

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM VD - VDC

MŨ - LÔGARIT

- * CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT**
- * PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN**
- * CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG**



ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

1. LŨY THỪA VÀ LÔGARIT, HS MŨ – LÔGARIT.....	1
2. GTNN, GTLL MŨ-LÔGARIT.....	12
3. PT, BPT MŨ.....	26
4. PT, BPT LÔGARIT.....	39
5. ỨNG DỤNG THỰC TẾ.....	49

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

LŨY THỪA – MŨ – LÔGARIT

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I. LŨY THỪA

1. Định nghĩa lũy thừa

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$)
$\alpha = \lim r_n (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. Tính chất của lũy thừa

- Với mọi $a > 0, b > 0$ ta có:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- $a > 1: a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta; \quad 0 < a < 1: a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

- Với $0 < a < b$ ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0; \quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Chú ý: + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3. Định nghĩa và tính chất của căn thức

- Căn bậc n của a là số b sao cho $b^n = a$.

- Với $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0); \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0); \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0); \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

- Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Chú ý:

+ Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n . Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.

II. HÀM SỐ LŨY THỪA

1) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (α là hằng số)

Số mũ α	Hàm số $y = x^\alpha$	Tập xác định D
$\alpha = n$ (n nguyên dương)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R}$
$\alpha = n$ (n nguyên âm hoặc $n = 0$)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
α là số thực không nguyên	$y = x^\alpha$	$D = (0; +\infty)$

Chú ý: Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2) Đạo hàm

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (x > 0); (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$

Chú ý: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \begin{cases} \text{vôùi } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ \text{vôùi } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

III. LÔGARIT

1. Định nghĩa

- Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ta có: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Chú ý: $\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

- Logarit thập phân: $\lg b = \log b = \log_{10} b$

- Logarit tự nhiên (logarit Nepe): $\ln b = \log_e b$ (với $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281$)

2. Tính chất

- $\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^b = b; \quad a^{\log_a b} = b \quad (b > 0)$
- Cho $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$. Khi đó:
 - Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
 - Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

3. Các qui tắc tính logarit

Với $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$, ta có:

- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

4. Đổi cơ số

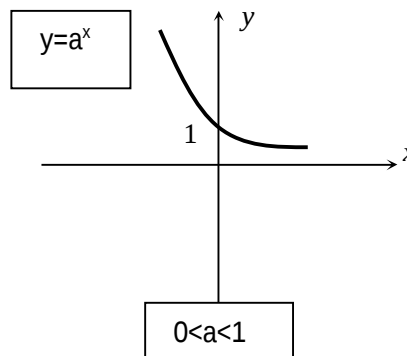
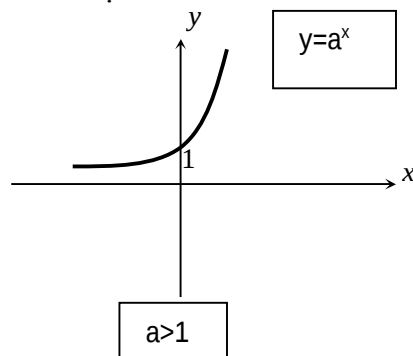
Với $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, ta có:

- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c \quad (\alpha \neq 0)$

IV. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

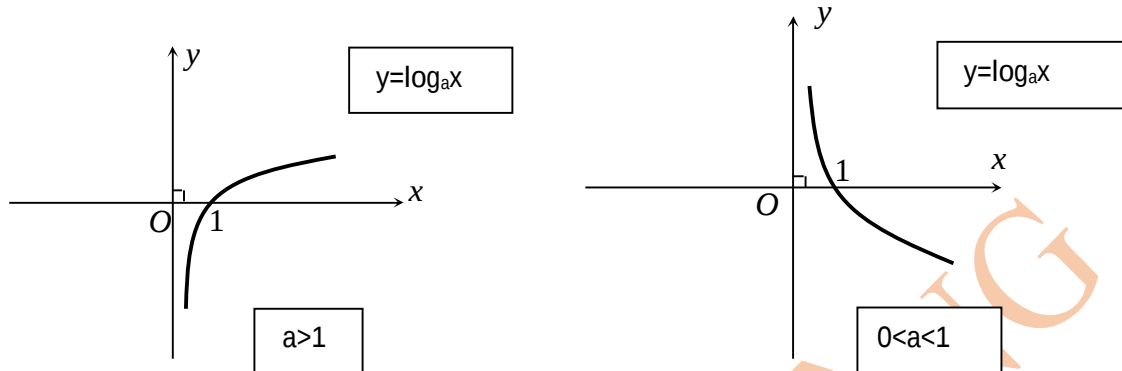
1) Hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
- Đồ thị:



2) Hàm số lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị:



3) Giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4) Đạo hàm

- $(a^x)' = a^x \ln a$; $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a}$
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \ (x > 0)$; $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

- A. $S = 4$. B. $S = 19$. C. $S = 10$. D. $S = 15$.

Câu 2: Với $a > 0, a \neq 1$, cho biết: $t = a^{\frac{1}{1-\log_a u}}$; $v = a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$. Chọn khẳng định đúng:

- A. $u = a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$. B. $u = a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$. C. $u = a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$. D. $u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$.

Câu 3: Giả sử p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

Câu 4: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho $0 < x \neq 1$, $0 < a \neq 1$ và

$$M = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \frac{1}{\log_{a^5} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{2019}} x}.$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$\text{A. } M = \frac{2020^2}{\log_a x}. \quad \text{B. } M = \frac{2018 \cdot 1010}{\log_a x}. \quad \text{C. } M = \frac{2020 \cdot 1010}{\log_a x}. \quad \text{D. } M = \frac{1010^2}{\log_a x}.$$

Câu 5: Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ)$.

$$\text{A. } P = 1. \quad \text{B. } P = \frac{1}{2}. \quad \text{C. } P = 0. \quad \text{D. } P = 2.$$

Câu 6: Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

$$\text{A. } 2017. \quad \text{B. } 2019. \quad \text{C. } 2016. \quad \text{D. } 2018.$$

Câu 7: (Liên Trường Nghệ An) Tìm số nguyên dương n sao cho

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \cdot \log_{2018} 2019$$

$$\text{A. } 2021. \quad \text{B. } 2019. \quad \text{C. } 2020. \quad \text{D. } 2018.$$

Câu 8: Cho hai số a, b dương thỏa mãn điều kiện: $a - b = \frac{a \cdot 2^b - b \cdot 2^a}{2^a + 2^b}$. Tính $P = 2017^a - 2017^b$.

$$\text{A. } 0. \quad \text{B. } 2016. \quad \text{C. } 2017. \quad \text{D. } -1.$$

Câu 9: (Sở Phú Thọ) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{16}(a + 3b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của

$$\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + ab^2 + 3b^3} \text{ bằng}$$

$$\text{A. } \frac{6 - \sqrt{13}}{11}. \quad \text{B. } \frac{82 - 17\sqrt{13}}{69}. \quad \text{C. } \frac{5 - \sqrt{13}}{6}. \quad \text{D. } \frac{3 + \sqrt{13}}{11}.$$

Câu 10: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần 1) Cho a, b, c là ba số thực dương, $a > 1$ và thỏa mãn

$$\log_a^2(bc) + \log_a \left(b^3 c^3 + \frac{bc}{4} \right)^2 + 4 + \sqrt{4 - c^2} = 0. \text{ Số bộ } (a; b; c) \text{ thỏa mãn điều kiện đã cho là}$$

$$\text{A. } 0. \quad \text{B. } 1. \quad \text{C. } 2. \quad \text{D. } \text{Vô số}.$$

Câu 11: (Sở Ninh Bình Lần 1) Cho biết $\log_2 \left(\sum_{k=1}^{100} k \cdot 2^k - 2 \right) = a + \log_c b$ với a, b, c là các số nguyên và

$$a > b > c > 1. \text{ Tổng } a + b + c \text{ là}$$

$$\text{A. } 203. \quad \text{B. } 202. \quad \text{C. } 201. \quad \text{D. } 200.$$

Câu 12: (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) \text{ và } \frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}, \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính}$$

$$T = a^2 + b^2.$$

$$\text{A. } T = 29. \quad \text{B. } T = 20. \quad \text{C. } T = 25. \quad \text{D. } T = 26.$$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng

$$(0; +\infty).$$

$$\text{A. } m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty). \quad \text{B. } m \in [1; +\infty).$$

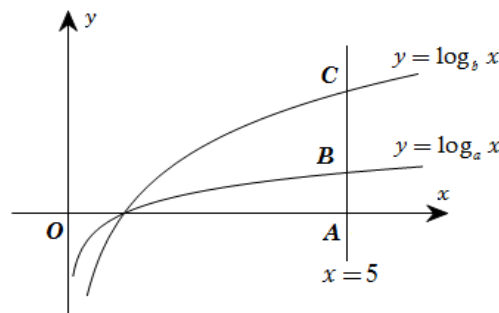
$$\text{C. } m \in (-4; 1). \quad \text{D. } m \in (1; +\infty).$$

Câu 14: (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$y = x + m + \sqrt{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4} + \log_2 \left(x - m + \sqrt{2x^2 + 1} \right)$$

$$\text{A. } 2020. \quad \text{B. } 2021. \quad \text{C. } 2018. \quad \text{D. } 2019.$$

- Câu 15: (Đặng Thành Nam Đề 12)** Cho hàm số $f(x) = \ln(e^x + m)$. Có bao nhiêu số thực dương m để $f'(a) + f'(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a + b = 1$
- A. 1. B. 2. C. Vô số. D. 0.
- Câu 16: (Ngô Quyền Hà Nội)** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x$; ($0 < a \neq 1$) qua điểm $I(2;1)$. Giá trị của biểu thức $f(4 - a^{2019})$ bằng
- A. 2023. B. -2023. C. 2017. D. -2017.
- Câu 17: (Hải Hậu Lần1)** Cho hàm số $f(x) = \ln 2019 - \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(3) + \dots + f'(2019)$.
- A. $S = \frac{4035}{2019}$. B. $S = 2021$. C. $S = \frac{2019}{2021}$. D. $S = \frac{2020}{2021}$.
- Câu 18: (Lê Xoay lần1)** Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1} - a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.
- A. $n = 41$. B. $n = 39$. C. $n = 49$. D. $n = 123$.
- Câu 19: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Cho hàm số $f(x) = \ln\left(1 - \frac{4}{(2x-1)^2}\right)$. Biết rằng $f(2) + f(3) + \dots + f(2020) = \ln \frac{a}{b}$, trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $b - 3a$.
- A. -2. B. 3. C. -1. D. 1.
- Câu 20: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$, $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$
- A. 17. B. 14. C. 15. D. 16.
- Câu 21:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B và C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_{\sqrt{a}} x$ và $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$ với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a .
- A. $a = \sqrt{3}$. B. $a = \sqrt[3]{6}$. C. $a = \sqrt{6}$. D. $a = \sqrt[6]{3}$.
- Câu 22:** Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C. Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a = b^2$. B. $a^3 = b$. C. $a = b^3$. D. $a = 5b$.

Câu 23: Kí hiệu $f(x) = \left(x^{\frac{1}{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$. Giá trị của $f(f(2017))$ bằng:

- A. 2016. B. 1009. C. 2017. D. 1008.

Câu 24: (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUYỆ-HÀ-NỘI) Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log \left[\frac{f(2019) - f(2009) - 145}{2} \right].$$

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 10.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{2}{2018}\right) + f\left(\frac{3}{2018}\right) + \dots + f\left(\frac{2017}{2018}\right)$.

- A. $S = \frac{2017}{2}$. B. $S = 2018$. C. $S = \frac{2019}{2}$. D. $S = 2017$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \frac{16^x}{16^x + 4}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$.

- A. $S = \frac{5044}{5}$. B. $S = \frac{10084}{5}$. C. $S = 1008$. D. $S = \frac{10089}{5}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right).$$

- A. 336. B. 1008. C. $\frac{4039}{12}$. D. $\frac{8071}{12}$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

$$\text{Tính tổng } S = f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{2}{2007}\right) + f\left(\frac{3}{2007}\right) + \dots + f(1)?$$

- A. $S = 2016$. B. $S = 1008$. C. $S = \frac{4015}{4}$. D. $S = \frac{4035}{4}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f(1).$$

- A. $S = \frac{4035}{4}$. B. $S = \frac{8067}{4}$. C. $S = 1008$. D. $S = \frac{8071}{4}$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right).$$

- A. 336. B. 1008. C. $\frac{4039}{12}$. D. $\frac{8071}{12}$.

Câu 31: Cho $f(x) = \frac{2016^x}{2016^x + \sqrt{2016}}$. Tính giá trị biểu thức

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$$

A. $S = 2016$

B. $S = 2017$

C. $S = 1008$

D. $S = \sqrt{2016}$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right)$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

A. $S = 2016$.

B. $S = 1008$.

C. $S = 2017$.

D. $S = 4032$.

Câu 33: Cho $0 < a \neq 1 + \sqrt{2}$ và các hàm $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

I. $f^2(x) - g^2(x) = 1$.

II. $g(2x) = 2g(x)f(x)$.

III. $f(g(0)) = g(f(0))$.

IV. $g'(2x) = g'(x)f(x) - g(x)f'(x)$.

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 34: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = 2018$.

B. $m - n^2 = -2018$.

C. $m - n^2 = 1$.

D. $m - n^2 = -1$.

Câu 35: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0.

B. 1.

C. Vô số.

D. 2.

Câu 36: Cho hàm số $y = \left(\frac{4}{2017} \right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $3e^3 + 1 \leq m < 3e^4 + 1$.

B. $m \geq 3e^4 + 1$.

C. $3e^2 + 1 \leq m \leq 3e^3 + 1$.

D. $m < 3e^2 + 1$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$ đồng biến trên khoảng

$$\left(\ln \frac{1}{4}; 0 \right)$$

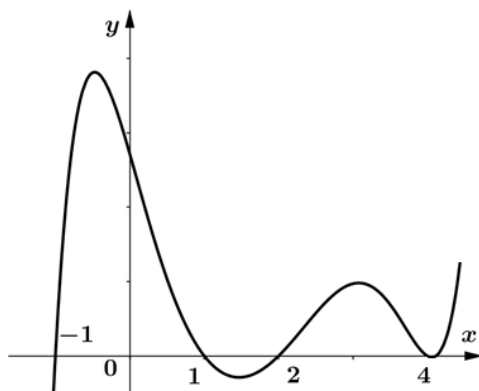
A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \cup [1; 2)$

B. $m \in [-1; 2]$

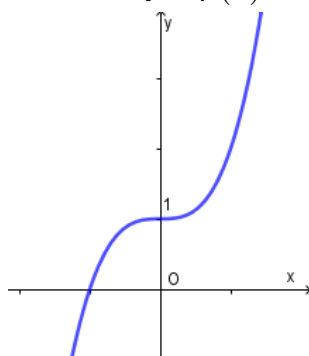
C. $m \in (1; 2)$

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$

Câu 38: (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2} \right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(0;1)$.B. $(-\infty;0)$.C. $(-1;0)$.D. $(1;+\infty)$.

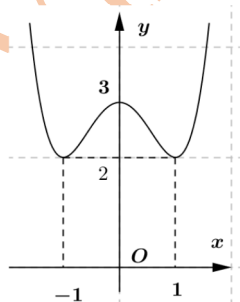
Câu 39: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(2x) + 2e^{-x}$ nghịch biến trên khoảng nào cho dưới đây?

A. $(-2;0)$.B. $(0;+\infty)$.C. $(-\infty;+\infty)$.D. $(-1;1)$.

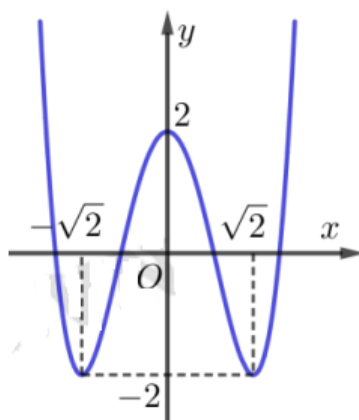
Câu 40: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$.B. $(1;+\infty)$.C. $(-1;1)$.D. $(0;+\infty)$.

Câu 41: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 42: (PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tổng khoảng cách từ gốc tọa độ đến tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \log_2 \frac{2x+3}{x-1}$ bằng

- A. 2. B. 3. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 43: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-6	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2x-2) - 2e^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-2; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 44: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = f(x) = (x+1)\ln x + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0; e^2)$.

- A. 2016. B. 2022. C. 2014. D. 2023.

Câu 45: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hai đồ thị hàm số $y = 4^x + 1$ và $y = (m^2 - 6m + 2) \cdot 2^x$ không có điểm chung?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 5.

Câu 46: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \log_{2018} x$ và (C') là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, (C') đối xứng với (C) qua trục tung. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 47: (Hải Hậu Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \frac{m}{x} + 2$

nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 3\right]$ là:

- B. $\left[\frac{-27}{8}; \frac{-4}{3}\right]$. B. $\left(-\infty; \frac{-27}{8}\right]$. C. $\left(-\infty; \frac{-1}{2}\right)$. D. $\left[\frac{-3}{2}; \frac{-4}{3}\right]$.

- Câu 48: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - mx + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- A. $m \geq \frac{1}{4}$. B. $m \geq 4$. C. $m \leq \frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{4} \leq m < 4$.
- Câu 49: (Hùng Vương Bình Phước)** Số giá trị nguyên của $m < 10$ để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là
- A. 8. B. 10. C. 9. D. 11.
- Câu 50: (Chuyên KHTN)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2 + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- A. 2019. B. 2020. C. 4038. D. 1009.
- Câu 51: (Chuyên Thái Bình, lần 3, năm 2017-2018)** Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(\cos x + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:
- A. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$. B. $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$. C. $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. D. $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.
- Câu 52:** Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln\left(\frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}\right) - mx + 2018$ đồng biến trên tập xác định là
- A. $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}]$. B. $(-\infty, -1]$. C. $[-\frac{1}{3}, +\infty)$. D. $[-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$.
- Câu 53: (Chuyên Vinh Lần 2)** Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 31^x + 3^x + mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2.
- A. $m \in (-10; -5)$. B. $m \in (-5; 0)$. C. $m \in (0; 5)$. D. $m \in (5; 10)$.
- Câu 54: (Hải Hậu Lần 1)** Cho hàm số $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $0 < m < 10$. B. $0 \leq m \leq 2$. C. $m < -2$. D. $6 < m < 11$.
- Câu 55: (Chuyên Vinh Lần 2)** Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \log_{31}(x+1) + \log_3(x+1) + mx$ trên $(-1; +\infty)$ là 0. Khi đó:
- A. $m \in (-3; -2)$. B. $m \in (-2; 0)$. C. $m \in (0; 2)$. D. $m \in (2; 3)$.
- Câu 56: (Hậu Lộc Thanh Hóa)** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) qua điểm $I(1; 1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng
- A. -2016. B. -2020. C. 2016. D. 2020.

GTNN, GTLN MŨ – LÔGARIT

DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Câu 1: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = \frac{-1}{\log_b^2 a} + \log_a \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{7}{4}.$$

- A. $P_{\max} = 2$. B. $P_{\max} = 1$. C. $P_{\max} = 0$. D. $P_{\max} = 3$.

Câu 2: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b = a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $0 < k < \frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2} < k < 1$. C. $-1 < k < -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} < k < 0$.

Câu 3: Cho hai số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b = a^m$. Tính $P = M + m$.

- A. $P = \frac{81}{16}$. B. $P = \frac{23}{8}$. C. $P = \frac{19}{8}$. D. $P = \frac{49}{16}$.

Câu 4: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c)$.

- A. $-3 - \log_5 3$. B. -4 . C. $-2 - \sqrt{3}$. D. $-2 - \log_3 5$.

Câu 5: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 - 4y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2(x + 2y) \cdot \log_2(2x - 4y)$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{9}$.

Câu 6: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = e$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \ln a \cdot \ln b + 2 \ln b \cdot \ln c + 5 \ln c \cdot \ln a \text{ là } \frac{p}{q} \text{ với } p, q \text{ là các số nguyên dương và } \frac{p}{q} \text{ tối giản.}$$

Tính $S = 2p + 3q$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = 7$. B. $S = 13$. C. $S = 16$. D. $S = 19$.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $(\sqrt{5} + 1)^{x+y} - 4(\sqrt{5} - 1)^{x+y-1} = (\sqrt{5} - 3)2^{x+y-1}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + 2y$.

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.

Câu 8: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{1+x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - 100y$.

- A. -2499 . B. -2501 . C. -2500 . D. -2490 .

Câu 9: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $4^a - 2^{a+1} + 2(2^a - 1)\sin(2^a + b - 1) + 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b$.

- A. $\frac{\pi}{2} - 1$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\pi - 1$. D. $\frac{3\pi}{2} - 1$.

Câu 10: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{y}{x}$. Tính $a+b$.

- A. $a+b=\sqrt{10}$. B. $a+b=2\sqrt{14}$. C. $a+b=\frac{11}{6}$. D. $a+b=\frac{7}{2}$.

Câu 11: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y)+\log(x-3y)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - |y|$.

- A. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\sqrt{10}$. D. 1.

Câu 12: Cho hai số thực x, y Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x - 2|y| + 1$.

- A. $\sqrt{10} + 1$. B. $\frac{5\sqrt{2}-3}{2}$. C. $\frac{3+5\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{3+2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 13: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c > b > a > 1$ và $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Đặt $T = \log_b c - 2\log_a b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $T \in (-3; -1)$. B. $T \in (-1; 2)$. C. $T \in (2; 5)$. D. $T \in (5; 10)$.

Câu 14: Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$. Tính $S = 2m + 3M$.

- A. $S = \frac{2}{3}$. B. $S = \frac{1}{3}$. C. $S = 3$. D. $S = 2$.

Câu 15: Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$.

- A. $\frac{1-2\sqrt{10}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{10}-1}{3}$. C. $\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}+2}{3}$.

Câu 16: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log a \cdot \log b + \log b \cdot \log c + 3\log c \cdot \log a = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2 a + \log^2 b + \log^2 c$ là $\frac{-m+\sqrt{n}}{p}$ với m, n, p là các số nguyên dương và $\frac{m}{p}$ tối giản. Tính $T = m + n + p$.

- A. $T = 64$. B. $T = 16$. C. $T = 102$. D. $T = 22$.

Câu 17: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$.

- A. $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$. B. $(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$. C. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$. D. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

DẠNG 2: ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 18: Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}.$$

- A. $\sqrt{29}$. B. $\sqrt{23}$. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{27}$.

Câu 19: Xét các số thực $a, b, c \in (1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_{bc} (2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca} (4a^2 + 16a - 16) + \log_{ab} (c^2 + 4c - 4).$$

- A. $\log_3 \frac{289}{2} + \log_{\frac{9}{4}} 8$. B. $\frac{11}{2}$. C. 4. D. 6.

ÁP DỤNG BĐT CAUCHY

Câu 20: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3 \log_b \left(\frac{b}{a} \right).$$

- A. 5. B. $5 - \sqrt{6}$. C. $5 - 2\sqrt{6}$. D. $4 - \sqrt{6}$.

Câu 21: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}.$$

- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.

Câu 22: Cho các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 (x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

- A. $S = 8$. B. $S = 4$. C. $S = 16$. D. $S = 8\sqrt{2}$

Câu 23: Cho các số thực $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{a^2} (a^2 b) + \log_{\sqrt{b}} a^3$.

- A. $1 - 2\sqrt{3}$. B. $1 - 2\sqrt{2}$. C. $1 + 2\sqrt{3}$. D. $1 + 2\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho hai số thực dương a, b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{4ab}{a + 4b} \right) + \log_b (ab).$$

- A. $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{5 + \sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy.$$

- A. $P_{\max} = \frac{27}{2}$. B. $P_{\max} = 18$. C. $P_{\max} = 27$. D. $P_{\max} = 12$.

Câu 26: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho $m = \log_a (\sqrt[3]{ab})$, với $a > 1$, $b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 4$.

Câu 27: (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Cho x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của $3x + y$ bằng

- A. 15. B. $4 + 2\sqrt{3}$. C. 9. D. $5 + 2\sqrt{3}$.

Câu 28: Giá trị nhỏ nhất của $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn

$$\sqrt{b} > a > 1$$

- A. 30. B. 40. C. 18. D. 60.

Câu 29: Cho $0 < a < 1 < b$, $ab > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a ab + \frac{4}{(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} ab}$.

- A. $P = 2$. B. $P = 4$. C. $P = 3$. D. $P = -4$.

Câu 30: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \log_{a^2} a^2 b + \log_{\sqrt{b}} a^3.$$

- A. $P_{\max} = 1 + 2\sqrt{3}$. B. $P_{\max} = -2\sqrt{3}$. C. $P_{\max} = -2$. D. $P_{\max} = 1 - 2\sqrt{3}$.

Câu 31: Cho các số thực $a, b, c > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a (bc) + \log_b (ca) + 4 \log_c (ab).$$

- A. 6. B. 12. C. 10. D. 11.

Câu 32: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Biết biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_{\frac{2}{a}} a$$
 đạt giá trị nhỏ nhất bằng M khi $a = b^m$. Tính $T = M + m$.

- A. $T = 15$. B. $T = 12$. C. $T = \frac{37}{3}$. D. $T = \frac{28}{3}$.

Câu 33: Với $a, b, c > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a (bc) + 3 \log_b (ca) + 4 \log_c (ab)$.

- A. 16. B. $6 + 4\sqrt{3}$. C. $4 + 6\sqrt{3}$. D. $4 + 8\sqrt{3}$.

Câu 34: Cho các số thực $a, b, c > 1$. Tính $\log_b (ca)$ khi biểu thức $S = \log_a (bc) + 2 \log_b (ca) + 9 \log_c (ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{7}$. C. $3 + \sqrt{2}$. D. $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$.

Câu 35: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a}.$$

- A. $2\sqrt{2}$. B. 3. C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 36: Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4} \right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4} \right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4} \right).$$

- A. $2n$. B. n . C. 2. D. 4.

Câu 37: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $5 \log_2^2 a + 16 \log_2^2 b + 27 \log_2^2 c = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_2 a \log_2 b + \log_2 b \log_2 c + \log_2 c \log_2 a$.

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 38: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

- A. $2\sqrt[3]{4}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $4\sqrt[3]{2}$.

Câu 39: Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{ab}} b}$ là $\frac{m}{n}$ với

m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $P = 2m + 3n$.

- A. $P = 30$. B. $P = 42$. C. $P = 24$. D. $P = 35$.

Câu 40: Cho các số thực $a, b \in (1; 2]$ thỏa mãn $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = 2\log_a(b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}} a$ là $m + 3\sqrt[3]{n}$ với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + n$.

- A. $S = 9$. B. $S = 18$. C. $S = 54$. D. $S = 15$.

Câu 41: Cho $a > 1, b > 1$. Tính $S = \log_a \sqrt{ab}$, khi biểu thức $P = \log_a^2 b + 8\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $S = 6\sqrt[3]{2}$. B. $S = \frac{1 + \sqrt[3]{4}}{2}$. C. $S = \sqrt[3]{4}$. D. $S = 2(1 + \sqrt[3]{4})$.

Câu 42: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b + \log_b(a^4 - 9a^2 + 81)$ nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

- A. $9 + 2\sqrt{3}$. B. $3 + 9\sqrt{2}$. C. $3 + 3\sqrt{2}$. D. $2 + 9\sqrt{2}$.

Câu 43: (THTT lần 5) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x + y) \geq \log_2(6 - y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$ bằng

- A. $\frac{59}{3}$. B. 19. C. $\frac{53}{3}$. D. $8 + 6\sqrt{2}$.

Câu 44: (THTT số 3) Với các số thực dương a, b để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{2}}{x - 2}$ có đúng một đường tiệm cận, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{(a+1)} \frac{b}{2}$.

- A. -2. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 45: (Sở Hưng Yên Lần 1) Cho các số thực a, b, m, n sao cho $2m + n < 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \log_2(a^2 + b^2 + 9) = 1 + \log_2(3a + 2b) \\ 9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m + n + 2)^2 + 1] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a - m)^2 + (b - n)^2}$.

- A. $2\sqrt{5} - 2$. B. 2. C. $\sqrt{5} - 2$. D. $2\sqrt{5}$.

ÁP DỤNG BĐT BUNHIACOPXKI

Câu 46: (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2 + 4b^2 + 1}(2a - 8b) = 1$. Tính $P = \frac{a}{b}$ khi biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\frac{8}{5}$. B. $-\frac{13}{2}$. C. $-\frac{13}{4}$. D. $\frac{17}{44}$.

Câu 47: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2 + y^2 + 1}(2x - 4y) = 1$. Tính $P = \frac{x}{y}$ khi biểu thức

$S = 4x + 3y - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{8}{5}$.

B. $\frac{9}{5}$.

C. $\frac{-13}{4}$.

D. $\frac{17}{44}$.

Câu 48: (HSG 12 Bắc Giang) Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ là

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$.

C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$.

D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Câu 49: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A. $9 + 2\sqrt{3}$.

B. $3 + 9\sqrt{2}$.

C. $3 + 3\sqrt{2}$.

D. $2 + 9\sqrt{2}$.

Câu 50: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$.

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

B. $\sqrt{10}$.

C. $\frac{2\sqrt{10}}{2}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 51: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(x+y+3) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x + 4y - 6$.

A. $\frac{5\sqrt{6}-9}{2}$.

B. $\frac{5\sqrt{6}-3}{2}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}-5}{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{6}-5}{2}$.

Câu 52: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = 2x + y$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b$.

A. 17.

B. 13.

C. 11.

D. 15.

Câu 53: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

A. 3.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$.

D. $\frac{5+\sqrt{10}}{2}$.

Câu 54: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 > 1$ và $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Biết giá trị lớn nhất của

$P = x + y$ là $\frac{a+b\sqrt{6}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. $\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{15}$.

C. $\sqrt{19}$.

D. 12.

Câu 55: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

A. $3\sqrt{10}$.

B. $12 + 2\sqrt{42}$.

C. $12 + 2\sqrt{35}$.

D. $6\sqrt{10}$.

Câu 56: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$.

A. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$.

B. $\frac{3+\sqrt{30}}{3}$.

C. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$.

D. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$.

Câu 57: Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10 \log_2^2 a + 10 \log_2^2 b + \log_2^2 c$.

- A. 4. B. 3. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 58: (**Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019**) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

- A. $\sqrt{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. C. $2\sqrt{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 59: (**THTT số 3**) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\sqrt{\log_2 \frac{x}{4}} + \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}} + \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \log_{2001} x \cdot \log_{2018} y \cdot \log_{2019} z$.

- A. $\min S = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
 B. $\min S = 44 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
 C. $\min S = 8 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.
 D. $\min S = \frac{289}{8} \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Câu 60: (**Lê Xoay lần 1**) Cho các số thực $a, b > 1$ thỏa mãn điều kiện: $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$.

- A. $\sqrt{(\log_3 2 + \log_2 3)}$. B. $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$. C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}}$.

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG

Câu 61: (**Đoàn Thượng**) Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 62: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $\ln(x^2 + x) - 2^{x+y} = \ln(y + x) - 2^{x^2+x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y^2 - 4xy + 8x$.

- A. -4. B. 0. C. 5. D. -3.

Câu 63: (**Thuan-Thanh-Bac-Ninh**) Cho $a \in \left[\frac{1}{9}; 3 \right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $9 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}} a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$. Khi đó giá trị của $A = 5m + 2M$ là:

- A. 8. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 64: (**Chuyên Quốc Học Huế Lần 1**) Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x (e^x)^{e^y} \geq x^y (e^y)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 65: (Sở Quảng NamT) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ bằng

- A. $\frac{e + \ln 2}{2}$. B. $\frac{e - \ln 2}{2}$. C. $\frac{e \ln 2}{2}$. D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

Câu 66: (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x-4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

- A. 3. B. $5 + 2\sqrt{5}$. C. $3 - 2\sqrt{5}$. D. $1 + \sqrt{5}$.

Câu 67: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

- A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$. B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.
C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Câu 68: (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$ bằng:

- A. $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. D. $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Câu 69: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 5b$

- A. $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$. C. $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$. D. $\frac{5\sqrt{95}-21}{6}$.

Câu 70: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $3 + \ln \frac{x+y+1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = xy$.

- A. $P = \frac{1}{9}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = 9$. D. $P = 1$.

Câu 71: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

- A. $P = 6 - 2\sqrt{3}$. B. $P = 4 + 2\sqrt{6}$. C. $P = 4 - 2\sqrt{6}$. D. $P = 6 + 2\sqrt{3}$.

Câu 72: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

- A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$.

Câu 73: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2018}{y^2 - 2y + 2019}$. Biết giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 27$. B. $T = 17$. C. $T = 195$. D. $T = 207$.

Câu 74: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2 + y^2 + xy + 2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá

trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+2y+6}$.

- A. $\frac{69 + \sqrt{249}}{94}$. B. $\frac{43 + 3\sqrt{249}}{94}$. C. $\frac{37 - \sqrt{249}}{21}$. D. $\frac{43 + 3\sqrt{249}}{94}$.

Câu 75: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} - y = \frac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất

của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 - 2x^2 + 8y - x + 2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 85$. B. $S = 31$. C. 75 . D. 41 .

Câu 76: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y$.

