

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN

I. Lý thuyết cần nhớ

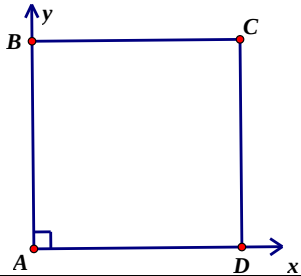
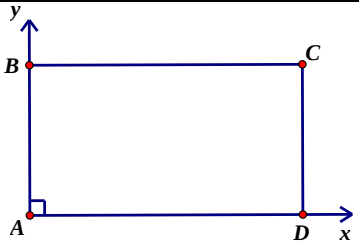
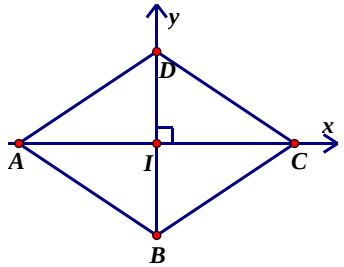
1. Cách chọn gốc tọa độ

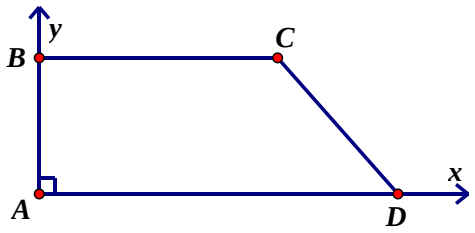
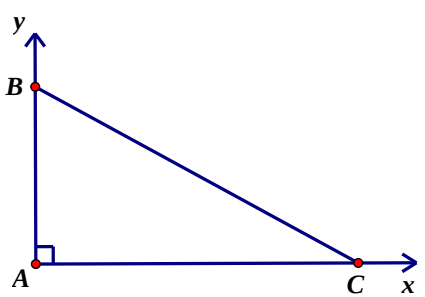
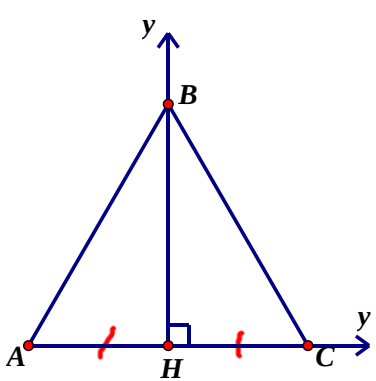
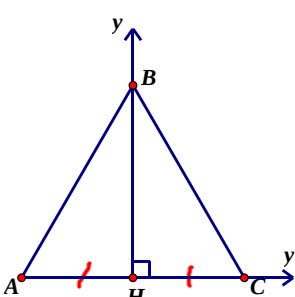
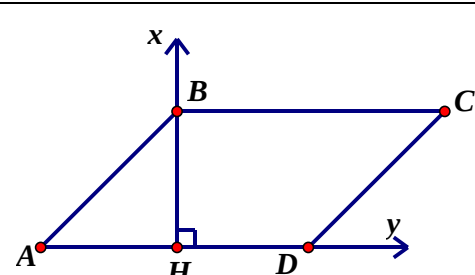
Ưu điểm: Khi ta chọn được tọa độ các điểm thì chỉ cần áp dụng các kiến thức hình giải tích như khoảng cách, góc, chứng minh vuông góc... Tuy nhiên, với một số Em học sinh thì việc tính được tọa độ là vấn đề? Về nguyên tắc thì Em có thể chọn gốc tọa độ nằm bất cứ chỗ nào, nhưng chọn chỗ nào thì việc tính tọa độ là thuận lợi nhất? Sai lầm của không ít người dẫn đến việc tính tọa độ các điểm phức tạp là cứ thấy chân đường cao của hình chóp là chọn làm gốc tọa độ. Trong một số trường hợp Em chọn như vậy sẽ dẫn đến việc tính tọa độ khó khăn và dễ bị chán nản. Để thuận lợi cho việc tính tọa độ Em nhớ nguyên tắc sau đây.

2. Nguyên tắc chọn gốc tọa độ

- + Vẽ hình thực của đa giác đáy ra bên cạnh.
- + Ưu tiên chọn gốc tọa độ là góc vuông của đa giác đáy chứ không phải là ưu tiên chân đường cao. Tất nhiên nếu chân đường cao mà trùng góc vuông ở đáy thì ta chọn gốc tọa ngay điểm đó luôn là tốt.
- + Nhìn vào hình thực này để tính tọa độ các điểm trong mặt phẳng đáy trước. Sau đó tính các điểm phát sinh và đỉnh.
- + Cứ quan tâm vào việc chọn trục $Ox; Oy$ ở đáy, sau đó gắn trục Oz vào là xong.

Chẳng hạn ta có 1 số trường hợp chọn gốc tọa độ như sau:

1. Đáy là hình vuông	Chọn tọa độ tại đỉnh nào cũng được. 
2. Đáy là hình chữ nhật	
3. Hình thoi	Chọn gốc tọa độ tại tâm I của hình thoi. 

4. Hình thang vuông	 Chọn góc tọa độ ngay góc vuông.
5. Tam giác vuông	 Chọn góc tọa độ ngay góc vuông.
6. Tam giác đều	 Góc tọa độ là trung điểm H một cạnh của tam giác đều.
7. Tam giác cân	 Góc tọa độ là trung điểm H của cạnh đáy.
8. Hình bình hành	 Kẻ thêm đường cao BH và góc tọa độ là H.

II. Một số yêu cầu thường gặp

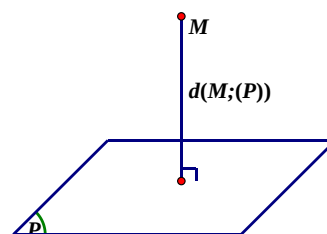
1. Chứng minh quan hệ song song, vuông góc

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

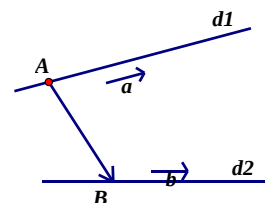
$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng điểm $d_1; d_2$ có hai vector chỉ phương lần lượt là $\vec{a}; \vec{b}$. Các điểm A và B lần lượt thuộc $d_1; d_2$. Khi đó:

$$d(d_1; d_2) = \frac{|\vec{AB} \cdot [\vec{a}; \vec{b}]|}{\|[\vec{a}; \vec{b}]\|}.$$



4. Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng điểm $d_1; d_2$ có hai vector chỉ phương lần lượt là $\vec{a}; \vec{b}$. Khi đó:

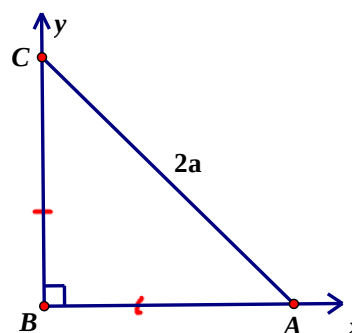
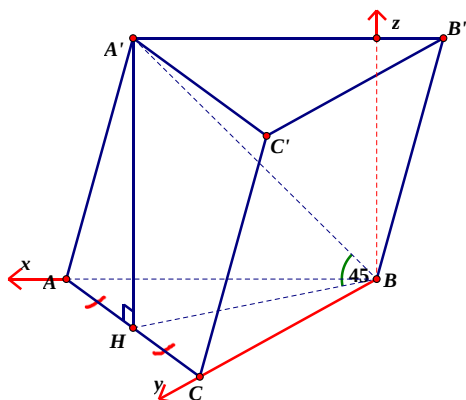
$$\cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}.$$

III. Bài tập mẫu

Chú ý: Các ví dụ ở đây, Thầy chỉ sử dụng phương pháp tọa độ để giúp các Em giải quyết triệt để ý sau của bài toán hình không gian thôi. Ý đầu tiên vẫn tính bình thường theo hình không gian thuần túy nhé!

