy nạp toán học
- 4.3 Sự tương đương giữa hai nguyên lý

Dù cố gắng nhiều nhưng chuyên đề không tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được sự đóng góp từ các thầy, cô giáo và các em học sinh.

Hi vọng rằng chuyên đề này sẽ giúp các bạn bớt khó khăn khi nghiên cứu Tổ hợp, đồng thời giúp các bạn tìm thấy vẻ đẹp sáng tạo của Toán học khi giải loại toán này.

Cuối cùng, tác giả xin chân thành cảm ơn các bạn với những đóng góp ý kiến bổ ích.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Nha Trang, ngày 10 tháng 04 năm 2014

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Phần 1. MỘT SỐ VÍ DỤ MỞ ĐẦU:

Ví dụ 1. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể nối $2n$ điểm này bằng n đoạn thẳng có đầu mút khác màu sao cho chúng đôi một không giao nhau.

Lời giải. Với mỗi cách nối $2n$ điểm bằng n đoạn thẳng xanh - đỏ, ta tính tổng độ dài các đoạn thẳng được nối. Do số cách nối là hữu hạn nên tồn tại cách nối có tổng độ dài nối trên là nhỏ nhất. Ta sẽ chứng minh cách nối này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta giả sử ngược lại, tồn tại 2 đoạn thẳng cắt nhau, giả sử các đoạn thẳng đó là AB và CD giao nhau tại điểm O (A, C màu đỏ và B, D màu xanh)

Ta có : $AD < OA + OD$ (Bất đẳng thức tam giác)

$BC < OB + OC$ (Bất đẳng thức tam giác)

Suy ra : $AD + BC < AB + CD$

Do đó : nếu ta giữ nguyên $n - 2$ đoạn nối còn lại và thay AB, CD bằng AD, BC thì tổng các đoạn nối của cách nối mới nhỏ hơn cách nối của chúng ta. Trái với giả thiết. Vậy : Tồn tại cách nối $2n$ điểm bằng n đoạn thẳng xanh - đỏ sao cho chúng không cắt nhau.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng không tồn tại số lẻ n , sao cho $15^n + 1$ chia hết n .

Lời giải. Với $n > 1$, ta giả sử p là ước số nguyên tố lẻ nhỏ nhất của n và k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $15^k - 1$ chia hết cho p .

Vì $15^{2n} - 1 = (15^n - 1)(15^n + 1)$ chia hết cho n nên $15^{2n} - 1$ chia hết cho p . Như vậy $(15, p) = 1$ và theo định lý Fermat, ta có $15^{p-1} - 1$ chia hết cho p . Theo đề bài, ta suy ra k là ước số của $p - 1$ và $2n$.

Ta lại có k chia hết $p - 1$ nên $k \leq p - 1 \leq p$

Nếu k là số lẻ thì k sẽ chia hết n (vì k chia hết $2n$).

Ta có k chia hết n ($k < p$) nhưng p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n nên $k = 1$, như thế p chia hết $15^1 - 1 = 14$

Nếu $k = 2l$, l là nguyên dương thì $l < 2l = k < p$, $k = 2l$ chia hết $2n$.

Từ đó $l < p$, l chia hết n và tương tự như trên $l = 1 \Rightarrow k = 2$.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Từ đó p chia hết $15^k + 1$ chia hết cho 7.

Nhưng rõ ràng $15^n + 1$ chia 7 dư 2. Mâu thuẫn. Vậy $n = 1$ thỏa mãn đề bài.

Phần 2. NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG HÌNH HỌC :

Ta nhận thấy rằng, có khá nhiều bài toán được giải bằng việc xét các phần tử cực biên (phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất). Vậy trong hình học các phần tử cực biên là gì? Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu các phần tử cực biên là các góc lớn nhất hoặc nhỏ nhất, độ dài lớn nhất hoặc nhỏ nhất, các điểm đầu mút của đoạn thẳng, ... Việc sử dụng nguyên lý cực hạn trong hình học cho ta những lời giải nhanh, gọn và đẹp. Sau đây là một số ví dụ minh họa cho phương pháp này :

2.1 Góc lớn nhất và góc nhỏ nhất :

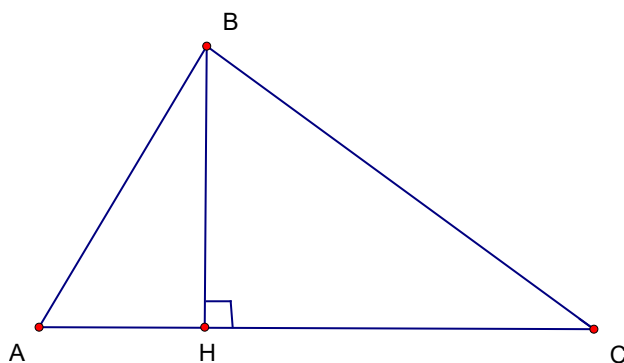
Ví dụ 2.1 Chứng minh rằng nếu tất cả các cạnh của tam giác đều nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải. Gọi A là góc nhỏ nhất của tam giác ABC , thì góc $\widehat{BAC} \leq 60^\circ$. (hình 2.1)

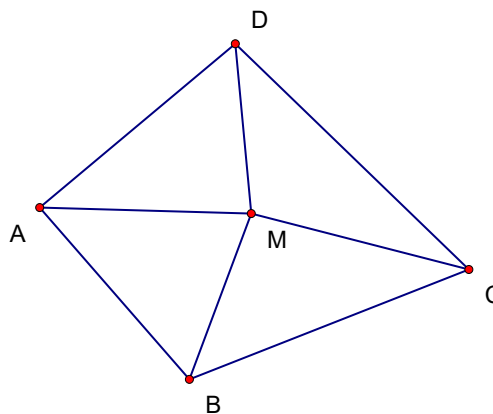
$$\text{Ta có : } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot AC$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \leq AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.