- A. $6\sqrt{2} - 7$. B. $\frac{10\sqrt{2}+1}{10}$. C. $15\sqrt{2} - 20$. D. $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Câu 77: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $4 + 3^{x^2-2y+2} = (4 + 9^{x^2-2y})7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

- A. $-\frac{9}{4}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $-\frac{33}{8}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 78: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + x + y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$. B. $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$. C. $\sqrt{15} - 2$. D. $\frac{2\sqrt{15}+3}{6}$.

Câu 79: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x + 2y$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}$.

- A. 6 . B. $3 + 2\sqrt{3}$. C. 4 . D. $3 + \sqrt{3}$.

Câu 80: Cho hai số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tính giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$.

- A. $m = -1$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{e}$. D. $m = e - 3$.

Câu 81: Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy-y+4} = x(x+y-3) + y(y-4)$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 5y^2 + 2xy + 39x$.

A. 100.

B. 125.

C. 121.

D. 81.

Câu 82: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn

$\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ

nhất của $P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2}$. Tính $T = 10M - m$.

A. $T = 60$.

B. $T = 94$.

C. $T = 104$.

D. $T = 50$.

Câu 83: (CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn

$\log_2 \left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1} \right) = a(a-2) + b(b-2) + c(c-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c}$.

A. $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Câu 84: Tìm tất cả giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{4^{\sin x} + 6^{m+\sin x}}{9^{\sin x} + 4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

A. $m \geq \log_6 \frac{2}{3}$.

B. $m \geq \log_6 \frac{13}{18}$.

C. $m \leq \log_6 3$.

D. $m \leq \log_6 \frac{2}{3}$.

Câu 85: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức

$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

A. $k \in [2; 3]$.

B. $k \in (0; 1)$.

C. $k \in [0; 1]$.

D. $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 86: (Sở Quảng Ninh Lần1) Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

A. 333.

B. 229.

C. 234.

D. 292.

Câu 87: Cho $1 < x < 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$.

A. 64.

B. 96.

C. 82.

D. 81.

Câu 88: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$P = \log_a^2(a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right)$.

A. $P_{\min} = 19$.

B. $P_{\min} = 13$.

C. $P_{\min} = 14$.

D. $P_{\min} = 15$.

Câu 89: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1 \leq b < a^3$. Biểu thức $P = 2 \left(1 + \log_a \frac{b}{a} \right)^3 + \left(4 - 2 \log_a^2 \sqrt{b} \right)^3 + 3$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. 67. B. $\frac{31455}{512}$. C. 27. D. $\frac{455}{8}$.

Câu 90: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y}$

là $a + \ln b$. Giá trị của tích ab là

- A. 45. B. 81. C. 108. D. 115.

Câu 91: Xét các số thực a, b thỏa mãn $\begin{cases} a \geq b^2 \\ b > 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_{\frac{a}{b}} a + \log_b \frac{a}{b}$.

- A. $P_{\min} = \frac{1}{3}$. B. $P_{\min} = 1$. C. $P_{\min} = 3$. D. $P_{\min} = 9$.

Câu 92: Xét các số thực a, b thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2 \log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

- A. $a = b^2$. B. $a^2 = b^3$. C. $a^3 = b^2$. D. $a^2 = b$.

Câu 93: Xét các số thực a, b thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Biểu thức $P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

- A. $\log_a b = \frac{2}{3}$. B. $\log_a b = \frac{1}{3}$. C. $\log_a b = \frac{3}{2}$. D. $\log_a b = 3$.

Câu 94: Xét các số thực a, b thỏa $1 < a \leq b^2$. Biểu thức $P = 2 \left(2 \log_{\frac{a}{b}} a - \log_{\frac{a}{b}} b \right)^2 + 27 \log_a \left(\frac{a}{b} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

- A. $a = b^2$. B. $a = 2b$. C. $a = b + 1$ D. $2a = b + 1$.

Câu 95: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |x - y| + |x^3 - y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b$.

- A. $T = 25$. B. $T = 34$. C. $T = 32$. D. $T = 41$.

Câu 96: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{10}$. B. $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{3+\sqrt{3}}{30}$. D. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 97: Cho hai số thực $x, y > 1$ thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x^3 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2x + y$.

- A. $2\sqrt{2} - 2$. B. $\frac{8}{3}$. C. $4 + 4\sqrt{2}$. D. $3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 98: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$. Tính $S = M + 2m$.

- A. $S = 6$. B. $S = 11$. C. $S = \frac{21}{2}$. D. $S = \frac{11}{2}$.

- Câu 99:** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 (x+3y) \leq 2 + 2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{x+y}{\sqrt{x^2-xy+2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a + b + c$.
- A. $P = 30$. B. $P = 15$. C. $P = 17$. D. $P = 10$.
- Câu 100:** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.
- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 9. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 101:** Cho các số thực $a, b, c > 1$ và các số thực dương thay đổi x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$.
- A. 20. B. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. C. 24. D. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.
- Câu 102:** Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.
- A. $T = 8$. B. $T = 141$. C. $T = 148$. D. $T = 151$.
- Câu 103:** Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a-b)^2 + (10^a - \log b)^2}$.
- A. $\sqrt{2} \log(\ln 10)$. B. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$.
C. $\frac{1}{\ln 10} + \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right)$. D. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \ln \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right)$.
- Câu 104:** Cho các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $\log(x+2y) = \log x + \log y$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}}} \cdot e^{\frac{y^2}{1+x}}$ là $e^{\frac{a}{b}}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b$.
- A. $S = 3$. B. $S = 9$. C. $S = 13$. D. $S = 2$.
- Câu 105:** Tìm số tự nhiên m lớn nhất để bất đẳng thức $2\log(\sin) + \log\left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{m}{\pi^2}\right) > 0$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- A. $m = 5$. B. $m = 3$. C. $m = 6$. D. $m = 4$.
- Câu 106:** Cho hai số thực $b > a > 1$, tính $S = \log_a \sqrt[3]{ab}$, khi biểu thức $P = \frac{\log_a b}{\log_a^2 \left(\frac{a}{b}\right)} + \log_a \sqrt{ab}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $S = 4$. B. $S = \frac{11}{4}$. C. $S = \frac{4}{3}$. D. $S = 3$.

Câu 107: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$, biết $P = \log_b^2 \left(\frac{a^4}{b^4} \right) + \log_b \sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

M khi $b = a^m$. Tính $T = M + m$.

- A. $T = \frac{7}{2}$. B. $T = \frac{37}{10}$. C. $T = \frac{17}{2}$. D. $T = \frac{35}{2}$.

Câu 108: Xét hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $b > a > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \log_a^3 \left(\frac{a^2}{b^2} \right) + \log_{\sqrt[3]{b^2}} \left(\frac{b}{a} \right).$$

- A. $\frac{23+16\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23+8\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{23-8\sqrt{2}}{2}$.

Câu 109: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}.$$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 110: Xét các số thực a, b thỏa $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2 (a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right).$$

- A. 19. B. 13. C. 14. D. 15.

Câu 111: Xét các số thực a, b thỏa $\frac{1}{6} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P = \frac{1}{8} \log_a^3 \left(\frac{6b-1}{9} \right) + 4 \log_{\frac{b}{a}}^3 a.$$

- A. $m = 9$. B. $m = 12$. C. $m = \frac{23}{2}$. D. $m = \frac{25}{2}$.

Câu 112: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $b < 4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4^a b^{2a}}{(4^a - b^a)^3} + \frac{7 \cdot 4^{a-2}}{b^a} \text{ là } \frac{m}{n} \text{ với } m, n \text{ là các số nguyên dương và } \frac{m}{n} \text{ tối giản. Tính } S = m + n.$$

- A. 43. B. 33. C. 23. D. 13.

Câu 113: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^3 > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_{a^3}(ab) \cdot \log_b a}{3(\log_a b - 1)^2 + 8}.$$

- A. $e^{\frac{1}{8}}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $e^{\frac{1}{4}}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 114: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \text{ là } m + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p} \text{ với } m, n, p \text{ là các số nguyên. Tính}$$

$$T = m + n + p.$$

- A. $T = -1$. B. $T = 0$. C. $T = -14$. D. $T = 6$.

Câu 115: (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_3 n}{9^n}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của n để $f(n) = a$.

A. 2

B. 4

C. 1

D. vô số

Câu 116: (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$.

Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}$ bằng

A. $\sqrt{1 + \ln 3 - \ln 2}$.B. $2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.C. $1 + \sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.D. $1 + \sqrt{\ln 2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản: Với $a > 0, a \neq 1$: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

a) Đưa về cùng cơ số: Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Chú ý: Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì: $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

b) Lôgarit hoá: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b) \cdot g(x)$

c) Đặt ẩn phụ:

• Dạng 1: $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$, trong đó $P(t)$ là đa thức theo t .

• Dạng 2: $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$

Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

• Dạng 3: $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$, với $ab = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

• Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).

• Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:

$\begin{cases} f(x) \text{ đồng biến và } g(x) \text{ nghịch biến (hoặc ngược lại)} \\ f(x) \text{ đồng biến và } g(x) = \text{c hằng số} \end{cases}$

• Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

e) Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt

• Phương trình tích $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• Phương trình $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

f) Phương pháp đối lập

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

• Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

• Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:

– Đưa về cùng cơ số.

– Đặt ẩn phụ.

–

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**I - PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

- Câu 1:** Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}} = 4$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 2:** Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, hãy chọn phát biểu đúng?
A. $3x_1 - 2x_2 = \log_3 8$. **B.** $2x_1 - 3x_2 = \log_3 8$.
C. $2x_1 + 3x_2 = \log_3 54$. **D.** $3x_1 + 2x_2 = \log_3 54$.
- Câu 3:** Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là?
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 4:** Phương trình $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm?
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 5:** Tìm số nghiệm của phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2016^x + 2017^x = 2016 - x$.
A. 1. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 0.
- Câu 6:** (Sở Ninh Bình Lần 1) Số nghiệm của phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x$ là:
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 7:** (Hậu Lộc Thanh Hóa) Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ là
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.
- Câu 8:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?
A. 0. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.
- Câu 9:** Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình

$$4^{x-1} + 2^x \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1).$$
Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $4 < x_0 < 7$. **B.** $x_0 > 7$. **C.** $-2 < x_0 < 4$. **D.** $-5 < x_0 < -2$.
- Câu 10:** (Gang Thép Thái Nguyên) Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình:
 $(m+1) \cdot 16^x - 2(2m-3) \cdot 4^x + 6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là
A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 11:** (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình
 $2^{\cos x - 2 + \sqrt{m-3\cos x}} + (\cos^3 x + 6\sin^2 x + 9\cos x + m - 6)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$ có nghiệm thực. Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng
A. 28. **B.** 21. **C.** 24. **D.** 4.
- Câu 12:** (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$. Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình
 $f\left(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b^2$.
A. $P = 11$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 9$.
- Câu 13:** Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?
A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

- Câu 14: (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019)** Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3)2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. C. $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.
- Câu 15:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{\sqrt{x+2}-x} - 5m = 0$ có nghiệm thực.
- A. $(0; 5\sqrt{5}]$. B. $[5\sqrt{5}; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $[0; 5\sqrt{5}]$.
- Câu 16:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ có nghiệm thực:
- A. $0 < m \leq \frac{2}{e}$. B. $\frac{1}{e} \leq m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $-1 < m < 0$.
- Câu 17:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 18:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
- A. $[3; 4]$. B. $[2; 4]$. C. $(2; 4)$. D. $(3; 4)$.
- Câu 19:** Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 20:** Tìm các giá trị của m để phương trình: $\sqrt{3^x+3} + \sqrt{5-3^x} = m$ có 2 nghiệm phân biệt:
- A. $\sqrt{3} + \sqrt{5} < m < 4$. B. $2\sqrt{2} < m < 4$.
C. $2\sqrt{2} < m < \sqrt{3}$. D. $m > 2\sqrt{2}$.
- Câu 21: (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.
- A. $S = -35$. B. $S = 20$. C. $S = 25$. D. $S = -21$.
- Câu 22: (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.
- A. $S = -35$. B. $S = 20$. C. $S = 25$. D. $S = -21$.
- Câu 23: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 2^x - 2^m + 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.
- A. $\log_2 \frac{3}{4} < m \leq 0$. B. $\log_3 2 < m < 0$. C. $\log_2 \frac{3}{4} < m < 0$. D. $\frac{3}{4} < m < 1$.
- Câu 24:** Cho phương trình: $m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + m$ (1). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- A. $m \in (0; 2) \setminus \left\{\frac{1}{8}; \frac{1}{256}\right\}$. B. $m \in (0; 2) \setminus \left\{\frac{1}{7}; \frac{1}{256}\right\}$.
C. $m \in (0; 2) \setminus \left\{\frac{1}{6}; \frac{1}{256}\right\}$. D. $m \in (0; 2) \setminus \left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{256}\right\}$.
- Câu 25: (Chuyên Thái Bình Lần 3)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình $(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2 \cdot 3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14. B. 15. C. 13. D. 16.

Câu 26: (Chuyên Bắc Giang) Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m + e^{3m} = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

A. 2. B. 0. C. Vô số. D. 1.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(7-3\sqrt{5})^{x^2} + m(7+3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m < \frac{1}{16}$. B. $0 \leq m < \frac{1}{16}$. C. $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{1}{16}$. D. $\begin{cases} -\frac{1}{2} < m \leq 0 \\ m = \frac{1}{16} \end{cases}$.

Câu 28: Cho phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có nghiệm.

A. $4 \leq m \leq \frac{64}{7}$ B. $4 \leq m \leq 8$ C. $3 \leq m \leq \frac{64}{7}$ D. $m \geq \frac{64}{7}$

Câu 29: Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $3^x + 3 = m \cdot \sqrt{9^x + 1}$ (1) có đúng 1 nghiệm.

A. $(1, 3]$ B. $(3; \sqrt{10})$ C. $\{\sqrt{10}\}$ D. $(1; 3) \cup \{\sqrt{10}\}$

Câu 30: (Chuyên Vinh Lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 31: (Chuyên Vinh Lần 2) Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Tính giá trị biểu thức $T = b^2 - a^2$

A. $T = 36$. B. $T = 48$. C. $T = 64$. D. $T = 72$.

Câu 32: (Hải Hậu Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$ có hai nghiệm thực phân biệt là $(a; \sqrt{b})$. Tính $S = 2a + 3b$

A. $S = 29$. B. $S = 28$. C. $S = 32$. D. $S = 36$.

Câu 33: (Sở Hưng Yên Lần 1) (Sở Hưng Yên Lần 1) Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. 2017. B. 2016. C. 4035. D. 4037.

Câu 34: (Ba Đình Lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 27. B. 25. C. 23. D. 24.

Câu 35: (Quỳnh Lưu Nghệ An) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1 \text{ có 4 nghiệm thực phân biệt}$$

A. $m \leq 1$. B. $0 < m \leq 1$.

C. $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$. D. $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 36: (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình

$$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0. \text{ Có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.}$$

A. 4038. B. 2019. C. 2017. D. 4039.

Câu 37: (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Tìm số nghiệm của phương trình $(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0$.

A. 3. B. 4 C. 0 D. 2

Câu 38: Cho số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

A. 4 B. $3\sqrt{2}$ C. $3\sqrt[3]{4}$ D. $\sqrt[3]{4}$

Câu 39: Cho các số nguyên dương a, b lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn

$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$.

A. 12 B. 46 C. 44 D. 22

Câu 40: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a4^x - b.2^x + 50 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b.3^x + 50a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn

$x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$.

A. 49 B. 51 C. 78 D. 81

Câu 41: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho a, b là hai số thực thỏa mãn

$a > 0; a \neq 1$ biết phương trình $a^x - \frac{1}{a^x} = 2 \cos bx$ có 7 nghiệm thực phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $a^{2x} - 2a^x (\cos bx + 2) + 1 = 0$?

A. 28. B. 14. C. 0. D. 7.

Câu 42: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$.

A. 0. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 43: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 45. B. 38. C. 34. D. 27.

Câu 44: Cho các phương trình:

$$x^{2017} + x^{2016} + \dots + x - 1 = 0(1)$$

$$x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 1 = 0(2)$$

Biết rằng phương trình (1),(2) có nghiệm duy nhất lần lượt là a và b . Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a.e^b = b.e^a$. B. $a.e^b > b.e^a$. C. $a.e^b < b.e^a$. D. $a.e^a < b.e^b$.

Câu 45: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Gọi S là tập chứa các giá trị nguyên của m để phương trình $e^{3x^3-18x+30-m} + e^{x^3-6x+10-m} - e^{2m} = 1$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 110. B. 106. C. 126. D. 24.

Câu 46: (Đặng Thành Nam Đề 12) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|2^{x+1} - 8| = \frac{1}{2}x^2 + m$ có

3 nghiệm thực phân biệt?

A. 8. B. 9. C. 6. D. 7.

Câu 47: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ có nghiệm.

- A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$ B. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ C. $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Câu 48: (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là

- A. 2019. B. 2018. C. 4037. D. 4038.

Câu 49: Phương trình (1) có 2019 nghiệm khác 0 (do giả thiết và 0 không là nghiệm).

Câu 50: x_0 là nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi $-x_0$ là nghiệm của phương trình (2) vì

$$2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{-\frac{x_0}{2}} = 2\cos\frac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}} - 2^{-\frac{(-x_0)}{2}} = -2\cos\frac{\alpha(-x_0)}{2}.$$

Câu 51: Hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung vì

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{\alpha x}{2} \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\frac{\alpha x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\alpha x}{2} = 0 \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là 4038.

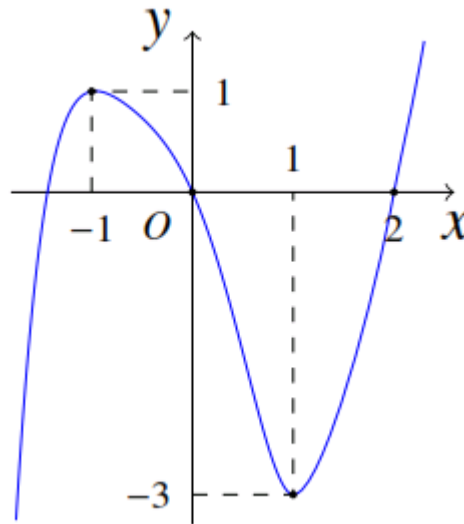
Câu 52: (Sở Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$\frac{15}{13}$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.

- A. e^5 . B. $e^{\frac{15}{13}}$. C. e^3 . D. e^4 .

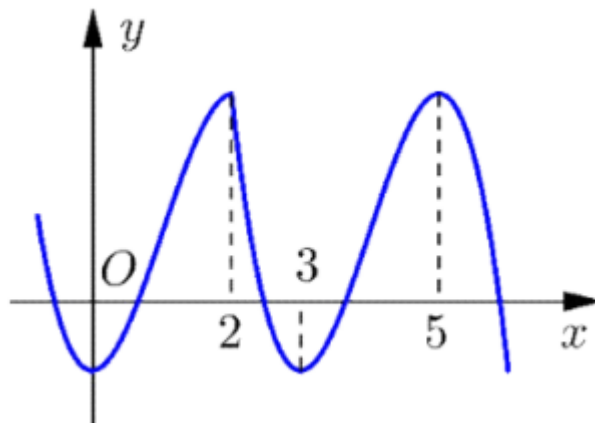
Câu 53: (ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

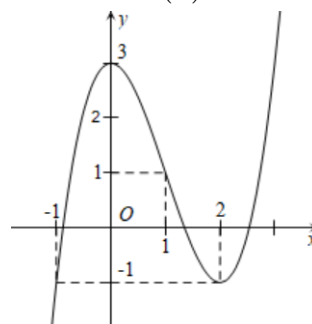
- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 54: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f(2^x + 2^{-x}) = m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 55: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.

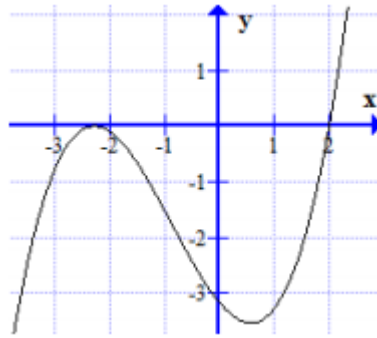


Số nghiệm của phương trình $[f(e^{\sqrt{x}})]^2 - f(e^{\sqrt{x}}) - 2 = 0$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 56: (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình

$\left[x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 \right] \cdot (2^{f(x)} - 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 57: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn $2018^{2x+\sqrt{x+1}} - 2018^{2+\sqrt{x+1}} + 2019x \leq 2019$.

A. $m \in \left(2\sqrt{6}; \frac{11\sqrt{3}}{3} \right)$. B. $m \in \left(2\sqrt{6}; 3\sqrt{3} \right]$.
C. $m \in \left[2\sqrt{6}; 3\sqrt{3} \right]$. D. $m \in \left(3\sqrt{3}; \frac{11\sqrt{3}}{3} \right) \cup \{2\sqrt{6}\}$.

Câu 58: (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$. Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b^2$.

A. $P = 11$. B. $P = 7$. C. $P = -1$. D. $P = 9$.

Câu 59: (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = (m^2 + 2)2^y\sqrt{1-y^2} \end{cases} (1)$, m là tham số. Gọi S là tập giá trị m nguyên để hệ (1) có nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử.

A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 60: (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Gọi a, b lần lượt là các nghiệm dương của phương trình $x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + \dots + x - 1 = 0$ (1) và $x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 1 = 0$ (2). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $b > a + 1$ B. $a > b + 1$ C. $a \ln b > b \ln a$ D. $b \ln a > a \ln b$

Câu 61: Bất phương trình $2 \cdot 5^{x+2} + 5 \cdot 2^{x+2} \leq 133 \cdot \sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S = [a; b]$ thì $b - 2a$ bằng

A. 6 B. 10 C. 12 D. 16

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 3 \leq 3^{x^2} + 3^{\sqrt{x-1}}$.

A. $2 \leq x$. B. $1 \leq x \leq 2$. C. $2 \leq x \leq 7$. D. $2 \leq x \leq 4$.

Câu 63: Tập nghiệm của bất phương trình: $81 \cdot 9^{x-2} + 3^{x+\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \cdot 3^{2\sqrt{x+1}} \geq 0$ là:

A. $S = [1; +\infty) \cup \{0\}$. B. $S = [1; +\infty)$.
C. $S = [0; +\infty)$. D. $S = [2; +\infty) \cup \{0\}$.

Câu 64: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4} + (x^2-4).2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

- A. 5. B. -1. C. -5. D. 4.

Câu 65: (Sở Cần Thơ 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	$-$	0	$+$	0	$-$

Xét hàm số $g(x) = e^{f(1+x-x^2)}$, tập nghiệm của bất phương trình $g'(x) > 0$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 66: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy} \leq \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}$. Hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x}{y}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 67: (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}(e^x - e^{-x})$. Có bao nhiêu số nguyên dương m thỏa mãn bất phương trình $f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0$?

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 68: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Số các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2019^{\sin^2 x} + 2018^{\cos^2 x} \geq m.2019^{\cos^2 x}$ có nghiệm là

- A. 1. B. 2020. C. 2019. D. 2018.

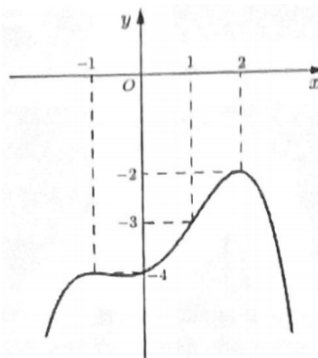
Câu 69: (THPT Nghèn Lần1) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $5.4^x + m.25^x - 7.10^x \leq 0$ có nghiệm. Số phần tử của S là

- A. 3. B. Vô số. C. 2. D. 1.

Câu 70: (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

- A. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. B. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 71: (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$

đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 10.

B. 4.

C. 5.

D. 9.

Câu 72: Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

A. $(-2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2]$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.

Câu 73: Tìm m để bất phương trình $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0; 1)$.

A. $0 \leq m \leq 6$

B. $m \leq 6$.

C. $m \geq 6$.

D. $m \leq 0$.

Câu 74: Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \geq m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 75: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là $(-\infty; 0]$

$$: m2^{x+1} + (2m+1)(1-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0.$$

A. $m \leq -\frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m < \frac{1}{2}$.

D. $m < -\frac{1}{2}$.

Câu 76: (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [1513; 2019)$.

B. $m_0 \in [1009; 1513)$.

C. $m_0 \in [505; 1009)$.

D. $m_0 \in [1; 505)$.

Câu 77: (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
y'	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$.

B. $m \geq f(1) - e$.

C. $m > f(1) - e$.

D. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 78: (Đặng Thành Nam Đề 2) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y	4	1	3	1	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

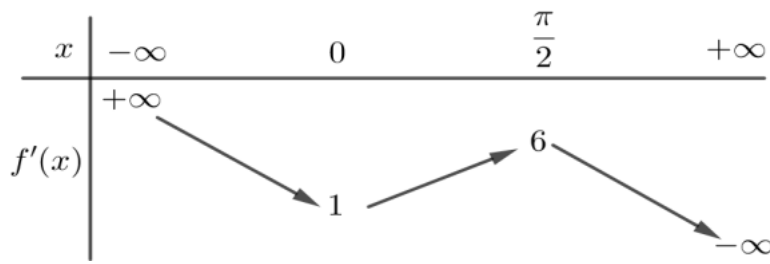
A. $m \geq f(-2) - 3$.

B. $m > f(2) - 3e^4$.

C. $m \geq f(2) - 3e^4$.

D. $m > f(-2) - 3$.

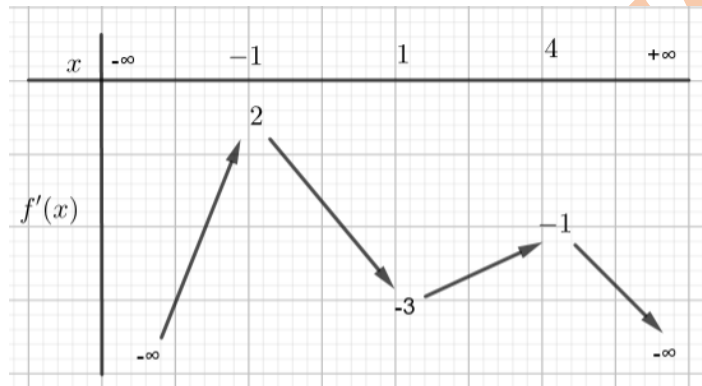
Câu 79: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. B. $m < \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. C. $m \leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$. D. $m < \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$.

Câu 80: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điều kiện của m để bất phương trình $f(x+2) - xe^x < m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in [-1; 1]$.

A. $m > f(1) + \frac{1}{e}$. B. $m > f(3) + 2e$. C. $m > f(-1) + \frac{1}{e}$. D. $m > f(3) - 2e$.

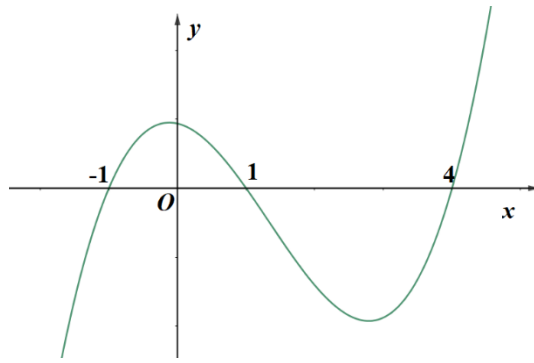
Câu 81: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

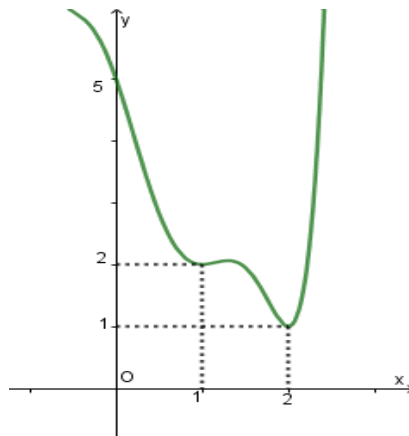
A. $m \geq f(0) - 1$. B. $m > f(-1) - e$. C. $m > f(0) - 1$. D. $m \geq f(-1) - e$.

Câu 82: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f(1-x) < e^{x^2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi



- A. $m \geq f(1) - 1$. B. $m \geq f(1) - e^2$. C. $m > f(-1) - e^2$. D. $m > f(1) - 1$.

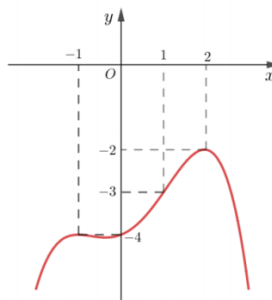
Câu 83: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $3 \cdot 12^{f(x)} + (f^2(x) - 1) \cdot 16^{f(x)} \geq (m^2 + 3m) \cdot 3^{2f(x)}$ có nghiệm với mọi x ?

- A. 5. B. Vô số. C. 7. D. 6.

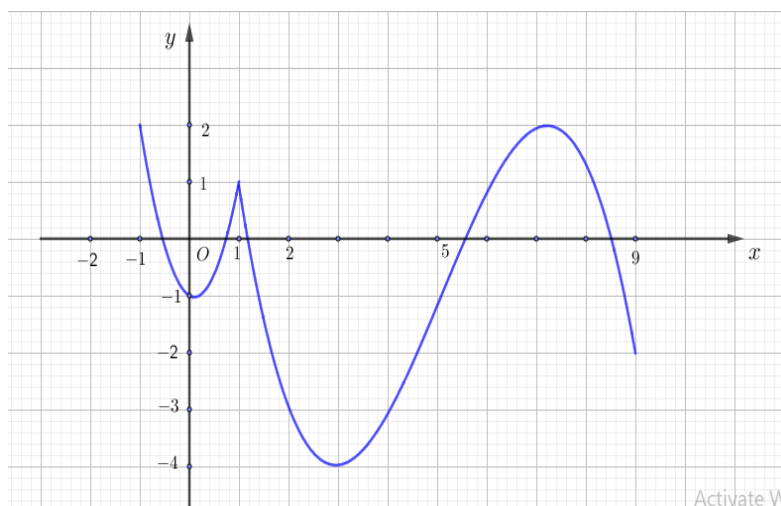
Câu 84: (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. 10. B. 4. C. 5. D. 9.

Câu 85: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $[-1; 9]$?

A. 32.

B. 31.

C. 5.

D. 6.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I - PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1 - Phương trình lôgarit cơ bản

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

2 - Một số phương pháp giải phương trình lôgarit

a) Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hay } g(x) > 0) \end{cases}$

b) Mũ hoá

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$

c) Đặt ẩn phụ

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

e) Đưa về phương trình đặc biệt

f) Phương pháp đối lập

Chú ý:

• Khi giải phương trình lôgarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.

• Với $a, b, c > 0$ và $a, b, c \neq 1$: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

• Khi giải các bất phương trình lôgarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số lôgarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

• Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình lôgarit:

– Đưa về cùng cơ số.

– Đặt ẩn phụ.

–

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0; \quad \frac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$$

III - HỆ MŨ-LÔGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như:

• Phương pháp thế.

• Phương pháp cộng đại số.

• Phương pháp đặt ẩn phụ.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I - PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Câu 1: Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó

a, b là các số nguyên. Tính $a + b$?

A. 5

B. -1

C. 1

D. 2

Câu 2: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$

- A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. 3 nghiệm D. Vô nghiệm

Câu 3: Phương trình $\log_3(x^2 + x + 1) = x(2 - x) + \log_3 x$ có bao nhiêu nghiệm

- A. 1 nghiệm B. 2 nghiệm C. 3 nghiệm D. Vô nghiệm

Câu 4: Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$ (1).

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\log_3|x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5(x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 7: Biết rằng phương trình $(x - 2)^{\log_2[4(x-2)]} = 4 \cdot (x - 2)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Tính $2x_1 - x_2$.

- A. 1. B. 3. C. -5. D. -1.

Câu 8: (Lương Thế Vinh Lần 3) Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ (với

$a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 9: (ĐOÀN THUỜNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019) Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình

$$\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2 \text{ và } x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương.}$$

Tính $a - 2b$?

- A. 5. B. -1. C. 1. D. 9.

Câu 10: (Ba Đình Lần 2) Nghiệm dương của phương trình $\log_2(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$ có dạng

$$\frac{a + \sqrt{b}}{c} \quad (a, b, c \in \mathbb{N}). \text{ Giá trị của } a + b + c \text{ bằng:}$$

- A. 20. B. 23. C. 24. D. 42.

Câu 11: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Phương trình

$$\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3 \text{ có nghiệm các nghiệm } x_1; x_2. \text{ Hãy tính giá trị của biểu thức}$$

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

- A. 31 B. -31. C. 1
D. -1.

Câu 12: (THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2 + 1}{2x}\right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x}\right)} = 5$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 13: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b} 2^{1000})) = 0$. Giá trị lớn nhất của ab là:

A. 500. B. 375. C. 250. D. 125.

Câu 14: (Đặng Thành Nam Đề 6) Biết rằng phương trình $\log_2(|2x-1|+m) = 1 + \log_3(m+4x-4x^2-1)$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (0;1)$. B. $m \in (1;3)$. C. $m \in (3;6)$. D. $m \in (6;9)$.

Câu 15: (CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình $\log_2 \frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2-5x-m+2$ có nghiệm?

A. Vô số. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 16: (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.

A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Câu 17: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8 - 2m + 2018} = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$. Số phần tử của S là

A. 7. B. 9. C. 8. D. 6.

Câu 18: (Hùng Vương Bình Phước) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$. B. $m \in (-\infty; 0]$. C. $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

Câu 19: (HSG Bắc Ninh) Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m^*$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2021. B. 2019. C. 4038. D. 2020.