Ví dụ 1. (Trích đề THPT Quốc Gia -2016) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B; $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC; đường thẳng A'B tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và chứng minh A'B vuông góc B'C.

Giải



+ Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC)$ và $A'BH = 45^\circ$. Tam giác ABC vuông cân tại B và

$AC=2a$ nên ta tính được: $BH = a$ và $AB = BC = a\sqrt{2}$. Suy ra: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = a^2$. Tam giác A'HB

vuông tại H và $A'BH = 45^\circ$ có nên tam giác A'HB vuông cân tại H. Suy ra $A'H = BH = a$.

Do đó: $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\triangle ABC} = a.a^2 = a^3$.

+ Chứng minh $A'B \perp B'C$.

Dựng hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ, $Bz \parallel AH$; $A \in Bx$; $C \in By$. Ta có:

$$B(0;0;0); A(a\sqrt{2};0;0); C(0;a\sqrt{2};0); H\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right); A'\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow B'\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right) \text{ và } \overrightarrow{BA'} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right); \overrightarrow{CB'} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CB'} \cdot \overrightarrow{BA'} = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + a \cdot a = 0 \Rightarrow A'B \perp B'C.$$

Bình luận: Nhìn có vẻ hơi dài dòng, nhưng khi đã quen Em sẽ tính tọa độ rất nhanh. Trong phần ở trên ta tính các điểm nằm trên các trục tọa độ trước. Sau đó tính các điểm xung quanh, dựa vào các đặc điểm tạo ra chúng. Ví dụ: khi đã tính được tọa độ điểm A và C thì áp dụng tính chất trung điểm Em có ngay tọa độ điểm H. Tung độ và hoành độ của H cũng là tung độ và hoành độ của A' và chỉ cần thêm độ cao A'H là ta có ngay tọa độ điểm A'. Các tứ giác bên là hình bình hành nên $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow B'\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};a\right)$.

Ví dụ 2. (Trích đề THPT Quốc Gia -2015) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh

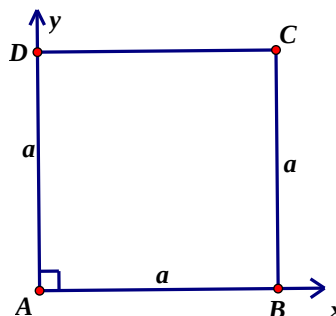
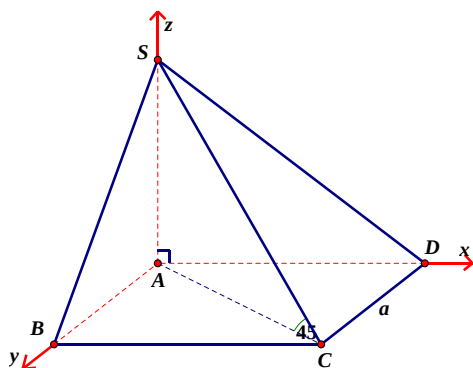
a. SA vuông góc mặt phẳng(ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° .

Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB,AC.

Phân tích:

Đề bài cho $SA \perp (ABCD)$ và ABCD là hình vuông vậy là quá tốt. Ta sẽ chọn ngay A làm gốc tọa độ luôn.

Giải



Giải

+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Ta có: $(SC; (ABCD)) = SCA = 45^\circ$ và ABCD là hình vuông cạnh a suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

+ Tính $d(AC; SB)$.

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ. Ta có: $A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); S(0;0;a\sqrt{2})$.

Đường thẳng AC có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AC} = (a;a;0)$ cùng phương $\vec{u} = (1;1;0)$.

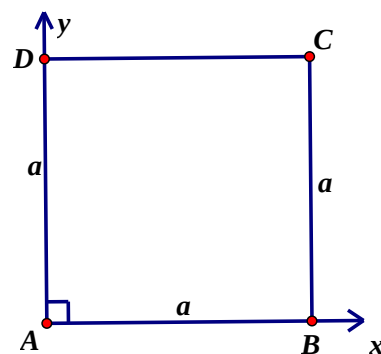
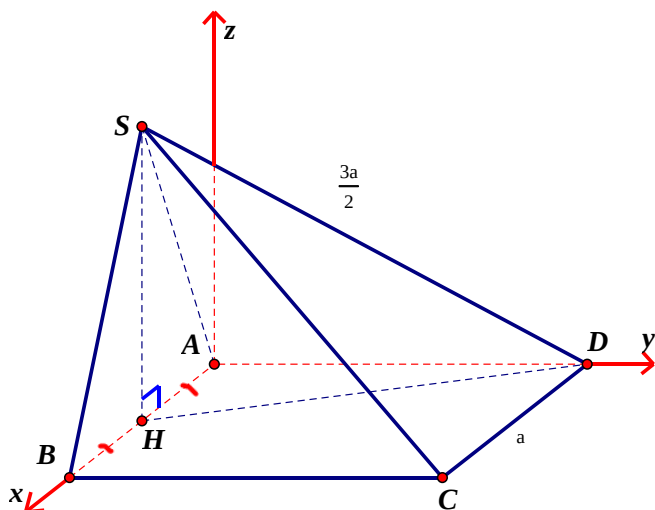
Đường thẳng SB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{SB} = (-a;0;a\sqrt{2})$ cùng phương $\vec{v} = (-1;0;\sqrt{2})$.

$$[\vec{u}; \vec{v}] = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -1); \overrightarrow{AB} = (a;0;0).$$

$$\text{Vậy: } d(SB; AC) = \frac{[\vec{u}; \vec{v}] \cdot \overrightarrow{AB}}{\|[\vec{u}; \vec{v}]\|} = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 3. (Trích KA -2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; $SD = \frac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $AH \perp (ABCD)$. Tam giác ADH vuông tại A nên:

$$HD^2 = AD^2 + AH^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}. \text{ Tam giác SHD vuông H nên :}$$