Hình 2.1



Hình 2.2

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Ví dụ 2.2 . Chứng minh rằng bốn đường tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín miền tứ giác đó.

Lời giải . Gọi M là điểm bất kì trong tứ giác ABCD (hình 2.2) .

$$\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^\circ$$

Do đó, góc lớn nhất trong tứ giác không nhỏ hơn 90° . Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\widehat{AMB}$ lớn nhất. Suy ra : $\widehat{BMC} \geq 90^\circ$. Từ đó, M thuộc đường tròn đường kính BC .

Ví dụ 2. 3. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi P là điểm bất kì trong tam giác. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ P đến các cạnh tam giác (hình 2.3) .

Lời giải .

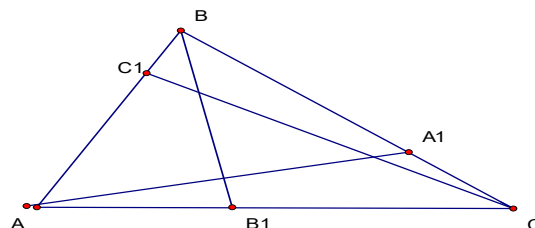
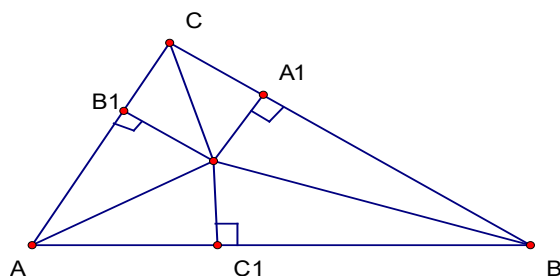
Ta dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Vì tam giác ABC là tam giác nhọn nên A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên 3 cạnh BC, CA, AB.

$$\text{Nối } PA, PB, PC \text{ ta có : } \widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^\circ$$

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60° . Không mất tính tổng quát, ta giả sử góc APC_1 lớn nhất, do đó góc $APC_1 \geq 60^\circ$.

$$\text{Xét tam giác } APC_1 \text{ vuông tại } C_1, \text{ ta có : } \frac{PC_1}{AP} = \cos \widehat{APC_1} \leq \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Từ đó, ta có : $AP \geq 2PC_1$. Nếu thay AP là khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 là khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách đó thì bất đẳng thức được thỏa mãn.



Hình 2.3

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Hình 2.4

Ví dụ 2.4. (hình 2.4). Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 thuộc các cạnh BC, CA, AB . Biết rằng độ dài các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 không lớn hơn 1. Chứng minh : $S_{ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải . Không mất tính tổng quát, ta giả sử : $\widehat{C} \leq \widehat{B} \leq \widehat{A}$.

Ta xét các trường hợp sau :

Trường hợp 1. Tam giác ABC có 3 góc nhọn .

Khi đó, $60^\circ < \widehat{A} < 90^\circ$ Ta có: $h_b \leq BB_1 \leq 1$ và $h_c \leq CC_1 \leq 1$

(h_b, h_c là đường cao tương ứng của tam giác hạ từ B, C).

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} \frac{h_b h_c}{\sin A} \leq \frac{1}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra : } S_{ABC} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Trường hợp 2 . Tam giác ABC không là tam giác có 3 góc nhọn.

Khi đó : góc $A \geq 90^\circ$

$$\text{Suy ra : } AB \leq BB_1 \leq 1 \text{ và } AC \leq CC_1 \leq 1 .$$

$$\text{Như vậy, } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \leq \frac{1}{2s} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm .

2.2 Khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất :

Ta xét một vài ví dụ sau :

Ví dụ 2.5 Trên mặt phẳng cho n điểm (với $n \geq 3$) sao cho trong chúng không có 3 điểm bất kì nào thẳng hàng. Chứng minh rằng : n điểm đã cho thẳng hàng .

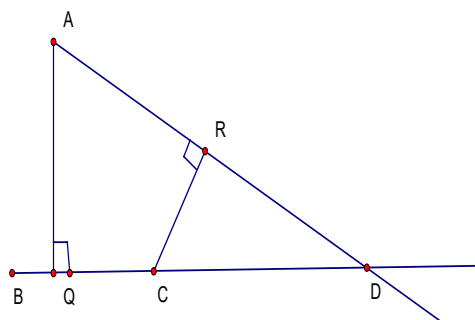
Lời giải . Giả sử ngược lại, n điểm đã cho không thẳng hàng. Dựng qua mỗi cặp điểm trong số n điểm đó một đường thẳng. Số các đường thẳng được nối như trên là hữu hạn. Do vậy, tồn tại một khoảng cách nhỏ nhất .

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

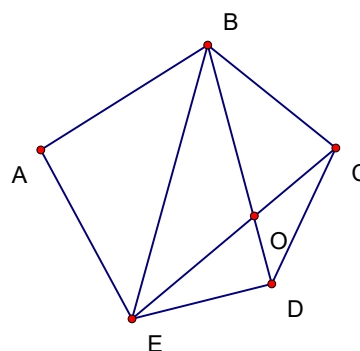
Giả sử : Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC là nhỏ nhất. Theo giả thiết, đường thẳng đi qua B và còn đi qua điểm thứ 3 là D (với $D \neq B, C$) .

Ta vẽ $AQ \perp BC$, khoảng cách AQ nhỏ nhất (theo điều giả sử). Trong 3 điểm thẳng hàng B, C, D phải có ít nhất 2 điểm nằm cùng phía với Q, cho đó là C và D (hình 2.5).

Giả sử: $CQ < DQ$, vẽ $CR \perp AD$, dễ thấy $CR < AQ$. Điều này vô lí với AQ nhỏ nhất. Từ đó suy ra n điểm đã cho phải thẳng hàng



Hình 2.5



Hình 2.6

Ví dụ 2.6. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi bất kì tồn tại 3 đường chéo, mà chúng có thể dựng được một tam giác .