Câu 20: (CỤM TRẦN KIM HÙNG - HÙNG YÊN NĂM 2019) Xác định m để phương trình $2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$ có nghiệm

A. $m < 1$. B. $-1 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

Câu 21: Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2).\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 27$.

A. $m=1$. B. $m=\frac{4}{3}$. C. $m=25$. D. $m=\frac{28}{3}$.

Câu 22: (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in (-2; 0)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \in [-1; 0)$.

Câu 23: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình có nghiệm.

A. 15. B. 14. C. 19. D. 17.

- Câu 24: (Nguyễn Khuyển)** Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?
- A. 20. B. 21. C. 9. D. 19.
- Câu 25: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x + 2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?
- A. 2019. B. 2018. C. 1. D. 4.
- Câu 26: (Đặng Thành Nam Đề 9)** Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.
- A. 399. B. 199. C. 200. D. 398.
- Câu 27: (Sở Phú Thọ)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.
- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.
- Câu 28: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Cho a, b là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$, với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$.
- A. 22209. B. 20190. C. 2019. D. 14133.
- Câu 29:** Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m \cdot \ln(1 - 2^x) - x = m$ có nghiệm thuộc $(-\infty; 0)$ là
- A. $(\ln 2; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(1; e)$. D. $(-\infty; 0)$.
- Câu 30: (Đặng Thành Nam Đề 17)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 31: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH)** Tìm các giá trị m để phương trình $3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$ có nghiệm.
- A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$. B. $-5 \leq m \leq 5$. C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$. D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$.
- Câu 32: (Sở Bắc Ninh)** Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng
- A. $(3, 8; 3, 9)$. B. $(3, 6; 3, 7)$. C. $(3, 7; 3, 8)$. D. $(3, 5; 3, 6)$.
- Câu 33: (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- A. 4036. B. 4034. C. 4038. D. 4040.
- Câu 34:** Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.
- A. $3 \leq m \leq 6$. B. $6 \leq m \leq 9$. C. $2 \leq m \leq 6$. D. $2 \leq m \leq 3$.
- Câu 35:** Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - (m-1)\log_2 x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 4]$ là

- A. $3 < m \leq 4$. B. $3 \leq m \leq \frac{10}{3}$. C. $\frac{10}{3} < m \leq 4$. D. $3 < m \leq \frac{10}{3}$.

Câu 36: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

- A. $\left\{\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right\}$. B. $\left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$. C. $\left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:
 $\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$.

- A. $\frac{-1}{4} < m < 0$. B. $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$. C. $5 < m < \frac{21}{4}$. D. $\frac{-1}{4} \leq m \leq 2$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_2 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$?

- A. $m \in (1; \sqrt{3}]$. B. $m \in [1; \sqrt{3})$. C. $m \in [-1; \sqrt{3})$. D. $m \in (-\sqrt{3}; 1]$.

Câu 39: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi:

- A. $m < 19$ B. $m > 39$ C. $19 < m < \frac{39}{2}$ D. $19 < m < 39$

Câu 40: Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$

- A. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$. B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \in \emptyset$. D. $-3 < m \leq \frac{7}{3}$.

Câu 41: Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $1 < m < 2$. B. $3 < m < 4$. C. $0 < m < \frac{3}{2}$. D. $2 < m < 3$.

Câu 42: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$. 466666

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 25$. C. $S_{\min} = 33$. D. $S_{\min} = 17$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$?

- A. $m \in (1; \sqrt{3}]$. B. $m \in [1; \sqrt{3})$. C. $m \in [-1; \sqrt{3})$. D. $m \in (-\sqrt{3}; 1]$.

Câu 44: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1} - 2m - 5 = 0$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2^{\sqrt{3}}]$.

- A. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$. B. $[-2; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0)$. D. $m \in [-2; 0]$.

Câu 45: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m \text{ có nghiệm } x \geq 1.$$

- A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. C. $[1; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Câu 46: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m-4=0 \text{ có nghiệm thực trong đoạn } \left[\frac{5}{4}; 4\right]:$$

- A. $m < -3$. B. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.
C. $m > \frac{7}{3}$. D. $-3 < m < \frac{7}{3}$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2\log_2|x| + \log_2|x+3| = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in \{0; 2\}$. C. $m \in (-\infty; 2)$. D. $m \in \{2\}$.

Câu 48: Cho m và n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $8(\log_m x)(\log_n x) - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$. Khi P là một số nguyên, tìm tổng $m+n$ để P nhận giá trị nhỏ nhất?

- A. $m+n=20$. B. $m+n=48$.
C. $m+n=12$. D. $m+n=24$.

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_{\frac{3}{2}}|x-2| - \log_{\frac{2}{3}}(x+1) = m$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m > 3$. B. $m < 2$. C. $m > 0$. D. $m = 2$.

Câu 50: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$.

- A. 25 B. 33 C. 30 D. 17

Câu 51: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = mn$.

- A. $\frac{279}{4}$ B. 90 C. $\frac{81}{4}$ D. $\frac{45}{2}$

Câu 52: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a+b=10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = mn$

- A. $\frac{16875}{16}$ B. $\frac{4000}{27}$ C. 15625 D. 3456

Câu 53: Biết rằng khi m, n là các số nguyên dương thay đổi và lớn hơn 1 thì phương trình $8\log_m x \cdot \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt a, b . Tính $S = m+n$ để ab là một số nguyên dương nhỏ nhất.

- A. $S = \frac{500}{3}$. B. $S = \frac{700}{3}$. C. $S = \frac{650}{3}$. D. $S = 200$.

Câu 54: Cho ba số thực a, b, c thay đổi lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b+c=100$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1+2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính $S = a+2b+3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

- A. $S = \frac{500}{3}$. B. $S = \frac{700}{3}$. C. $S = \frac{650}{3}$. D. $S = 200$.

Câu 55: Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m

A. $1 < a_0 < 2$. B. $e < a_0 < e^2$. C. $2 < a_0 < 3$. D. $e^2 < a_0 < e^3$.

Câu 56: Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m

A. $1 < a_0 < 2$. B. $e < a_0 < e^2$. C. $2 < a_0 < 3$. D. $e^2 < a_0 < e^3$.

Câu 57: (CỎLOA HÀ NỘI) Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình $f(3^x) + f(2x-1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 58: (PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..) Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} = x+a$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 0. B. 2022. C. 2014. D. 2015.

Câu 59: (SỞ PHÚ THỌ) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$

A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Câu 60: (KHTN HÀ NỘI LẦN 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 10$) để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m$ có nghiệm?

A. 9. B. 10. C. 5. D. 4.

Câu 61: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

A. 1. B. 0. C. -2. D. 4.

Câu 62: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}\log_2 \frac{2x^2-4x+6}{|x-m|+1} + x^2 = 2(x+|x-m|)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 63: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình $\log_2(x^2+m+x\sqrt{x^2+4}) = (2m-9)x-1+(1-2m)\sqrt{x^2+4}$ có nghiệm?

A. 12. B. 23. C. 25. D. 10.

Câu 64: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x-1)[\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)] = 2x-m$ có đúng hai nghiệm thực là

A. 2. B. 2022. C. 1. D. 2021.

Câu 65: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3. B. -2. C. -3. D. 2.

II - BẮT PT LÔGARIT

Câu 66: Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}) > 2\log_2\sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2017a)$.

A. 14 B. 22 C. 16 D. 19

- Câu 67:** Biết $x = \frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $2\log_a(23x - 23) > \log_{\sqrt{a}}(x^2 + 2x + 15)$ (*). Tập nghiệm T của bất phương trình (*) là:
A. $T = \left(-\infty; \frac{19}{2}\right)$. **B.** $T = \left(1; \frac{17}{2}\right)$. **C.** $T = (2; 8)$. **D.** $T = (2; 19)$.
- Câu 68: (Trần Đại Nghĩa)** Bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi $m \in (a; b]$. Tính $a.b$?
A. 4. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 8.
- Câu 69:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1$?
A. $m \geq 6$. **B.** $m > 6$. **C.** $m \leq 6$. **D.** $m < 6$.
- Câu 70: (Đặng Thành Nam Đề 5)** Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn bất phương trình $f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0$?
A. 65. **B.** 66. **C.** 64. **D.** 63.
- Câu 71:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
A. $m \in (2; 5]$. **B.** $m \in (-2; 5]$. **C.** $m \in [2; 5)$. **D.** $m \in [-2; 5)$.
- Câu 72:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2; 3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 + 1) > \log_5(x^2 + 4x + m) - 1$ (1).
A. $m \in [-12; 13]$. **B.** $m \in [12; 13]$. **C.** $m \in [-13; 12]$. **D.** $m \in [-13; -12]$.
- Câu 73:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm.
A. $m > 2\sqrt{3}$. **B.** $m \geq 2\sqrt{3}$. **C.** $m \geq 12\log_3 5$. **D.** $2 \leq m \leq 12\log_3 5$.
- Câu 74: (Sở Bắc Ninh)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2 + 2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2 + 2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$. Khi đó $a.b$ bằng
A. $\frac{15}{16}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{16}{15}$. **D.** $\frac{5}{12}$.
- Câu 75: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HÙNG-NAM-ĐỊNH)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(\ln^4 x - 16) + 3m(\ln^2 x - 4) - 14(\ln x - 2) \geq 0$ đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng:
A. $-\frac{3}{8}$. **B.** -2 . **C.** $-\frac{7}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 76: (Yên Phong 1)** Cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 5$. Biết đoạn $[a; b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình thỏa mãn với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tổng $a + b$?
A. $a + b = 4$. **B.** $a + b = 2$. **C.** $a + b = 0$. **D.** $a + b = 6$.

Câu 77: (THTT số 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $\left| \frac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4} \right| \geq 2$

nghiệm đúng với mọi $x > 0$.

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Câu 78: Hệ bất phương trình $\begin{cases} \ln^2 x - m \ln x + m + 4 \leq 0 \\ \frac{x-3}{x^2} > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi

A. $m < -3$ hoặc $m \geq 6$.

B. $m \leq -3$.

C. $m < -3$.

D. $m \geq 6$.

Câu 79: (Thanh Chương Nghệ An Lần 2) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 20.

B. 10.

C. 15.

D. 5.

Câu 80: Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+y^2}(2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{9}{8}$.

D. 9.

Câu 81: (Chuyên Vinh Lần 3) Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A. $S = \{-1; 1\}$.

B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.

C. $S = \{-5; 5\}$.

D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

Câu 82: (GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2) Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn

$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$

A. $\sqrt{10} - 2$ và $\sqrt{10} + 2$.

B. $\sqrt{10} - 2$.

C. $(\sqrt{10} - 2)^2$.

D. $(\sqrt{10} - 2)^2$ và $(\sqrt{10} + 2)^2$.

Câu 83: Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$

A. $P = 6$.

B. $P = 2\sqrt{2} + 3$.

C. $P = 2 + 3\sqrt{2}$.

D. $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Câu 84: Cho 2 số dương a và b thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của $S = a + b$ là

A. $\min S = 12$.

B. $\min S = 14$.

C. $\min S = 8$.

D. $\min S = 16$.

Câu 85: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2x - y$.

A. $P_{\min} = 4$.

B. $P_{\min} = -4$.

C. $P_{\min} = 2\sqrt{3}$.

D. $P_{\min} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Câu 86: (Sở Nam Định) Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\log_{2019}(x+y) \leq 0$ và $x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1$.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = -\frac{1}{3}$.

Câu 87: (Chuyên Vinh Lần 3) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $P_{\min} = 9$. B. $P_{\min} = 8$. C. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$. D. $P_{\min} = \frac{17}{2}$.

Câu 88: (Chuyên Vinh Lần 3) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $T_{\min} \in (7; 8)$. B. $T_{\min} \in (6; 7)$. C. $T_{\min} \in (5; 6)$. D. $T_{\min} \in (8; 9)$.

Câu 89: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho các số dương x, y thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x + 2y \leq 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 6x + 2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$ bằng

- A. $\frac{31\sqrt{6}}{4}$. B. $11\sqrt{3}$. C. $\frac{27\sqrt{2}}{2}$. D. 19.

Câu 90: (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2\log_3 \sqrt{x} + x(x+y) \geq \log_{\sqrt{3}} \sqrt{8-y} + 8x$. Biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{18}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = a, y = b$. Tính $S = 3a + 2b$.

- A. $S = 19$. B. $S = 20$. C. $S = 18$. D. $S = 17$.

I - BÀI TOÁN LÃI SUẤT – TRẢ GÓP**A – LÝ THUYẾT CHUNG****1. Lãi đơn**

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính lãi đơn: $V_n = V_0(1 + r.n)$

Trong đó:

V_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

V_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2. Lãi kép

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a. Lãi kép, gửi một lần: $T_n = T_0(1 + r)^n$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

b. Lãi kép liên tục: $T_n = T_0.e^{nr}$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

c. Lãi kép, gửi định kỳ.

● **Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.**

Bài toán 1: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là:

$$T_n = \frac{m}{r} \left[(1 + r)^n - 1 \right]$$

Chứng minh

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
-------	-----------	------------

1	Chưa gửi	m
2	m	$m(1+r) + m$
3	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$
...	...	...
n		$m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m$

Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n = m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m$

$$= m \left[(1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) + 1 \right],$$

Ta thấy trong ngoặc là tổng n số hạng của cấp số nhân có $u_1 = 1$, $u_n = (1+r)^{n-1}$, $q = 1+r$

Ta biết rằng: $S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ nên $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$

Bài toán 2: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$, mà đề cho số tiền đó chính là A nên

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}.$$

Bài toán 3: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$.

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$, mà đề cho số tiền đó chính là A nên

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m} + 1 \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$$

Như vậy trong trường hợp một này ta cần nắm vững công thức Bài toán 1 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở bài toán 2, Bài toán 3.

● **Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.**

Bài toán 4: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	m	$m(1+r)$
2	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r)$
3	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$	$m(1+r)^3 + m(1+r)^2 + m(1+r)$
...	...	...
n	...	$m(1+r)^n + \dots + m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$T_n = m(1+r)^n + \dots + m(1+r) = m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] = m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bài toán 5: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 4. Ta có số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$, mà đề cho số tiền đó là A nên

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}.$$

Bài toán 6: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right].$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 4. Ta có: số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$, mà đề cho số tiền đó là A nên

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m(1+r)} + 1.$$

$$\Rightarrow n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right].$$

Như vậy trong trường hợp này ta cần nắm vững công thức bài toán 4 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở bài toán 5, bài toán 6.

● **Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.**

Bài toán 7: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	$A - m$	$(A - m)(1+r) = A(1+r) - m(1+r)$
2	$A(1+r) - m(1+r) - m$	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m(1+r)$
3	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$	$A(1+r)^3 - m(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r)$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$\begin{aligned} T_n &= A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r) \\ &= A(1+r)^n - m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] \\ &= A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

Trường hợp vay nợ và trả định kì cuối tháng.

Bài toán 8: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Chứng minh

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	A	$A(1+r) - m$

2	$A(1+r) - m$	$A(1+r)^2 - m(1+r)^2 - m$
3	$A(1+r)^2 - m(1+r) - m$	$A(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - \dots - m(1+r) - m$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$\begin{aligned} T_n &= A(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - \dots - m(1+r) - m \\ &= A(1+r)^n - m \left[(1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) + 1 \right] \\ &= A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

Sau đây cùng tìm hiểu cách áp dụng các lý thuyết vào các bài toán tính tiền lãi, tiền nợ phải trả như thế nào?

B - BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

- A.** 172 triệu. **B.** 72 triệu.
- C.** 167,3042 triệu. **D.** 104,907 triệu.

Câu 2: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015 – 2021 (6 năm) là 10,6% so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%).

- A.** 1.13%. **B.** 1.72%. **C.** 2.02%. **D.** 1.85%.

Câu 3: Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72% tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78% tháng. Sau khi gửi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gửi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 57.694.945,55 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gửi thêm lãi suất là

- A.** 0.55%. **B.** 0.3%. **C.** 0.4%. **D.** 0.5%.

Câu 4: Một người muốn có 2 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi), số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng?

- A.** 252.436.000. **B.** 272.631.000. **C.** 252.435.000. **D.** 272.630.000.

- Câu 5:** Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp (chịu lãi số tiền chưa trả) với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?
- A. 35 tháng. B. 36 tháng. C. 37 tháng. D. 38 tháng.
- Câu 6:** Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4% . Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).
- A. 46794000 đồng. B. 44163000 đồng. C. 42465000 đồng. D. 41600000 đồng.
- Câu 7:** Một kỹ sư được nhận lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của kỹ sư đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tính tổng số tiền T (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc.
- A. 633.600.000. B. 635.520.000. C. 696.960.000. D. 766.656.000.
- Câu 8:** Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 4.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm $7\%/1$ tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).
- A. 1.287.968.000 đồng B. 1.931.953.000 đồng.
C. 2.575.937.000 đồng. D. 3.219.921.000 đồng.
- Câu 9:** Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định $0,8\%$ / tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?
- A. 38.400.000 đồng. B. 10.451.777 đồng. C. 76.800.000 đồng. D. 39.200.000 đồng.
- Câu 10:** Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu
- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.
- Câu 11:** Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là $0,65\%$ mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?
- A. 29 tháng. B. 27 tháng. C. 26 tháng. D. 28 tháng.
- Câu 12:** Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất $0,5\%$ một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?
- A. 46 tháng. B. 45 tháng. C. 44 tháng. D. 47 tháng.
- Câu 13:** Năm 2014, một người đã tiết kiệm được x triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần $1,55x$ triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là $6,9\%$ / năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).
- A. Năm 2019. B. Năm 2020. C. Năm 2021. D. Năm 2022.
- Câu 14:** Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng 1 năm với lãi suất $1,15\%$ mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng

là như nhau, hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{(1,0115)^{12} - 1}$ (triệu đồng).

B. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12}}{(1,0115)^{12} - 1}$ (triệu đồng).

C. $\frac{55 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{3}$ (triệu đồng).

D. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12}}{3}$ (triệu đồng).

Câu 15: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng sau đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng?

A. 47 tháng.

B. 46 tháng.

C. 45 tháng.

D. 44 tháng.

Câu 16: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Câu 17: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là

A. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.

B. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng.

C. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.

D. $100 \cdot [(1,01)^{6} - 1]$ triệu đồng.

Câu 18: Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng.

B. 309604 đồng.

C. 215456 đồng.

D. 232289 đồng.

Câu 19: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6,5% / năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi khoảng bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 11 năm.

B. 9 năm.

C. 8 năm.

D. 12 năm.

Câu 20: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

A. 45 tháng.

B. 47 tháng.

C. 44 tháng.

D. 46 tháng.

Câu 21: Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% năm. Hỏi người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lại suất $\frac{5}{12}\%$ tháng ?

A. Nhiều hơn.

B. Ít hơn.

C. Không thay đổi.

D. Không tính được.

Câu 22: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng A với số tiền là 100 triệu đồng với lãi suất mỗi quý (3 tháng) là 2,1%. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi quý. Sau 2 năm người đó vẫn tiếp tục gửi tiết kiệm số

tiền thu được từ trên nhưng với lãi suất 1,1% mỗi tháng. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi tháng. Hỏi sau 3 năm kể từ ngày gửi tiết kiệm vào ngân hàng A người đó thu được số tiền gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 134,65 triệu đồng. B. 130,1 triệu đồng. C. 156,25 triệu đồng. D. 140,2 triệu đồng.

Câu 23: Ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% trên năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông A nhận được tính cả gốc lẫn lãi là

A. $10^8 \cdot (1 + 0,07)^{10}$. B. $10^8 \cdot 0,07^{10}$. C. $10^8 \cdot (1 + 0,7)^{10}$. D. $10^8 \cdot (1 + 0,007)^{10}$.

Câu 24: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 25: Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

A. 726,74 triệu. B. 71674 triệu. C. 858,72 triệu. D. 768,37 triệu.

Câu 26: Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

A. 16 B. 18. C. 20. D. 22.

Câu 27: Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhưng vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25% / tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A. 232518 đồng. B. 309604 đồng. C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

Câu 28: Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 140 triệu đồng. B. 154 triệu đồng. C. 145 triệu đồng. D. 150 triệu đồng.

Câu 29: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 200 triệu đồng, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau một tháng bắt đầu từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 10 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, tổng số tiền lãi m mà ông A phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1}$ (triệu đồng).

B. $m = \frac{200 \cdot (1,12)^{10}}{10}$ (triệu đồng).

C. $m = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1} - 200$ (triệu đồng).

D. $m = \frac{10 \cdot (1,12)^{10}}{(1,12)^{10} - 1} - 200$ (triệu đồng).

Câu 30: Thầy Đông gửi 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng. Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành 1,15%/tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn 0,9%/tháng. Thầy

Đông tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 5787710,707 đồng. Hỏi thầy Đông đã gửi tổng thời gian bao nhiêu tháng?

- A. 18 tháng. B. 17 tháng. C. 16 tháng. D. 15 tháng.

Câu 31: Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

- A. $800 \cdot (1,005)^{11} - 72$ (triệu đồng). B. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{12}$ (triệu đồng).
C. $800 \cdot (1,005)^{12} - 72$ (triệu đồng). D. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{11}$ (triệu đồng).

Câu 32: Ngày 01 tháng 6 năm 2016 ông An đem một tỉ đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất 0.5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 6 năm 2017, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

- A. $200 \cdot (1,005)^{12} + 800$ (triệu đồng). B. $1000 \cdot (1,005)^{12} - 48$ (triệu đồng).
C. $200 \cdot (1,005)^{11} + 800$ (triệu đồng). D. $1000 \cdot (1,005)^{11} - 48$ (triệu đồng).

Câu 33: Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 3% của một quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai sẽ gần với kết quả nào sau đây?

- A. 232 triệu. B. 262 triệu. C. 313 triệu. D. 219 triệu.

Câu 34: Thầy Đông gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền Thầy Đông gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

- A. 140 triệu và 180 triệu. B. 120 triệu và 200 triệu.
C. 200 triệu và 120 triệu. D. 180 triệu và 140 triệu.

Câu 35: Một người gửi tiền tiết kiệm 200 triệu đồng vào một ngân hàng với kỳ hạn một năm và lãi suất 8,25% một năm, theo thể thức lãi kép. Sau 3 năm tổng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được là (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 124,750 triệu đồng. B. 253,696 triệu đồng.
C. 250,236 triệu đồng. D. 224,750 triệu đồng.

Câu 36: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi)

- A. 4 năm 1 quý B. 4 năm 2 quý C. 4 năm 3 quý D. 5 năm

Câu 37: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất $x\%/năm$, điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với

dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền là 1.058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

- A. 13%/năm. B. 14%/năm. C. 12%/năm. D. 15%/năm.

Câu 38: Một người có số tiền là 20.000.000 đồng đem gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8,5%/năm. Vậy sau thời gian 5 năm 8 tháng, người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến 100 đồng). Biết rằng người đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn 0,01% một ngày. (1 tháng tính 30 ngày).

- A. 31.802.700 đồng. B. 30.802.700 đồng. C. 32.802.700 đồng. D. 33.802.700 đồng.

Câu 39: (Sở Quảng NamT) Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu 10 triệu đồng/tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh nhiều hơn 20 triệu đồng (biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ)?

- A. Tháng thứ 31 B. Tháng thứ 25 C. Tháng thứ 19 D. Tháng thứ 37

Câu 40: (Nguyễn Tấn Thành Yên Bái) Ba anh em An, Bình và Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Giả sử mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Hỏi tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

- A. 45672000 đồng. B. 46712000 đồng. C. 63271000 đồng. D. 64268000 đồng.

Câu 41: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Anh A vay 50 triệu đồng để mua xe với lãi suất 1%/tháng. Anh ta muốn trả góp cho ngân hàng theo cách: sau đúng một tháng kể từ ngày vay anh bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ là như nhau và anh A trả hết nợ sau 2 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi không đổi 1% trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng anh A phải trả cho ngân hàng gần nhất với số nào sau đây?

- A. 2,36 triệu đồng. B. 2,35 triệu đồng. C. 2,34 triệu đồng. D. 2,37 triệu đồng.

Câu 42: (Đặng Thành Nam Đề 5) Ba anh em An, Bình và Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng với tổng số tiền vay của cả ba người là 1 tỉ đồng. Biết rằng mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Số tiền trả đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng của mỗi người gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 21422000 đồng. B. 21900000 đồng. C. 21400000 đồng. D. 21090000 đồng.

II - BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG

Câu 43: Số lượng của một loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t) = Q_0 \cdot e^{0.195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

- A. 20. B. 24. C. 15,36. D. 3,55.

Câu 44: Theo số liệu của Tổng cục thống kê, năm 2016 dân số Việt Nam ước tính khoảng 94.444.200 người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,07%. Cho biết sự tăng dân

số được tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

- A. 2040. B. 2037. C. 2038. D. 2039.

Câu 45: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%.

Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

- A. 2020. B. 2022. C. 2026. D. 2025.

Câu 46: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng (tính theo đơn vị là giờ). Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây.

- A. 3 giờ 20 phút. B. 3 giờ 9 phút. C. 3 giờ 40 phút. D. 3 giờ 2 phút.

Câu 47: Thang đo Richters được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richter. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_0$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richter, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một trận động đất 7 độ Richter sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richter?

- A. 2. B. 20. C. 100. D. $10^{\frac{5}{2}}$.

Câu 48: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

- A. 104,3 triệu người. B. 105,3 triệu người. C. 103,3 triệu người. D. 106,3 triệu người.

Câu 49: Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}}$ %. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

- A. 3574 (năm). B. 3754 (năm). C. 3475 (năm). D. 3547 (năm).

Câu 50: Biết chu kỳ bán hủy của chất phóng xạ plutoni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t . Hỏi 10 gam Pu^{239} sau khoảng bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

- A. 82230 (năm). B. 82232 (năm). C. 82238 (năm). D. 82235 (năm).

- Câu 51:** Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Hỏi sau 10 ngày, đám vi trùng có bao nhiêu con (làm tròn số đến hàng đơn vị)?
- A. 322542 con. B. 332542 con. C. 302542 con. D. 312542 con.
- Câu 52:** Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, ...) cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền x , theo công thức $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, trong đó I_0 là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và μ là hệ số hấp thụ của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thụ $\mu = 1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng giảm 1.10^{10} lần. Số nguyên nào sau đây gần với I nhất?
- A. 8. B. 9. C. 10. D. 90.
- Câu 53:** Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$, $t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.
- A. Sau khoảng 24 tháng. B. Sau khoảng 22 tháng.
C. Sau khoảng 23 tháng. D. Sau khoảng 25 tháng.
- Câu 54: (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Độ pH của dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ ion $[H^+]$ trong dung dịch đó. Cho dung dịch A có độ pH ban đầu bằng 6. Nếu nồng độ ion $[H^+]$ trong dung dịch A tăng lên 4 lần thì độ pH trong dung dịch mới gần bằng giá trị nào dưới đây?
- A. 5,7. B. 5,2. C. 6,6. D. 5,4.
- Câu 55:** Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}})$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).
- A. $t \approx 1,65$ giờ. B. $t \approx 1,61$ giờ. C. $t \approx 1,63$ giờ. D. $t \approx 1,50$ giờ.
- Câu 56:**) Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?
- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.
- Câu 57:** Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?
- A. (1.424.300; 1.424.400). B. (1.424.000; 1.424.100).

C. $(1.424.200; 1.424.300)$.

D. $(1.424.100; 1.424.200)$.

Câu 58: Một bể nước có dung tích 1000 lít. Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

A. 3,14 giờ.

B. 4,64 giờ.

C. 4,14 giờ.

D. 3,64 giờ.

Câu 59: Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V(m^3)$. 10 năm tiếp theo, thể tích CO_2 tăng $a\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Thể tích khí CO_2 năm 2016 là

A. $V_{2016} = V \cdot \frac{(100+a)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}} (m^3)$.

B. $V_{2016} = V \cdot (1+a+n)^{18} (m^3)$.

C. $V_{2016} = V \cdot \frac{((100+a)(100+n))^{10}}{10^{20}} (m^3)$.

D. $V_{2016} = V + V \cdot (1+a+n)^{18} (m^3)$.

Câu 60: Tại Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Theo thống kê dân số thế giới tính đến tháng 01/2017, dân số Việt Nam có 94,970,597 người và có tỉ lệ tăng dân số là 1,03%. Nếu tỷ lệ tăng dân số không đổi thì đến năm 2020 dân số nước ta có bao nhiêu triệu người, chọn đáp án gần nhất.

A. 98 triệu người.

B. 100 triệu người.

C. 102 triệu người.

D. 104 triệu người.

Câu 61: Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

A. $7 \times \log_3 25$.

B. $3^{\frac{25}{7}}$.

C. $7 \times \frac{24}{3}$.

D. $7 \times \log_3 24$.

Câu 62: Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 (giờ).

B. 45 (giờ).

C. 25 (giờ).

D. 15 (giờ).

Câu 63: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao x (đo bằng mét) so với mực nước biển được tính theo công thức $P = P_0 e^{-\lambda x}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất không khí ở mực nước biển, λ là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fanxipan cao mét là bao nhiêu?

A. 22,24 mmHg.

B. $y' = -6x + 2(2m-1)x - (m^2-1)$ mmHg.

C. 517,94 mmHg.

D. 530,23 mmHg.

Câu 64: Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu lần diện tích hiện nay?

- A. $1 - \frac{4x}{100}$. B. $1 - \frac{x^4}{100}$. C. $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$. D. $1 - \left(\frac{x}{100}\right)^4$.

Câu 65: Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: “Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 thì lại gấp đôi ô thứ 2, ... ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước”. Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan từ n ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là

- A. 18. B. 19. C. 20. D. 21.

Câu 66: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định trong 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

- A. 106,3 triệu người. B. 104,3 triệu người. C. 105,3 triệu người. D. 103,3 triệu người.

Câu 67: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

- A. 1000. B. 850. C. 800. D. 900.

Câu 68: Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

- A. $12 - \log 5$ (giờ). B. $\frac{12}{5}$ (giờ). C. $12 - \log 2$ (giờ). D. $12 + \ln 5$ (giờ).

Câu 69: Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mersenne (M.Mersenne, 1588 – 1648, người Pháp). Số $M_{6972593}$ được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

- A. 6972592 chữ số. B. 2098961 chữ số. C. 6972593 chữ số. D. 2098960 chữ số.

Câu 70: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log \frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

- A. 3,59 (Ben). B. 3,06 (Ben). C. 3,69 (Ben). D. 4 (Ben).

Câu 71: Một lon nước soda $80^\circ F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32^\circ F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48 \cdot (0.9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $50^\circ F$?

- A. 1,56. B. 9,3. C. 2. D. 4.

Câu 72: Trung tâm luyện thi Đại học Diệu Hiền muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi và tiền gốc) để trao 10 suất học bổng hằng tháng cho học sinh nghèo ở TP. Cần Thơ,

mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi suất ngân hàng là 1% /tháng, và Trung tâm Diệu Hiền bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, trung tâm cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là:

- A. 108500000 đồng. B. 119100000 đồng. C. 94800000 đồng. D. 120000000 đồng.

Câu 73: Cường độ của một trận động đất được đo bằng độ Richter. Độ Richter được tính bằng công thức $M = \log A - \log A_0$, trong đó A là biên độ rung tối đa đo được bằng địa chấn kế và là biên độ chuẩn (hằng số). Vào ngày 3-12-2016, một trận động đất cường độ 2,4 độ Richter xảy ra ở khu vực huyện Bắc Trà My, tỉnh Quảng Nam; còn ngày 16-10-2016 xảy ra một trận động đất cường độ 3,1 độ Richter ở khu vực huyện Phước Sơn, tỉnh Quảng Nam. Biết rằng biên độ chuẩn được dùng chung cho cả tỉnh Quảng Nam, hỏi biên độ tối đa của trận động đất Phước Sơn ngày 16-10 gấp khoảng mấy lần biên độ tối đa của trận động đất Bắc Trà My ngày 3-12?

- A. 7 lần. B. 5 lần. C. 4 lần. D. 3 lần.

Câu 74: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

- A. 2035. B. 2030. C. 2038. D. 2042.

Câu 75: Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân 1,2%/năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. 8 năm. B. 9 năm. C. 7 năm. D. 10 năm.

Câu 76: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%.



Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k \cdot a^t$ (trong đó a, k là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

- A. $9,3^\circ\text{C}$. B. $7,6^\circ\text{C}$. C. $6,7^\circ\text{C}$. D. $8,4^\circ\text{C}$.

Câu 77: Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0

là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ Po^{210} là 138 ngày đêm. Hỏi 0,168 gam Po^{210} sau 414 ngày đêm sẽ còn lại bao nhiêu gam?

- A. 0,021. B. 0,056. C. 0,045. D. 0,102.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

LŨY THỪA – MŨ – LÔGARIT

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I. LŨY THỪA

1. Định nghĩa lũy thừa

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a.....a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$)	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$)
$\alpha = \lim r_n$ ($r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*$)	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. Tính chất của lũy thừa

- Với mọi $a > 0, b > 0$ ta có:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- $a > 1: a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta; \quad 0 < a < 1: a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

- Với $0 < a < b$ ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0; \quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Chú ý: + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3. Định nghĩa và tính chất của căn thức

- Căn bậc n của a là số b sao cho $b^n = a$.
- Với $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0); \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p \quad (a > 0); \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} \quad (a > 0); \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

- Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Chú ý:

+ Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n . Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.