$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = a. \text{ Khi đó :}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

+ Tính $d(A; (SBD))$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, $Az \parallel SH$. Ta có:

$$A(0;0;0); B(a;0;0); H\left(\frac{a}{2};0;0\right); S\left(\frac{a}{2};0;a\right); D(0;a;0).$$

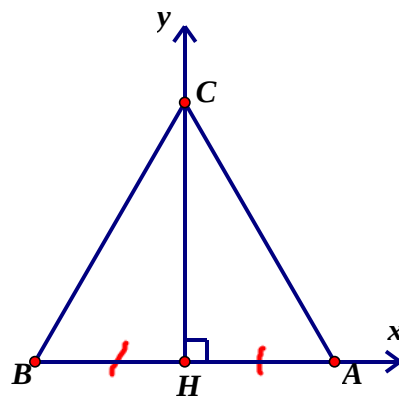
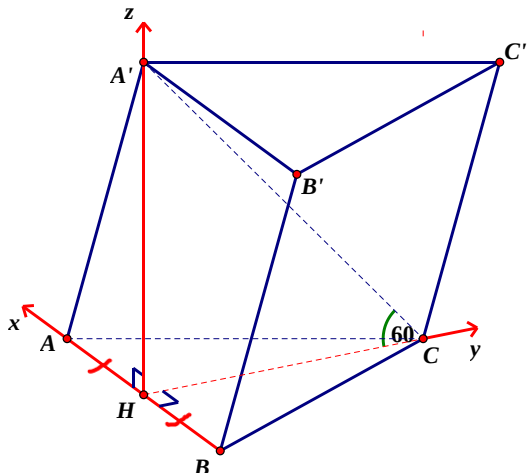
Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a;a;0)$ cùng phương $\vec{u} = (-1;1;0)$; $\overrightarrow{BS} = \left(-\frac{a}{2};0;a\right)$ cùng phương $\vec{v} = (-1;0;2)$

Mặt phẳng (SBD) đi qua điểm B và có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}] = (2;2;1)$ có phương trình:

$$(SBD): 2x + 2y + z - 2a = 0. \text{ Vậy: } d(A; (SBD)) = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 4.(Trích KB -2014) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB; đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến $(ACC'A')$.

Giải



+ Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC)$ và $A'BH = 60^\circ$. Tam giác ABC đều cạnh a và H là trung

điểm của AB nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Tam giác A'HC vuông H nên $A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

$$\text{Do đó: } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

+ Tính $d(B; (ACC'A'))$.

Dựng hệ trục tọa độ $Hxyz$ như hình vẽ. Ta có:

$$H(0;0;0); A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); B\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right); C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right); A'\left(0; 0; \frac{3a}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \left(-\frac{a}{2}; 0; \frac{3a}{2}\right)$ cùng phương $\vec{u} = (-1; 0; 3)$; $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ cùng phương $\vec{v} = (-1; \sqrt{3}; 0)$

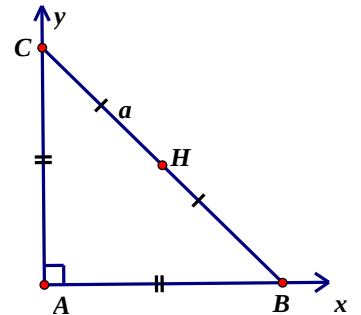
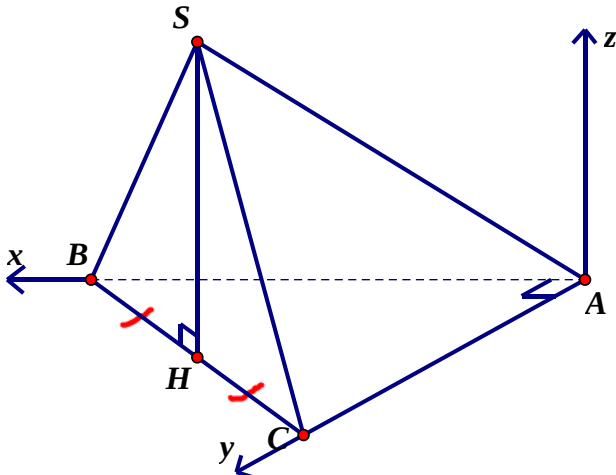
Mặt phẳng $(ACC'A')$ đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{v}; \vec{u}] = (3\sqrt{3}; 3; \sqrt{3})$ có phương trình:

$$(ACC'A'): 3\sqrt{3}x + 3y + \sqrt{3}z - \frac{3\sqrt{3}a}{2} = 0. \text{ Vậy: } d(B; (ACC'A')) = \frac{3\sqrt{13}a}{13}.$$

Bình luận: Trong bài toán trên để viết phương trình mặt phẳng $(ACC'A')$ ta chỉ cần tìm ba điểm thuộc mặt phẳng $(ACC'A')$ là được. Như vậy sẽ tiết kiệm thời gian.

Ví dụ 5. (Trích KD -2014) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A; mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA; BC.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác SBC đều nên ta có $SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABC)$, do đó $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A và $BC=a$, ta tính được $AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

+ Tính $d(SA; BC)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, với $Az // SH$. Ta có:

$$A(0;0;0); B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right); H\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right); S\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

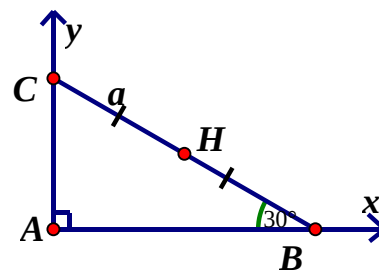
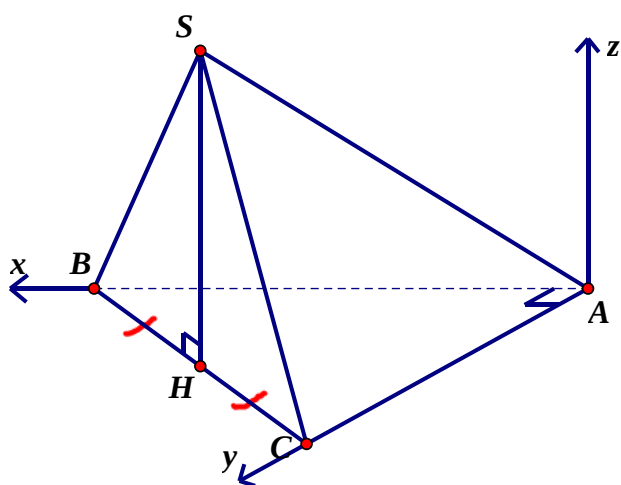
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \text{ cùng phương } \vec{u} = (\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\sqrt{3}); \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$\text{cùng phương } \vec{v} = (1; -1; 0). \text{ Ta có } [\vec{u}; \vec{v}] = (2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}; -2\sqrt{2}); \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right).$$

$$\text{Vậy: } d(SA; BC) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\vec{u}; \vec{v}]|}{\|[\vec{u}; \vec{v}]\|} = \frac{|a\sqrt{6}|}{\sqrt{32}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 6. (Trích KA -2013) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A; $\angle ABC = 30^\circ$ mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác SBC đều nên ta có $SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABC)$ và $(SBC) \cap (ABC) = BC$, do đó $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác ABC vuông A và $ABC = 30^\circ$, ta có:

$$AC = BC \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AB = BC \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