Lời giải. Giả sử BE là đường chéo lớn nhất của ngũ giác lồi ABCDE. Ta sẽ chứng minh các đoạn thẳng BE, EC và BD tạo thành các cạnh của một tam giác. Như vậy ta cần chứng minh $BE < EC + BD$. Thật vậy, gọi O là giao điểm của BD và EC .

Vậy : $BE < BO + OE < BD + CE$

Ví dụ 2.7. Trên mặt phẳng cho n điểm (với $n \geq 2$) và đánh dấu trung điểm của tất cả các đoạn thẳng có những điểm cuối là những điểm đã cho. Chứng minh rằng những điểm đã đánh dấu không ít hơn $2n - 3$ điểm khác nhau.

Lời giải : Giả sử hai điểm A và B có khoảng cách lớn nhất trong các cặp điểm đã cho.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Ta xét những trung điểm của các đoạn thẳng nối A với các điểm còn lại. Tất cả các trung điểm này khác nhau, nằm trong đường tròn tâm A bán kính $\frac{AB}{2}$ và có số lượng là $n - 2$ điểm.

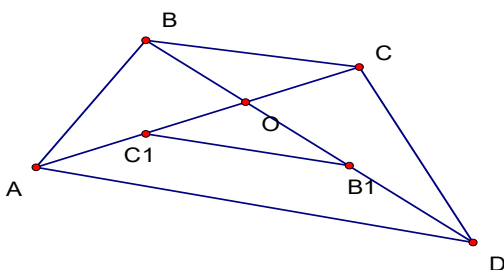
Tương tự với điểm B .

Hai đường tròn trên tiếp xúc với nhau tại trung điểm của AB, vì thế số trung điểm đánh dấu ít nhất là $2(n - 2) + 1 = 2n - 3$ điểm .

2.3. Diện tích và chu vi lớn nhất hoặc nhỏ nhất :

Ví dụ 2.8 .Gọi O là giao điểm của hai đường chéo trong tứ giác ABCD. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD và DOA có chu vi bằng nhau thì ABCD là hình thoi .

Lời giải . Không mất tính tổng quát ta giả sử $OA \geq OC$ và $OD \geq OB$ (hình 2.8)



Hình 2.8

Gọi B₁, C₁ là điểm đối xứng của B và C qua O $\Rightarrow OB_1 = OB$ và $OC_1 = OC$.

Ta có tam giác OC₁B₁ nằm trong tam giác OAD.

Ta có : $P_{OAD} \geq P_{OC_1B_1} = P_{OCB} = P_{AOD}$.

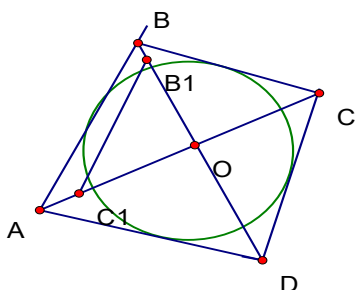
Dấu "=" xảy ra khi B₁=D và C₁=A .

Khi đó tứ giác ABCD có $OA = OC$ và $OD = OB$, suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành .

Mặt khác $P_{AOB} = AB + BO + OA$

$$P_{BOC} = BC + BO + OC$$

Suy ra $AB = BC$. Vậy tứ giác ABCD là hình thoi .



Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Ví dụ 2.9 .Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Chứng minh rằng nếu các đường chéo AC, BD cắt nhau tại O thì tứ giác ABCD là hình thoi .

Lời giải . Không mất tính tổng quát, ta giả sử : $OA \geq OC$ và $OD \geq OB$ (hình 2.9).

Gọi B_1, C_1 là điểm đối xứng của B, C qua O

$\Rightarrow OB_1 = OB$ và $OC_1 = OC$. Vì BC là tiếp tuyến của (O) nên B_1C_1 cũng tiếp xúc với (O). Mặt khác AD cũng tiếp xúc với (O) $\Rightarrow AD \equiv B_1C_1$ hay $A \equiv C_1, D \equiv B_1$.

Do đó $OA = OC$ và $OD = OB$, suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành. Mặt khác, tứ giác ABCD ngoại tiếp (O) suy ra $AB + CD = AD + BC \Rightarrow 2AB = 2AD$,

nghĩa là $AB = AD$.

Vậy tứ giác ABCD là hình thoi .

2.4 . Bao lồi và đường thẳng tựa :

a) Bao lồi: của một tập hợp hữu hạn điểm trong mặt phẳng là tam giác lồi nhỏ nhất mà nó chứa tất cả các điểm đã cho (nó không chứa trong nó bất kì đa giác nào). Một hệ thống hữu hạn điểm trong mặt phẳng tồn tại duy nhất một bao lồi .

b) Đường thẳng tựa : của một tứ giác lồi là một đường thẳng mà nó đi qua một đỉnh của đa giác và có tính chất sao cho đa giác nằm về một bên của nó. Dễ thấy rằng khi ta xét một tứ giác lồi bất kì tồn tại hai đường thẳng tựa song song với một đường thẳng đã cho .

Ví dụ 2.10. Chứng minh rằng mọi đa giác lồi có diện tích bằng 1 có thể đặt vào một hình chữ nhật có diện tích bằng 2.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

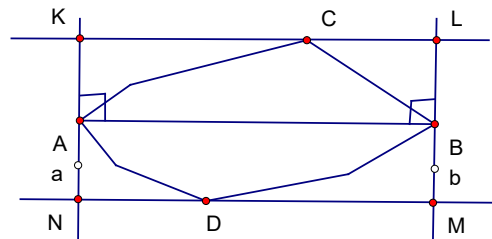
Lời giải. AB là đường chéo lớn nhất của đa giác. Qua hai điểm A, B lần lượt vẽ các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với AB (như hình 2.10). Nếu X là một đỉnh của đa giác thì $AX \leq AB$ và $XB \leq AB$, vì thế đa giác nằm trong một dải tạo bởi hai đường thẳng a, b . Ta vẽ 2 đường thẳng tựa song song AB . Giả sử những đường thẳng này đi qua C và D , đồng thời tạo với a, b hình chữ nhật $KLMN$.