II. HÀM SỐ LŨY THỪA

1) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (α là hằng số)

Số mũ α	Hàm số $y = x^\alpha$	Tập xác định D
$\alpha = n$ (n nguyên dương)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R}$
$\alpha = n$ (n nguyên âm hoặc $n = 0$)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
α là số thực không nguyên	$y = x^\alpha$	$D = (0; +\infty)$

Chú ý: Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

2) Đạo hàm

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x > 0$); $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$

Chú ý: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \begin{cases} \text{vôùi } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ \text{vôùi } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

III. LÔGARIT

1. Định nghĩa

- Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ta có: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Chú ý: $\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

- Logarit thập phân: $\lg b = \log b = \log_{10} b$

- Logarit tự nhiên (logarit Nepe): $\ln b = \log_e b$ (với $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281$)

2. Tính chất

- $\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^b = b; \quad a^{\log_a b} = b \quad (b > 0)$
- Cho $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$. Khi đó:
 - Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
 - Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

3. Các qui tắc tính logarit

Với $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$, ta có:

- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

4. Đổi cơ số

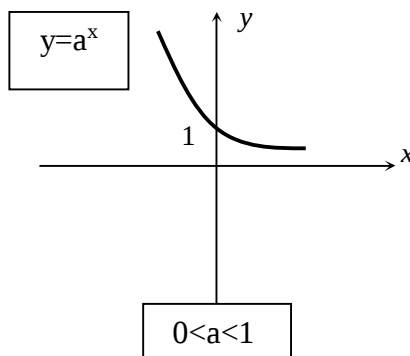
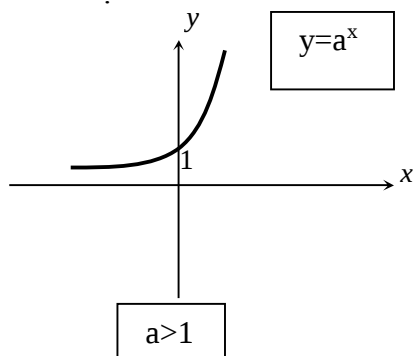
Với $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, ta có:

- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c \quad (\alpha \neq 0)$

IV. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

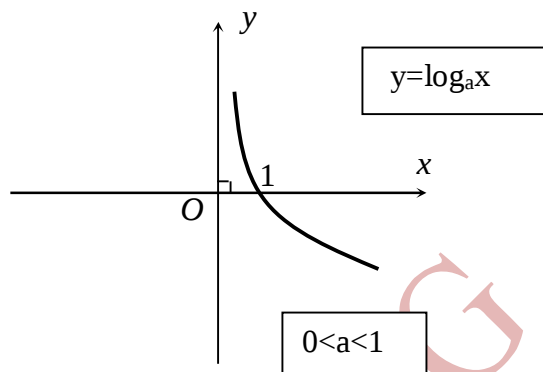
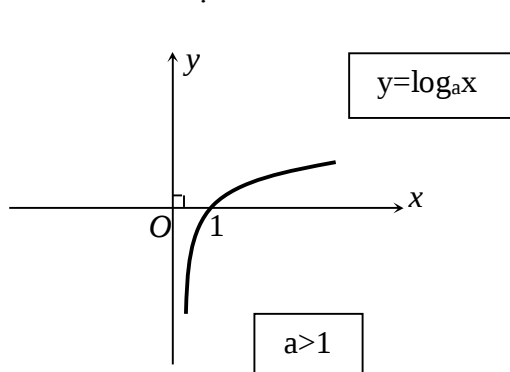
1) Hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
- Đồ thị:



2) Hàm số logarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị:



3) Giới hạn đặc biệt

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4) Đạo hàm

- $(a^x)' = a^x \ln a$; $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$; $(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a}$
- $(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \ (x > 0)$; $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

A. $S = 4$.

B. $S = 19$.

C. $S = 10$.

D. $S = 15$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \log_{54} 168 &= \frac{\log_7 (24 \cdot 7)}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + 1}{\log_7 54} = \frac{\log_7 12 \log_{12} 24 + 1}{\log_7 54} \\ &= \frac{\log_7 12 \log_{12} 24 + 1}{\log_7 12 \log_{12} 54} = \frac{xy + 1}{x \cdot \log_{12} 54} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tính } \log_{12} 54 &= \log_{12} (27 \cdot 2) = 3 \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = 3 \log_{12} \frac{3 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 24}{2 \cdot 12 \cdot 24} + \log_{12} \frac{24}{12} \\ &= 3 \log_{12} \frac{12^3}{24^2} + \log_{12} \frac{24}{12} = 3(3 - 2 \log_{12} 24) + (\log_{12} 24 - 1) = 8 - 5 \log_{12} 24 = 8 - 5y. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \log_{54} 168 = \frac{xy + 1}{x(8 - 5y)} = \frac{xy + 1}{-5xy + 8x}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \Rightarrow S=a+2b+3c=15 \\ c=8 \end{cases}$$

Câu 2: Với $a > 0, a \neq 1$, cho biết: $t = a^{\frac{1}{1-\log_a u}}$; $v = a^{\frac{1}{1-\log_a t}}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $u = a^{\frac{-1}{1-\log_a v}}$. **B.** $u = a^{\frac{1}{1+\log_a t}}$. **C.** $u = a^{\frac{1}{1+\log_a v}}$. **D.** $u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$.

Giải:

$$\text{Từ giả thiết suy ra: } \log_a t = \frac{1}{1-\log_a u} \cdot \log_a a = \frac{1}{1-\log_a u}$$

$$\log_a v = \frac{1}{1-\log_a t} \cdot \log_a a = \frac{1}{1-\log_a t} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\log_a u}} = \frac{1-\log_a u}{- \log_a u}$$

$$\Leftrightarrow -\log_a v \log_a u = 1 - \log_a u \Leftrightarrow \log_a u (1 - \log_a v) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \frac{1}{1-\log_a v} \Leftrightarrow u = a^{\frac{1}{1-\log_a v}}$$

Chọn D

Câu 3: Giả sử p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{8}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ **D.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

Lời giải

$$\text{Đặt: } t = \log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q) \text{ thì: } p = 9^t, q = 12^t, 16^t = p+q = 9^t + 12^t \quad (1)$$

Chia hai vế của (1) cho 9^t ta được: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2t} = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t$, đặt $x = \left(\frac{4}{3}\right)^t = \frac{q}{p} > 0$ đưa về phương trình:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \text{ do } x > 0, \text{ suy ra } \frac{q}{p} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Chọn D

Câu 4: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Cho $0 < x \neq 1, 0 < a \neq 1$ và

$$M = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \frac{1}{\log_{a^5} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{2019}} x}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

A. $M = \frac{2020^2}{\log_a x}$. **B.** $M = \frac{2018 \cdot 1010}{\log_a x}$. **C.** $M = \frac{2020 \cdot 1010}{\log_a x}$. **D.** $M = \frac{1010^2}{\log_a x}$.

Lời giải

Chọn D

Với điều kiện $0 < x \neq 1, 0 < a \neq 1$.

$$\text{Ta có: } M = \log_x a + \log_x a^3 + \log_x a^5 + \dots + \log_x a^{2019}$$

$$= \log_x (a \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot \dots \cdot a^{2019}) = (1+3+5+\dots+2019) \log_x a \quad (*)$$

$$= 1010^2 \cdot \log_x a = \frac{1010^2}{\log_a x}.$$

(*) Lưu ý: Công thức: $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.

Chứng minh dựa vào tính tổng của một CSC với $u_1 = 1, u_n = 2n - 1, d = 2$. Khi đó tổng

$$S = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2.$$

Câu 5: Tính giá trị của biểu thức $P = \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ)$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = 0$. D. $P = 2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \ln(\tan 1^\circ) + \ln(\tan 2^\circ) + \ln(\tan 3^\circ) + \dots + \ln(\tan 89^\circ) \\ &= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ) \\ &= \ln(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 45^\circ \cdot \cot 44^\circ \cdot \cot 43^\circ \dots \cot 1^\circ) \\ &= \ln(\tan 45^\circ) = \ln 1 = 0. \text{ (vì } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1) \end{aligned}$$

Chọn C

Câu 6: Cho n là số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$$

- A. 2017. B. 2019. C. 2016. D. 2018.

Lời giải

Chọn C

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019 \quad (*)$$

Ta có $n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = n^2 \cdot n \cdot \log_a 2019 = n^3 \log_a 2019$. Suy ra

$$VT (*) = (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \cdot \log_a 2019 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \cdot \log_a 2019$$

VP (*) = $1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$. Khi đó (*) được:

$$n^2(n+1)^2 = 2^2 \cdot 1008^2 \cdot 2017^2 = 2016^2 \cdot 2017^2 \Rightarrow n = 2016.$$

Câu 7: (Liên Trường Nghệ An) Tìm số nguyên dương n sao cho

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \cdot \log_{2018} 2019$$

- A. 2021. B. 2019. C. 2020. D. 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\log_{2018} 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{2018}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{2018}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{2018}} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \cdot \log_{2018} 2019$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_{2018} 2019 = 1010^2 \cdot 2021^2 \cdot \log_{2018} 2019$$

$$\Leftrightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 1010^2 \cdot 2021^2 \Leftrightarrow (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1010^2 \cdot 2021^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 1010 \cdot 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2020 & (n) \\ n = -2021 & (l) \end{cases}$$

Vậy $n = 2020$.

Câu 8: Cho hai số a, b dương thỏa mãn điều kiện: $a - b = \frac{a \cdot 2^b - b \cdot 2^a}{2^a + 2^b}$. Tính $P = 2017^a - 2017^b$.

- A. 0. B. 2016. C. 2017. D. -1.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Từ giả thiết, ta có } a - b = \frac{a \cdot 2^b - b \cdot 2^a}{2^a + 2^b} \longleftrightarrow (a - b)(2^a + 2^b) = a \cdot 2^b - b \cdot 2^a.$$

$$\longleftrightarrow a.2^a + a.2^b - b.2^a - b.2^b = a.2^b - b.2^a \Leftrightarrow a.2^a = b.2^b. (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x.2^x$ với $x > 0$, có $f'(x) = 2^x + x.2^x \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2) > 0; \forall x > 0$.

Suy ra hàm số $f(x)$ là đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Nhận thấy $(*) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Khi $a = b$ thì $2017^a - 2017^b = 2017^a - 2017^a = 0$.

Chọn A

Câu 9: (Sở Phú Thọ) Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b$. Giá trị của

$$\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + ab^2 + 3b^3} \text{ bằng}$$

A. $\frac{6 - \sqrt{13}}{11}$.

B. $\frac{82 - 17\sqrt{13}}{69}$.

C. $\frac{5 - \sqrt{13}}{6}$.

D. $\frac{3 + \sqrt{13}}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\log_{16}(a+3b) = \log_9 a = \log_{12} b = t$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3b = 16^t \\ a = 9^t \\ b = 12^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 3.12^t = 16^t.$$

Chia cả hai vế cho 16^t ta được $\left(\frac{3}{4}\right)^{2t} + 3.\left(\frac{3}{4}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^t = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \quad (l) \end{cases}$.

Mặt khác ta có $\frac{a}{b} = \left(\frac{3}{4}\right)^t$.

Xét biểu thức $P = \frac{a^3 - ab^2 + b^3}{a^3 + ab^2 + 3b^3} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^3 + \frac{a}{b} + 3} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{3t} - \left(\frac{3}{4}\right)^t + 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{3t} + \left(\frac{3}{4}\right)^t + 3} = \frac{6 - \sqrt{13}}{11}$.

Câu 10: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần 1) Cho a, b, c là ba số thực dương, $a > 1$ và thỏa mãn

$$\log_a^2(bc) + \log_a\left(b^3c^3 + \frac{bc}{4}\right)^2 + 4 + \sqrt{4-c^2} = 0. \text{ Số bộ } (a; b; c) \text{ thỏa mãn điều kiện đã cho là}$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $4 - c^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq c \leq 2$, kết hợp giả thiết ta có $0 < c \leq 2$.

Do $a > 1$ nên ta có $\log_a^2(bc) + \log_a\left(b^3c^3 + \frac{bc}{4}\right)^2 + 4 + \sqrt{4-c^2}$

$$\geq \log_a^2(bc) + \log_a\left(2\sqrt{b^3c^3 \cdot \frac{bc}{4}}\right)^2 + 4 + \sqrt{4-c^2} = \log_a^2(bc) + 4\log_a(bc) + 4 + \sqrt{4-c^2}$$

$$= (\log_a(bc) + 2)^2 + \sqrt{4-c^2} \geq 0.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a(bc) + 2 = 0 \\ \sqrt{4-c^2} = 0 \\ b^3c^3 = \frac{bc}{4} \\ a > 1 \\ b > 0 \\ 0 < c \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \frac{1}{a^2} \\ c = 2 \\ bc = \frac{1}{2} \\ a > 1 \\ b > 0 \\ 0 < c \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = 2 \end{cases}.$$

Vậy có duy nhất một bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 11: (Sở Ninh Bình Lần1) Cho biết $\log_2\left(\sum_{k=1}^{100} k \cdot 2^k - 2\right) = a + \log_c b$ với a, b, c là các số nguyên và

$a > b > c > 1$. Tổng $a + b + c$ là

A. 203.

B. 202.

C. 201.

D. 200.

Lời giải

Chọn B

Đặt

$$T = \sum_{k=1}^{100} k \cdot 2^k = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{100} \quad (1).$$

Khi đó, ta có

$$2T = 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + 99 \cdot 2^{100} + 100 \cdot 2^{101} \quad (2).$$

Lấy (2) trừ (1) về theo về ta được

$$T = 100 \cdot 2^{101} - (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}) = 99 \cdot 2^{101} + 2$$

$$\text{Suy ra } \log_2\left(\sum_{k=1}^{100} k \cdot 2^k - 2\right) = \log_2(99 \cdot 2^{101}) = 101 + \log_2 99.$$

Do đó $a = 101$; $b = 99$; $c = 2$.

Vậy $a + b + c = 202$.

Câu 12: (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Gọi x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) \quad \text{và} \quad \frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}, \quad \text{với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính}$$

$$T = a^2 + b^2.$$

A. $T = 29$.

B. $T = 20$.

C. $T = 25$.

D. $T = 26$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x + y) = t, \quad t \in \mathbb{R}. \text{ Ta có } x = 9^t, \quad y = 6^t, \quad x + y = 4^t.$$

Theo bài ra ta có:

$$9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t + \left(\frac{6}{4}\right)^t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Theo bài ra ta có : $a = 1, b = 5$ nên $T = a^2 + b^2 = 26$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in [1; +\infty)$.

C. $m \in (-4; 1)$.

D. $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_3 x$, khi đó $x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3} \text{ trở thành } y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3}.$$

Hàm số $y = \frac{1}{m \log_3^2 x - 4 \log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số

$$y = \frac{1}{mt^2 - 4t + m + 3} \text{ xác định trên } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m^2 - 3m < 0 \Leftrightarrow m < -4 \vee m > 1.$$

Câu 14: (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

$$y = x + m + \sqrt{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4} + \log_2(x - m + \sqrt{2x^2 + 1})$$

A. 2020.

B. 2021.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 \geq 0 \\ x - m + \sqrt{2x^2 + 1} > 0 \end{cases}$ luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

+) Ta có: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4 = [x + (m+1)]^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+) $x - m + \sqrt{2x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 + 1} > m, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ với $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để $x + \sqrt{2x^2 + 1} > m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} > m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2018, -2017, -2016, \dots, -1, 0\}$.

Kết luận: có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 15: (Đặng Thành Nam Đề 12) Cho hàm số $f(x) = \ln(e^x + m)$. Có bao nhiêu số thực dương m để $f'(a) + f'(b) = 1$ với mọi số thực a, b thỏa mãn $a + b = 1$

A. 1.

B. 2.

C. Vô số.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Với $m > 0$ thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{e^x}{e^x + m}$$

$$\Rightarrow f'(a) + f'(b) = \frac{e^a}{e^a + m} + \frac{e^b}{e^b + m} = \frac{2e^{a+b} + m(e^a + e^b)}{e^{a+b} + m(e^a + e^b) + m^2} = \frac{2e + m(e^a + e^b)}{e + m(e^a + e^b) + m^2}.$$

$$\text{Mà } f'(a) + f'(b) = 1 \Leftrightarrow \frac{2e + m(e^a + e^b)}{e + m(e^a + e^b) + m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = e \Leftrightarrow m = \sqrt{e} \text{ (vì } m > 0 \text{)}.$$

Câu 16: (Ngô Quyền Hà Nội) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x$; ($0 < a \neq 1$) qua điểm $I(2; 1)$. Giá trị của biểu thức $f(4 - a^{2019})$ bằng

A. 2023.

B. -2023.

C. 2017.

D. -2017.

Lời giải

Chọn D

Xét $y = \log_a x$; ($0 < a \neq 1$) (C_0), $y = f(x)$ (C), (C) đối xứng với (C_0) qua $I(2; 1)$.

Gọi điểm $M(x_0; y_0) \in (C_0)$, $N(x; y) \in (C)$ đối xứng với nhau qua điểm $I(2; 1)$, ta có:

$$\begin{cases} x_0 + x = 4 \\ y_0 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4 - x \\ y_0 = 2 - y \end{cases}, \text{ thay vào phương trình của } (C_0) \text{ ta được:}$$

$$2 - y = \log_a(4 - x) \Leftrightarrow y = 2 - \log_a(4 - x), (C).$$

$$\text{Suy ra } f(4 - a^{2019}) = 2 - \log_a(4 - 4 + a^{2019}) = -2017.$$

$$\text{Như vậy, } f(4 - a^{2019}) = -2017.$$

Câu 17: (Hải Hậu Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \ln 2019 - \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$. Tính tổng

$$S = f'(1) + f'(3) + \dots + f'(2019).$$

A. $S = \frac{4035}{2019}$.

B. $S = 2021$.

C. $S = \frac{2019}{2021}$.

D. $S = \frac{2020}{2021}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) = \ln 2019 - [\ln(x+2) - \ln x] = \ln x - \ln(x+2) + \ln 2019.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

$$\text{Xét } S = f'(1) + f'(3) + \dots + f'(2019)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{1+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+2} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2017+2} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2019+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}.$$

Câu 18: (Lê Xoay lần 1) Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$, với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để a_n là một số nguyên.

A. $n = 41$.

B. $n = 39$.

C. $n = 49$.

D. $n = 123$.

Lời giải

Chọn A

Với số tự nhiên $n \geq 1$ ta có:

$$5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \log_5 \left(\frac{3n+5}{3n+2} \right) = \log_5 (3n+5) - \log_5 (3n+2).$$

Suy ra:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 - a_1 = \log_5 8 - \log_5 5$$

$$a_3 - a_2 = \log_5 11 - \log_5 8$$

.

$$a_n - a_{n-1} = \log_5 (3n+2) - \log_5 (3n-1).$$

Cộng tương ứng hai vế các đẳng thức trên ta có $a_n = \log_5 (3n+2)$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Để $a_n \in \mathbb{Z}$ thì $\log_5 (3n+2) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n+2 = 5^k, (k \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta kiểm tra với các giá trị $k \in \mathbb{N}$ từ bé đến lớn

$$\text{với } k=0 \text{ thì } n = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}^*$$

$$\text{với } k=1 \text{ thì } n = 1$$

$$\text{với } k=2 \text{ thì } n = \frac{23}{3} \notin \mathbb{N}^*$$

$$\text{với } k=3 \text{ thì } n = 41.$$

Vậy số nguyên $n > 1$ nhỏ nhất là $n = 41$ (ứng với $k = 3$).

Câu 19: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Cho hàm số $f(x) = \ln \left(1 - \frac{4}{(2x-1)^2} \right)$. Biết rằng

$$f(2) + f(3) + \dots + f(2020) = \ln \frac{a}{b}, \text{ trong đó } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản, } a, b \in \mathbb{N}^*. \text{ Tính } b - 3a.$$

A. -2 .

B. 3 .

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 1 - \frac{4}{(2x-1)^2} = \left(1 - \frac{2}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right) = \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right) \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right).$$

$$e^{f(x)} = e^{\ln \left(1 - \frac{4}{(2x-1)^2} \right)} \Rightarrow e^{f(x)} = \frac{2x-3}{2x-1} \cdot \frac{2x+1}{2x-1}.$$

$$\text{Vì } f(2) + f(3) + \dots + f(2020) = \ln \frac{a}{b} \text{ nên } e^{f(2)+f(3)+\dots+f(2020)} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Mà } e^{f(2)+f(3)+\dots+f(2020)} = e^{f(2)} e^{f(3)} \dots e^{f(2020)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \dots \frac{4035}{4037} \cdot \frac{4039}{4037} \cdot \frac{4037}{4039} \cdot \frac{4041}{4039} = \frac{1347}{4039}.$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{b} = \frac{1347}{4039} \Rightarrow a = 1347; b = 4039 \Rightarrow b - 3a = -2.$$

Câu 20: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$, $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $b_n > 2019a_n$

A. 17.

B. 14.

C. 15.

D. 16.**Lời giải****Chọn D**

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ với $x \in [0, +\infty)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ từ đó ta suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ trên $[0, +\infty)$ như sau:

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$	

Vì $a_2 > 0$ nên $f(a_2) \geq -2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) + 2 \geq 0$ (1)

Giả sử $a_1 \geq 1$, vì $f(x)$ đồng biến trên $[1, +\infty)$ nên $f(a_2) > f(a_1)$ suy ra $f(a_1) + 2 > f(a_1)$ vô lý. Vậy $a_1 \in [0, 1)$ do đó $f(a_1) \leq 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} f(a_1) = 0 \\ f(a_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số cộng (a_n) là $a_n = (n-1)$.

Một cách tương tự, đặt $t_1 = \log_2 b_1$ và $t_2 = \log_2 b_2$ suy ra $f(t_2) + 2 = f(t_1)$, vì $1 \leq b_1 < b_2$ nên $0 \leq t_1 < t_2$,

theo lập luận trên ta có:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 b_1 = 0 \\ \log_2 b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy cấp số nhân (b_n) là $b_n = 2^{n-1}$.

Do đó $b_n > 2019a_n \Leftrightarrow 2^{n-1} > 2019(n-1)$ (*). Trong 4 đáp án $n = 16$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa (*).

Câu 21: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có diện tích bằng 36, đường thẳng chứa cạnh AB song song với trục Ox, các đỉnh A, B và C lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_{\sqrt{a}} x$ và $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$ với a là số thực lớn hơn 1. Tìm a .

A. $a = \sqrt{3}$.B. $a = \sqrt[3]{6}$.C. $a = \sqrt{6}$ **D. $a = \sqrt[6]{3}$.****Lời giải**

Do $AB \parallel Ox \rightarrow A, B$ nằm trên đường thẳng $y = m$ ($m \neq 0$).

Lại có A, B lần lượt nằm trên đồ thị của các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_{\sqrt{a}} x$.

Từ đó suy ra $A(a^m; m)$, $B\left(a^{\frac{m}{2}}; m\right)$.

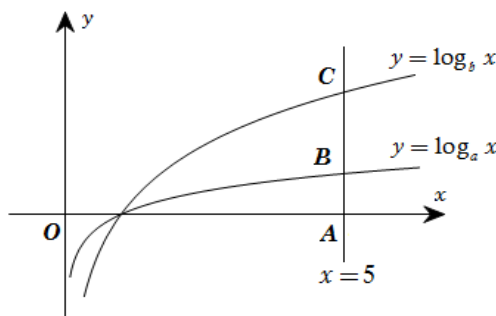
Vì $ABCD$ là hình vuông nên suy ra $x_C = x_B = a^{\frac{m}{2}}$. Lại có C nằm trên đồ thị hàm số $y = \log_{\sqrt[3]{a}} x$, suy ra $C\left(a^{\frac{m}{2}}; \frac{3m}{2}\right)$.

$$\text{Theo đề bài } S_{ABCD} = 36 \longrightarrow \begin{cases} AB = 6 \\ BC = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \left|a^m - a^{\frac{m}{2}}\right| = 6 \\ \left|\frac{3m}{2} - m\right| = 6 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} m = -12 \\ a = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} < 1 (\text{loại}) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = 12 \\ a = \sqrt[6]{3} \end{cases}$$

Chọn D

Câu 22: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại A, B và C . Biết rằng $CB = 2AB$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a = b^2$.

B. $a^3 = b$.

C. $a = b^3$.

D. $a = 5b$.

Hướng dẫn giải:

Theo giải thiết, ta có $A(5; 0)$, $B(5; \log_a 5)$, $C(5; \log_b 5)$.

$$\text{Do } CB = 2AB \longrightarrow \overline{CB} = 2\overline{BA} \leftrightarrow \log_a 5 - \log_b 5 = 2 \cdot (-\log_a 5)$$

$$\longleftrightarrow 3\log_a 5 = \log_b 5 \longleftrightarrow \log_a 5 = \frac{1}{3}\log_b 5 \longleftrightarrow \log_a 5 = \log_{b^3} 5 \longrightarrow a = b^3.$$

Chọn C

Câu 23: Kí hiệu $f(x) = \left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}} - 1$. Giá trị của $f(f(2017))$ bằng:

A. 2016.

B. 1009.

C. 2017.

D. 1008.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} = x^{1+\frac{1}{\log_2 x}} = x^{1+\log_x 2} = x^{\log_x (2x)} = 2x \\ 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} = 2^{\frac{3}{3 \cdot \log_{x^2} 2}} = 2^{\frac{1}{\log_{x^2} 2}} = 2^{\log_2 x^2} = x^2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}} - 1 = [(x+1)^2]^{\frac{1}{2}} - 1 = x.$$

Suy ra $f(2017) = 2017 \longrightarrow f(f(2017)) = f(2017) = 2017$.

Chọn C

Câu 24: (HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUYỆ-HÀ-NỘI) Cho $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \log \left[\frac{f(2019) - f(2009) - 145}{2} \right].$$

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ nên: $f(2019)=f(2009)+f(10)+20090$

$$f(10)=f(5)+f(5)+25=2f(5)+25$$

$$f(5)=f(2)+f(3)+6$$

$$f(2)=f(1)+f(1)+1=2f(1)+1=3 \Rightarrow f(3)=f(2)+f(1)+2=6$$

$$\Rightarrow f(5)=15 \Rightarrow f(10)=55$$

$$f(2019)-f(2009)-145=f(10)+20090-145=20000$$

$$T = \log \left[\frac{f(2019) - f(2009) - 145}{2} \right] = \log 10000 = 4$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{2}{2018}\right) + f\left(\frac{3}{2018}\right) + \dots + f\left(\frac{2017}{2018}\right)$.

A. $S = \frac{2017}{2}$.

B. $S = 2018$.

C. $S = \frac{2019}{2}$.

D. $S = 2017$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(1-x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^x} = \frac{2}{2 + 4^x} \Rightarrow f(1) + f(1-x) = 1$

Do đó: $f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{2017}{2018}\right) = 1, f\left(\frac{2}{2018}\right) + f\left(\frac{2016}{2018}\right) = 1, \dots, f\left(\frac{1008}{2018}\right) + f\left(\frac{1010}{2018}\right) = 1$

$$\Rightarrow S = 1008 + \frac{1009}{2018} = \frac{2017}{2}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \frac{16^x}{16^x + 4}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$.

A. $S = \frac{5044}{5}$.

B. $S = \frac{10084}{5}$.

C. $S = 1008$.

D. $S = \frac{10089}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Cho $x+y=1$

Ta có $f(x) + f(y) = \frac{16^x}{16^x + 4} + \frac{16^y}{16^y + 4} = \frac{16 + 4 \cdot 16^x + 16 + 4 \cdot 16^y}{16 + 4 \cdot 16^x + 4 \cdot 16^y + 16} = 1$

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$$

$$= \underbrace{1+1+\dots+1}_{1008 \text{ số hạng}} + \frac{16}{16+4} = 1008 + \frac{4}{5} = \frac{5044}{5}.$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right).$$

- A. 336. B. 1008. C. $\frac{4039}{12}$. D. $\frac{8071}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét: } f(x) + f(1-x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x} - 2}{9^{1-x} + 3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy ta có:

$$P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right) = \sum_{k=1}^{2016} \left[f\left(\frac{k}{2017}\right) + f\left(1 - \frac{k}{2017}\right) \right] + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{k=1}^{2016} \frac{1}{3} + f(1) = 336 + \frac{7}{12} = \frac{4039}{12}.$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

$$\text{Tính tổng } S = f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{2}{2007}\right) + f\left(\frac{3}{2007}\right) + \dots + f(1)?$$

- A. $S = 2016$. B. $S = 1008$. C. $S = \frac{4015}{4}$. D. $S = \frac{4035}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$f(1-x) = \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} = \frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9}{9^x} + 3} = \frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9 + 3 \cdot 9^x}{9^x}} = \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^x}.$$

$$\Rightarrow f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9}{9 + 3 \cdot 9^x} = \frac{9^x \cdot (9 + 3 \cdot 9^x) + 9 \cdot (9^x + 3)}{(9^x + 3)(9 + 3 \cdot 9^x)} = \frac{9^{x+1} + 3 \cdot 9^{2x} + 9^{x+1} + 27}{9^{x+1} + 3 \cdot 9^{2x} + 9^{x+1} + 27} = 1.$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{2006}{2007}\right) = 1; f\left(\frac{2}{2007}\right) + f\left(\frac{2005}{2007}\right) = 1; \dots; f\left(\frac{1003}{2007}\right) + f\left(\frac{1004}{2007}\right) = 1.$$

$$\text{Vậy } S = f\left(\frac{1}{2007}\right) + f\left(\frac{2}{2007}\right) + f\left(\frac{3}{2007}\right) + \dots + f(1) = 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{9}{9 + 3} = 1003 + \frac{3}{4} = \frac{4015}{4}.$$

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f(1).$$

- A. $S = \frac{4035}{4}$. B. $S = \frac{8067}{4}$. C. $S = 1008$. D. $S = \frac{8071}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } f(x) + f(1-x) = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{9}{9+3 \cdot 9^x} = \frac{9^x}{9^x+3} + \frac{3}{9^x+3} = \frac{9^x+3}{9^x+3} = 1.$$

$$\text{Khi đó } S = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) \right] + \dots \\ + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) \right] + f(1) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{1008 \text{ số}} + f(1) = 1008 + \frac{9}{9+3} = 1008 + \frac{3}{4} = \frac{4035}{4}.$$

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right).$$

A. 336.

B. 1008.

C. $\frac{4039}{12}$.D. $\frac{8071}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét: } f(x) + f(1-x) = \frac{9^x - 2}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x} - 2}{9^{1-x} + 3} = \frac{1}{3}.$$

Vậy ta có:

$$P = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2017}{2017}\right) = \sum_{k=1}^{1008} \left[f\left(\frac{k}{2017}\right) + f\left(1 - \frac{k}{2017}\right) \right] + f\left(\frac{2017}{2017}\right)$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{k=1}^{1008} \frac{1}{3} + f(1) = 336 + \frac{7}{12} = \frac{4039}{12}.$$

Câu 31: Cho $f(x) = \frac{2016^x}{2016^x + \sqrt{2016}}$. Tính giá trị biểu thức

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right)$$

A. S = 2016

B. S = 2017

C. S = 1008

D. S = $\sqrt{2016}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(1-x) = \frac{\sqrt{2016}}{2016^x + \sqrt{2016}} \rightarrow f(x) + f(1-x) = 1$$

$$\text{Suy ra } S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) \\ + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) = 1008.$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right)$. Tính tổng

$$S = f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{3}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2015}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right).$$

A. S = 2016.

B. S = 1008.

C. S = 2017.

D. S = 4032.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Xét } f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{2(1-x)}{1-(1-x)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2x}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{2(1-x)}{x} \right] = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{2(1-x)}{x} \right] = \frac{1}{2} \log_2 4 = 1.$$

Áp dụng tính chất trên, ta được

$$S = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{1008}{2017}\right) + f\left(\frac{1009}{2017}\right) \right] \\ = 1 + 1 + \dots + 1 = 1008.$$

Chọn B

Câu 33: Cho $0 < a \neq 1 + \sqrt{2}$ và các hàm $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$. Trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

I. $f^2(x) - g^2(x) = 1$.

II. $g(2x) = 2g(x)f(x)$.

III. $f(g(0)) = g(f(0))$.

IV. $g'(2x) = g'(x)f(x) - g(x)f'(x)$.

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải:

Ta có

• $f^2(x) - g^2(x) = \left(\frac{a^x + a^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2} \right)^2 = 1 \rightarrow$ I đúng.

• $g(2x) = \frac{a^{2x} - a^{-2x}}{2} = \frac{(a^x - a^{-x})(a^x + a^{-x})}{2} = 2 \cdot \frac{a^x - a^{-x}}{2} \cdot \frac{a^x + a^{-x}}{2} = 2g(x) \cdot f(x) \rightarrow$ II đúng.

• $\begin{cases} f(g(0)) = f(0) = 1. \\ g(f(0)) = g(1) = \frac{a - \frac{1}{a}}{2} = \frac{a^2 - 1}{2a} \end{cases} \rightarrow f(g(0)) \neq g(f(0)) \rightarrow$ III sai.

• Do $g(2x) = 2g(x)f(x)$ nên $g'(2x) = 2[g'(x)f(x) - g(x)f'(x)] \rightarrow$ IV sai.

Vậy có 2 khẳng định đúng.

Chọn D

Cách giải trắc nghiệm: Chọn $a = 1$.

Câu 34: (**Chuyên Hạ Long lần 2-2019**) Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = 2018$.