+ Tính $d(C; (SAB))$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, với $Az // SH$. Ta có:

$$A(0;0;0); B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right); C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right); H\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; 0\right); S\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

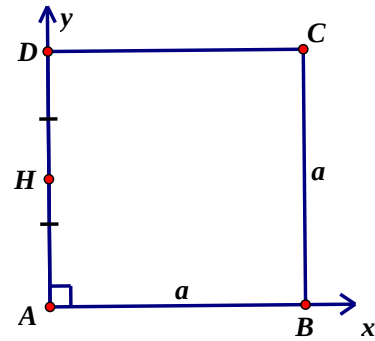
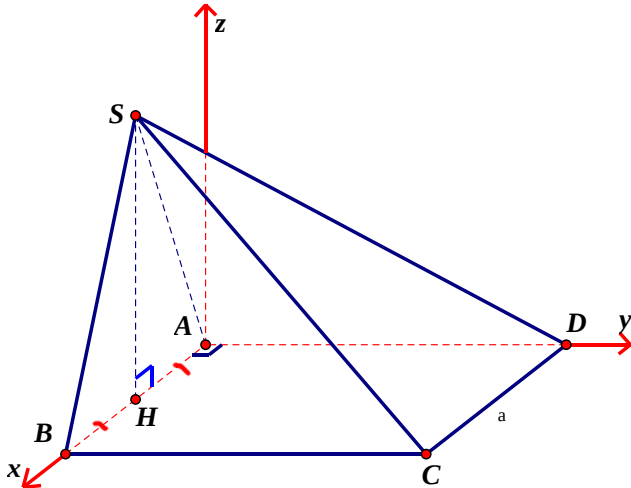
Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$ cùng phương $\vec{u} = (1; 0; 0)$; $\overrightarrow{AS} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1; 2\sqrt{3})$.

Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (0; -2\sqrt{3}; 1)$, mặt phẳng (SAB) đi qua điểm A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 2\sqrt{3}; -1)$ có

phương trình: $(SAB): 2\sqrt{3}y - z = 0$. Vậy: $d(C; (SAB)) = \frac{3\sqrt{39}a}{13}$.

Ví dụ 7. (Trích KB -2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều cạnh a nên ta có $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, do đó $SH \perp (ABC)$.

$$\text{Vậy: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

+ Tính $d(A; (SDC))$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, với $Az // SH$. Ta có:

$$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0); H\left(\frac{a}{2};0;0\right); S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

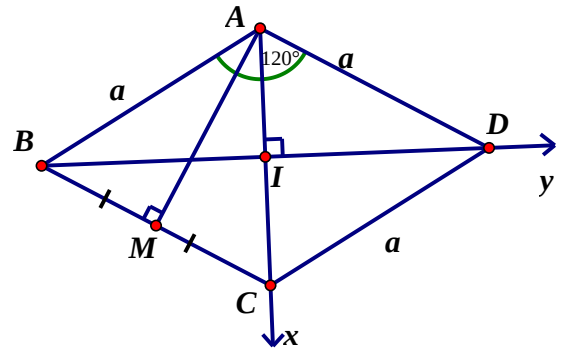
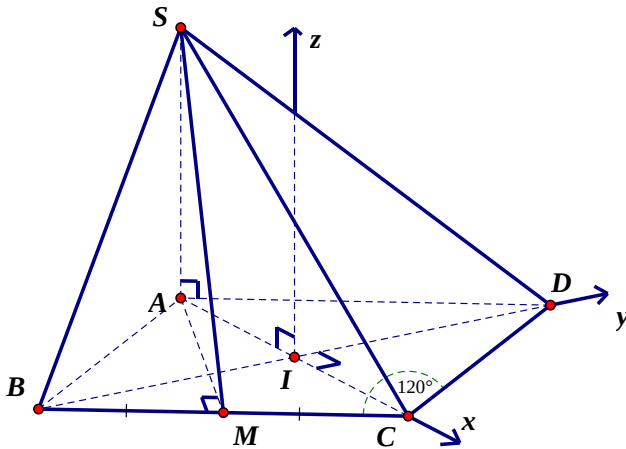
Ta có $\overrightarrow{DC} = (a;0;0)$ cùng phương $\vec{u} = (1;0;0)$; $\overrightarrow{DS} = \left(\frac{a}{2}; -a; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương $\vec{v} = (1; -2; \sqrt{3})$.

Mặt phẳng (SDC) đi qua điểm D và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{v}; \vec{u}] = (0; \sqrt{3}; 2)$ có phương trình:

$$(SDC): \sqrt{3}y + 2z - \sqrt{3}a = 0. \text{ Vậy: } d(A; (SDC)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Ví dụ 8. (Trích KD -2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; $\angle BAD = 120^\circ$; M là trung điểm của cạnh BC và $\angle SMA = 45^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

$$\angle BAD = 120^\circ \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \triangle SAM \text{ vuông tại A và}$$

$$\angle SMA = 45^\circ \Rightarrow \triangle SAM \text{ vuông cân tại A} \Rightarrow SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

+ Tính $d(D; (SBC))$.

Gọi I là tâm của hình thoi. Ta tính được $AI = CI = \frac{a}{2}; IB = ID = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, với $Iz // SA$.

Ta có: $I(0;0;0); A\left(\frac{-a}{2};0;0\right); C\left(\frac{a}{2};0;0\right); B\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{2};0\right); D\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right); S\left(-\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

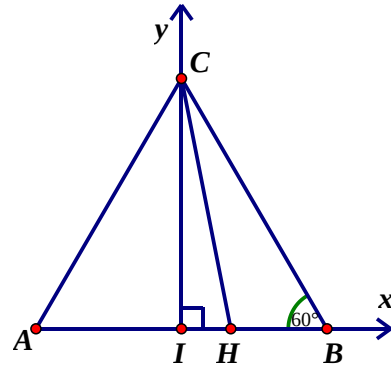
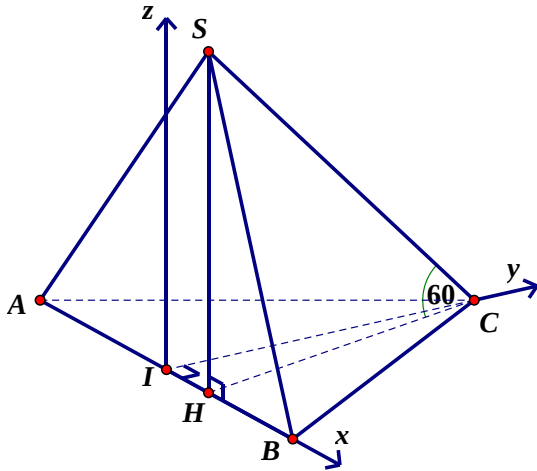
Ta có $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ cùng phương $\vec{u} = (1; \sqrt{3}; 0)$; $\overrightarrow{BS} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương

$\vec{v} = (-1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$. Mặt phẳng (SBC) đi qua điểm C và có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}] = (3; -\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$ có

phương trình: $(SBC): 3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z - \frac{3a}{2} = 0$. Vậy: $d(D; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ví dụ 9. (Trích KA -2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác ABC đều nên ta có $CI \perp AB; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; IH = \frac{a}{6}$.