Khi đó, $S_{KLMN} = 2S_{ABC} + 2S_{ABD}$

Mà tứ giác $ABCD$ được chứa trong đa giác ban đầu, nên diện tích nhỏ hơn 1 hay

$$S_{ABC} + S_{ABD} \leq 1.$$

Từ đó suy ra $S_{KLMN} \leq 2$ (đpcm)



Hình 2.10

2.5. Một số bài luyện tập :

2.11. Trên đường thẳng có 50 đoạn thẳng. Chứng minh rằng hoặc có 8 đoạn thẳng trong chúng đôi một giao nhau, hoặc có 8 đoạn thẳng trong chúng đôi một rời nhau. (Tài liệu chuyên Toán Đại số 10)

2.12. Trên đường thẳng có $2n+1$ đoạn thẳng. Mỗi một đoạn thẳng giao với ít nhất n đoạn thẳng khác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng giao với tất cả các đoạn thẳng còn lại. (Tài liệu chuyên Toán Đại số 10)

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Phần 3 .

SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC HẠN TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐẠI SỐ VÀ SỐ HỌC :

3.1 . Các bài toán về số học :

Ví dụ 3.1. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1, thì $2^n - 1$ không chia hết cho n .

Lời giải . Giả sử $2^n - 1$ chia hết cho n với $n > 1$ nào đó. Ta có : $2^n - 1$ là số lẻ $\Rightarrow n$ cũng là số lẻ. Gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n .

Khi đó $2^n - 1 \div p$, do đó $2^n - 1 \equiv 1 \pmod{p}$

Theo định lý Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Cho k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^k \equiv 1 \pmod{p}$

Khi đó, $n \div k$ (vì ngược lại thì $n = kq + r$ với $0 < r < k$ và $1 \equiv 2^n = (2^k)^q \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod{p}$), trái với k là số nhỏ nhất).

Tương tự $p-1 \div k$

Do đó : $\text{UCLN}(n, p-1) \div k$.

Đặt $d = \text{UCLN}(n, p-1)$, khi đó nó phải bằng 1, vì $n \div d$, $d \leq p-1$ và p là số nguyên tố nhỏ nhất của n . Do đó $k = 1$ và $2 \equiv 1 \pmod{p}$, điều này vô lí .

Ví dụ 3.2 . Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ có nghiệm nguyên dương x, y, z thì $z = 3$.

Lời giải . Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương (x, y, z) với $z \neq 3$. Khi đó $x \neq y$ (vì nếu ngược lại thì $2x^2 + 1 = x^2z$ cho ta $x^2(z-2) = 1$ và do đó $x = 1, z = 3$, vô lí). Vì phương trình đối xứng với x, y nên ta có thể giả thiết $x > y$. Giữa tất cả những nghiệm nguyên dương của phương trình (x, y, z) với $x > y$ và $z \neq 3$, ta chọn (x_0, y_0, z_0) là nghiệm với x_0 nhỏ nhất .

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Ta xét phương trình bậc hai theo x là $x^2 - y_0 z_0 x + (y_0^2 + 1) = 0$ có nghiệm x_0 . Một nghiệm khác của phương trình này là $x_1 = y_0 z_0 - x_0 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0}$

$$\text{Ta có : } 0 < x_1 = \frac{y_0^2 + 1}{x_0} \leq \frac{y_0^2 + 1}{y_0 + 1} \leq y_0$$

Ta biết rằng (y_0, x_1, z_0) cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình ban đầu với $y_0 \geq x_1$ và $z_0 \neq 3$. Tuy nhiên $y_0 < x_0$, trái với x_0 là số nhỏ nhất đã chọn.

Ví dụ 3.3 . Tìm tất cả bộ 3 số nguyên dương sao cho tích của 2 số trong bộ số cộng với 1 chia hết cho số còn lại .

Lời giải.

Ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 1$. Theo đề bài thì $ab + 1 \vdots c, bc + 1 \vdots a$ và $ac + 1 \vdots b$. Suy ra $(ab+1)(bc+1)(ac+1) \vdots abc$. Do đó $ab + bc + ac + 1 \vdots abc$,

$$\text{Nghĩa là } ab + bc + ac + 1 = k \cdot abc \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (1)$$

Vì a, b, c là những số nguyên dương lớn hơn 1 nên ta có

$$ab + bc + ca + 1 \leq 4abc \quad \Rightarrow k \leq 4$$

Trường hợp $k = 4$: Suy ra $a = b = c = 1$ (thỏa)

Trường hợp $k = 3$: Từ (1) $\Rightarrow 3abc \leq 4ab$, nghĩa là $c \leq 1 \Rightarrow c = 1$.

Thay $c = 1$ vào (1) thì $ab + a + b + 1 = 2ab$, tương đương với $(2a - 1)(2b - 1) = 3$.

Vậy chỉ có $a = 2, b = 1$.

Trường hợp $k = 2$: Từ (1) $\Rightarrow 2abc \leq 4ab$, nghĩa là $c \leq 2$, nên có $c = 1$ hoặc $c = 2$.

Thay $c = 1$ vào (1) ta có $ab + a + b + 1 = 2ab$ tương đương với $(a - 1)(b - 1) = 2$.

Vậy chỉ có $a = 3, b = 2$. Trường hợp $c = 2$ không có nghiệm nguyên.

Trường hợp $k = 1$: Từ (1) $\Rightarrow abc \leq 4ab$, nghĩa là $c \leq 4$. Nên ta xét $c = 1$. Thay $c = 1$

vào (1) ta có $ab + a + b + 1 = ab$, trường hợp này phương trình không có nghiệm.

Xét $c = 2$ (1) $\Leftrightarrow ab + 2a + 2b + 1 = 2ab \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 5$,

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Vậy ta tìm được $a = 7, b = 3$. Các trường hợp $c = 3, c = 4$ phương trình không có nghiệm.