B. $m - n^2 = -2018$.

C. $m - n^2 = 1$.

D. $m - n^2 = -1$.

Hướng dẫn giải:

Xét các số thực $x > 0$

Ta có: $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x+1)^2}} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Vậy, $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right)} = e^{2018 - \frac{1}{2018}} = e^{\frac{2018^2 - 1}{2018}}$,

hay $\frac{m}{n} = \frac{2018^2 - 1}{2018}$

Ta chứng minh $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của $2018^2 - 1$ và 2018

Khi đó ta có $2018^2 - 1 : d, 2018 : d \Rightarrow 2018^2 : d$ suy ra $1 : d \Leftrightarrow d = \pm 1$

Suy ra $\frac{2018^2 - 1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m = 2018^2 - 1, n = 2018$.

Vậy $m - n^2 = -1$.

Chọn D

Câu 35: Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

A. 0.

B. 1.

C. Vô số.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có nhận xét: $\begin{cases} e^x \geq e.x \\ e^y \geq e.y \end{cases} \Rightarrow e^{x+y} \leq e(x+y) \Leftrightarrow x+y=1$.

(Dấu "=" xảy ra khi $x+y=1$).

Do đó ta có: $f(x) + f(y) = 1 \Leftrightarrow f(x) + f(1-x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x + m^2} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + m^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9 + m^2 \cdot 9^x + 9 + m^2 \cdot 9^{1-x}}{9 + m^2 \cdot 9^x + m^2 \cdot 9^{1-x} + m^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 + m^2 \cdot 9^x + 9 + m^2 \cdot 9^{1-x} = 9 + m^2 \cdot 9^x + m^2 \cdot 9^{1-x} + m^4$$

$$\Leftrightarrow m^4 = 9 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 36: Cho hàm số $y = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $3e^3 + 1 \leq m < 3e^4 + 1$.

B. $m \geq 3e^4 + 1$.

C. $3e^2 + 1 \leq m \leq 3e^3 + 1$.

D. $m < 3e^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\bullet y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (e^{3x} - (m-1)e^x + 1)' =$$

$$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (3e^{3x} - (m-1)e^x)$$

• Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow$

$$y' = \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} \cdot \ln\left(\frac{4}{2017}\right) \cdot (3e^{3x} - (m-1)e^x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) (*), \text{ mà}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right) &< 0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{. Nên } (*) \Leftrightarrow 3e^{3x} - (m-1)e^x \leq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x} - (m-1)e^x + 1} &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right) &< 0 \end{aligned} \right.$$

$$3e^{2x} + 1 \leq m, \forall x \in (1; 2)$$

• Đặt $g(x) = 3e^{2x} + 1, \forall x \in (1; 2), g(x) = 3e^{2x} \cdot 2 > 0, \forall x \in (1; 2)$

x	1	2
$g'(x)$	+	
$g(x)$	↗	

. Vậy (*) xảy ra khi $m \geq g(2) \Leftrightarrow m \geq 3e^4 + 1$.

BÌNH LUẬN

Sử dụng $(a^u)' = u'a^u \ln a$ và phương pháp hàm số như các bài trên.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{e^x - m - 2}{e^x - m^2}$ đồng biến trên khoảng

$$\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$$

A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 2)$

B. $m \in [-1; 2]$

C. $m \in (1; 2)$

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{\ln m^2\}$

Ta có $y' = \frac{(-m^2 + m + 2)e^x}{(e^x - m^2)^2} > 0 \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$ thì hàm số đồng biến trên các

khoảng $(-\infty; \ln m^2)$ và $(\ln m^2; +\infty)$

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\ln \frac{1}{4}; 0\right)$ thì $\begin{cases} \ln m^2 \leq \frac{1}{4} \\ \ln m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $-1 < m < 2$ suy ra $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 2)$.

Câu 38: (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như

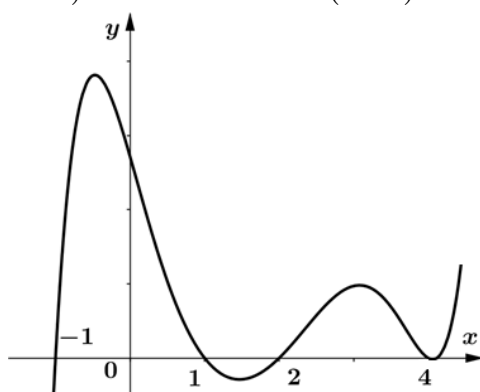
hình bên. Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(0; 1)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; +\infty)$.



Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$.

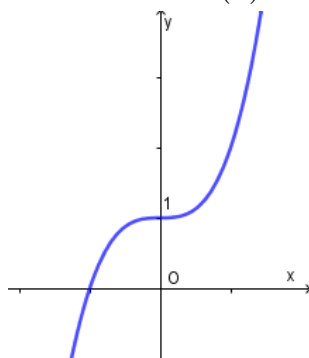
Xét hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$.

Ta có $g'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} \cdot (-2) \cdot f'(1-2x) \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} \cdot f'(1-2x)$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < -1 \\ 1 < 1-2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 39: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(2x) + 2e^{-x}$ nghịch biến trên khoảng nào cho dưới đây?

A. $(-2; 0)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$$y = f(2x) + 2e^{-x} \Rightarrow y' = 2f'(2x) - 2e^{-x} = 2(f'(2x) - e^{-x})$$

$$\text{Từ đồ thị ta thấy } \begin{cases} f'(x) > 1, \forall x > 0 \\ f'(x) = 1, x = 0 \\ f'(x) < 1, \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2x) > 1, \forall x > 0 \\ f'(2x) = 1, x = 0 \\ f'(2x) < 1, \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} e^{-x} < 1, \forall x > 0 \\ e^{-x} = 1, x = 0 \\ e^{-x} > 1, \forall x < 0 \end{cases}$$

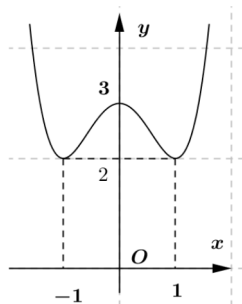
$$\text{Suy ra } \begin{cases} f'(x) - e^{-x} > 0, \forall x > 0 \\ f'(x) - e^{-x} = 0, x = 0 \\ f'(x) - e^{-x} < 0, \forall x < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y			

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$

Câu 40: (Nguyễn Trãi Hải Dương Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

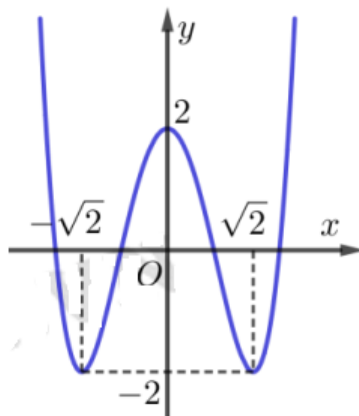
$$g'(x) = [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vì vậy dấu của $g'(x)$ là dấu của $f'(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 41: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = f'(x) \cdot 3^{f(x)} \cdot \ln 3 + f'(x) \cdot 2^{f(x)} \cdot \ln 2 = f'(x) [3^{f(x)} \cdot \ln 3 + 2^{f(x)} \cdot \ln 2].$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ (do } 3^{f(x)} \cdot \ln 3 + 2^{f(x)} \cdot \ln 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$ có 4 điểm cực trị.

Câu 42: (PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tổng khoảng cách từ gốc tọa độ đến tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \log_2 \frac{2x+3}{x-1}$ bằng

- A. 2 . B. 3 . C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \frac{2x+3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ta xét:

$$\begin{aligned} \square \quad & \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = +\infty \\ \square \quad & \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^-} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = -\infty \end{aligned}$$

Từ đó suy ra tiệm cận đứng là $(d_1): x = -\frac{3}{2}; (d_2): x = 1$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\log_2 \frac{2x+3}{x-1} \right) = 1$$

Từ đó suy ra tiệm cận ngang là $(d_3): y = 1$

$$\text{Ta có: } T = d(O, d_1) + d(O, d_2) + d(O, d_3) = \frac{7}{2}$$

Câu 43: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-6	-4	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2x-2) - 2e^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-2; 0)$. C. **(0; 1)** . D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y = f(2x-2) - 2e^x \text{ nên } y' = 2f'(2x-2) - 2e^x = 2[f'(2x-2) - e^x].$$

Hàm số trên nghịch biến trên D khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f'(2x-2) - e^x \leq 0, \forall x \in D$

hay $f'(2x-2) \leq e^x, \forall x \in D$ (*).

Mặt khác từ bảng xét dấu $f'(x)$ ta suy ra bảng xét dấu của $f'(2x-2)$ như sau:

Ta có: $f'(2x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=-6 \\ 2x-2=-4 \\ 2x-2=-2 \\ 2x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$ nên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(2x-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Nhìn vào bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra $f'(2x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1]$

Nên $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1]$ thỏa mãn phương trình (*) (vì $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Từ đó suy ra hàm số $y = f(2x-2) - 2e^x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 44: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = f(x) = (x+1)\ln x + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0; e^2)$.

A. 2016.

B. 2022.

C. 2014.

D. 2023.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} + 2 - m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} + 3 \geq m; \forall x \in (0; e^2)$.

Xét hàm số: $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 3$ với $x \in (0; e^2)$.

Ta có: $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên :

x	0	1	e^2	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$			$5 + \frac{1}{e^2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(x) \geq 4$ với mọi $x \in (0; e^2)$.

Từ đó suy ra $-2018 \leq m \leq 4$.

Vậy có 2023 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 45: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hai đồ thị hàm số $y = 4^x + 1$ và $y = (m^2 - 6m + 2) \cdot 2^x$ không có điểm chung?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $4^x + 1 = (m^2 - 6m + 2) \cdot 2^x$.

Đặt $t = 2^x, t > 0$ ta được phương trình $t^2 - (m^2 - 6m + 2) \cdot t + 1 = 0$. (*)

Đồ thị hai hàm số không có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (*) không có nghiệm dương.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow m^2 - 6m + 2 = \frac{t^2 + 1}{t} = g(t)$.

$$g'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$g'(t)$		0	+
$g(t)$	$+\infty$	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 6m + 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 6$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên có 5 giá trị thỏa mãn.

Câu 46: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \log_{2018} x$ và (C') là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, (C') đối xứng với (C) qua trục tung. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$(C): y = \log_{2018}(x)$$

$\forall M(x; y) \in (C)$. Gọi $M_1(-x; y)$ là điểm đối xứng của M qua $Oy \Rightarrow M_1 \in (C)$.

Do $M_1 \in (C)$ nên $y = \log_{2018}(-x)$. Vậy $f(x) = \log_{2018}(-x) \Rightarrow y = |f(x)| = |\log_{2018}(-x)|$.

$$|\log_{2018}(-x)| = \begin{cases} \log_{2018}(-x) & \text{khi } x \leq -1 \\ -\log_{2018}(-x) & \text{khi } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = |f(x)| = |\log_{2018}(-x)|$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0
y'			
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 47: (Hải Hậu Lần1) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(3x-1) - \frac{m}{x} + 2$

nghiệch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 3\right]$ là:

B. $\left[\frac{-27}{8}; \frac{-4}{3}\right]$. B. $\left(-\infty; \frac{-27}{8}\right]$. C. $\left(-\infty; \frac{-1}{2}\right)$. D. $\left[\frac{-3}{2}; \frac{-4}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \ln(3x-1) - \frac{m}{x} + 2$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 3\right]$.

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{3x-1} + \frac{m}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2}{1-3x} \quad \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right] \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{1-3x}$ trên $\left(\frac{1}{2}; 3\right]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{-3(3x^2 - 2x)}{(1-3x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x) = \frac{3x^2}{1-3x}$ trên $\left(\frac{1}{2}; 3\right]$ như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	+	-	-
$f(x)$	/			/	$\frac{-3}{2} \nearrow \frac{-4}{3}$ $\searrow \frac{-27}{8}$		/

Theo bảng biến thiên: (1) $\Rightarrow m \leq \frac{-27}{8}$.

Câu 48: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. $m \geq \frac{1}{4}$.

B. $m \geq 4$.

C. $m \leq \frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{4} \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 3$ có tập xác định $D = (-\infty; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{x}{x^2 + 4} - m$.

Khi đó hàm số $y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - mx + 3$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 4} - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 4} \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \text{ với } f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ ta có: $f'(x) = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

BBT

x	$-\infty$	-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		0

Từ BBT ta suy ra: $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(2) = \frac{1}{4}$. Suy ra các giá trị của tham số m cần tìm là: $m \geq \frac{1}{4}$.

Câu 49: (Hùng Vương Bình Phước) Số giá trị nguyên của $m < 10$ để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

A. 8.

B. 10.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^2 + mx + 1 > 0; \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m > -\left(x + \frac{1}{x}\right); \forall x \in (0; +\infty)$ (1)

Với $x > 0$ ta có $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ do đó (1) $\Leftrightarrow m \geq -2$.

Khi đó để hàm số $y = \ln(x^2 + mx + 1)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ thì

$$y' = \frac{2x + m}{x^2 + mx + 1} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow 2x + m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -2x, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \text{ (vì } -2x < 0; \forall x > 0)$$

Kết hợp lại ta có $m \geq 0$. Mà $m \in \mathbb{Z}, m < 10 \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$.

Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 50: (Chuyên KHTN) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2 + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019.

B. 2020.

C. 4038.

D. 1009.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2 + 2} - m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 2} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{2x}{x^2 + 2} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét hàm số } g(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} \text{ trên } \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = \frac{4 - 2x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}. \text{ Bảng biến thiên:}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0	

Do $m \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} g(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Vì $m \in [-2019; 2019]$ nên các giá trị m thỏa mãn là $m \in \{-2019; -2018, \dots, -2; -1\}$. Vậy có 2019 giá trị m thỏa mãn.

Câu 51: (Chuyên Thái Bình, lần 3, năm 2017-2018) Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(\cos x + 2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$.

B. $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$.

C. $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

D. $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y = \ln(\cos x + 2) - mx + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x + 2} - m$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ hay $\frac{-\sin x}{\cos x + 2} \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R} (*)$

Xử lý (*) theo hai cách:

Cách 1: (Dùng hàm số).

Xét hàm số $y = g(x) = \frac{-\sin x}{\cos x + 2}$ liên tục và tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ nên ta xét trên $[0; 2\pi]$ (Khoảng chu kỳ).

Khi đó $\frac{-\sin x}{\cos x + 2} \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} g(x)$.

Ta có $g'(x) = \frac{-1 - 2\cos x}{(\cos x + 2)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

Ta có trên $[0; 2\pi]$ thì:

$$g(0) = 0; \quad g(2\pi) = 0; \quad g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}; \quad g\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $\min_{\mathbb{R}} g(x) = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} g(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{-\sqrt{3}}{3}$. Hay phương án chọn là.

B. $\left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$.

Cách 2: (Dùng tính chất lượng giác)

$$\frac{-\sin x}{\cos x + 2} \geq m, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \cos x + \sin x \leq -2m, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2m \geq \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4m^2 \geq m^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Hay phương án chọn là. } \mathbf{B.}$$

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Cách 3: (Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác):

$$\frac{-\sin x}{\cos x + 2} \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} g(x). \text{ Trong đó } g(x) = \frac{-\sin x}{\cos x + 2}.$$

$$\text{Đặt } y_0 = \frac{-\sin x}{\cos x + 2} \Rightarrow y_0 \cos x + \sin x = -2y_0. \text{ Phương trình có nghiệm } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 + 1 \geq 4y_0^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq y_0 \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \min y_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } m \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Hay phương án chọn là. } \mathbf{B.} \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

Câu 52: Tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln\left(\frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}\right) - mx + 2018$ đồng biến trên tập xác định là

$$\mathbf{A.} \left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right].$$

$$\mathbf{B.} \left(-\infty, -1\right].$$

$$\mathbf{C.} \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

$$\mathbf{D.} \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right).$$

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y = \ln\left(\frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}\right) - mx + 2018$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{-4 \cos x}{4 - \sin^2 x} - m = \frac{-4 \cos x}{3 + \cos^2 x} - m$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ hay $\frac{-4 \cos x}{3 + \cos^2 x} \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$

$$\text{Đặt } \cos x = t; |t| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-4 \cos x}{3 + \cos^2 x} = \frac{-4t}{3 + t^2}$$

Khi đó (*) thành $\frac{-4t}{3 + t^2} \geq m \quad \forall t; |t| \leq 1$. Xét hàm $y = \frac{-4t}{3 + t^2}$ trên $D = [-1; 1]$

$$y' = \frac{4(t^2 - 3)}{(3 + t^2)^2} < 0 \quad \forall t \in [-1; 1]. \text{ Hàm số nghịch biến trên } D = [-1; 1] \text{ nên}$$

$$y = \frac{-4t}{3 + t^2} \geq m \quad \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1; 1]} y = y(1) = -1. \text{ Hay phương án chọn là. } \mathbf{B.} \left(-\infty, -1\right].$$

Câu 53: (Chuyên Vinh Lần 2) Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 31^x + 3^x + mx$ trên $\mathbb{R}$ là 2

$$\mathbf{A.} m \in (-10; -5).$$

$$\mathbf{B.} m \in (-5; 0).$$

$$\mathbf{C.} m \in (0; 5).$$

$$\mathbf{D.} m \in (5; 10).$$

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 + m$.

Ta xét các trường hợp:

+ Khi $m > 0$ thì $f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (31^x + 3^x + mx) = -\infty$ nên không thỏa mãn yêu cầu $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

+ Khi $m = 0$ thì $f'(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (31^x + 3^x) = 0$ nên không thỏa mãn yêu cầu $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$

+ Khi $m < 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3 = -m$.

Đặt hàm số $g(x) = 31^x \ln 31 + 3^x \ln 3$ thì $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0; +\infty)$

Mà $-m > 0$ nên tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) = -m$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0	$-m$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ là:

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$f(a)$	

Ta có $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $f(a)$ tại duy nhất giá trị $x = a$

Do đó, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(a) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$

Suy ra $g(0) = -m \Leftrightarrow m = -\ln 31 - \ln 3 = -\ln 93 \in (-5; 0)$.

CÁCH 2

Nhận xét: Ta có $f(0) = 2$

$$\text{Giả thiết bài toán ta có: } f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{31^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \geq -m, \forall x > 0 \\ \frac{31^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \leq -m, \forall x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } -m = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{31^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} \right) = \ln 31 + \ln 3 = \ln 93 \Leftrightarrow m = -\ln 93$$

: (Nguyễn Việt Hải) Tìm m sao cho bất phương trình:

$$1^x + 2^x + 3^x + \dots + 2019^x \geq 2039190 + mx, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ĐS: } m = \ln(2019!)$$

Nhận xét: Để giải tốt dạng toán này học sinh cần vận dụng linh hoạt ứng dụng đạo hàm vào khảo sát hàm số chứa tham số.

Câu 54: (Hải Hậu Lần1) Cho hàm số $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;e]} y + \max_{[1;e]} y = 2$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < 10$.

B. $0 \leq m \leq 2$.

C. $m < -2$.

D. $6 < m < 11$.

Lời giải

Chọn D

Trên đoạn $[1; e]$ ta có: $y' = \frac{m+2}{x(\ln x + 1)^2}$.

• TH1: Nếu $m > -2$ thì $y' > 0, \forall x \in [1; e] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $[1; e]$

$$\Rightarrow \min_{[1; e]} y = y(1) = -2, \max_{[1; e]} y = y(e) = \frac{m-2}{2}.$$

$$\min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = 2 \Leftrightarrow -2 + \frac{m-2}{2} = 2 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (nhận).}$$

• TH2: Nếu $m < -2$ thì $y' < 0, \forall x \in [1; e] \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $[1; e]$

$$\Rightarrow \min_{[1; e]} y = y(e) = \frac{m-2}{2}, \max_{[1; e]} y = y(1) = -2.$$

$$\min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = 2 \Leftrightarrow \frac{m-2}{2} - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (loại).}$$

• TH3: Nếu $m = -2$ thì $y' = 0, \forall x \in [1; e] \Rightarrow$ Hàm số là hàm hằng trên $[1; e]$

$$\Rightarrow \min_{[1; e]} y = \max_{[1; e]} y = -2 \Rightarrow \min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = -4 \text{ (không thỏa mãn giả thiết).}$$

Vậy $m = 10 \in (6; 11)$.

Câu 55: (Chuyên Vinh Lần 2) Giả sử m là số thực thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \log_{31}(x+1) + \log_3(x+1) + mx$ trên $(-1; +\infty)$ là 0. Khi đó:

A. $m \in (-3; -2)$.

B. $m \in (-2; 0)$.

C. $m \in (0; 2)$.

D. $m \in (2; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (-1; +\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3} + m$.

Ta xét các trường hợp:

+ Khi $m \geq 0$ thì $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3} + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ tức $f(x)$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (\log_{31}(x+1) + \log_3(x+1) + mx) = -\infty$ nên không thỏa $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2$.

+ Khi $m < 0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3} = -m$.

Đặt hàm số $g(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 31} + \frac{1}{(x+1)\ln 3}$ thì $g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2 \ln 31} - \frac{1}{(x+1)^2 \ln 3}$ nên $g(x)$

nghịch biến trên $(-1; +\infty)$ và có tập giá trị là $(0; +\infty)$

Mà $-m > 0$ nên tồn tại duy nhất $a \in \mathbb{R}$ sao cho $g(a) = -m$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1	a	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$-m$	0

Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ là:

x	-1	a	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(a)$ $\nearrow$ $\searrow$		

Ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là $f(a)$ tại duy nhất giá trị $x = a$

Do đó, $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(0) \Leftrightarrow a = 0$

Suy ra $g(0) = -m \Leftrightarrow m = -g(0) = -\left(\frac{1}{\ln 31} + \frac{1}{\ln 3}\right) \approx -1,2$.

Câu 56: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số

$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

A. -2016.

B. -2020.

C. 2016.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x_G = 2 + \log_a \frac{1}{2018} = 2 - \log_a 2018$

Ta có $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = f(2 - \log_a 2018) = f(x_G)$

Giả sử $G(x_G; y_G)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và có điểm đối xứng qua điểm I là

$G'(x_{G'}; y_{G'})$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$.

Ta có $I(1;1)$ là trung điểm của GG' .

Do đó ta có $\frac{x_G + x_{G'}}{2} = x_I \Rightarrow \frac{2 - \log_a 2018 + x_{G'}}{2} = 1 \Rightarrow x_{G'} = \log_a 2018$

$G'(x_{G'}; y_{G'})$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$ nên $y_{G'} = a^{\log_a 2018} = 2018$

Ta lại có $\frac{y_G + y_{G'}}{2} = y_I \Rightarrow \frac{y_G + 2018}{2} = 1 \Rightarrow y_G = -2016$.

Vậy $f\left(2 + \log_a \frac{1}{2018}\right) = f(x_G) = y_G = -2016$.

GTNN, GTLN MŨ – LÔGARIT

DẠNG 1: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Câu 1: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = \frac{-1}{\log_b^2 a} + \log_a \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{7}{4}.$$

A. $P_{\max} = 2$.

B. $P_{\max} = 1$.

C. $P_{\max} = 0$.

D. $P_{\max} = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$P = \frac{-1}{\log_b^2 a} + \log_a \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{7}{4} = -\log_a^2 b + \log_a b + \frac{3}{4} = -\left(\log_a b - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow P_{\max} = 1.$$

Câu 2: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi có số thực k sao cho $b = a^k$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0 < k < \frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2} < k < 1$.

C. $-1 < k < -\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2} < k < 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a(ab) + \sqrt{\log_a a - \log_a b}$$

$$= 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b} = -\left(\sqrt{1 - \log_a b} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \sqrt{1 - \log_a b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} < k < 1.$$

Câu 3: Cho hai số thực $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất là M khi có số thực m sao cho $b = a^m$. Tính $P = M + m$.

A. $P = \frac{81}{16}$.

B. $P = \frac{23}{8}$.

C. $P = \frac{19}{8}$.

D. $P = \frac{49}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$T = \frac{2}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = 2\log_a(ab) + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 2(1 + \log_a b) + \sqrt{1 - \log_a b}$$

$$= -2\left(\sqrt{1 - \log_a b} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{33}{8} \leq \frac{33}{8}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{1 - \log_a b} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{15}{16} \Leftrightarrow b = a^{\frac{15}{16}} \Rightarrow m = \frac{15}{16}, M = \frac{33}{8}.$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{15}{16} + \frac{33}{8} = \frac{81}{16}.$$

Câu 4: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $3^a = 5^b = 15^{-c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a + b + c).$$

A. $-3 - \log_5 3$.

B. -4 .

C. $-2 - \sqrt{3}$.

D. $-2 - \log_3 5$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3^a = 5^b = 15^{-c} \Leftrightarrow a = b \log_3 5 = -c \log_3 15 = -c(1 + \log_3 5) \Rightarrow \log_3 5 = \frac{a}{b} = \frac{-c}{b+c}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ac = 0.$$

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) - 4(a+b+c) = ((a+b+c)-2)^2 - 4 \geq -4$$

Câu 5: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 - 4y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \log_2(x+2y) \cdot \log_2(2x-4y).$$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Theo giả thiết, ta có } (x-2y)(x+2y) = 1 \text{ suy ra } x-2y = \frac{1}{x+2y}.$$

$$\text{Vì vậy } P = \log_2(x+2y) \cdot \log_2 \frac{2}{x+2y} = \log_2(x+2y) [1 - \log_2(x+2y)]$$

$$= -\left[\log_2(x+2y) - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \frac{1}{x+2y} \\ \log_2(x+2y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = \sqrt{2} \\ x-2y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Câu 6: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = e$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \ln a \cdot \ln b + 2 \ln b \cdot \ln c + 5 \ln c \cdot \ln a \text{ là } \frac{p}{q} \text{ với } p, q \text{ là các số nguyên dương và } \frac{p}{q} \text{ tối giản. Tính}$$

$$S = 2p + 3q. \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

A. $S = 7$.

B. $S = 13$.

C. $S = 16$.

D. $S = 19$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } a = e^x, b = e^y, c = e^z$$

$$abc = e \Rightarrow x + y + z = 1 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } M = \ln a \cdot \ln b + 2 \ln b \cdot \ln c + 5 \ln c \cdot \ln a \Rightarrow M = xy + 2yz + 5zx.$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow z = 1 - x - y \text{ thay vào biểu thức chứa } M \text{ ta có:}$$

$$M = -2y^2 - 5x^2 - 6xy + 2y + 5x = -2\left(y + \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$\max M = \frac{5}{2} \text{ khi } x = 2, y = \frac{5}{2}, z = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } p = 5, q = 2 \Rightarrow S = 16$$

Câu 7: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $(\sqrt{5} + 1)^{x+y} - 4(\sqrt{5} - 1)^{x+y-1} = (\sqrt{5} - 3)2^{x+y-1}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + 2y$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{13}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Từ điều kiện của đề bài ta có: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x+y} - \frac{4}{\sqrt{5}-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x+y} = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x+y}$ ta có $t - \frac{4}{(\sqrt{5}-1)t} = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \Leftrightarrow t = -2(l) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2(l) \\ t = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$.

Vậy $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x+y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x+y=1$.

Khi đó $P = x(1-x) + 2(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$

Chọn A

Câu 8: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{y}{2\sqrt{1+x}} = -y^2 + 3y + x - 3\sqrt{1+x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x - 100y$.

A. -2499.

B. -2501.

C. -2500.

D. -2490.

Lời giải

Chọn B

Từ điều kiện bài toán ta có: $\log_2 y + y^2 - 3y = \log_2 \sqrt{1+x} + (1+x) - 3\sqrt{1+x} \quad y = \sqrt{1+x}$.

Khi đó $P = x - 100\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} - 50)^2 - 2501 \geq -2501$.

Dấu bằng đạt tại $x = 2499, y = 50$.

Câu 9: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $4^a - 2^{a+1} + 2(2^a - 1)\sin(2^a + b - 1) + 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b$.

A. $\frac{\pi}{2} - 1$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $\pi - 1$.

D. $\frac{3\pi}{2} - 1$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi biểu thức, ta có

$$(2^a)^2 - 2 \cdot 2^a + 2(2^a - 1)\sin(2^a + b - 1) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^a - 1)^2 + 2(2^a - 1)\sin(2^a + b - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^a - 1 + \sin(2^a + b - 1))^2 + 1 - \sin^2(2^a + b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^a - 1 + \sin(2^a + b - 1))^2 + \cos^2(2^a + b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2^a + b - 1) = 0 \\ 2^a - 1 + \sin(2^a + b - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a + b - 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2^a - 1 \pm 1 = 0 \end{cases}$$

Do đó $a = 1; b = \frac{\pi}{2} - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Do $b > 0 \Rightarrow b \geq \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow S \geq 1 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 1$.

Câu 10: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{y}{x}$. Tính $a+b$.

- A. $a+b=\sqrt{10}$. B. $a+b=2\sqrt{14}$. C. $a+b=\frac{11}{6}$. D. $a+b=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{2x^2+xy+3y^2}(11x+20y-40)=1 \Leftrightarrow 2x^2+xy+3y^2-11x-20y+40=0$.

Khi đó $y=Sx$ và $2x^2+Sx^2+3S^2x^2-11x-20Sx+40=0$

$$\Leftrightarrow (4S^2+2)x^2-(20S+11)x+40=0.$$

$$\Delta_x = (20S+11)^2 - 160(4S^2+2) \geq 0 \Leftrightarrow 240S^2 - 440S + 199 \leq 0.$$

$$\text{Do đó } a+b = \frac{440}{240} = \frac{11}{6}.$$

Câu 11: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log(x+3y)+\log(x-3y)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x-|y|$.

- A. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\sqrt{10}$. D. 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} x+3y > 0 \\ x-3y > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ và $\log(x^2-9y^2)=1 \Leftrightarrow x^2-9y^2=10$.

Khi đó $|y|=x-S \Rightarrow x^2-9(x-S)^2=10 \Leftrightarrow 8x^2-18Sx+9S^2+10=0$.

Phương trình này phải có nghiệm dương, do đó $\begin{cases} \Delta'_x = 81S^2 - 8(9S^2+10) \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow S \geq \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

Câu 12: Cho hai số thực x, y . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x-2|y|+1$.

- A. $\sqrt{10}+1$. B. $\frac{5\sqrt{2}-3}{2}$. C. $\frac{3+5\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{3+2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} x+3y > 0 \\ x-3y > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ và $\log(x^2-9y^2)=1 \Leftrightarrow x^2-9y^2=10$.

Khi đó thay vào giả thiết, ta có:

$$|y| = \frac{x+1-S}{2} \Rightarrow x^2 - 9\left(\frac{x+1-S}{2}\right)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 18x(1-S) + 9S^2 - 18S + 49 = 0.$$

Phương trình này phải có nghiệm dương do đó:

$$\begin{cases} 81(1-S)^2 - 5(9S^2 - 18S + 49) \geq 0 \\ S-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow S \geq \frac{3+5\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 13: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c > b > a > 1$ và $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Đặt

$T = \log_b c - 2\log_a b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $T \in (-3; -1)$. B. $T \in (-1; 2)$. C. $T \in (2; 5)$. D. $T \in (5; 10)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1 \Leftrightarrow 6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a c - \log_a b - 2\log_b c + 1.$$

$$\Leftrightarrow 6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a b \log_b c - \log_a b - 2\log_b c + 1.$$

$$\Leftrightarrow 6\log_a^2 b = \log_a b (\log_b c - 1) + (\log_b c - 1)^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\log_a^2 b}{(\log_b c - 1)^2} - \frac{\log_a b}{(\log_b c - 1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\left(\frac{\log_a^2 b}{(\log_b c - 1)}\right)^2 - \frac{\log_a b}{\log_b c - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_a b}{\log_b c - 1} = \frac{-1}{3} & (1) \\ \frac{\log_a b}{\log_b c - 1} = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}.$$

TH1: (1) $\Leftrightarrow 3\log_a b = 1 - \log_b c \Leftrightarrow \log_b c = 1 - 3\log_a b$.

Vậy $T = 1 - 5\log_a b$.

Ta có $\log_a b > \log_a a = 1 \Rightarrow T < 1 - 5\log_a a = -4$.

TH2: (2) $\Leftrightarrow 2\log_a b = \log_b c - 1 \Leftrightarrow \log_b c = 2\log_a b + 1$.

Vậy $T = 1$.

Câu 14: Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 3$. Gọi M, m

lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$. Tính

$S = 2m + 3M$.

- A. $S = \frac{2}{3}$. B. $S = \frac{1}{3}$. C. $S = 3$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = \log_a b, y = \log_b c \Rightarrow x = \log_a b, y = \log_b c \Rightarrow P = x - y$ và thay vào điều kiện ta được:

$$x^2 + y^2 = xy - x - 2y - 1 (*)$$

Từ $P = x - y \Rightarrow y = x - P$ thế vào (*) ta được:

$$x^2 + (x - P)^2 = x(x - P) - x - 2(x - P) - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3 - P)x + (P - 1)^2 = 0$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = (3 - P)^2 - 4(P - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq \frac{5}{3}$$

Vậy $m = -1$ và $M = \frac{5}{3} \Rightarrow S = 2m + 3M = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{5}{3} = 3$.

Câu 15: Cho các số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b + \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a b - \log_b c$.

A. $\frac{1-2\sqrt{10}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{10}-1}{3}$. C. $\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}+2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = \log_a b$, $y = \log_b c \Rightarrow P = x - y$ và thay vào điều kiện ta có $x^2 + y^2 = xy - x - 2y + 1$.