Góc giữa SC và phẳng (ABC) chính là góc SCH , suy ra $SCH = 60^\circ$. Ta có:

$$HC = \sqrt{IC^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}; SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}. \text{ Do đó:}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}.$$

+ Tính $d(SA; BC)$. Chọn hệ trục tọa độ $Ixyz$ như hình vẽ, với $Iz // SH$. Ta có:

$$I(0;0;0); A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right); B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right); H\left(\frac{a}{6}; 0; 0\right); S\left(\frac{a}{6}; 0; \frac{a\sqrt{21}}{3}\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AS} = \left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{a\sqrt{21}}{3}\right) \text{ cùng phương } \vec{u} = (2; 0; \sqrt{21}); \overrightarrow{BC} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

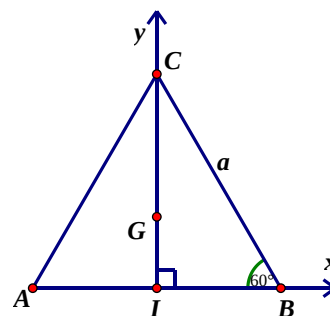
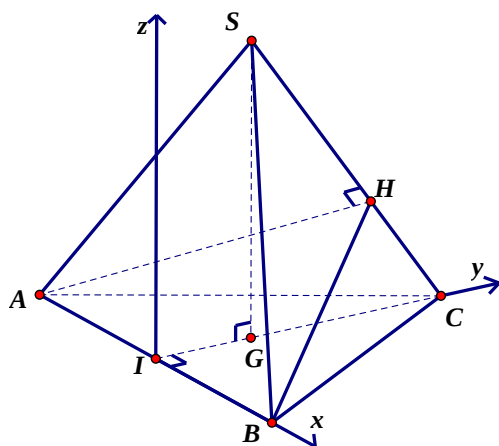
$$\text{cùng phương } \vec{v} = (-1; \sqrt{3}; 0). \text{ Ta có } [\vec{u}; \vec{v}] = (-\sqrt{63}; -\sqrt{21}; 2\sqrt{3}); \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0).$$

$$\text{Vậy: } d(SA; BC) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\vec{u}; \vec{v}]|}{\|[\vec{u}; \vec{v}]\|} = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Ví dụ 10. (Trích KB -2012) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a; AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của SA trên cạnh SC . Chứng minh SC vuông góc mặt phẳng (ABH) . Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a .

Phân tích: Để chứng minh SC vuông góc mặt phẳng (ABH) ta chỉ cần chứng minh SC vuông góc với một cạnh nữa trong mặt phẳng (ABH) . Muốn vậy, chỉ cần tìm tọa độ các điểm và sử dụng tích vô hướng để chứng minh vuông góc. Bài này làm theo cách trực tiếp thì nhanh hơn. Tất nhiên là phương pháp nhanh hay chậm thì phụ thuộc vào bài toán cụ thể. Có thể ở bài này ta thấy phương pháp tọa độ là dài dòng, tuy nhiên cũng sẽ có bài ta thấy rằng phương pháp này là hiệu quả. Tóm lại tùy vào từng bài toán, mỗi phương pháp sẽ thể hiện ưu và khuyết điểm của nó. Các Em nào quan tâm có thể tham khảo tài liệu **“Chuyên đề hình không gian”** được Thầy biên soạn theo cách giải hình học không gian thuần túy.

Giải



+ Chứng minh $SC \perp (ABH)$.

Gọi I là trung điểm của AB ; G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

$$\text{Ta có } SG \perp (ABC) \text{ và } CI \perp AB; CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$\triangle SGC$ vuông tại G, nên $SG = \sqrt{SC^2 - GC^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$. Chọn hệ trục tọa độ $Ixyz$ như hình vẽ, với $Iz // SG$.

Ta có: $I(0;0;0); A\left(-\frac{a}{2};0;0\right); B\left(\frac{a}{2};0;0\right); C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right); G\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right); S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (a;0;0); \overrightarrow{SC} = \left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};-\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$. Khi đó, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow SC \perp AB$.

Mà $SC \perp AH$, do đó $SC \perp (ABH)$.

+ Tính $V_{S.ABH}$.

Mặt phẳng (ABH) đi qua I và có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{SC} = \left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};-\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$ cùng phương $\vec{n} = (0;1;-\sqrt{11})$

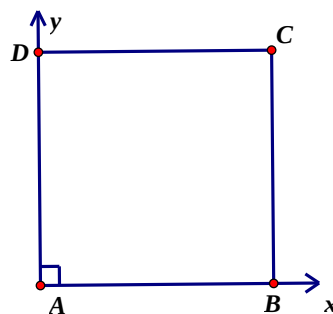
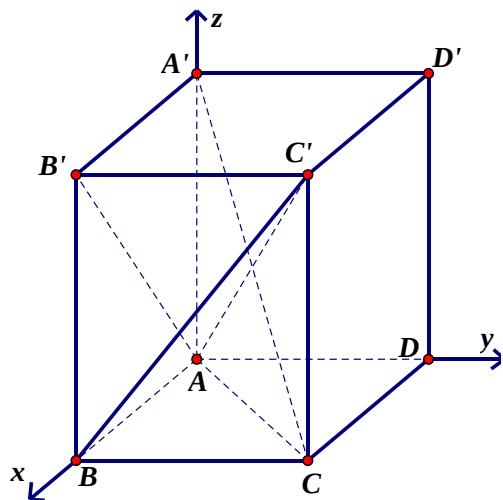
Ta có được phương trình (ABH): $y - \sqrt{11}z = 0$.

Khi đó: $SH = d(S; (ABH)) = \frac{7a}{4}$ và $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{33}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Mà $\frac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SC} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow V_{S.ABH} = \frac{7}{8} \cdot V_{S.ABC} = \frac{7\sqrt{11}a^3}{96}$.

Ví dụ 11.(Trích KD -2012) Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông; tam giác A'AC và A'C=a. Tính theo a thể tích của khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD').