Vậy nghiệm của bài toán là $(1, 1, 1), (2, 1, 1), (3, 2, 1)$ và $(7, 3, 2)$

3.2 . Các bài toán về đại số :

Ví dụ 3.4. Cho x, y, z là các số thực sao cho: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Chứng minh rằng : $x + y + z \leq xyz + 2$.

Lời giải . Ta giả sử z là số không dương thì

$$2 + xyz - x - y - z = (2 - y - z) - z(1 - xy) \geq 0$$

$$\text{Vì } x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 2 \text{ và } xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 1.$$

Chính vì vậy chúng ta có thể giả thiết x, y, z là các số dương và sắp xếp theo thứ tự

$$0 \leq x \leq y \leq z.$$

$$\text{Nếu } z \leq 1, \text{ thì } 2 + xyz - x - y - z = (1 - x)(1 - y) + (1 - z)(1 - xy) \geq 0$$

$$\text{Nếu } z > 1, \text{ thì } (x + y) + z \leq \sqrt{2((x + y)^2 + z^2)} = 2\sqrt{xy + 1} \leq xy + 2 \leq xyz + 2$$

Ví dụ 3.5 . Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Lời giải . Vai trò của y, z là như nhau, nên ta có thể giả sử $y \geq z$.

$$\text{Bình phương hai vế ta nhận được } x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz}$$

$$\text{Suy ra } (x - y - z)^2 + 4\sqrt{3}(x - y - z) = 4yz - 12 \quad (1)$$

Từ (1) $\Rightarrow x - y - z = 4yz - 12 = 0$ vì nếu $x - y - z \neq 0$ thì VT là một số vô tỉ, còn VP là một biểu thức hữu tỉ, điều này không thể được.

$$\text{Suy ra } yz = 3, \text{ vậy } y = 3, z = 1. \text{ Ta có } x = y + z = 4.$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } (4, 3, 1), (4, 1, 3)$$

Ví dụ 3.6. Tìm các số nguyên $x, y > 1$ sao cho $3x + 1 \vdots y$ và $3y + 1 \vdots x$

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Lời giải. Xét $x = y$ thì $3x + 1 \nmid x \Rightarrow 1 \nmid x$, do đó $x = 1$, điều này trái với giả thiết $x > 1$, nên x, y không thể bằng nhau.

Xét $x < y$ thì tồn tại số nguyên p sao cho $3y + 1 = px$.

Mặt khác vì $3x > 3y \Rightarrow 3x \geq 3y + 1 = px$.

Dấu " $=$ " không xảy ra vì $3y + 1$ không chia hết cho 3, nên ta chỉ có $3x > px$.

Từ đây chỉ có $p = 1$ hoặc $p = 2$

Nếu $p = 1$ thì $3y + 1 = x \Rightarrow 3(3y + 1) \nmid y$, do đó $4 \nmid y$ suy ra $y = 2$ hoặc $y = 4$

Nếu $p = 2$ thì $2x = 3y + 1 \Rightarrow 9y + 5 \nmid y$, nghĩa là $5 \nmid y$. Suy ra $y = 5$

Vậy bài toán có nghiệm $(7, 2), (13, 4), (2, 7), (4, 13), (8, 5), (5, 8)$

3.3. Một số bài luyện tập

3.7. Trong mỗi ô của bảng hình chữ nhật người ta viết một số. Cho phép đồng thời đổi dấu tất cả các số trên một dòng hoặc một cột nào đó. Chứng minh rằng phép thực hiện này có thể đưa bảng đã cho thành một bảng sao cho tổng của các số trên mỗi hàng hoặc trên mỗi cột là không âm.

3.8. Tại các đỉnh của một 100-giác đặt các số sao cho mỗi số đều là trung bình cộng của hai số bên cạnh. Chứng minh rằng tất cả các số đều bằng nhau.

3.9. Mỗi nghị sĩ ở một quốc hội có không lớn hơn ba người bạn. Chứng minh rằng quốc hội có thể chia làm hai nhóm sao cho mỗi nghị sĩ trong một nhóm sẽ có không lớn hơn một người bạn (Biết rằng nếu B là bạn của nghị sĩ A thì A là bạn của nghị sĩ B).

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Phần 4. **NGUYÊN LÝ THỨ TƯ TRONG TẬP SỐ TỰ NHIÊN**

4.1 Nguyên lý thứ tư :

Tập hợp số $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ được gọi là tập hợp số tự nhiên. Mỗi phần tử của nó được gọi là một số tự nhiên. Tập hợp số tự nhiên thường gắn với 2 phép toán cộng và nhân. Với những số tự nhiên a, b và c , các phép toán trên có những tính chất sau :

- 1 . $a + b$ và ab cũng là số tự nhiên (tính đóng) .
- 2 . $(a + b) + c = a + (b + c)$ và $(ab) c = a (bc)$ (tính kết hợp) .
- 3 . $a (b + c) = ab + ac$ (tính phân phối) .
- 4 . $0 + a = a + 0$ (đơn vị cộng tính)
- 5 . $1 . a = a . 1 = a$ (đơn vị nhân tính)

Người ta còn xét thứ tự $<$ (nhỏ hơn) thường dùng trong tập số tự nhiên :

$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \dots$ Thứ tự này có tính chất sau: Nếu a, b và c là những số tự nhiên khác nhau thì

(1) Hoặc là $a < b$ hoặc là $b < a$, nhưng không đồng thời có cả hai BĐT này.

(2) Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$

Người ta công nhận một tính chất quan trọng trong tập số tự nhiên như một tiên đề cơ sở :

Nguyên lý thứ tư : Mọi tập hợp con khác rỗng những số tự nhiên luôn có phần tử nhỏ nhất .

Ví dụ : Cho tập hợp S được định nghĩa như sau :

$$S = \{ x / x \text{ là tích của những số nguyên dương chẵn khác nhau } \} .$$

Ta có tập hợp này $S = \{ 8, 12, 16, 20, 24, \dots \}$.