Khi đó $y = x - P$ và

$$x^2 + (x - P)^2 = x(x - P) - x - 2(x - P) + 1 \Leftrightarrow x^2 + (3 - P)x + P^2 - 2P - 1 = 0.$$

Phương trình có nghiệm khi

$$\Delta = (3 - P)^2 - 4(P^2 - 2P - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sqrt{10}}{3} \leq P \leq \frac{1 + 2\sqrt{10}}{3}.$$

Câu 16: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\log a \cdot \log b + \log b \cdot \log c + 3 \log c \cdot \log a = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log^2 a + \log^2 b + \log^2 c$ là $\frac{-m + \sqrt{n}}{p}$ với m, n, p là các số nguyên dương

và $\frac{m}{p}$ tối giản. Tính $T = m + n + p$.

A. $T = 64$. B. $T = 16$. C. $T = 102$. D. $T = 22$.

Lời giải

Chọn D

Cách 2: mẹo trắc nghiệm, vai trò của x và z là như nhau nên cho $x = z$ ta có

$$\begin{cases} P = 2x^2 + y^2 \\ 3x^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Rightarrow P(3x^2 + 2xy) = 2x^2 + y^2 \Leftrightarrow (3P - 2)x^2 + 2Pxy - y^2 = 0$$

$$\Delta'_x = P^2 y^2 + (3P - 2)y^2 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 + (3P - 2) \geq 0 \Rightarrow P \geq \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

Câu 17: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$.

A. $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$. B. $(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$. C. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$. D. $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi giả thiết ta có $4x + 4y - 4 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 2$.

Đây là một hình tròn (C_1) có tâm $I_1(2; 2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Và $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = m \Rightarrow m \geq 0$ và đây là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$, $R_2 = \sqrt{m}$.

Ta cần tìm điều kiện của m để $(C_1), (C_2)$ có duy nhất là một điểm chung. Do đó $(C_1), (C_2)$

tiếp xúc ngoài với nhau. Vậy có điều kiện $I_1 I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{m} + \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2.$$

DẠNG 2: ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 18: Cho các số thực dương x, y, z bất kì thỏa mãn $xyz = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 y + 4} + \sqrt{\log^2 z + 4}.$$

A. $\sqrt{29}$. B. $\sqrt{23}$. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{27}$.

Lời giải

Chọn C

Để ý y, z đối xứng nên ta sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{m^2+n^2} \geq \sqrt{(a+m)^2 + (b+n)^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &\geq \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(\log y + \log z)^2 + (2+2)^2} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2(yz) + 16} = \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{\log^2 \frac{10}{x} + 16} \\ &= \sqrt{\log^2 x + 1} + \sqrt{(1 - \log x)^2 + 16} \geq \sqrt{(1 - \log x + \log x)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{26}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\log x}{1 - \log x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10}, y = z = \sqrt[5]{10}$.

Câu 19: Xét các số thực $a, b, c \in (1; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_{bc}(2a^2 + 8a - 8) + \log_{ca}(4a^2 + 16a - 16) + \log_{ab}(c^2 + 4c - 4).$$

A. $\log_3 \frac{289}{2} + \log_9 8$. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Với $x \in (1; 2]$ ta có $x^2 + 4x - 4 \geq x^3 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4) \leq 0$: luôn đúng.

Khi đó ta có $P \geq \log_{bc} 2a^3 + \log_{ca} 4b^3 + \log_{ab} c^3 = \log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 + 3(\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c)$.

Mặt khác $\log_{bc} 2 + \log_{ca} 4 = \frac{1}{\log_2 bc} + \frac{1}{\log_4 ca} \geq \frac{1}{\log_2(2.2)} + \frac{1}{\log_4(2.2)} = \frac{3}{2}, \forall a, b, c \in (1; 2]$, và

$$\log_{bc} a + \log_{ca} b + \log_{ab} c = \frac{\ln a}{\ln b + \ln c} + \frac{\ln b}{\ln c + \ln a} + \frac{\ln c}{\ln a + \ln b} \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó $P \geq \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} = 6$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

ÁP DỤNG BDT CAUCHY

Câu 20: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{a}{b} \right)^2 + 3 \log_b \left(\frac{b}{a} \right).$$

A. 5. **B.** $5 - \sqrt{6}$. **C.** $5 - 2\sqrt{6}$. **D.** $4 - \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi và sử dụng AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} P &= 2 \log_a \left(\frac{a}{b} \right) + 3 \log_b \left(\frac{b}{a} \right) = 2(1 - \log_a b) + 3(1 - \log_b a) \\ &= 5 - (3 \log_b a + 2 \log_a b) \leq 5 - 2\sqrt{3 \log_b a \cdot 2 \log_a b} = 5 - 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow 3 \log_b a = 2 \log_a b \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Câu 21: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b}.$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{13}{4}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } S = \log_a \left(\frac{a^2 + 4b^2}{4} \right) + \frac{1}{4 \log_{ab} b} \geq \log_a(ab) + \frac{1}{4} \log_b(ab) = \frac{5}{4} + \log_a b + \frac{1}{4} \log_b a.$$

$$\text{Vậy } S \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{4} \log_b a} = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 4b^2 \\ \log_a b = \frac{1}{4} \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Câu 22: Cho các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

A. $S = 8$.

B. $S = 4$.

C. $S = 16$.

D. $S = 8\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_2 x + \log_2 y = \log_2(x + y) \Leftrightarrow xy = x + y \leq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 \Rightarrow x + y \geq 4.$$

$$\text{Do đó: } S = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = y = 2.$$

Câu 23: Cho các số thực $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{a^2}(a^2 b) + \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $1 - 2\sqrt{3}$.

B. $1 - 2\sqrt{2}$.

C. $1 + 2\sqrt{3}$.

D. $1 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{2} \log_a(a^2 b) + 6 \log_b a = \frac{\log_a b + 2}{2} + \frac{6}{\log_a b} = 1 + \left(\frac{1}{2} \log_a b + \frac{6}{\log_a b} \right).$$

$$\text{Với } a > 1 > b > 0 \Rightarrow \log_a b < 0 \text{ do đó}$$

$$P = 1 + \left(\left(-\frac{1}{2} \log_a b \right) + \left(-\frac{6}{\log_a b} \right) \right) \leq 1 - 2\sqrt{\left(-\frac{1}{2} \log_a b \right) \left(-\frac{6}{\log_a b} \right)} = 1 - 2\sqrt{3}.$$

Câu 24: Cho hai số thực dương a, b nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{4ab}{a + 4b} \right) + \log_b(ab).$$

A. $\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{5 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{4ab}{a + 4b} \leq \frac{4ab}{2\sqrt{a \cdot 4b}} = \sqrt{ab} \text{ và cơ số } 0 < a < 1 \text{ nên } \log_a \left(\frac{4ab}{a + 4b} \right) \geq \log_a \sqrt{ab} = \frac{1 + \log_a b}{2}.$$

$$\text{Vì vậy } P \geq \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2} \log_a b + \log_b a \right) \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2} \log_a b \cdot \log_b a} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b \\ \frac{1}{2} \log_a b = \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b \\ b = a^{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Câu 25: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức

$$P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy.$$

A. $P_{\max} = \frac{27}{2}.$

B. $P_{\max} = 18.$

C. $P_{\max} = 27.$

D. $P_{\max} = 12.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $4 = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} \Leftrightarrow 4 \geq 2^{x+y} \Leftrightarrow x + y \leq 2.$

Suy ra $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1.$

Khi đó $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy = 2(x^3 + y^3) + 4x^2y^2 + 10xy.$

$$P = 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + (2xy)^2 + 10xy$$

$$\leq 4(4 - 3xy) + 4x^2y^2 + 10xy = 16 + 2x^2y^2 + 2xy(xy - 1) \leq 18$$

Vậy $P_{\max} = 18$ khi $x = y = 1.$

Câu 26: (Ngô Quyền Hà Nội) Cho $m = \log_a(\sqrt[3]{ab})$, với $a > 1, b > 1$ và $P = \log_a^2 b + 16 \log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 2.$

B. $m = 1.$

C. $m = \frac{1}{2}.$

D. $m = 4.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_a b$, ta có $t > 0$ (vì $a > 1, b > 1$).

Khi đó $P = t^2 + \frac{16}{t} = t^2 + \frac{8}{t} + \frac{8}{t} \geq 3\sqrt{t^2 \cdot \frac{8}{t} \cdot \frac{8}{t}} = 12.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $t^2 = \frac{8}{t} \Leftrightarrow t = 2.$

Như thế, P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 12 khi $t = 2.$

Vậy $m = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) = \frac{1}{3}(1 + t) = 1.$

Câu 27: (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Cho x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + y)$. Giá trị nhỏ nhất của $3x + y$ bằng

A. 15.

B. $4 + 2\sqrt{3}.$

C. 9. **D.** $5 + 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x, y > 0.$

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + y) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(xy) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + y)$

$$\Leftrightarrow xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow (x-1)y \geq x^2 \quad (1).$$

Từ (1) $\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Do đó (1) $\Leftrightarrow y \geq \frac{x^2}{x-1}.$

Khi đó $3x + y \geq 3x + \frac{x^2}{x-1} = 4x + 1 + \frac{1}{x-1} = 4(x-1) + \frac{1}{x-1} + 5 \geq 2\sqrt{4(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} + 5 = 9, \forall x > 1.$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 0 \\ y = \frac{x^2}{x-1} \\ 4(x-1) = \frac{1}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 0 \\ y = \frac{x^2}{x-1} \\ x-1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $3x + y$ bằng 9 khi $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}.$

Câu 28: Giá trị nhỏ nhất của $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn

$\sqrt{b} > a > 1$ là

A. 30.

B. 40.

C. 18.

D. 60.

Lời giải

Chọn C

$$(\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{a} \cdot \sqrt{a} \right)^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left(1 + \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{a} \right)^2$$

$$= 4(\log_a b)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{b}}{a}} \right)^2 = 4(\log_a b)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{\log_a b - 2} \right)^2$$

$$\text{Đặt } t = \log_a b \Rightarrow P = 4t^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{t-2} \right)^2 = 4t^2 + 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2 \geq 2\sqrt{4t^2 \cdot 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2} \text{ Theo BĐT Cosy}$$

$$\Rightarrow P_{\min} = 2\sqrt{4t^2 \cdot 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2} \text{ Dấu bằng xảy ra khi:}$$

$$4t^2 = 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = \sqrt{6} \left(\frac{t-1}{t-2} \right) \\ 2t = -\sqrt{6} \left(\frac{t-1}{t-2} \right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t(t-2) = \sqrt{6}(t-1) \\ 2t(t-2) = -\sqrt{6}(t-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - (4 + \sqrt{6})t + \sqrt{6} = 0 \\ 2t^2 - (4 - \sqrt{6})t - \sqrt{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4 + \sqrt{6} - \sqrt{22}}{4} \\ t = \frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{22}}{4} \\ t = \frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{22}}{4} \\ t = \frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{22}}{4} \end{cases}$$

Câu 29: Cho $0 < a < 1 < b$, $ab > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_a ab + \frac{4}{(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} ab}$.

A. $P = 2$.B. $P = 4$.C. $P = 3$.D. $P = -4$.

Lời giải

Chọn DDo $0 < a < 1 < b$, $ab > 1$ nên suy ra $\log_a b < 0$.Mặt khác ta có $\log_b ab > 0 \Leftrightarrow \log_b a + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \log_a b}{\log_a b} > 0 \Rightarrow \log_a b + 1 < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_a ab + \frac{4}{(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} ab} = 1 + \log_a b + \frac{4}{(1 - \log_a b)(\log_{ab^{-1}} a + \log_{ab^{-1}} b)} \\ &= 1 + \log_a b + \frac{4}{(1 - \log_a b) \left(\frac{1}{1 - \log_a b} + \frac{\log_a b}{1 - \log_a b} \right)} = 1 + \log_a b + \frac{4}{1 + \log_a b}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $-P = (-1 - \log_a b) + \frac{4}{-1 - \log_a b} \geq 4$.Suy ra $P \leq -4$.Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 1 + \log_a b = -2 \Leftrightarrow \log_a b = -3 \Leftrightarrow a^3 b = 1$.**Câu 30:** Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > 1 > b > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \log_a a^2 b + \log_{\sqrt{b}} a^3.$$

A. $P_{\max} = 1 + 2\sqrt{3}$.B. $P_{\max} = -2\sqrt{3}$.C. $P_{\max} = -2$.D. $P_{\max} = 1 - 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } P = \log_a a^2 b + \log_{\sqrt{b}} a^3 = \frac{\log_a a^2 b}{\log_a a^2} + \frac{\log_a a^3}{\log_a \sqrt{b}} = \frac{\log_a b + 2}{2} + \frac{6}{\log_a b}.$$

Đặt $t = \log_a b$. Do $a > 1 > b > 0 \rightarrow \log_a b < \log_a 1 = 0 \rightarrow t < 0$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{t+2}{2} + \frac{6}{t} = \frac{t}{2} + \frac{6}{t} + 1 = 1 - \left(-\frac{t}{2} - \frac{6}{t} \right) \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} 1 - 2\sqrt{3}.$$

Chọn D**Câu 31:** Cho các số thực $a, b, c > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a (bc) + \log_b (ca) + 4 \log_c (ab).$$

A. 6.

B. 12.

C. 10.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_a (bc) + \log_b (ca) + 4 \log_c (ab) = \log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_a a + 4(\log_c a + \log_c b) \\ &= \log_a b + \frac{1}{\log_a b} + \log_a c + \frac{4}{\log_a c} + \log_b c + \frac{4}{\log_b c} \geq 2 + 4 + 4 = 10. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} a = b \\ c = a^2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Câu 32: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Biết biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4a^3} \right) + 12 \log_{\frac{2}{a}} a \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } M \text{ khi } a = b^m. \text{ Tính } T = M + m.$$

A. $T = 15$.B. $T = 12$.C. $T = \frac{37}{3}$.D. $T = \frac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(2b-1)^2(b+1) \geq 0 \Rightarrow 3b-1 \leq 4b^3 \Rightarrow \frac{3b-1}{4a^3} \leq \frac{b^3}{a^3}$.

Đặt $x = \log_a b$ ($x > 1$) với mọi $0 < b < a < 1$.

$$P \geq \log_a \frac{b^3}{a^3} + 12 \left(\frac{1}{\log_a \frac{b}{a}} \right)^2 = 3\log_a b - 3 + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} = 3x - 3 + \frac{12}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{12}{(x-1)^2} \geq 3\sqrt{\frac{3}{2}(x-1) \cdot \frac{3}{2}(x-1) \cdot \frac{12}{(x-1)^2}} = 9.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3}{2}(x-1) = \frac{12}{(x-1)^2} \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow \log_a b = 3 \Leftrightarrow b = a^3 \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{3}}$.

Vậy $M = 9, m = \frac{1}{3}$. Vậy $T = \frac{28}{3}$.

Câu 33: Với $a, b, c > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(bc) + 3\log_b(ca) + 4\log_c(ab)$.

A. 16.

B. $6 + 4\sqrt{3}$.C. $4 + 6\sqrt{3}$.D. $4 + 8\sqrt{3}$.**Lời giải****Chọn C**

Sử dụng bất đẳng thức **AM - GM**, ta có:

$$P = (\log_a b + \log_a c) + 3(\log_b c + \log_b a) + 4(\log_c a + \log_c b)$$

$$= (\log_a b + 3\log_b a) + (3\log_b c + 4\log_c b) + (\log_a c + 4\log_c a)$$

$$\geq 2\sqrt{\log_a b \cdot 3\log_b a} + 2\sqrt{3\log_b c \cdot 4\log_c b} + 2\sqrt{\log_a c \cdot 4\log_c a}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{12} + 4 = 4 + 6\sqrt{3}.$$

Câu 34: Cho các số thực $a, b, c > 1$. Tính $\log_b(ca)$ khi biểu thức $S = \log_a(bc) + 2\log_b(ca) + 9\log_c(ab)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{8(2\sqrt{2}-1)}{7}$.

C. $3 + \sqrt{2}$.

D. $\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$.

Lời giải**Chọn A**

Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức **AM - GM** ta có:

$$S = (\log_a b + \log_a c) + 2(\log_b c + \log_b a) + 9(\log_c a + \log_c b)$$

$$= (\log_a b + 2\log_b a) + (2\log_b c + 9\log_c b) + (\log_a c + 9\log_c a)$$

$$\geq 2\sqrt{\log_a b \cdot 2\log_b a} + 2\sqrt{2\log_b c \cdot 9\log_c b} + 2\sqrt{\log_a c \cdot 9\log_c a}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{18} + 2\sqrt{9} = 6 + 8\sqrt{2}.$$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} \log_a b = 2\log_b a = \sqrt{2} \\ 2\log_b c = 9\log_c b = \sqrt{18} \Rightarrow \log_b(ca) = \log_b c + \log_b a = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ \log_a c = 9\log_c a = \sqrt{9} \end{cases}$

Câu 35: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \log_a b + \log_b c + \sqrt{\log_c a}.$$

- A. $2\sqrt{2}$. B. 3. C. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_a b, \log_b c, \log_c a > 0$ với $0 < a, b, c < 1$.

Sử dụng bất đẳng thức Coossi ta có:

$$\log_a b + \log_b c \geq 2\sqrt{\log_a b \cdot \log_b c} = 2\sqrt{\log_a c}.$$

$$\text{Do đó } S \geq 2\sqrt{\log_a c} + \sqrt{\log_c a} \geq 2\sqrt{2\sqrt{\log_a c} \cdot \sqrt{\log_c a}} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 36: Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_{x_1} \left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2} \left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_{x_n} \left(x_1 - \frac{1}{4}\right).$$

- A. $2n$. B. n . C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(x_k - \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x_k^2 \geq x_k - \frac{1}{4}, \forall x_k \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$ do đó với cơ số $0 < x_k < 1$ ta có

$$P \geq \log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_2} x_3^2 + \dots + \log_{x_n} x_1^2 = 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \dots + \log_{x_n} x_1)$$

$$\geq 2.n\sqrt{\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \dots \log_{x_n} x_1} = 2n.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{2}.$$

Câu 37: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $5\log_2^2 a + 16\log_2^2 b + 27\log_2^2 c = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \log_2 a \log_2 b + \log_2 b \log_2 c + \log_2 c \log_2 a$.

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c$, ta có $5x^2 + 16y^2 + 27z^2 = 1$ và $S = xy + yz + zx$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức ta có:

$$11x^2 + 22y^2 + 33z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33}} = 6(x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 16y^2 + 27z^2 \geq 12(xy + yz + zx) \Rightarrow S \leq \frac{1}{12}.$$

Câu 38: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x+y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2$.

- A. $2\sqrt[3]{4}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 4. D. $4\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x+y) \Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 \sqrt{x+y} \Leftrightarrow xy = \sqrt{x+y}.$$

$$S = x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy ta có } \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = \sqrt{x+y} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = \sqrt{x+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = \sqrt{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^4 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0(L) \\ x = \sqrt[3]{2}(TM) \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min_s = 2\sqrt[3]{4}.$$

Câu 39: Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{1}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{ab}} b}$ là $\frac{m}{n}$ với

m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $P = 2m + 3n$.

A. $P = 30$.

B. $P = 42$.

C. $P = 24$.

D. $P = 35$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } S = \log_a ab + \log_b \sqrt[4]{ab} = (1 + \log_a b) + \frac{1}{4}(\log_a b + 1) = \frac{5}{4} + \left(\log_a b + \frac{1}{4}\log_b a\right)$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\log_a b \cdot \frac{1}{4}\log_b a} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Vậy } m = 9, n = 4 \Rightarrow P = 18 + 12 = 30.$$

Câu 40: Cho các số thực $a, b \in (1; 2]$ thỏa mãn $a < b$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2\log_a(b^2 + 4b - 4) + \log_{\frac{b}{a}} a \text{ là } m + 3\sqrt[3]{n} \text{ với } m, n \text{ là các số nguyên dương. Tính } S = m + n.$$

A. $S = 9$.

C. $S = 18$.

D. $S = 54$.

C. $S = 15$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_{\frac{b}{a}} a = \frac{1}{\log_a \frac{b}{a}} = \frac{1}{(\log_a b - 1)^2}.$$

Với mọi $b \in (1; 2]$, ta có $b^2 + 4b - 4 \geq b^3$ vì tương đương với $(b-1)(b^2-4) \leq 0$.

Dấu bằng đạt tại $b = 2$.

$$\text{Khi đó } \log_a(b^2 + 4b - 4) \geq \log_a b^3 = 3\log_a b.$$

$$\text{Đặt } x = \log_a b (x > 1).$$

$$P \geq 6x + \frac{1}{(x-1)^2} = 3(x-1) + 3(x-1) + \frac{1}{(x-1)^2} + 6.$$

$$\Rightarrow P \geq 6 + 3\sqrt[3]{3(x-1) \cdot 3(x-1) \cdot \frac{1}{(x-1)^2}} = 6 + 3\sqrt[3]{9}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } 3(x-1) = \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow \log_a b = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Câu 41: Cho $a > 1, b > 1$. Tính $S = \log_a \sqrt{ab}$, khi biểu thức $P = \log_a^2 b + 8\log_b a$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $S = 6\sqrt[3]{2}$.

B. $S = \frac{1 + \sqrt[3]{4}}{2}$.

C. $S = \sqrt[3]{4}$.

D. $S = 2(1 + \sqrt[3]{4})$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \log_a^2 b + 8 \log_b a = \log_a^2 b + \frac{4}{\log_a b} + \frac{4}{\log_a b} \geq 3 \sqrt[3]{\log_a^2 b \cdot \frac{4}{\log_a b} \cdot \frac{4}{\log_a b}} = 3 \sqrt[3]{16}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \log_a^2 b = \frac{4}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b = \sqrt[3]{4} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1 + \sqrt[3]{4}}{2}.$$

Câu 42: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức $\log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A. $9 + 2^{\sqrt{3}}$.

B. $3 + 9^{\sqrt{2}}$.

C. $3 + 3\sqrt{2}$.

D. $2 + 9\sqrt{2}$.

Lời giải

$$P = \log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81) \geq 2 \sqrt{\log_{3a} b \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)} = 2 \sqrt{\log_{3a} (a^4 - 9a^2 + 81)}$$

$$a^4 + 81 \geq 2 \sqrt{a^4 \cdot 81} = 18a^2 \Rightarrow 2 \sqrt{\log_{3a} (a^4 - 9a^2 + 81)} \geq 2 \sqrt{\log_{3a} (18a^2 - 9a^2)} = 2 \sqrt{\log_{3a} (9a^2)} = 2\sqrt{2}$$

$$P_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 81 \\ \log_{3a} b = \log_b (a^4 - 9a^2 + 81) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \log_9 b = \log_b 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow a + b = 3 + 9^{\sqrt{2}}$$

Câu 43: (THTT lần 5) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) \geq \log_2 (6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$ bằng

A. $\frac{59}{3}$.

B. 19.

C. $\frac{53}{3}$.

D. $8 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 6 \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có:

$$\log_2 x + x(x+y) \geq \log_2 (6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 \geq \log_2 [x(6-y)] + x(6-y) (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2 t + t \text{ với } t > 0, \text{ Ta có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0 \text{ nên hàm số}$$

$$f(t) = \log_2 t + t \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow f(x^2) \geq f[x(6-y)] \Leftrightarrow x^2 \geq x(6-y) \Leftrightarrow x \geq 6-y \Leftrightarrow x+y \geq 6 (**) \text{ (do } x > 0)$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cô si cho các cặp số dương và bất đẳng thức (**), ta có:

$$P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{3}{2}(x+y) + \left(\frac{3x}{2} + \frac{6}{x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right) \geq \frac{3}{2} \cdot 6 + 2\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{6}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{8}{y}} = 19.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x+y=6 \\ \frac{3x}{2} = \frac{6}{x} \\ \frac{y}{2} = \frac{8}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}. \text{ Vậy giá trị nhỏ nhất của } P \text{ bằng } 19.$$

Câu 44: (THTT số 3) Với các số thực dương a, b để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2}$ có đúng một đường tiệm cận, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{(a+1)} \frac{b}{2}$.

A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $a, b > 0$ nên hàm số luôn có tập xác định $D = \left(-\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Mà $y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2} = \frac{a+bx-2}{(x-2)(\sqrt{a+bx} + \sqrt{2})}$, đặt $f(x) = a+bx-2$.

Để đồ thị hàm số trên có đúng một đường tiệm cận thì $f(2) = 0 \Leftrightarrow a+2b=2$.

Đặt $a+1=x, \frac{b}{2}=y$ ta suy ra $x+4y=3$.

$\Rightarrow P = \log_x y$, (do $a > 0$ nên $x > 1$).

Lại có $3 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 4y \geq 3\sqrt[3]{x^2y} \Leftrightarrow x^2y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{x^2}$.

Vậy $P = \log_x y \leq \log_x \left(\frac{1}{x^2}\right) = -2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 45: (Sở Hưng Yên Lần1) Cho các số thực a, b, m, n sao cho $2m+n < 0$ và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \log_2(a^2+b^2+9) = 1 + \log_2(3a+2b) \\ 9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m+n+2)^2+1] = 81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2}$.

A. $2\sqrt{5}-2$.

B. 2.

C. $\sqrt{5}-2$.D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2(a^2+b^2+9) = 1 + \log_2(3a+2b) \Leftrightarrow \log_2(a^2+b^2+9) = \log_2[2(3a+2b)]$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+9 = 6a+4b \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-2)^2 = 4.$$

Gọi $H(a;b)$, suy ra H thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;2)$, bán kính $R=2$.

$$\text{Lại có } 9^{-m} \cdot 3^{-n} \cdot 3^{\frac{-4}{2m+n}} + \ln[(2m+n+2)^2+1] = 81$$

$$\Leftrightarrow 3^{-(2m+n)+\left(\frac{-4}{2m+n}\right)} + \ln[(2m+n+2)^2+1] = 81, (1)$$

Với $\forall m, n$ thỏa mãn $2m+n < 0$, ta có:

$$+) -(2m+n) + \frac{-4}{2m+n} \geq 2\sqrt{[-(2m+n)] \cdot \left(\frac{-4}{2m+n}\right)} = 4 \Rightarrow 3^{-(2m+n) + \left(\frac{-4}{2m+n}\right)} \geq 81$$

$$+) \ln[(2m+n+2)^2 + 1] \geq \ln 1 = 0.$$

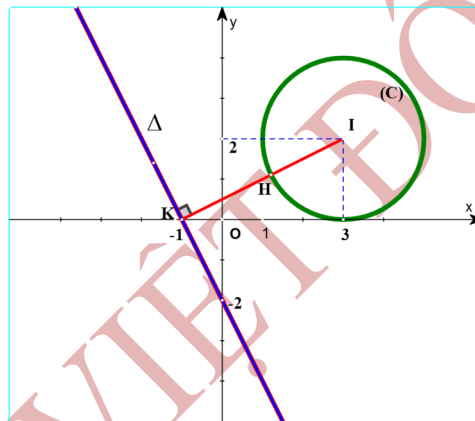
$$\text{Suy ra } 3^{-(2m+n) + \left(\frac{-4}{2m+n}\right)} + \ln[(2m+n+2)^2 + 1] \geq 81$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -(2m+n) = \frac{-4}{2m+n} \\ 2m+n+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m+n+2 = 0.$$

Gọi $K(m;n)$, suy ra K thuộc đường thẳng Δ có phương trình $2x + y + 2 = 0$.

$$\text{Ta có: } P = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2} = HK.$$

$$d(I, \Delta) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{5} > 2 \Rightarrow \text{đường thẳng } \Delta \text{ không cắt đường tròn } (C).$$



Do đó HK ngắn nhất khi K là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng Δ và điểm H là giao điểm của đoạn thẳng IK với đường tròn (C) .

$$\text{Lúc đó } HK = IK - IH = 2\sqrt{5} - 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2\sqrt{5} - 2$.

ÁP DỤNG BĐT BUNHIACOPXKI

Câu 46: (Quỳnh Lưu Lần 1) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1$. Tính $P = \frac{a}{b}$ khi

biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{8}{5}$.

B. $-\frac{13}{2}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $\frac{17}{44}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} a > 4b \\ a^2 + 4b^2 \neq 0 \end{cases} (*)$$

$$\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1 \Leftrightarrow 2a-8b = a^2+4b^2+1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 4(b+1)^2 = 4.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki: } [4 \cdot (a-1) + 3 \cdot 2(b+1)]^2 \leq (4^2 + 3^2)[(a-1)^2 + 4(b+1)^2].$$

$$\Leftrightarrow (4a+6b+2)^2 \leq 25 \cdot 4 \Leftrightarrow -10 \leq 4a+6b+2 \leq 10 \Rightarrow S = 4a+6b-5 \leq 3.$$

$$S \text{ đạt giá trị lớn nhất bằng } 3 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} 3(a-1) = 4.2(b+1) \\ 4a+6b+2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*)).}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{a}{b} = -\frac{13}{2}.$$

Câu 47: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+1}(2x-4y)=1$. Tính $P = \frac{x}{y}$ khi biểu thức

$S = 4x+3y-5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{8}{5}$.

B. $\frac{9}{5}$.

C. $\frac{-13}{4}$.

D. $\frac{17}{44}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{x^2+y^2+1}(2x-4y)=1 \Leftrightarrow 2x-4y = x^2+y^2+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

$$\text{Mặt khác } S = 4x+3y-5 = 4(x-1)+3(y-2)-7 \leq \sqrt{(4^2+3^2)} \left[(x-1)^2 + (y-2)^2 \right] - 7 \leq 3.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} \\ 4x+3y-5=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}. \text{ Do đó } P = \frac{-13}{4}$$

Câu 48: (HSG 12 Bắc Giang) Cho các số thực x, y thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x+3y$ là

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$.

C. $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$.

D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $4x^2+9y^2 \neq 1$.

Trường hợp 1: $4x^2+9y^2 < 1$.

$$\text{Ta có } (2x)^2 + (3y)^2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ 3y < 1 \end{cases} \Rightarrow x+3y < \frac{1}{2}+1 \Rightarrow P < \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Trường hợp 2: $4x^2+9y^2 > 1$.

$$\text{Khi đó } \log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+3y \geq 4x^2+9y^2 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}.$$

$$P = x+3y = \frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta được:

$$\left[\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) \right]^2 \leq \left(\frac{1}{4}+1 \right) \left[\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3y-\frac{1}{2}\right)^2 \right] \leq \frac{5}{8}.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right) + \left(3y-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \leq \frac{3+\sqrt{10}}{4}. \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2\left(2x - \frac{1}{2}\right) = 3y - \frac{1}{2} \\ x + 3y = \frac{3 + \sqrt{10}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x + 12y = 3 + \sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{10}}{20} \\ y = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{30} \end{cases}.$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất của P là $\frac{3 + \sqrt{10}}{4}$.

Câu 49: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \frac{1}{3}, b > 1$. Khi biểu thức

$\log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)$ nhỏ nhất thì tổng $a + b$ bằng

A. $9 + 2^{\sqrt{3}}$.

B. $3 + 9^{\sqrt{2}}$.

C. $3 + 3\sqrt{2}$.

D. $2 + 9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$P = \log_{3a} b + \log_b (a^4 - 9a^2 + 81) \geq 2\sqrt{\log_{3a} b \log_b (a^4 - 9a^2 + 81)} = 2\sqrt{\log_{3a} (a^4 - 9a^2 + 81)}$$

$$a^4 + 81 \geq 2\sqrt{a^4 \cdot 81} = 18a^2 \Rightarrow 2\sqrt{\log_{3a} (a^4 - 9a^2 + 81)} \geq 2\sqrt{\log_{3a} (18a^2 - 9a^2)} = 2\sqrt{\log_{3a} (9a^2)} = 2\sqrt{2}$$

$$P_{\min} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 81 \\ \log_{3a} b = \log_b (a^4 - 9a^2 + 81) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ \log_9 b = \log_b 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9^{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow a + b = 3 + 9^{\sqrt{2}}$$

Câu 50: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2 + b^2} (a + b) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$.

A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

B. $\sqrt{10}$.

C. $\frac{2\sqrt{10}}{2}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{a^2 + b^2} (a + b) \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a + b \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$P = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 4\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{(2^2 + 4^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} \leq \sqrt{20 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

Câu 51: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2 + y^2 + 2} (x + y + 3) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = 3x + 4y - 6.$$

A. $\frac{5\sqrt{6} - 9}{2}$.

B. $\frac{5\sqrt{6} - 3}{2}$.

C. $\frac{5\sqrt{3} - 5}{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{6} - 5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo giả thiết ta có: } x + y + 3 \geq x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Khi đó } S = 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} \leq \sqrt{(3^2 + 4^2) \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]} - \frac{5}{2} \leq \frac{5\sqrt{6} - 5}{2}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } \begin{cases} \frac{x-\frac{1}{2}}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{4}, \\ 3x+4y-1 = \frac{5\sqrt{6}-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{6}-1}{10} \\ y = \frac{4\sqrt{6}-3}{10} \end{cases}.$$

Câu 52: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = 2x + y$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + b$.

A. 17.

B. 13.

C. 11.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

Với $x^2 + 2y^2 < 1 \Rightarrow 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1$.