Giải



+ Tính $V_{ABB'C'}$.

Tam giác A'AC vuông cân tại A và $A'C = a \Rightarrow AA' = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó $AB = AD = \frac{a}{2}$.

Khi đó: $V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} AB \cdot S_{\triangle BB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

+ Tính $d(A; (BCD'))$.

Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Ta có:

$$A(0;0;0); B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); C\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right); D\left(0; \frac{a}{2}; 0\right); D'\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{BC} = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$ cùng phương $\vec{u} = (0; 1; 0)$; $\overrightarrow{BD'} = \left(\frac{-a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ cùng phương $\vec{v} = (-1; 1; \sqrt{2})$.

Mặt phẳng (BCD') đi qua điểm B và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}] = (\sqrt{2}; 0; 1)$ có phương trình:

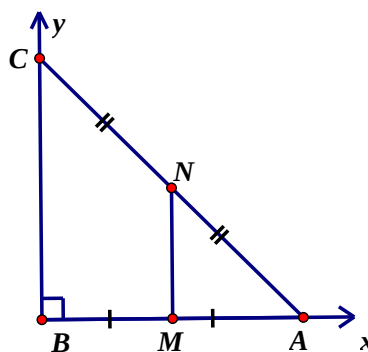
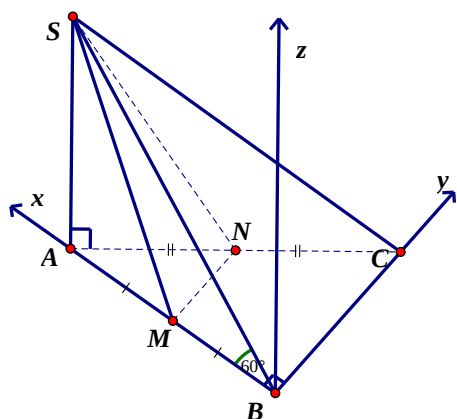
$$(BCD'): \sqrt{2}x + z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0. \text{ Vậy: } d(A; (BCD')) = \frac{\sqrt{6}a}{6}.$$

Ví dụ 12. (Trích KA -2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B; $AB = BC = 2a$; hai mặt mặt (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng chứa SM và song song BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.BCMN và khoảng giữa hai đường thẳng AB và SN.

Phân tích: Bài này các Em cần nhớ cách xây dựng mặt phẳng. $\left\{ \begin{array}{l} (SMN) // BC \\ (SMN) \cap (ABC) = MN \end{array} \right. \Rightarrow MN // BC$.

Khi đó N sẽ là trung điểm của AC.

Giải



+ Tính $V_{S.MNCB}$.

Do các mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC) suy ra $SA \perp (ABC)$.

Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array} \right. \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$, do đó SBA là góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) suy ra

$$SBA = 60^\circ \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}.$$

Ta có: $\begin{cases} (SMN) // BC \\ (SMN) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow MN // BC \Rightarrow N \text{ là trung điểm của } AC; MN = \frac{BC}{2} = a; BM = \frac{AB}{2} = a.$

Diện tích: $S_{MNCB} = \frac{1}{2} MB(MN + BC) = \frac{3a^2}{2}$. Vậy: $V_{S.MNCB} = \frac{1}{3} SA.S_{MNCB} = \frac{1}{3} . 2a\sqrt{3} . \frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$.

+ Tính $d(AB; SN)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ, với $Bz // SA$. Ta có:

$$A(2a; 0; 0); B(0; 0; 0); C(0; 2a; 0); N(a; a; 0); S(2a; 0; 2a\sqrt{3}).$$

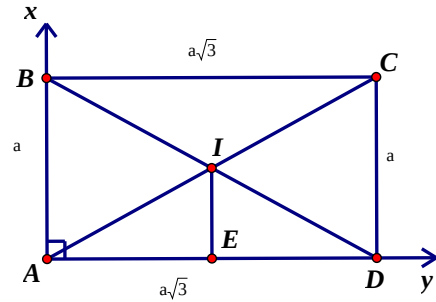
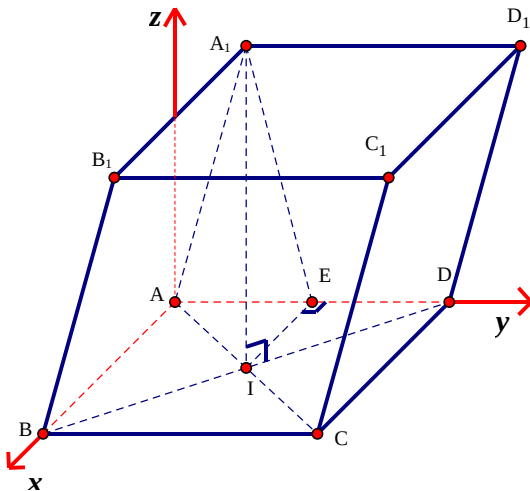
Ta có $\overrightarrow{BA} = (2a; 0; 0)$ cùng phương $\vec{u} = (1; 0; 0)$; $\overrightarrow{NS} = (a; -a; 2a\sqrt{3})$ cùng phương $\vec{v} = (1; -1; 2\sqrt{3})$;

$$[\vec{u}; \vec{v}] = (0; -2\sqrt{3}; -1); \overrightarrow{BN} = (a; a; 0).$$

$$\text{Khi đó: } d(AB; SN) = \frac{|\overrightarrow{BN} \cdot [\vec{u}; \vec{v}]|}{\|[\vec{u}; \vec{v}]\|} = \frac{|-2a\sqrt{3}|}{\sqrt{13}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 13.(Trích KB -2011) Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a; AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) .

Giải



+ Tính $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}$.

Gọi I là giao điểm giữa AC và $BD \Rightarrow A_1I \perp (ABCD)$; gọi E là trung điểm của $AD \Rightarrow IE \perp AD$.

Suy ra $\begin{cases} AD \perp IE \\ AD \perp A_1I \end{cases} \Rightarrow AD \perp (A_1IE) \Rightarrow AD \perp A_1E$. Do đó A_1EI là góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và

mặt phẳng $(ABCD)$ $A_1EI = 60^\circ \Rightarrow A_1I = IE \cdot \tan 60^\circ = \frac{AB}{2} \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích đáy: $S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích: $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = A_1I \cdot S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$

+ Tính $d(B_1; (A_1BD))$.