Ta thấy rằng tập hợp S thực sự phần tử nhỏ nhất là 8 .

Nguyên lý thứ tư đúng trong tập hợp số tự nhiên N nhưng không đúng trong tập số nguyên được định nghĩa và kí hiệu như sau :

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Với thứ tự $<$ thì tập con khác rỗng những số nguyên âm không có phần tử nhỏ nhất.

Định lý 4.1: Cho tập hợp khác rỗng những số tự nhiên $S = \{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$ sao cho $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$. Khi đó S là tập hợp hữu hạn.

Chứng minh. Theo giả thiết S là tập hợp khác rỗng. Giả sử S là tập vô hạn. Từ $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ (theo giả thiết), suy ra S không có phần tử nhỏ nhất. Điều này trái với nguyên lý thứ tự. Do đó S là tập hợp hữu hạn.

Ví dụ 4.1. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Lời giải. Ta sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, nghĩa là $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (a, b là số nguyên dương).

Điều này suy ra tập hợp $S = \{ n\sqrt{2} \mid \text{đồng thời } n\sqrt{2} \text{ là những số nguyên dương} \}$ là tập hợp khác rỗng (vì nó chứa a).

Theo nguyên lý thứ tự S có phần tử nhỏ nhất, gọi nó là $j = k\sqrt{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $\sqrt{2} - 1 > 0$ nên $j(\sqrt{2} - 1) = j\sqrt{2} - k\sqrt{2} = (j - k)\sqrt{2}$ là một số nguyên dương.

Từ $2 < 2\sqrt{2}$ và $j\sqrt{2} = 2k$, ta suy ra

$$(j - k)\sqrt{2} = k(2 - \sqrt{2}) < k\sqrt{2} = j$$

Như vậy, $(j - k)\sqrt{2}$ là một số nguyên dương trong S , mà nó lại nhỏ hơn số nhỏ nhất j . Điều này vô lý với cách chọn j . Suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 4.2. Cho a, b, c là những số nguyên sao cho $a^6 + 2b^6 = 4c^6$.

Chứng minh rằng $a = b = c = 0$

Lời giải. Để thấy ta chỉ cần chứng minh cho những số nguyên không âm là đủ. Ta chọn bộ 3 số nguyên không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện đề bài đã cho và với $\max(a, b, c) > 0$ có tập GTNN (điều này tồn tại vì theo nguyên lý thứ tự cho tập con khác rỗng các số tự nhiên).

Nếu $a^6 + 2b^6 = 4c^6$ thì a phải là số chẵn, nghĩa là $a = 2a_1$ với a_1 là một số nguyên dương. Thay vào đẳng thức đã cho ta nhận được $32a_1^6 + b^6 = 2c^6$.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Từ đây lại có $b = 2b_1$ và suy ra $16a_1^6 + 32b_1^6 = c^6$.

Như vậy ta lại có $c = 2c_1$ và cuối cùng $a_1^6 + 2b_1^6 = 4c_1^6$

Vậy (a_1, b_1, c_1) là bộ 3 số nguyên không âm thỏa mãn đẳng thức đề bài đã cho, mặt khác, ta có $\max(a_1, b_1, c_1) < \max(a, b, c)$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn các số a, b, c . Suy ra $\max(a, b, c) = 0$, nghĩa là $a = b = c = 0$.

Ví dụ 4.3. (IMO 1988) . Chứng minh rằng nếu a, b là những số nguyên dương sao cho $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ là một số nguyên thì $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ là một số chính phương.

Lời giải . Giả sử số $\frac{a^2+b^2}{1+ab} = k$ là một số nguyên, nhưng không phải là số chính phương với $\max(a, b)$ nhỏ nhất (điều này tồn tại do tiên đề thứ tự).

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \leq b$.

Nếu $a = b$ thì $0 < k = \frac{2a^2}{a^2+1} < 2$, từ đó suy ra $k = 1$ và 1 là số chính phương.

Kết luận bài toán đúng.

Xét trường hợp $a < b$: Ta xét $a^2 + b^2 - k(ab + 1) = 0$ là phương trình bậc hai theo biến b .

Theo định lý Vi-ét ta có tổng hai nghiệm của pt là ka và tích 2 nghiệm là $a^2 - k$.

Kí hiệu b_1, b_2 là 2 nghiệm nói trên thì $b_1 + b_2 = ka$ và $b_1.b_2 = a^2 - k$.

Vì a, k là những số nguyên dương và b_1 thỏa mãn $a^2 + b_1^2 - k(ab_1 + 1) = 0$, nên ta có $b_1 \geq 0$. Nếu ngược lại thì b_1 không thể là nghiệm của phương trình đang xét.

Hơn nữa, nếu $b_1 = 0$ thì $a^2 + 0^2 = k(0.a + 1)$, mà k không phải là số chính phương, điều này vô lý. Như vậy $b_1 > 0$ và $b_1 = \frac{a^2 - k}{b_2} < \frac{b^2 - k}{b} < b$, do đó ta tìm một số nguyên b_1 thỏa mãn $\frac{a^2+b_1^2}{1+ab_1} = k$, mà $\max(a, b_1) < \max(a, b)$. Điều này vô lý.

Vậy : k không phải là số chính phương.

4.2 . Nguyên lý quy nạp toán học :

Định lý 4.1. chỉ đưa ra một tập con khác rỗng của $\mathbb{N}$ có dãy con giảm vô hạn thì nó hữu hạn. Một tập con những số tự nhiên có một số tính chất nào đó

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

mà từ tính chất này suy ra tập con đó trùng với tập số tự nhiên được không? Câu trả lời là có và được thể hiện ở định lý 4.2 sau đây .

Định lý 4.2 (Nguyên lý quy nạp toán học) :

Nếu một tập S những số nguyên không âm có tính chất :

1 . S chứa số 0.

2 . Nếu S chứa số nguyên n thì nó cũng chứa số nguyên $n+1$. Khi đó $S = \mathbb{N}$.