Với $x^2 + 2y^2 > 1$ thì $2x + y \geq x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{9}{8}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} P = 2x + y &= 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\left(2^2 + \frac{1}{(\sqrt{2})^2}\right)\left((x-1)^2 + \left(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right)} + \frac{9}{4} \\ &\leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $P = 2x + y$ là $\frac{9}{2}$. Suy ra $a = 9$ và $b = 2$. Do đó $S = 11$.

Câu 53: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$S = x + 2y$.

A. 3.

B. $\sqrt{5}$.C. $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$.D. $\frac{5+\sqrt{10}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện bài toán tương đương

Với $x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow x + y \leq x^2 + y^2 < 1$ (1)

Với $x^2 + y^2 > 1$ thì $x + y \geq x^2 + y^2$ (2)

Với (1) ta có: $S = x + 2y \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2)} < \sqrt{5}$

Với (2) ta có: $x^2 + y^2 - x - y \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức ta có:

$$S = \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \leq \sqrt{(1^2 + 2^2)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)} + \frac{3}{2} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{3+\sqrt{10}}{2}.$$

So sánh hai trường hợp suy ra giá trị lớn nhất của S là $\frac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Câu 54: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 > 1$ và $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Biết giá trị lớn nhất của

$P = x + y$ là $\frac{a+b\sqrt{6}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Tính $S = a + b + c$.

A. $\sqrt{17}$.B. $\sqrt{15}$.C. $\sqrt{19}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

$$\log_{x^2+2y^2}(x+2y) \geq 1 \Leftrightarrow x+2y \geq x^2+2y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{8}.$$

$$\Leftrightarrow x+y = 1(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\left(y-\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}$$

$$\leq \sqrt{\left(1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right)\left((x-1)^2 + 2\left(y-\frac{1}{4}\right)^2\right)} = \frac{5}{4} \leq \sqrt{3 \cdot \frac{9}{8}} + \frac{5}{4} = \frac{5+3\sqrt{6}}{4}.$$

Suy ra $S = a + b + c = 12$

Câu 55: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

A. $3\sqrt{10}$.B. $12 + 2\sqrt{42}$.C. $12 + 2\sqrt{35}$.D. $6\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C

Từ điều kiện ta có:

$$\log_2(a+b+c) - \log_2(a^2+b^2+c^2+2) = a^2+b^2+c^2 - 4(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4(a+b+c)) + 4(a+b+c) = \log_2(a^2+b^2+c^2+2) + a^2+b^2+c^2+2$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 10$$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$P = (a-2) + 2(b-2) + 3(c-2) + 12$$

$$\leq \sqrt{(1^2+2^2+3^2)\left((a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\right)} + 12 = 12 + 2\sqrt{35}.$$

$$\text{Dấu “=” đạt tại } \begin{cases} \frac{a-2}{1} = \frac{b-2}{2} = \frac{c-2}{3} \\ a+2b+3c = 12 + 2\sqrt{5} \end{cases}.$$

Câu 56: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$.

A. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$.B. $\frac{3+\sqrt{30}}{3}$.C. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$.D. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Từ điều kiện ta có:

$$\log_2(a+b+c) - \log_2(a^2+b^2+c^2+2) = a^2+b^2+c^2 - 4(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4(a+b+c)) + 4(a+b+c) = \log_2(a^2+b^2+c^2+2) + a^2+b^2+c^2+2$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 10.$$

Và biến đổi:

$$P(a+b+c) = a+2b+3c \Leftrightarrow (P-1)a + (P-2)b + (P-3)c = 0$$

$$\Leftrightarrow (P-1)(a-2) + (P-2)(b-2) + (P-3)(c-2) = -6P+12.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$(-6P+12)^2 \leq ((P-1)^2 + (P-2)^2 + (P-3)^2)((a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2)$$

$$\Leftrightarrow (-6P+12)^2 \leq 10((P-1)^2 + (P-2)^2 + (P-3)^2) \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3} \leq P \leq \frac{6+\sqrt{30}}{3}.$$

Cách 2: điều kiện để mặt phẳng $(P-1)a + (P-2)b + (P-3)c = 0$ và mặt cầu

$$(a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 10$$

có điểm chung là

$$d(I, (\alpha)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2(P-1) + 2(P-2) + 2(P-3)|}{\sqrt{(P-1)^2 + (P-2)^2 + (P-3)^2}} \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3} \leq P \leq \frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

Câu 57: Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\log_2 a \geq (1 - \log_2 b \log_2 c) \log_{bc} 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 10 \log_2^2 a + 10 \log_2^2 b + \log_2^2 c$.

A. 4.

B. 3.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện bài toán, ta có

$$x = \log_2 a, y = \log_2 b, z = \log_2 c \Rightarrow x, y, z > 0.$$

$$\text{Do đó } z \geq \frac{1}{y+z}(1-yz) \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq 1 \text{ và } S = 10(x^2 + y^2) + z^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức ta có

$$12x^2 + 12y^2 + 3z^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{12}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = 2(x+y+z)^2.$$

$$\text{Do đó } 10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) \geq 4.$$

Chú ý. Ta đánh giá như sau:

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 2k(xy + yz + zx) \quad (k > 0)$$

$$\Leftrightarrow (k+10)x^2 + (k+10)y^2 + (k+1)z^2 \geq k(x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+1}} \geq k(x+y+z)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{y^2}{\frac{1}{k+10}} + \frac{z^2}{\frac{1}{k+1}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+1}}.$$

Vậy cần chọn $k > 0$ sao cho $\frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+10} + \frac{1}{k+1} = k \Leftrightarrow k = 2$. Ta có kết quả như trên.

Câu 58: (-Mai-Anh-Tuấn-Thanh-Hóa-lần-1-2018-2019) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 > 1$ và $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a + 4b - 3$ là

A. $\sqrt{10}$.

B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn A

Do $a^2 + b^2 > 1$ nên từ $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1 \Rightarrow a+b \geq a^2 + b^2 > 1$.

Suy ra:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó:

$$P = 2a + 4b - 3 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right) + 4\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{(2^2 + 4^2) \cdot \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right]} \leq \sqrt{20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10}$$

(Áp dụng BĐT Bu-nhi-a- Cốp-xki)

Đẳng thức xảy ra khi
$$\begin{cases} \frac{a - \frac{1}{2}}{2} = \frac{b - \frac{1}{2}}{4} > 0 \\ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ b = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ a^2 + b^2 > 1 \end{cases}$$

Vậy $P_{\max} = \sqrt{10}$ khi
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \\ b = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{cases}$$
.

Câu 59: (THTT số 3) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\sqrt{\log_2 \frac{x}{4}} + \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}} + \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \log_{2001} x \cdot \log_{2018} y \cdot \log_{2019} z$.

A. $\min S = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

B. $\min S = 44 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

C. $\min S = 8 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

D. $\min S = \frac{289}{8} \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $a = \sqrt{\log_2 \frac{x}{4}}, b = \sqrt{\log_3 \frac{y}{9}}, c = \sqrt{\log_5 \frac{z}{25}}$. Khi đó $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$

Suy ra $a^2 = \log_2 \frac{x}{4} \Rightarrow a^2 = \log_2 x - 2 \Rightarrow \log_2 x = a^2 + 2$. Tương tự $\log_3 y = b^2 + 2, \log_5 z = c^2 + 2$.

Ta có: $\log_{2001} x = \log_{2001} 2 \cdot \log_2 x = (a^2 + 2) \cdot \log_{2001} 2$.

Tương tự ta có: $\log_{2018} y = (b^2 + 2) \cdot \log_{2018} 3; \log_{2019} z = (c^2 + 2) \cdot \log_{2019} 5$.

Suy ra $S = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Bài toán đã cho tương đương với bài toán: Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Ta có: $(a^2 + 2)(b^2 + 2) = (a^2 + 1)(1 + b^2) + a^2 + b^2 + 3 \geq (a + b)^2 + \frac{(a + b)^2}{2} + 3$ (Bunhiacopxki)

$$\Rightarrow (a^2 + 2)(b^2 + 2) \geq \frac{3}{2}(a + b)^2 + 3 = 3 \left[\frac{1}{2}(a + b)^2 + 1 \right]$$

$$\Rightarrow P = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3 \left[\frac{1}{2}(a + b)^2 + 1 \right] (c^2 + 2) = 3 \left[1 + \frac{(a + b)^2}{4} + \frac{(a + b)^2}{4} \right] (c^2 + 1 + 1) \\ \geq 3 \left(c + \frac{a + b}{2} + \frac{a + b}{2} \right)^2 = 3(a + b + c)^2 = 27.$$

$P = 27$ khi $a = b = c = 1$ hay $x = 8, y = 27, z = 125$.

Suy ra $S_{\min} = 27 \cdot \log_{2001} 2 \cdot \log_{2018} 3 \cdot \log_{2019} 5$.

Câu 60: (Lê Xoay lần 1) Cho các số thực $a, b > 1$ thỏa mãn điều kiện: $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$.

A. $\sqrt{(\log_3 2 + \log_2 3)}$. **B.** $\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}$. **C.** $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{\log_3 2} + \sqrt{\log_2 3}}$.

Lời giải

Chọn A

Với các số thực $a, b > 1$ ta có:

$$P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b} = \sqrt{\frac{\log_2 a}{\log_2 3}} + \sqrt{\frac{\log_3 b}{\log_3 2}} = \frac{\sqrt{\log_2 a}}{\sqrt{\log_2 3}} + \frac{\sqrt{\log_3 b}}{\sqrt{\log_3 2}}.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có:

$$\left(\frac{\sqrt{\log_2 a}}{\sqrt{\log_2 3}} + \frac{\sqrt{\log_3 b}}{\sqrt{\log_3 2}} \right)^2 \leq (\log_2 a + \log_3 b) \left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_3 2} \right) = 1 \cdot (\log_3 2 + \log_2 3). \\ \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{\log_2 a}}{\sqrt{\log_2 3}} + \frac{\sqrt{\log_3 b}}{\sqrt{\log_3 2}} \right)^2 \leq \log_3 2 + \log_2 3.$$

$\Rightarrow P \leq \sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}$. Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là: $\sqrt{\log_3 2 + \log_2 3}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \log_2 a \cdot \log_2 3 = \log_3 b \cdot \log_3 2 \\ \log_2 a + \log_3 b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = \frac{\log_3^2 2}{1 + \log_3^2 2} \\ \log_3 b = \frac{1}{1 + \log_3^2 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{\log_3^2 2}{1 + \log_3^2 2}} \\ b = 3^{\frac{1}{1 + \log_3^2 2}} \end{cases}.$$

DẠNG 3: PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG

Câu 61: (Đoàn Thượng) Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{5a+5b} \right) = (5a+5b) - (4a+2b+5)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a+2b+5) + (4a+2b+5) = \log_5 (5a+5b) + (5a+5b) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_2 x + x$ có $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 1 > 0, \forall x > 0$ nên hàm số $f(x) = \log_2 x + x$

đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(4a+2b+5) = f(5a+5b) \Leftrightarrow 4a+2b+5 = 5a+5b \Leftrightarrow a = 5-3b \text{ thay vào } T, \text{ ta được:}$$

$$T = a^2 + b^2 = (5-3b)^2 + b^2 = 10b^2 - 30b + 25 \geq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } b = \frac{3}{2} \text{ và } a = \frac{1}{2}.$$

Câu 62: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $\ln(x^2+x) - 2^{x+y} = \ln(y+x) - 2^{x^2+x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y^2 - 4xy + 8x$.

A. -4.

B. 0.

C. 5.

D. -3.

Lời giải**Chọn A**

Từ điều kiện bài toán ta có $y = x^2$ và

$$P = f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \geq \min_{(0;+\infty)} f(x) = f(1+\sqrt{3}) = -4.$$

Câu 63: (Thuan-Thanh-Bac-Ninh) Cho $a \in \left[\frac{1}{9}; 3 \right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $9 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1$. Khi đó giá trị của $A = 5m + 2M$ là:

A. 8.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } 9 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - \log_{\frac{1}{3}} a^3 + 1 = 9 \left(\log_{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} \right)^3 + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - 3 \log_{\frac{1}{3}} a + 1$$

$$= \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}}^3 a + \log_{\frac{1}{3}}^2 a - 3 \log_{\frac{1}{3}} a + 1.$$

Đặt $\log_{\frac{1}{3}} a = t$. Do $a \in \left[\frac{1}{9}; 3 \right]$ nên $t \in [-1; 2]$. Khi đó, ta có biểu thức $f(t) = \frac{1}{3} t^3 + t^2 - 3t + 1$ với $t \in [-1; 2]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{3} t^3 + t^2 - 3t + 1$ trên $[-1; 2]$. Ta có: $f'(t) = t^2 + 2t - 3$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 2] \\ t = -3 \notin [-1; 2] \end{cases}. \text{ Ta có: } f(-1) = \frac{14}{3}, f(1) = -\frac{2}{3}, f(2) = \frac{5}{3}.$$

$$\Rightarrow M = \max_{t \in [-1; 2]} f(t) = f(-1) = \frac{14}{3}, m = \min_{t \in [-1; 2]} f(t) = f(1) = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } A = 5m + 2M = 5 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 2 \cdot \frac{14}{3} = 6.$$

Câu 64: (Chuyên Quốc Học Huế Lần1) Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x(e^x)^{e^y} \geq x^y(e^y)^{e^x}$.
 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C**Cách 1.**

$$\text{Ta có: } y^x(e^x)^{e^y} \geq x^y(e^y)^{e^x} \Leftrightarrow \ln(y^x(e^x)^{e^y}) \geq \ln(x^y(e^y)^{e^x})$$

$$\Leftrightarrow x \ln y + x e^y \geq y \ln x + y e^x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} \geq \frac{y}{\ln y + e^y} \quad (*) \text{ (vì } y = e^x + \ln x \text{ có)}$$

$$y' = e^x + \frac{1}{x} > 0; \forall x > 1 \text{ nên } y \geq y(1) = e > 0$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{t}{\ln t + e^t} \text{ trên } (1; +\infty) \text{ ta có } f'(t) = \frac{\ln t + e^t - 1 - te^t}{(\ln t + e^t)^2}. \text{ Với hàm số}$$

$$g(t) = \ln t + e^t - 1 - te^t \text{ có } g'(t) = (\ln t + e^t - 1 - te^t)' = \frac{1}{t} - te^t < 0, \forall t > 1$$

$$\text{Nên } g(t) < g(1) = -1 \Rightarrow f'(t) < 0; \forall t > 1$$

$$\Rightarrow y = f(t) \text{ là hàm nghịch biến trên } (1; +\infty) \text{ nên với } (*) f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq x > 1$$

$$\text{Khi đó } P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq \frac{1}{2} + 2 \sqrt{\frac{1}{2} \log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \frac{1}{2} \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy: } P_{\min} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}.$$

Cách 2:

Với $x, y > 1$ thì $\log_x y; \log_y x$ là các số dương, ta có:

$$P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq \frac{1}{2} + 2 \sqrt{\frac{1}{2} \log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \frac{1}{2} \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}},$$

$$\text{Thay } \begin{cases} y = x^{\sqrt{2}} \\ x > 1 \end{cases} \text{ vào điều kiện thấy thỏa mãn điều kiện ban đầu.}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 65: (Sở Quảng NamT) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1})$. Giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{e + \ln 2}{2}$.

B. $\frac{e - \ln 2}{2}$.

C. $\frac{e \ln 2}{2}$.

D. $\frac{e}{2 \ln 2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } 2^y + y = 2x + \log_2(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y + y = 2x + \log_2(2x + 2^y) - 1. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(2x + 2^y) \Rightarrow 2x + 2^y = 2^t \Rightarrow 2x = 2^t - 2^y.$$

$$(1) \text{ trở thành: } 2^y + y = 2^t - 2^y + t - 1 \Leftrightarrow 2^{y+1} + y + 1 = 2^t + t. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x + x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = 2^x + x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (2) ta có: $t = y + 1 \Leftrightarrow \log_2(2x + 2^y) = y + 1$
 $\Leftrightarrow 2x + 2^y = 2^{y+1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}.$

$$\text{Khi đó } P = \frac{x}{y} = \frac{2^{y-1}}{y} \Rightarrow P' = \frac{2^{y-1} y \ln 2 - 2^{y-1}}{y^2}.$$

$$\text{Cho } P' = 0 \Leftrightarrow y \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên:

y	0	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$	
P'		-	0	+
P	$+\infty$		$\frac{e \ln 2}{2}$	$+\infty$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{e \ln 2}{2} \text{ khi } x = \frac{e}{2} \text{ và } y = \frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 66: (Cụm THPT Vũng Tàu) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x-4). \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = x + y.$$

A. 3.

B. $5 + 2\sqrt{5}$.

C. $3 - 2\sqrt{5}$.

D. $1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 5^{x+4y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-4y} + y(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 5^{x+4y} - 3^{-x-4y} + x + 4y = 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = 5^t - 3^{-t} + t$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f'(t) = 5^t \ln 5 + 3^{-t} \ln 3 + 1 > 0; \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $x + 4y = xy - 1$ (3). Dễ thấy $x = 4$ không thỏa mãn (3).

Với $x \neq 4$, (3) $\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-4}$ kết hợp điều kiện $y > 0$ suy ra $x > 4$.

$$\text{Do đó } P = x + y = x + \frac{x+1}{x-4}.$$

Xét hàm số $g(x) = x + \frac{x+1}{x-4}$ trên $(4; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 1 - \frac{5}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{5} \\ x = 4 - \sqrt{5} \end{cases}.$$

x	4	$4 + \sqrt{5}$	$+\infty$
-----	---	----------------	-----------

$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$5+2\sqrt{5}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $P_{\min} = \min_{(4;+\infty)} g(x) = 5+2\sqrt{5}$.

Câu 67: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$

của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

B. $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{9}$.

D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (1-xy) - \log_3 (x+2y) = 3(xy-1) + (x+2y) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) - \log_3 (x+2y) = 3(xy-1) + (x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3(1-xy) + 3(1-xy) = \log_3 (x+2y) + (x+2y)$$

$$\text{Xét } f(t) = \log_3 t + t, (t > 0)$$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$$

$$\text{Suy ra: } f(3(1-xy)) = f(x+2y) \Leftrightarrow 3-3xy = x+2y \Leftrightarrow x = \frac{3-2y}{1+3y}$$

$$\text{Điều kiện } \frac{1-xy}{x+2y} > 0 \Leftrightarrow \frac{5y-2}{6y^2+3} > 0 \Leftrightarrow y > \frac{2}{5}$$

$$P = x + y = y + \frac{3-2y}{1+3y}$$

$$P' = 1 + \frac{-11}{(1+3y)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1-\sqrt{11}}{3} \\ y = \frac{-1+\sqrt{11}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{11}}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1+\sqrt{11}}{3}$	$+\infty$
y'	+	0	-		0	+
y	$-\infty$	2	$-\infty$		$\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$	$+\infty$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}.$$

Câu 68: (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn

$$\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = a + 2b \text{ bằng:}$$

A. $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}.$

B. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}.$

C. $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}.$

D. $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}.$

Lời giải

Điều kiện: $a > 0; b > 0; 1-ab > 0$

Với điều kiện trên ta có:

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 &\Leftrightarrow \frac{1-ab}{a+b} = 2^{2ab+a+b-3} \Leftrightarrow 8(1-ab) = (a+b) \cdot 4^{ab} \cdot 2^{a+b} \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot (1-ab) \cdot 2^{2(1-ab)} = (a+b) \cdot 2^{a+b} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot 2^t$ trên $(0; +\infty)$

$f'(t) = 2^t(1 + \ln 2) > 0$ với mọi $t > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình (*) có dạng $f[2(1-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b$

$$\Leftrightarrow a(1+2b) = 2-b \Leftrightarrow a = \frac{2-b}{1+2b}. \text{ Vì } a > 0; b > 0 \text{ nên suy ra } 0 < b < 2.$$

$$\text{Ta có } P = a + 2b = \frac{2-b}{1+2b} + 2b = 2b - \frac{1}{2} + \frac{5}{2(1+2b)}$$

Xét hàm số $P = 2b - \frac{1}{2} + \frac{5}{2(1+2b)}$ trên khoảng $(0; 2)$ có $P'(b) = \frac{-5}{(1+2b)^2} + 2$

$$P'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{-2 + \sqrt{10}}{4}$$

Bảng biến thiên

b	0	$\frac{-2 + \sqrt{10}}{4}$	$+\infty$
$P'(b)$	-	0	+
P	2	$\frac{-3 + 2\sqrt{10}}{2}$	$+\infty$

$$\min P = P\left(\frac{-2 + \sqrt{10}}{4}\right) = \frac{-3 + 2\sqrt{10}}{2}$$

Cách 2 :

Điều kiện: $a > 0; b > 0; 1-ab > 0$. Với điều kiện trên ta có: $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$

$$\Leftrightarrow \log_2 2(1-ab) + 2(1-ab) = \log_2(a+b) + a + b$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$f'(t) = \frac{1}{\ln 2 \cdot t} + 1$ với mọi $t > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình (*) có dạng $f[2(1-ab)] = f(a+b) \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b \Leftrightarrow a = \frac{2-b}{1+2b}$

Vì $a > 0; b > 0$ nên suy ra $0 < b < 2$.

$$\text{Ta có } P = 2b - \frac{1}{2} + \frac{5}{2(1+2b)} = 2b + 1 + \frac{5}{2(1+2b)} - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có } 2b + 1 + \frac{5}{2(1+2b)} \geq 2\sqrt{(2b+1) \cdot \frac{5}{2(2b+1)}} - \frac{3}{2} = \frac{-3+2\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } 2b+1 = \frac{5}{2(2b+1)} \Leftrightarrow b = \frac{-2+\sqrt{10}}{4}. \text{ Vậy } \min P = \frac{-3+2\sqrt{10}}{2}.$$

Nhận xét thêm: Có thể không tính đạo hàm của hàm số ta cũng có được nhận xét

Cách 1: Tích của hai hàm số đồng biến và dương trên khoảng K là một hàm số đồng biến trên K .

Cách 2: Tổng của hai hàm số đồng biến trên khoảng K là một hàm số đồng biến trên K .

Câu 69: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $S = a + 5b$

A. $\frac{2\sqrt{95}-6}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{95}+15}{12}$. C. $\frac{3\sqrt{95}-16}{3}$. D. $\frac{5\sqrt{95}-21}{6}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_3 \frac{2-ab}{a+b} = 3ab + a + b - 7 \Leftrightarrow \log_3(2-ab) - \log_3(a+b) = 3(ab-2) + (a+b) - 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_3[3(2-ab)] + 3(ab-2) = \log_3(a+b) + (a+b) \Leftrightarrow 3(2-ab) = a+b \Leftrightarrow b = \frac{6-a}{3a+1}$$

$$\text{Khi đó } S = a + 5b = a + \frac{5(6-a)}{3a+1} = \frac{3a^2 - 4a + 30}{3a+1}. \text{ Khảo sát hàm số } \frac{3x^2 - 4x + 30}{3x+1} \text{ trên } (0; 6)$$

$$\text{được } \min_{x \in (0;6)} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{95}-1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{95}-6}{3}.$$

Câu 70: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $3 + \ln \frac{x+y+1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = xy$.

A. $P = \frac{1}{9}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = 9$. D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo giả thiết ta có } 3 + \ln \frac{x+y+1}{3xy} = 9xy - 3x - 3y$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+y+1) + 3(x+y+1) = \ln(3xy) + 3(3xy)$$

$$\Leftrightarrow x+y+1 = 3xy \Rightarrow P = xy = \frac{x+y+1}{3} \geq \frac{2\sqrt{xy}+1}{3}.$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2\sqrt{P}+1}{3} \Leftrightarrow P \geq 1.$$

Câu 71: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 = \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$.

- A. $P = 6 - 2\sqrt{3}$. B. $P = 4 + 2\sqrt{6}$. C. $P = 4 - 2\sqrt{6}$. D. $P = 6 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết ta có } 5^{x+2y} + \frac{3}{3^{xy}} + x + 1 &= \frac{5^{xy}}{5} + 3^{-x-2y} + y(x-2). \\ \Leftrightarrow 5^{x+2y} - 3^{-x-2y} + x + 2y &= 5^{xy-1} - 3^{1-xy} + xy - 1 \Leftrightarrow x + 2y = xy - 1. \\ \Leftrightarrow 1 - xy + x + 2y &= 0 \Leftrightarrow y(x-2) = x+1 > 0 \Rightarrow x > 2, y = \frac{x+1}{x-2}. \\ \Rightarrow P = f(x) = x + \frac{2(x+1)}{x-2} &\geq \min_{(2;+\infty)} f(x) = f(2+\sqrt{6}) = 4 + 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Câu 72: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + 2b$.

- A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Theo giả thiết, ta có} \\ \log_2 \frac{2(1-ab)}{a+b} = 2(ab-1) + a + b &\Leftrightarrow \log_2 (2(1-ab)) + 2(1-ab) = \log_2 (a+b) + (a+b) \\ \Leftrightarrow 2(1-ab) = a+b &\Leftrightarrow 2-a = b(2a+1) \Leftrightarrow b = \frac{2-a}{2a+1} > 0 \Rightarrow 0 < a < 2. \\ \text{Do đó } P = f(a) = a + \frac{2(2-a)}{2a+1} &\geq \min_{(0;2)} f(a) = f\left(\frac{\sqrt{10}-1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 73: Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $2017^{1-x-y} = \frac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Biết giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $S = (4x^2+3y)(4y^2+3x) + 25xy$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 27$. B. $T = 17$. C. $T = 195$. D. $T = 207$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Theo điều kiện đề bài ta có } (x^2+2018)2017^x &= ((1-y^2)+2018)2017^{1-y} \Leftrightarrow x = 1-y. \\ \text{Khi đó } S &= (4x^2+3(1-x))(4(1-x)^2+3x) + 25x(1-x) = 16(x^2-x)^2 + 2(x^2-x) + 12 \\ g(t) &= 16t^2 + 2t + 12 \geq g\left(-\frac{b}{2a}\right) = g\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}, \text{ trong đó } t = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}. \\ \text{Do đó } T &= 191 + 16 = 207. \end{aligned}$$

Câu 74: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+2y+6}$.

A. $\frac{69 + \sqrt{249}}{94}$.

B. $\frac{43 + 3\sqrt{249}}{94}$.

C. $\frac{37 - \sqrt{249}}{21}$.

D. $\frac{43 + 3\sqrt{249}}{94}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có biến đổi:

$$\log_{\sqrt{3}}(x+y) - \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) = x^2 + y^2 + xy - 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(3(x+y)) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}}(x^2 + y^2 + xy + 2) + x^2 + y^2 + xy + 2$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} - 3\left(x + \frac{y}{2}\right) - \frac{3y}{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Trong đó $a = x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$, $b = \frac{2b}{\sqrt{3}} + 1$.

Khi đó:

$$P(x+y+6) = x+2y+3 \Leftrightarrow P\left(a + \frac{b}{\sqrt{3}} + 8\right) = a + \frac{2b}{\sqrt{3}} + 6 \Leftrightarrow (P-1)a + \frac{1}{\sqrt{3}}(P-3) + 8P - 6 = 0$$

Điều kiện để đường tròn và đường thẳng có điểm chung là

$$d(O, d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|8P-6|}{\sqrt{(P-1)^2 + \frac{1}{3}(P-3)^2}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{69 - \sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69 + \sqrt{249}}{94}.$$

Câu 75: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} - y = \frac{y^2-x}{4}$. Biết giá trị lớn nhất

của biểu thức $P = x^3 + 2y^2 - 2x^2 + 8y - x + 2$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là

phân số tối giản. Tính $S = a + b$.

A. $S = 85$.

B. $S = 31$.

C. 75 .

D. 41 .

Lời giải

Chọn ATheo giả thiết ta có $-1 \leq x \leq 1$ và có biến đổi

$$4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} - 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}} = y^2 - (x-4y)$$

$$\Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2} + 4e^{x-4y+\sqrt{1-x^2}} = y^2 + \sqrt{1-x^2} + 4e^{y^2+\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow f(x-4y+\sqrt{1-x^2}) = f(y^2+\sqrt{1-x^2})$$

$$\Leftrightarrow x-4y+\sqrt{1-x^2} = y^2 + \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = y^2 + 4y$$

Trong đó $f(t) = t + 4e^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $P = x^3 - 2x^2 - x + 2 + 2(y^2 + 4y) = f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2 \leq \max_{[-1;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$

Vậy: $S = 58 + 27 = 85$.

Câu 76: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $3^{xy-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} = 2 - 2xy - 2x - 4y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + 3y$.

A. $6\sqrt{2}-7$. B. $\frac{10\sqrt{2}+1}{10}$. C. $15\sqrt{2}-20$. D. $\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi giả thiết, ta có:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1-xy} - 2(1-xy) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2y} - 2(x+2y) \Leftrightarrow f(1-xy) = f(x+2y) \Leftrightarrow 1-xy = x+2y.$$

trong đó $f(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t - 2t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$y(x+2) = 1-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1; y = \frac{1-x}{x+2}.$$

$$\text{Và } P = f(x) = 2x + 3\left(\frac{1-x}{x+2}\right) \geq \min_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right) = 6\sqrt{2} - 7.$$

Câu 77: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $4 + 3^{x^2-2y+2} = (4 + 9^{x^2-2y})7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 2y$.

A. $-\frac{9}{4}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $-\frac{33}{8}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{4 + 3^{x^2-2y+2}}{7^{x^2-2y+2}} = \frac{4 + 3^{2(x^2-2y)}}{7^{2(x^2-2y)}}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2-2y+2) = f(2(x^2-2y))$$

$$\Leftrightarrow x^2-2y+2 = 2(x^2-2y).$$

Trong đó $f(t) = 4\left(\frac{1}{7}\right)^t + \left(\frac{3}{7}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó: } 2y = x^2 - 2 \text{ và } S = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}.$$

Câu 78: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + x + y + \log_2 \frac{x+y}{1-xy} = 8(1-xy)^3 - 2xy + 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $\frac{1+\sqrt{15}}{2}$. B. $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$. C. $\sqrt{15}-2$. D. $\frac{2\sqrt{15}+3}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Từ điều kiện bài toán ta có:

$$(x+y)^3 + x + y + \log_2(x+y) = (2(1-xy))^3 + 2(1-xy) + \log_2(2(1-xy))$$

$$\Leftrightarrow f(x+y) = f(2(1-xy)) \Leftrightarrow x+y = 2(1-xy) \Leftrightarrow y(2x+1) = 2-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 2y;$$

$$y = \frac{2-x}{2x+1}.$$

Trong đó $f(t) = t^3 + t + \log_2 t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } P = f(x) = x + \frac{3(2-x)}{2x+1} \geq \min_{(0;2)} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{15}-1}{2}\right) = \sqrt{15}-2$$

Câu 79: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{2x+y+1}{x+y} = x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } S = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{y}}.$$

A. 6.

B. $3+2\sqrt{3}$.

C. 4.

D. $3+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ điều kiện bài toán ta có

$$\log_3(2x+y+1) - \log_3(x+y) = x+2y$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+y+1) + (2x+y+1) = \log_3(3(x+y)) + 3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) = 2x+y+1 \Leftrightarrow x+2y=1$$

$$\text{Khi đó } S = f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{\frac{1-x}{2}}} \geq \min_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 6.$$

Chọn A

Câu 80: Cho hai số thực không âm x, y thỏa mãn $x^2 + 2x - y + 1 = \log_2 \frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m

của biểu thức $P = e^{2x-1} + 4x^2 - 2y + 1$.

A. $m = -1$.B. $m = -\frac{1}{2}$.C. $m = \frac{1}{e}$.D. $m = e-3$.

Lời giải

Chọn B

Từ điều kiện bài toán ta có

$$(x+1)^2 + \log_2(x+1) = y + \frac{1}{2} \log_2(2y+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 2\log_2(x+1) = 2y + \log_2(2y+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 + \log(2(x+1)^2) = (2y+1) + \log_2(2y+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 2y+1.$$

Do đó

$$P = f(x) = e^{2x-1} + 4x^2 - (2(x+1)^2 - 1) + 1 \geq \min_{\mathbb{R}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Câu 81: Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt[3]{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy-y+4} = x(x+y-3) + y(y-4)$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 5y^2 + 2xy + 39x$.

A. 100.

B. 125.

C. 121.

D. 81.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thuyết ta có

$$\log_{\sqrt[3]{3}}(3x+3y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt[3]{3}}(x^2+y^2+xy-y+4) + (x^2+y^2+xy-y+4)$$

$$\Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy-y+4) \Leftrightarrow x^2+y^2+xy-y+4 = 3(x+y)$$

Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai ẩn x và ẩn y để có

$$x \in \left[0; \frac{4}{3}\right], y \in \left[1; \frac{1}{7}\right].$$

Suy ra

$$P = 3(x^3 - y^3) + 20x^2 + 5y^2 + 2(3x + 3y - 4 + y - x^2 - y^2) + 39x \\ = 3x^3 + 18x^2 + 45x - 8 - 3y^3 + 3y^2 + 8y$$

$$\text{Đặt } f(x) = 3x^3 + 18x^2 + 45x - 8; g(y) = -3y^3 + 3y^2 + 8y$$

$$\text{Ta có: } P \leq \max_{\left[0; \frac{4}{3}\right]} f(x) + \max_{\left[1; \frac{1}{7}\right]} g(y) = f\left(\frac{4}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) = 100.$$

Dấu “=” đạt tại $x = y = \frac{4}{3}$. Thử lại điều kiện thấy thỏa mãn.