Dựng hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, với $Az // A_1I$. Ta có:

$A(0;0;0); B(a;0;0); D(0;a\sqrt{3};0); I\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right); A_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1} \Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

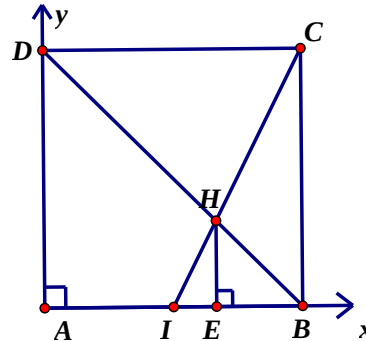
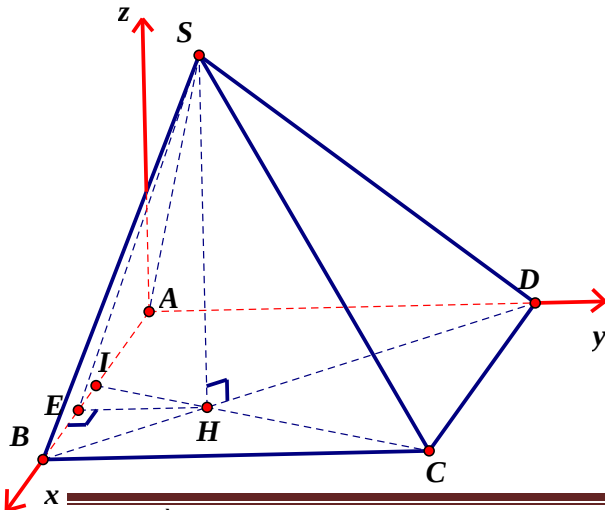
Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0)$ cùng phương $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$; $\overrightarrow{BA_1} = \left(-\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ cùng phương

$\vec{v} = (-1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$. Mặt phẳng (A_1BD) đi qua điểm B và có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}; \vec{v}] = (3; \sqrt{3}; 0)$ có

phương trình: $(A_1BD): 3x + \sqrt{3}y - 3a = 0$. Vậy: $d(B_1; (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 14. (Trích đề thi thử - THPT Trần phú 2016) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; I là trung điểm của AB; H là giao điểm giữa BD và CI. Hai mặt phẳng (SCI) và (SBD) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD). Góc giữa (SAB) và (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCI) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SCI) \cap (SBD) = SH \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Kẻ $HE \perp AB$ tại E, mà $AB \perp SH$, do đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow AB \perp SE$.

Suy ra SEH là góc giữa (SAB) và $(ABCD) \Rightarrow SEH = 60^\circ$. Ta có ΔHIB đồng dạng

$$\Delta HCD \Rightarrow \frac{HB}{HD} = \frac{IB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow HB = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Ta có: ΔHBE vuông tại E $\Rightarrow HE = HB \cdot \sin HBE = \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a}{3}$; ΔSHE vuông tại H

$$\Rightarrow SH = HE \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

+ Tính $d(SA; CI)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, $Az // SH$. Ta có:

$$A(0;0;0); B(a;0;0); D(0;a;0); C(a;a;0); I\left(\frac{a}{2};0;0\right); \overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Rightarrow H\left(\frac{2a}{3};\frac{a}{3};0\right) \Rightarrow S\left(\frac{2a}{3};\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$$

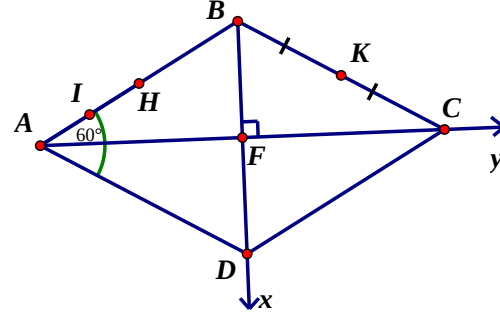
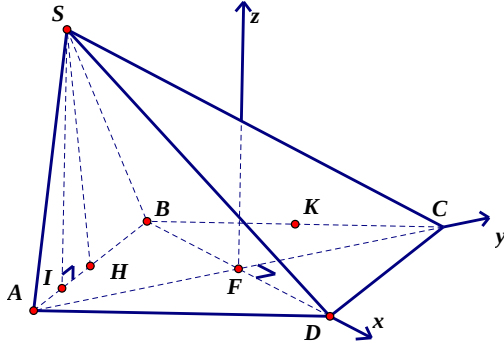
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IC} = \left(\frac{a}{2}; a; 0\right) \text{ cùng phương } \vec{u} = (1; 2; 0); \overrightarrow{AS} = \left(\frac{2a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \text{ cùng phương } \vec{v} = (2; 1; \sqrt{3})$$

$$\text{Ta có: } [\vec{u}; \vec{v}] = (2\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -3); \overrightarrow{AC} = (a; a; 0).$$

$$\text{Khi đó: } d(SA; CI) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot [\vec{u}; \vec{v}]|}{\|[\vec{u}; \vec{v}]\|} = \frac{|\sqrt{3}a|}{\sqrt{24}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 15. (Trích đề thi thử THPT Khoái Châu -2016) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a; $SA = \frac{a}{2}$; $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $BAD = 60^\circ$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc đáy. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính thể tích của khối tứ diện KSDC và cosin của góc hợp bởi đường thẳng SH và DK.

Giải



+ Tính V_{KSDC} .

Từ giả thuyết: $AB = a; SA = \frac{a}{2}; SB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S $\Rightarrow SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Khi đó $SA = SH = AH = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta SAH$ đều. Gọi I là trung điểm của AH $\Rightarrow SI \perp AH; SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Mặt khác, $(SAB) \perp (ABCD)$ nên ta có được $SI \perp (ABCD)$.

Diện tích đáy: $S_{\Delta KDC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$.

Thể tích: $V_{KSDC} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{\Delta KDC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{32}$.

+ Tính $\cos(\overrightarrow{SH}; \overrightarrow{DK})$.

Gọi F là tâm của hình thoi. Ta tính được $FB = FD = \frac{a}{2}; FA = FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Fxyz$ như hình vẽ, với $Fz \parallel SI$. Ta có:

$$F(0;0;0); B\left(\frac{-a}{2}; 0; 0\right); D\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right); A\left(0; \frac{-a\sqrt{3}}{2}; 0\right); C\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right); H\left(\frac{-a}{4}; \frac{-a\sqrt{3}}{4}; 0\right);$$

$$I\left(\frac{-a}{8}; \frac{-3\sqrt{3}a}{8}; 0\right); S\left(\frac{-a}{8}; \frac{-3\sqrt{3}a}{8}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right); K\left(\frac{-a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0\right)$$

Ta có $\overrightarrow{SH} = \left(\frac{-a}{8}; \frac{\sqrt{3}a}{8}; \frac{-a\sqrt{3}}{4}\right)$ cùng phương $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; -2\sqrt{3})$; $\overrightarrow{DK} = \left(\frac{-3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0\right)$ cùng phương $\vec{v} = (-\sqrt{3}; 1; 0)$.

$$\text{Khi đó: } \cos(\overrightarrow{SH}; \overrightarrow{DK}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

IV. Bài tập rèn luyện

Bài 1. (Trích KD -2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại B; $BA = 3a; BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\angle SBC = 30^\circ$. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Bài 2. (Trích KA -2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD; H là giao điểm của CN và MD. Biết SH vuông góc mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng MD và SC.