Chứng minh. Giả sử S là tập con thực sự của $\mathbb{N}$, nghĩa là có số nguyên dương thuộc $\mathbb{N}$ nhưng không thuộc S . Vậy theo nguyên lý thứ tự tồn tại số nguyên dương nhỏ nhất k không nằm trong S . Ta thấy rằng $k > 0$ vì $0 \in S$. Vì $k - 1 < k$, theo cách chọn trên thì $k - 1 \in S$. Nhưng theo giả thiết thứ hai phải có $k - 1 + 1 \in S$.

Vì thế $k = k - 1 + 1$ cũng nằm trong tập S , điều này vô lý với cách chọn k .

Suy ra $S = \mathbb{N}$.

Từ định lý trên ta có thể suy ra những hệ quả sau :

Hệ quả 1 :

Nếu tập hợp S những số nguyên dương chứa số m và cũng chứa $n + 1$ mỗi khi nó chứa n với $n > m$ thì S chứa tất cả những số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng m .

Hệ quả 2 (nguyên lý quy nạp toán học mạnh) :

Nếu tập hợp S những số nguyên dương chứa số m và nó cũng chứa $n + 1$ mỗi khi nó chứa các số $m+1, m+2, \dots, n$ với $n > m$, thì S chứa tất cả các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng m .

Ví dụ 4.4 . Chứng minh rằng $A(n) = 7^n + 3n - 1 \vdots 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lời giải . Ta kí hiệu tập hợp $S = \{ n / n \in \mathbb{Z} \text{ và } A(n) \vdots 9 \}$. Ta sử dụng nguyên lý quy nạp để chứng minh, vậy ta kiểm tra các điều kiện giả thiết .

(1) Với $n = 0$, ta có $A(0) \vdots 9$. Vậy $0 \in S$.

(2) Giả sử $n \in S$, nghĩa là $n \in \mathbb{N}$ và $A(n) = 7^n + 3n - 1 \vdots 9$ với $n > 0$.

Ta xét $n + 1 \in \mathbb{N}$

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

$$\begin{aligned}\text{Do đó : } A(n+1) &= 7^{n+1} + 3(n+1) - 1 = 7 \cdot 7^n + 3n + 3 - 1 \\ &= 7(7^n + 3n - 1) - 9(2n - 1) \\ &= 7A(n) - 9(2n - 1)\end{aligned}$$

Vì $A(n) \equiv 9 \pmod{9}$ (theo gt), nên $A(n+1) \equiv 9 \pmod{9}$, nghĩa là $n+1 \in S$. Theo nguyên lý quy nạp suy ra $S = \mathbb{N}$, nghĩa là $n \geq 0$, $A(n) \equiv 9 \pmod{9}$.

Ví dụ 4.5. Chứng minh rằng :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Ta kí hiệu $T(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ và

$$S = \left\{ n \mid n \in \mathbb{N}^*, T(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \right\}$$

Ta kiểm tra các điều kiện của nguyên lý quy nạp toán học :

Với $n = 1$, $T(1) = 1^3 = 1$ và $\left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2 = 1 = T(1)$, suy ra $1 \in S$.

(2) Giả sử $n \in S$, nghĩa là $T(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

Ta xét $n+1 \in \mathbb{N}$ và

$$\begin{aligned}T(n+1) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = T(n) + (n+1)^3 \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2\end{aligned}$$

Suy ra $n+1 \in S$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học thì $S = \mathbb{N}^*$, nghĩa là $\forall n \geq 1$ ta có

$$T(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Ví dụ 4.6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , luôn có

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Lời giải . Ta có :

$$A(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} \text{ và } B(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\text{Khi đó } A(n+1) = A(n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$B(n+1) = B(n) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

Đặt $S = \{n / n \in \mathbb{N}^* \text{ và } A(n) = B(n)\}$.

Ta chứng minh bài toán bằng nguyên lý quy nạp:

(1) Với $n = 1$, ta có $A(1) = B(1) = \frac{1}{2}$, suy ra $1 \in S$.

(2) Giả sử đã có $n \in S$, nghĩa là $A(n) = B(n)$ là đúng.

$$\text{Ta xét } A(n+1) - B(n+1) = A(n) - B(n) + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+2} = A(n) - B(n) = 0.$$

Do đó $n+1 \in S$. Theo nguyên lý quy nạp toán học thì $S = \mathbb{N}^*$, nghĩa là với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đều có $A(n) = B(n)$

Định lý 4.3 (nguyên lý quy nạp toán học dạng mệnh đề).

Cho một dãy mệnh đề gồm $P(0), P(1), P(2), \dots$ có nghĩa và thỏa mãn :

(1) $P(0)$ đúng .

(2) Nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ đúng suy ra $P(k+1)$ cũng đúng, thì $P(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}$

Ví dụ 4.7. Chứng minh rằng nếu k là một số lẻ, thì $k^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} với mọi số nguyên dương n .

Lời giải . Cho k là một số lẻ. Đặt $P(n) = \{ k^{2^n} - 1 \text{ chia hết cho } 2^{n+2} \}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bước cơ sở : Với $n = 1$, $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$ chia hết cho 8 với mọi số nguyên k lẻ

Bước quy nạp : Giả sử $k^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} , ta phải chứng minh $k^{2^{n+1}} - 1 \vdots 2^{n+3}$.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Thật vậy, $k^{2^n} - 1 = (k^{2^{n-1}} - 1)(k^{2^{n-1}} + 1)$, theo giả thiết quy nạp ta có $k^{2^{n-1}} - 1$ chia hết cho 2^{n-1} , ta chỉ cần chứng minh $k^{2^{n-1}} + 1$ chia hết cho 2. Nhưng điều đó là hiển nhiên đúng, vì $k^{2^{n-1}}$ là một số lẻ, tạo ra $k^{2^{n-1}} + 1$ là một số chẵn.

Theo nguyên lý quy nạp dạng mệnh đề suy ra kết luận đúng với mọi $n \geq 1$.

Ví dụ 4.8. Tìm các hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho :

$$(a) f(2) = 2$$

$$(b) f(n+1) = 1 + 1.f(1) + 2.f(2) + \dots + n.f(n), \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Nếu $n = 1$ thì từ (b) nhận được $f(2) = 1 + 1.f(1)$. Do đó $f(1) = 1$.

Nếu $n = 2$ thì ta nhận được $f(3) = 1 + 1.f(1) + 2.f(2) = 1 + 1 + 4 = 6$.

Tương tự, ta tính được $f(4) = 24$ và $f(5) = 120$.

Vậy ta nhận xét $f(1) = 1!, f(2) = 2!, f(3) = 3!, f(4) = 4!$ và $f(5) = 5!$

Ta có dự đoán $f(n) = n!$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bước cơ sở: Với $n = 1$, mệnh đề đúng.

Bước quy nạp: Giả sử mệnh đề đúng với mọi $n \leq k$,

tức là $f(1) = 1!, \dots, f(k) = k!$, ta phải chứng minh đúng với $n = k + 1$,

nghĩa là $f(k+1) = (k+1)!$

Thật vậy từ (b) ta có $f(k+1) = 1 + 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + k.k!$

Mặt khác ta luôn có đẳng thức: $1 + 1.1! + 2.2! + \dots + n.n! = (n+1)!$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $f(k+1) = (k+1)!$

Từ chứng minh trên suy ra chỉ có hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn (a) và (b) là

$$f(n) = n!$$

4.3 Sự tương đương giữa hai nguyên lý:

Định lý 4.2 đã chỉ ra rằng từ nguyên lý thứ tự suy ra nguyên lý quy nạp toán học. Sau đây ta sẽ chứng minh ngược lại, nếu như ta có nguyên lý quy nạp toán học ta sẽ suy ra nguyên lý thứ tự.

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Định lý 4.4. Nguyên lý quy nạp toán học kéo theo nguyên lý thứ tự.

Ví dụ 4.9. Cho số thực $x \neq 0$ thỏa mãn $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng :

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Ta có 2 cách chứng minh khác nhau.

1. Phương pháp quy nạp toán học : Đặt $B(n) = x^n + \frac{1}{x^n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$

Bước cơ sở : Với $n = 1$, $B(1) = x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Với $n = 2$, $B(2) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ cũng là số nguyên.

Bước quy nạp: Giả sử $B(n)$ và $B(n+1)$ là số nguyên ($n \in \mathbb{N}^*$).

Ta chứng minh $B(n+2)$ cũng là số nguyên.

Thật vậy, dễ dàng có đẳng thức $B(n+2) = B(n+1) \cdot B(1) - B(n)$ (đpcm).

Như vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $B(n)$ là số nguyên.

2. Phương pháp phần tử cực biên : Giả sử có một số giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ nào đó mà $B(n)$ không là số nguyên. Ta chọn n là số tự nhiên nhỏ nhất mà $B(n)$ không phải là số nguyên. n không thể là 1 và 2, vì theo giả thiết và tính toán đơn giản như ở phương pháp quy nạp.

Vậy $n - 2 > 0$.

Dễ dàng kiểm tra được $B(n) = B(n-1) \cdot B(1) - B(n-2)$,

mà $n-1 < n$ và $n-2 < n$ nên $B(n-1)$ và $B(n-2)$ là những số nguyên, suy ra $B(n)$ cũng là số nguyên.

Điều này trái với cách chọn n là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $B(n)$ là số nguyên.

Vậy không thể có số tự nhiên n nào mà $B(n)$ không là số nguyên.

Ví dụ 4.10. Chứng minh rằng $S(n) = 10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n .

Chuyên đề: Nguyên Lý Cực Hạn

Lời giải .

1 . Phương pháp quy nạp toán học :

Bước cơ sở : Với $n = 0$, ta có $S(0) = 0$ chia hết 27, mệnh đề đúng .

Bước quy nạp : Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \in \mathbb{N}$ nghĩa là $S(k) \vdots 27$.

Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$, nghĩa là cần chứng minh

$S(k + 1) \vdots 27$. Ta có :

$$\begin{aligned} S(k + 1) &= 10^{k+1} + 18(k + 1) - 1 \\ &= 10 \cdot 10^k + 18k + 18 - 1 \\ &= 10(10^k + 18k - 1) - 27(6k - 1) \end{aligned}$$

Do $S(k) = 10^k + 18k - 1 \vdots 27$, nên $S(k + 1) \vdots 27$ (đpcm) .

2. Phương pháp phần tử cực biên : Giả sử có một số tự nhiên n mà $S(n)$ không chia hết cho 27. Ta chọn n nhỏ nhất trong các số đó. Số n không thể là 0.

Khi đó $S(n - 1)$ chia hết cho 27

$$\begin{aligned} \text{Ta lại có : } S(n) &= 10^n + 18n - 1 = 10 \cdot 10^{n-1} + 18(n - 1) + 18 - 1 \\ &= 10 \cdot (10^{n-1} + 18(n - 1) - 1) - 27(6n - 7) \end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên ta suy ra $S(n)$ chia hết cho 27, điều này vô lí với cách chọn n .

Như vậy mệnh đề khẳng định đúng .

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Kỉ yếu Hội nghị Khoa học ,Nha Trang 14/04/2012*
- [2] Đoàn Quỳnh (chủ biên), *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán - Đại số 10, NXB GD , 2010 .*
- [3] Nguyễn Hữu Điển, *Giải toán bằng phương pháp đại lượng cực biên , NXB GD , 2005.*
- [4] Vũ Hữu Bình, *bài toán hình học tổ hợp THCS , NXB GD , 2003 .*
- [5] [www . mathscope.org](http://www.mathscope.org)
- [6] [www . problems.ru](http://www.problems.ru)
- [7] [www . mathvn.com](http://www.mathvn.com)