Bài 3. (Trích KB -2010) Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có $AB = a$. Góc giữa mặt phẳng (A'BC) và bằng 60° . Gọi G là trọng tâm của tam giác A'BC. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC.

Bài 4. (Trích KD -2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích của khối tứ diện SMBC theo a.

Bài 5. (Trích KA -2009) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a, CD = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD), tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a.

Bài 6. (Trích KB -2009) Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $BB' = a$; góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC); tam giác ABC vuông tại C và $\angle BAC = 60^\circ$. Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích của khối tứ diện A'ABC theo a.

Bài 7. (Trích KD -2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy tam giác ABC vuông tại B; $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của A'C'; I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích của khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Bài 8. (Trích KA -2008) Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy tam giác ABC vuông tại A; $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng AA' và B'C'.

Bài 9. (Trích KB -2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $2a$; $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng SM và DN.

Bài 10. (Trích KD -2008) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông;

$AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

Bài 11. (Trích KA -2007) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a ; mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh rằng AM vuông góc với BP và tính theo a thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

Bài 12. (Trích KB -2007) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA ; M là trung điểm của AE ; N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Bài 13. (Trích KD -2007) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^\circ$;

$BA = BC = a; AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SDC) .

Bài 14. (Trích KA -2006) Cho hình trụ có các đáy là hai đường tròn tâm O và O' . Bán kính đáy bằng với chiều cao và bằng a . Trên đường tròn O lấy điểm A và trên đường tròn O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$.

Bài 15. (Trích KB -2006) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a; AD = a\sqrt{2}; SA = a$ và SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC ; I là giao điểm của BM và AC . Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt phẳng (SMB) . Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$ theo a .

Bài 16. (Trích KD -2006) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a ; $SA = 2a$ và SA vuông góc mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB và SC . Tính thể tích của khối chóp $A.BCNM$.

Bài 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2a$, $AC = a$, $AA' = 3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC .

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, mặt phẳng (SBD) vuông góc đáy và hai đường thẳng SA và SD hợp với đáy một góc 30° . Biết $AD = a\sqrt{6}; BD = 2a$ và $ADB = 45^\circ$. Tính thể tích của khối chóp $S.ADBC$ và khoảng cách từ đỉnh C đến mặt phẳng (SAD) .

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $BCD = 60^\circ$; cạnh SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) vuông góc nhau. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ADBC$ và khoảng cách từ đỉnh C đến mặt phẳng (SBD) .

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a ; mặt bên SAD là tam giác đều và $SB = a\sqrt{2}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và AB. Gọi H là giao điểm của FC và EB. Chứng minh $SE \perp EB; CH \perp SB$ và tính theo a thể tích của khối chóp C.SEB.

Bài 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang cân; AD là đáy lớn, $AD = 2a; AB = BC = CD = a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $HC = 2HA$. Góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

Bài 22. Cho hình chóp S.ABC có đáy là vuông cân tại đỉnh B, $AB = a, SA = a$ và SA vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SCM).

Bài 23. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $HC = 3HA$; góc tạo bởi AA' và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' và sin của góc hợp bởi đường thẳng A'A và mặt phẳng (A'CD).

Bài 24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm I. Cạnh SA vuông góc mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{3}$. Biết bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $ACB = 30^\circ$.

Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

Bài 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm I; $AB = a; BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm H của đoạn thẳng AI. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Bài 26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt (ABCD); góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 45° . Gọi M là trung điểm của AD. Tính thể tích của khối chóp S.MCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD.

Bài 27. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a ; cạnh SA vuông góc đáy và SB hợp với mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMN).

Bài 28. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam vuông tại B; $BC = a; AC = a\sqrt{10}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC, với M là điểm thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

Bài 29. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$; $AD = 2\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm của tam giác BCD. Đường thẳng SA tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Bài 30. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB = a$; $BC = 2a$; $\angle ACB = 120^\circ$. Đường thẳng A'C tạo với mặt phẳng (ABB'A') một góc 30° . Gọi M là trung điểm của BB'. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC'.

Bài 31. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$. Mặt phẳng (A'BC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B và B'C'.

Bài 32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $AB = 2a$, $AD > a$; $SA = BC = a$; $CD = 2a\sqrt{5}$. Gọi H là điểm thuộc đoạn thẳng AD sao cho $AH = a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BH và SC.

Bài 33. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng SB và AC.

Bài 34. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$; $AC = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc BC sao cho $HB = 2HC$, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

Bài 35. Cho hình lăng trụ đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của CC'. Tính theo a thể tích của khối chóp A.BB'C'C và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (AB'N).

Bài 36. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có cạnh đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB. Mặt bên (AA'C'C) tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AA'C'C).

Bài 37. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có $AB = 2$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SC sao cho BM vuông góc DN. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng DN và AB.

Bài 38. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều và $AB = CD = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD), góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° .

Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) .

Bài 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA = a; AB = a; AC = 2a$; SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCG) .

Bài 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a; AD = a$; K là hình chiếu vuông góc của B lên đường chéo AC ; các điểm H, M lần lượt là trung điểm của AK và DC . Cạnh SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MH .

Bài 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Gọi I là trung điểm của cạnh AB ; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của CI ; góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC) .

Bài 42. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy là hình thoi cạnh bằng a , góc $ACB = 60^\circ$. Mặt phẳng $(A'BD)$ tạo với đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối hộp và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD' và BD .

Bài 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt phẳng (ABC) ; $SA = AB = a; AC = 2a$ và $ASC = ABC = 90^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) .

Bài 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$; $SA = a, ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a; AD = 5a$. Điểm E thuộc BC sao cho $CE = a$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ASDE$.

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a; AD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của CD và SC hợp với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM) .

Bài 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AB . Gọi K là trung điểm của AD . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD .

Bài 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Cạnh SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Gọi E là trung điểm BC . Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

Bài 48. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SC tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD.

Bài 49. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh, $a\sqrt{3}$; $\angle BAD = 120^\circ$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

Bài 50. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB. Mặt bên (AA'C'C) tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AA'C'C).

Bài 51. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a$; $AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB; SC tạo với đáy một góc bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 52. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy tam giác ABC là vuông cân tại A; $AB = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

Bài 53. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân ($BC \parallel AD$). Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AD; $SH = a$; $AB = BC = CD = a$; $AD = 2a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

Bài 54. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác vuông cân; $AB = AC = a$ và M là trung điểm của AB. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC và góc giữa SC với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Bài 55. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trùng với trọng tâm G của tam giác ABC; góc giữa SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 30° . Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và cosin của góc hợp bởi đường thẳng AC và mặt phẳng (SAB).

Bài 56. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và đường thẳng SC tạo với đáy một góc bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Chúc các Em học tập thật tốt!

Thầy Trần Duy Thúc