Câu 82: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho x, y là các số dương thỏa mãn

$$\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0. \text{ Gọi } M, m \text{ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ}$$

$$\text{nhất của } P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2}. \text{ Tính } T = 10M - m.$$

A. $T = 60.$

B. $T = 94.$

C. $T = 104.$

D. $T = 50.$

Lời giải

Chọn B

$$\log_2 \frac{x^2 + 5y^2}{x^2 + 10xy + y^2} + 1 + x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 5y^2) - \log_2 (x^2 + 10xy + y^2) + \log_2 2 + 2(x^2 + 5y^2) - (x^2 + 10xy + y^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 10y^2) + 2(x^2 + 5y^2) \leq \log_2 (x^2 + 10xy + y^2) + (x^2 + 10xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10y^2 \leq x^2 + 10xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10xy + 9y^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{y}\right) + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 9$$

$$P = \frac{x^2 + xy + 9y^2}{xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 9}{\frac{x}{y} + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, \text{ điều kiện: } 1 \leq t \leq 9$$

$$f(t) = \frac{t^2 + t + 9}{t + 1}; f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 8}{(t + 1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = \frac{11}{2}; f(2) = 5; f(9) = \frac{99}{10}$$

$$\text{Nên } M = \frac{99}{10}, m = 5. \text{ Vậy } T = 10M - m = 94.$$

Câu 83: (CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019) Cho a, b, c là các số thực thỏa

mãn $\log_2 \left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1} \right) = a(a-2) + b(b-2) + c(c-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c}.$$

A. $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}.$

B. $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$

C. $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$

D. $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1} = a(a-2) + b(b-2) + c(c-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (a+b+c) + 2(a+b+c) + 1 = \log_2 (a^2+b^2+c^2+1) + a^2+b^2+c^2+1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2a+2b+2c) + 2a+2b+2c = \log_2 (a^2+b^2+c^2+1) + a^2+b^2+c^2+1 (*)$$

Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$,

Ta có, $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow f(2a+2b+2c) = f(a^2+b^2+c^2+1)$

$$\Leftrightarrow 2a+2b+2c = a^2+b^2+c^2+1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 2$$

Ta lại có, $P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow (P-3)(a-1) + (P-2)(b-1) + (P-1)(c-1) = 6-3P (**)$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$(6-3P)^2 = ((P-3)(a-1) + (P-2)(b-1) + (P-1)(c-1))^2 \leq 2 \cdot [(P-3)^2 + (P-2)^2 + (P-1)^2]$$

$$\Leftrightarrow 3P^2 - 12P + 8 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \leq P \leq \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy, $P_{\max} = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ khi $a = \frac{\sqrt{3}+1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Câu 84: Tìm tất cả giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{4^{\sin x} + 6^{m+\sin x}}{9^{\sin x} + 4^{1+\sin x}}$ không nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

A. $m \geq \log_6 \frac{2}{3}.$

B. $m \geq \log_6 \frac{13}{18}.$

C. $m \leq \log_6 3.$

D. $m \leq \log_6 \frac{2}{3}.$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Hàm số viết lại } f(x) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2\sin x} + 6^m \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin x}}{1 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2\sin x}}.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sin x} \longrightarrow f(t) = \frac{t^2 + nt}{1 + 4t^2}$ với $\begin{cases} \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{3}{2} \\ n = 6^m > 0 \end{cases}$.

Bài toán trở thành "Tìm $n > 0$ để bất phương trình $f(t) \geq \frac{1}{3}$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$ ".

Ta có $f(t) \geq \frac{1}{3} \iff \frac{t^2 + nt}{1 + 4t^2} \geq \frac{1}{3} \iff t^2 + 1 \leq 3nt \iff_{t \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]} n \geq \frac{t}{3} + \frac{1}{3t}$.

Xét hàm $g(t) = \frac{t}{3} + \frac{1}{3t}$ trên đoạn $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$, ta có $\min_{\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]} g(t) = g(1) = \frac{2}{3}$.

Để bất phương trình $f(t) \geq \frac{1}{3}$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$ thì bất phương trình $g(t) \leq n$ phải

có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right] \iff n \geq \min_{\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]} g(t) \longrightarrow n \geq \frac{2}{3}$

$\longrightarrow 6^m \geq \frac{2}{3} \longrightarrow m \geq \log_6 \frac{2}{3}$.

Chọn A

Câu 85: (Chuyên Hạ Long lần 2-2019) Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức

$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

A. $k \in [2; 3]$. **B.** $k \in (0; 1)$. **C.** $k \in [0; 1]$. **D.** $k \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a \geq b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$.

$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}$.

Đặt $t = \sqrt{1 - \log_a b}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow \log_a b = 1 - t^2$. Ta có: $P = -t^2 + t + 2$ trên $[0; +\infty)$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
P		$\frac{9}{2}$	

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{1}{2}$.

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \log_a b} \iff \log_a b = \frac{3}{4} \iff b = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$.

Câu 86: (Sở Quảng Ninh Lần 1) Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

A. 333. **B.** 229. **C.** 234. **D.** 292.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_2(b_1) = a_1$; $\log_2(b_2) = a_2$. Do $b_2 > b_1 \geq 1$ nên: $a_2 > a_1 \geq 0$.

$$f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1)) \Leftrightarrow f(a_2) + 2 = f(a_1) \quad (*)$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $[0; +\infty)$.

x	0	1	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	0		$+\infty$	

-2

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 > 1 \Rightarrow a_2 > 1$. Hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

$$\Rightarrow a_2 > a_1 \Leftrightarrow f(a_2) > f(a_1) \Rightarrow (*) \text{ vô lý.}$$

Trường hợp 2: Nếu $0 \leq a_1 \leq 1 \Rightarrow f(a_1) \leq 0$. Từ $(*) \Rightarrow f(a_2) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow a_2^3 - 3a_2 + 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (a_2 - 1)^2(a_2 + 2) \leq 0 \Leftrightarrow a_2 = 1 \text{ (do } a_2 + 2 > 0, \forall a_2 > 0).$$

$$\text{Với } a_2 = 1 \Rightarrow f(a_2) = -2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1^3 - 3a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ (do } 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2(b_1) = 0 \\ \log_2(b_2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Gọi } q \text{ là công bội của cấp số nhân } (b_n) \Rightarrow q = \frac{b_2}{b_1} = 2 \Rightarrow b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$b_n > 5^{100} \Rightarrow 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow n-1 > \log_2 5^{100} \Rightarrow n > 1 + 100 \log_2 5.$$

Câu 87: Cho $1 < x < 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x}$.

A. 64.

B. 96.

C. 82.

D. 81.

Lời giải

$$P = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x \cdot \log_2 \frac{8}{x} = \log_2^4 x + 12 \log_2^2 x (\log_2 8 - \log_2 x)$$

$$\text{Vì } 1 < x < 64 \text{ nên } \log_2 1 < \log_2 x < \log_2 64 \Leftrightarrow 0 < \log_2 x < 6$$

$$\text{Đặt } t = \log_2 x \text{ với } 0 < t < 6.$$

$$\text{Ta có } P = t^4 + 12t^2(3-t) = t^4 - 12t^3 + 36t^2$$

$$P' = 4t^3 - 36t^2 + 72t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(L) \\ t = 6(L) \\ t = 3(TM) \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta: } P_{\max} = 81 \text{ khi } x = 3$$

Chọn D

Câu 88: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = \log_a^2(a^2) + 3 \log_b \left(\frac{a}{b} \right).$$

A. $P_{\min} = 19$.

B. $P_{\min} = 13$.

C. $P_{\min} = 14$.

D. $P_{\min} = 15$.

Lời giải

Chọn D

Với điều kiện đề bài, ta có

$$P = \log_{\frac{a}{b}}^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có $P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t)$.

Ta có $f'(t) = 8t + 8 - \frac{3}{t^2} = \frac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \frac{(2t-1)(4t^2 + 6t + 3)}{t^2}$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

Câu 89: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1 \leq b < a^3$. Biểu thức $P = 2\left(1 + \log_a \frac{b}{a}\right)^3 + \left(4 - 2\log_a^2 \sqrt{b}\right)^3 + 3$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 67.

B. $\frac{31455}{512}$.

C. 27.

D. $\frac{455}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$1 \leq b < a^3 \Leftrightarrow \log_a 1 \leq \log_a b \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \log_a b \leq 1$$

$$P = 2\left(1 + \log_a \frac{b}{a}\right)^3 + \left(4 - 2\log_a^2 \sqrt{b}\right)^3 + 3 = 2\log_a^3 b + \left(4 - \frac{1}{2}\log_a^2 b\right)^3 + 3$$

Đặt $x = \log_a b$.

Xét $P = 2x^3 + \left(4 - \frac{1}{2}x^2\right)^3 + 3$ với $0 \leq x \leq 1$

$$P' = 6x^2 - 3x\left(4 - \frac{1}{2}x^2\right)^2$$

$$6x^2 - 3x\left(4 - \frac{1}{2}x^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3\left(4 - \frac{1}{2}x^2\right)^2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có $P(0) = 67$

Câu 90: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$. Giá trị của tích ab là

A. 45.

B. 81.

C. 108.

D. 115.

Lời giải:

Chọn B

- Ta có:
$$\begin{cases} x, y > 0 \\ xy \leq 4y - 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{cho } y^2]{\text{chia 2 vế}} \frac{x}{y} < -\frac{1}{y^2} + \frac{4}{y} = -\left(\frac{1}{y^2} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y} + 4\right) + 4$$

$$= -\left(\frac{1}{y} - 2\right)^2 + 4 \leq 4 \Rightarrow \frac{x}{y} \leq 4.$$

- Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow 0 < t \leq 4 \longrightarrow D = (0; 4]$

- Biến đổi biểu thức P về dạng:

$$P = 6\left(2 + \frac{1}{t}\right) + \ln(t+2) \Rightarrow P'(t) = -\frac{6}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{t^2 - 6t - 12}{t^2(t+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{21} \notin D \\ x = 3 + \sqrt{21} \notin D \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, từ đó ta thấy rằng, trong khoảng $(0; 4]$ thì hàm $P(t)$ nghịch biến

nên $\min P(t) = P(4) = \frac{27}{2} + \ln 6 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{27}{2} \Rightarrow a.b = 81 \\ b = 6 \end{cases}$

Chọn B

Câu 91: Xét các số thực a, b thỏa mãn $\begin{cases} a \geq b^2 \\ b > 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \log_{\frac{a}{b}} a + \log_b \frac{a}{b}$.

A. $P_{\min} = \frac{1}{3}$.

B. $P_{\min} = 1$.

C. $P_{\min} = 3$.

D. $P_{\min} = 9$.

Hướng dẫn giải:

Từ điều kiện, suy ra $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

Ta có $P = \frac{1}{1 - \log_a b} + \frac{1 - \log_a b}{\log_a b}$.

Đặt $t = \log_a b > 0$. Do $a \geq b^2 \longrightarrow \log_b a \geq \log_b b^2 = 2 \longrightarrow t = \log_a b \leq \frac{1}{2}$.

Khi đó $P = \frac{1}{1-t} + \frac{1-t}{t} = f(t)$.

Khảo sát hàm $f(t)$ trên $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, ta được $P = f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

Chọn C

Câu 92: Xét các số thực a, b thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

A. $a = b^2$.

B. $a^2 = b^3$.

C. $a^3 = b^2$.

D. $a^2 = b$.

Hướng dẫn giải:

Từ điều kiện, suy ra $\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases}$.

Ta có $P = \frac{1}{1 - \log_a b} + 4(\log_b a - 1) = \frac{1}{1 - \log_a b} + \frac{4}{\log_a b} - 4$.

Đặt $t = \log_a b > 0$. Do $\sqrt{a} \leq b < a \longrightarrow \log_a \sqrt{a} \leq \log_a b < \log_a a \longrightarrow \frac{1}{2} \leq t < 1$.

Khi đó $P = \frac{1}{1-t} + \frac{4}{t} - 4 = f(t)$.

Khảo sát $f(t)$ trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$, ta được $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi $t = \frac{2}{3}$.

Với $t = \frac{2}{3} \longrightarrow \log_a b = \frac{2}{3} \leftrightarrow a^2 = b^3$.

Chọn B

Câu 93: Xét các số thực a, b thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Biểu thức $P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

A. $\log_a b = \frac{2}{3}$. **B.** $\log_a b = \frac{1}{3}$. **C.** $\log_a b = \frac{3}{2}$. **D.** $\log_a b = 3$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \longleftrightarrow b^2 - b + \frac{1}{4} \geq 0 \longleftrightarrow b - \frac{1}{4} \leq b^2$.

Mà $a < 1 \longrightarrow \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) \geq \log_a b^2 = 2 \log_a b$.

Ta có $P = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{a}{b}} b = \log_a \left(b - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_a b}{1 - \log_a b} \geq 2 \log_a b - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_a b}{1 - \log_a b}$.

Đặt $t = \log_a b$. Do $b < a < 1 \longrightarrow t = \log_a b > 1$.

Khi đó $P \geq 2t + \frac{t}{2t-2} = f(t)$.

Khảo sát $f(t)$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta được $P \geq f(t) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$.

Chọn C

Câu 94: Xét các số thực a, b thỏa $1 < a \leq b^2$. Biểu thức $P = 2 \left(2 \log_{\frac{a}{b}} a - \log_{\frac{a}{b}} b \right)^2 + 27 \log_a \left(\frac{a}{b} \right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi:

A. $a = b^2$. **B.** $a = 2b$. **C.** $a = b+1$ **D.** $2a = b+1$.

Hướng dẫn giải:

Ta có $\log_{\frac{a}{b}} b = \log_{\frac{a}{b}} \left(a \cdot \frac{b}{a} \right) = \log_{\frac{a}{b}} a - 1$.

Do đó $P = 2 \left[2 \log_{\frac{a}{b}} a - \left(\log_{\frac{a}{b}} a - 1 \right) \right]^2 + \frac{27}{\log_{\frac{a}{b}} a} = 2 \left(\log_{\frac{a}{b}} a + 1 \right)^2 + \frac{27}{\log_{\frac{a}{b}} a}$.

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} a$. Do $1 < a \leq b^2 \longrightarrow \sqrt{a} \leq b$, suy ra

$\frac{1}{t} = \frac{1}{\log_{\frac{a}{b}} a} = \log_a \frac{a}{b} = 1 - \log_a b \leq 1 - \log_a \sqrt{a} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow t \geq 2$.

Khi đó $P = 2(t+1)^2 + \frac{27}{t} = f(t)$.

Khảo sát $f(t)$ trên $[2; +\infty)$, ta được $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{63}{2}$ khi $t = 2$.

Với $t = 2 \longrightarrow \log_{\frac{a}{b}} a = 2 \Leftrightarrow a = b^2$.

Chọn A

Câu 95: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = |x - y| + |x^3 - y^3|$ là $\frac{a\sqrt{6}}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản.

Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b$.

A. $T = 25$.

B. $T = 34$.

C. $T = 32$.

D. $T = 41$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét hàm số $f(t) = 2^{t-1} + \log_3(t+1)$ đồng biến và $f(2) = 3$, từ đó

$$2^{x^2+y^2-1} + \log_3(x^2 + y^2 + 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$S = |x - y| + |x^3 - y^3| = |x - y|(1 + x^2 + y^2 + xy) \Leftrightarrow S^2 = (x - y)^2(3 + xy)^2 = (2 - 2xy)(3 + xy)^2$$

Đặt $t = xy$ do $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = 1$ nên $t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $g(t) = (2 - 2t)(3 + t)^2$ trên $[-1; 1]$ được $\max_{t \in [-1; 1]} g(t) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{512}{27}$. Do $S > 0$ nên

$$S^2 \leq \frac{512}{27} \Leftrightarrow S \leq \frac{16\sqrt{6}}{9}. \text{ Vậy } T = 34.$$

Câu 96: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

A. $\frac{1+\sqrt{3}}{10}$.

B. $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{3+\sqrt{3}}{30}$.

D. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y) \Leftrightarrow 10xy \geq x + y \Leftrightarrow y(10x - 1) \geq x > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{10}$ và

$$y \geq \frac{x}{10x-1}.$$

$$S = x + 3y \geq x + \frac{3x}{10x-1}.$$

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{3x}{10x-1}$ trên $\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)$ được $\min_{x \in \left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{5}$.

Câu 97: Cho hai số thực $x, y > 1$ thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x^3 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2x + y$.

A. $2\sqrt{2} - 2$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $4 + 4\sqrt{2}$.

D. $3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log x + \log y \geq \log(x^3 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^3 + y \Leftrightarrow y \geq \frac{x^3}{x-1}$

$S = 2x + y \geq 2x + \frac{x^3}{x-1}$. Khảo sát hàm số $y = f(x) = 2x + \frac{x^3}{x-1}$ trên $(1; +\infty)$ được

$$\min_{x \in (1; +\infty)} f(x) = f(\sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}.$$

Câu 98: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $xy = 4, x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_2^2 x + (\log_2 y - 1)^2$. Tính $S = M + 2m$.

- A. $S = 6$. B. $S = 11$. C. $S = \frac{21}{2}$. D. $S = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \frac{4}{x} \geq 1 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Khi đó $P = \log_2^2 x + \left(\log_2 \frac{4}{x} - 1\right)^2 = \log_2^2 x + (1 - \log_2 x)^2 \Rightarrow f(t) = t^2 + (1-t)^2$.

$M = \max_{[-1; 2]} f(t) = f(-1) = f(2) = 5, m = \min_{[-1; 2]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Do đó $S = 5 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Câu 99: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 (x + 3y) \leq 2 + 2\log_2 y$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 2y^2}} - \frac{2x+3y}{x+2y}$ là $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 30$. B. $P = 15$. C. $P = 17$. D. $P = 10$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $\log_2 (x^2 + 3xy) \leq \log_2 4y^2 \Leftrightarrow x^2 + 3xy \leq 4y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) \leq 4$

$\Rightarrow 0 < t = \frac{x}{y} \leq 1$.

Khi đó $S = f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 2}} - \frac{2t+3}{t+2}, 0 < t \leq 1$.

Ta có $f'(t) = \frac{5-3t}{2\sqrt{(t^2 - t + 2)^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} \geq \frac{2}{2\sqrt{2^3}} - \frac{1}{(t+2)^2} = \frac{(t+2)^2 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(t+2)^2} > 0$.

Do đó $\max S = \max_{(0; 1]} f(t) = f(1) = \sqrt{2} - \frac{5}{3} \Rightarrow a = 2, b = 5, c = 3 \Rightarrow P = 10$.

Câu 100: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log x + \log y \geq \log(x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 9. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $xy \geq x + y^2 \Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 > 0 \Rightarrow y^2 > 1; x \geq \frac{y^2}{y-1}$.

Vì vậy $P \geq f(y) = \frac{y^2}{y-1} + 3y \geq \min_{(1;+\infty)} f(y) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$.

Câu 101: Cho các số thực $a, b, c > 1$ và các số thực dương thay đổi x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$.

- A. 20. B. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. C. 24. D. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Lời giải

Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$a^x = b^y = c^z = (abc)^{\frac{1}{2}} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_a t = \frac{1}{\log_t a} \\ y = \log_b t = \frac{1}{\log_t b} \\ z = \log_c t = \frac{1}{\log_t c} \\ \frac{1}{2} = \log_{abc} t = \frac{1}{\log_t abc} = \frac{1}{\log_t a + \log_t b + \log_t c} \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{z} \Rightarrow P = f(z) = 32 - \frac{16}{z} - z^2 \leq f(2) = 20.$$

Chọn A

Câu 102: Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

- A. $T=8$. B. $T=141$. C. $T=148$. D. $T=151$.

Lời giải

Chọn D

Chú ý với hai căn thức ta có đánh giá sau: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.

$$\text{Vậy theo giả thiết, ta có } x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}) \geq 2\sqrt{x+y+1} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{Và } x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}) \leq 2\sqrt{2(x+y+1)} \Rightarrow x + y + 1 \leq 8.$$

$$\square \text{ Nếu } x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow S = -\frac{9476}{243}.$$

$\square$ Nếu $t = x + y \in [3; 7]$, ta có

$$x^2 \geq 2x(x \geq 2); (y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq 2y-1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2(x+y)-1.$$

$$\text{Vì vậy } S \leq 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 6(x+y) + 3.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1)2^{7-t} - 6t + 3$ trên đoạn $[3; 7]$ ta có:

$$f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2 - 6.$$

$$f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 + 2^{7-t} \ln 2 - (2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2) \ln 2$$

$$= 3^{t-4} \ln^2 3 + [(t+1) \ln 2 - 2] 2^{7-t} \ln 2 > 0, \forall t \in [3; 7].$$

Mặt khác $f'(3)f'(7) < 0 \Rightarrow f'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t_0 \in (3; 7)$.

Vậy ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như dưới đây:

t	3	t_0	7
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\frac{148}{3}$	$f(t_0)$	-4

Suy ra $\max S = \max_{[3;7]} f(t) = f(3) = \frac{148}{3}$. Dấu bằng đạt tại $x = 2; y = 1$.

Do đó $T = 148 + 3 = 151$.

***Chú ý.** Lời giải trình bày phía trên thuần túy dựa trên lý luận khi xử lý bất đẳng thức.

Để làm nhanh với bài thi trắc nghiệm, kinh nghiệm khi làm các bất đẳng thức có điều kiện biên, cụ thể ở đây $x - 2 \geq 0; y + 3 \geq 0$ thì dấu bằng thường đạt được tại biên tức $x - 2 = 0$ hoặc $y + 3 = 0$.

Do đó với $x = 2$ thay vào điều kiện có $y + 3 = 2\sqrt{y+3} \Leftrightarrow y = -3; y = 1$.

Với $y = -3$ thay vào điều kiện có $x - 2 = 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = 2; x = 6$.

Do vậy ta thử giá trị của S tại các cặp điểm là $(2; -3), (2; 1), (6; -3)$ nhận kết quả mà S đạt giá trị lớn nhất.

Câu 103: Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{(a-b)^2 + (10^a - \log b)^2}.$$

A. $\sqrt{2} \log(\ln 10).$

B. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right).$

C. $\frac{1}{\ln 10} + \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right).$

D. $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \ln \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right).$

Lời giải

Chọn B

Xét điểm $A(a; 10^a), B(b; \log b)$

Do đồ thị của hai hàm số $y = 10^x, y = \log x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$. Do đó khoảng cách giữa hai điểm A, B là $AB = P$ đạt giá trị nhỏ nhất khi A, B đối xứng nhau qua $y = x$.

Vì vậy A, B cùng nằm trên đường thẳng $y = -x + m$.

Khi đó tọa độ các điểm là $A(a; 10^a), B(10^a; a)$

$$\Rightarrow AB = f(a) = \sqrt{2} |10^a - a| \geq \min_{\mathbb{R}} f(a) = f \left(\log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\ln 10} - \log \left(\frac{1}{\ln 10} \right) \right).$$

Câu 104: Cho các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn $\log(x + 2y) = \log x + \log y$. Biết giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \sqrt[4]{e^{\frac{x^2}{1+2y}} \cdot e^{\frac{y^2}{1+x}}} = e^{\frac{a}{b}}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính

$$S = a + b.$$

$$\text{A. } S = 3.$$

$$\text{B. } S = 9.$$

$$\text{C. } S = 13.$$

$$\text{D. } S = 2$$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log(x+2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x+2y = xy \Leftrightarrow x(y-1) = 2y > 0 \Leftrightarrow x = \frac{2y}{y-1} (x > 0, y > 1)$ Do

$$\text{đó: } P = \sqrt[4]{e^{\frac{\left(\frac{2y}{y-1}\right)^2}{1+2y}} \cdot e^{\frac{y^2}{1+\frac{2y}{y-1}}}} = e^{\frac{y^2}{(y-1)^2(2y+1)} + \frac{y^2(y-1)}{3y-1}} \geq e^{\frac{8}{5}}. \text{ Đạt tại } x=4; y=2.$$

Câu 105: Tìm số tự nhiên m lớn nhất để bất đẳng thức $2\log(\sin) + \log\left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{m}{\pi^2}\right) > 0$ đúng với mọi

$$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{A. } m = 5.$$

$$\text{B. } m = 3.$$

$$\text{C. } m = 6.$$

$$\text{D. } m = 4.$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\log\left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{m}{\pi^2}\right) > \log \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{m}{\pi^2} > \frac{1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow m < \pi^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \pi^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$f'(x) = \pi^2 \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\right) < 2\pi^2 \left(-\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}\right) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Do đó } f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow m \leq 4.$$

Chọn D

Câu 106: Cho hai số thực $b > a > 1$, tính $S = \log_a \sqrt[3]{ab}$, khi biểu thức $P = \frac{\log_a b}{\log_a^2\left(\frac{a}{b}\right)} + \log_a \sqrt{ab}$ đạt giá trị

nhỏ nhất.

$$\text{A. } S = 4.$$

$$\text{B. } S = \frac{11}{4}.$$

$$\text{C. } S = \frac{4}{3}.$$

$$\text{D. } S = 3.$$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \frac{\log_a b}{(1 - \log_a b)^2} + \frac{1 + \log_a b}{2} = f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} + \frac{t+1}{2}.$$

Với $t = \log_a b > 1, \forall b > a > 1$.

$$\text{Do đó } f(t) \geq \min_{(1; +\infty)} f(t) = f(3) = \frac{11}{4}. \text{ Dấu bằng đạt tại } \log_a b = 3 \Rightarrow S = \frac{1 + \log_a b}{3} = \frac{4}{3}.$$

Câu 107: Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$, biết $P = \log_b^2\left(\frac{a^4}{b^4}\right) + \log_b \sqrt{a}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng

M khi $b = a^m$. Tính $T = M + m$.

A. $T = \frac{7}{2}$.

B. $T = \frac{37}{10}$.

C. $T = \frac{17}{2}$.

D. $T = \frac{35}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \left(\frac{4 \log_a b}{1 - \log_a b} \right)^2 + \frac{1}{2 \log_a b}.$$

Đặt $x = \log_a b$, ($0 < x < 1$), ta có,

$$y = \frac{16x^2}{(1-x)^2} + \frac{1}{2x}, \quad y' = \frac{-65x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{2(1-x)^3 x^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow \min y = y\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Do đó } M = \frac{7}{2}, \quad m = \frac{1}{5} \Rightarrow T = \frac{7}{2} + \frac{1}{5} = \frac{37}{10}.$$

Câu 108: Xét hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $b > a > 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \log_a^3 \left(\frac{a^2}{b^2} \right) + \log_{\sqrt[3]{b^2}} \left(\frac{b}{a} \right) \dots$$

A. $\frac{23+16\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{23-16\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{23+8\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{23-8\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$P = \left(2 \log_a \left(\frac{a}{b} \right) \right)^3 + \frac{3}{2} \log_b \left(\frac{b}{a} \right) = 8(1 - \log_a b)^3 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\log_a b} \right).$$

$$\text{Đặt } \log_a b = x, \quad (x > 1), \text{ ta có } P = f(x) = 8(1-x)^3 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \text{ và } f'(x) = \frac{3}{2x^2} - 24(1-x)^2.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \in (1; +\infty).$$

$$\text{Lập bảng biến thiên, ta có } P_{\max} = \max_{(1; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{23-16\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 109: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{4} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}.$$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_b \frac{a}{b}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_b a - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_a b}{1 - \log_a b}, \text{ và } \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow b - \frac{1}{4} \leq b^2, \text{ do đó}$$

$$\log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) \geq \log_a b^2 = 2 \log_a b.$$

$$\text{Khi đó ta có: } P \geq 2 \log_a b - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_a b}{1 - \log_a b}.$$

Đặt $x = \log_a b$, ($x > 1$), $f(x) = 2x - \frac{x}{2(1-x)}$.

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2(x-1)^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (1; +\infty).$$

Lập bảng biến thiên ta được $\min_{(1; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} b - \frac{1}{4} = b^2 \\ \log_a b = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}.$$

Câu 110: Xét các số thực a, b thỏa $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a^2(a^2) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

A. 19.

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

$$P = \frac{4}{\left(\log_a\left(\frac{a}{b}\right)\right)^2} + 3(\log_b a - 1) = \frac{4}{(1 - \log_a b)^2} + \frac{3}{\log_a b} - 3.$$

Đặt $\log_a b = x$, ($0 < x < 1$), và $f(x) = \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{3}{x} - 3$.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^2} - \frac{8}{(1-x)^3}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \in (0; 1).$$

Lập bảng biến thiên, ta có $P \geq f\left(\frac{1}{3}\right) = 15$. Dấu bằng xảy ra tại $x = \log_a b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a}$.

Câu 111: Xét các số thực a, b thỏa $\frac{1}{6} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức

$$P = \frac{1}{8} \log_a^3\left(\frac{6b-1}{9}\right) + 4 \log_{\frac{b}{a}}^3 a.$$

A. $m = 9$.

B. $m = 12$.

C. $m = \frac{23}{2}$.

D. $m = \frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4 \log_{\frac{b}{a}}^3 a = \frac{4}{\left(\log_a \frac{b}{a}\right)^3} = \frac{4}{(\log_a b - 1)^3}$, $(3b-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{6b-1}{9} \leq b^2$ và $\frac{1}{6} < b < a < 1$

Nên $\log_a^3\left(\frac{6b-1}{9}\right) \geq \log_a^3 b^2 = 8 \log_a^3 b$.

Đặt $\log_a b = x$ ($x > 1$), $f(x) = x^3 + \frac{4}{(x-1)^3}$.

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{12}{(x-1)^4}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (1; +\infty).$$

Lập bảng biến thiên, ta có $P \geq f(x) \geq \min_{(1;+\infty)} f(x) = f(2) = 12$.

Câu 112: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $b < 4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4^a b^{2a}}{(4^a - b^a)^3} + \frac{7 \cdot 4^{a-2}}{b^a} \text{ là } \frac{m}{n} \text{ với } m, n \text{ là các số nguyên dương và } \frac{m}{n} \text{ tối giản. Tính } S = m + n.$$

A. 43.

B. 33.

C. 23.

D. 13.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi biểu thức và đặt $x = \left(\frac{4}{b}\right)^a$ ($x > 1$) ta có

$$P = \frac{\left(\frac{4}{b}\right)^a}{\left(\left(\frac{4}{b}\right)^a - 1\right)^3} + \frac{7}{16} \left(\frac{4}{b}\right)^a = f(x) = \frac{x}{(x-1)^3} + \frac{7}{16} x \geq \min_{(1;+\infty)} f(x) = f(3) = \frac{27}{16}.$$

Câu 113: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a^3 > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_{\frac{a^3}{b}}(ab) \cdot \log_b a}{3(\log_a b - 1)^2 + 8}.$$

A. $e^{\frac{1}{8}}$.B. $\frac{1}{8}$.C. $e^{\frac{1}{4}}$.D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{\log_a(ab)}{\log_a b \cdot \log_a \frac{a^3}{b} (3(\log_a b - 1)^2 + 8)} = \frac{\log_a b + 1}{\log_a b \cdot (3 - \log_a b) (3(\log_a b - 1)^2 + 8)}.$$

Đặt $x = \log_a b$ ($0 < x < 3$)

$$\text{Ta có } P = f(x) = \frac{x+1}{x(3-x)(3x^2-6x+11)}.$$

$$\text{Suy ra } \ln f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \ln(3-x) - \ln(3x^2-6x+11)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} - \frac{6(x-1)}{3x^2-6x+11} = \frac{(x-1)(9x^3-9x^2-25x+33)}{x(x+1)(3-x)(3x^2-6x+11)}.$$

$$\text{Do đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(9x^3-9x^2-25x+33) = 0 \Leftrightarrow x=1 \in (0;3).$$

$$\text{Suy ra } P_{\min} = \min_{(0;3)} f(x) = f(1) = \frac{1}{8}.$$

Câu 114: Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $a > b > 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \text{ là } m + \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{p} \text{ với } m, n, p \text{ là các số nguyên. Tính}$$

$$T = m + n + p.$$

A. $T = -1$.B. $T = 0$.C. $T = -14$.D. $T = 6$.

Lời giải

Chọn C

Ta biến đổi đưa về cơ sở là a như sau: $\log_a b^2 = 2 \log_a b$ và

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{\log_a \frac{b}{a}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\log_a b - 1}{2 \left(\frac{1}{2} \log_a b - 1 \right)} = \frac{\log_a b - 1}{\log_a b - 2}$$

Đặt $t = \log_a b$ ($0 < t < 1$) với mọi $a > b > 1$.

$$\text{Vì vậy } S = f(t) = 4t^2 + 6 \left(\frac{t-1}{t-2} \right)^2 \geq \min_{(0,1)} f(t) = f \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) = 2 \left(1 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \right).$$

Vậy $m = 2, n = 16, p = -32 \Rightarrow T = -14$.

Câu 115: (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Gọi a là giá trị nhỏ nhất của

$$f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_3 n}{9^n} \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geq 2. \text{ Hỏi có bao nhiêu giá trị của } n \text{ để}$$

$$f(n) = a.$$

A. 2

B. 4

C. 1

D. vô số

Lời giải

Chọn A

$$f(n) = \frac{\log_3 2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 4 \dots \log_3 n}{9^n} = \frac{1}{9} \log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \dots \log_{3^9} n$$

Ta có:

$$\text{- Nếu } 2 \leq n \leq 3^8 \Rightarrow 0 < \log_{3^9} k < 1 \Rightarrow f(n) = \frac{1}{9} \log_{3^9} 2 \cdot \log_{3^9} 3 \cdot \log_{3^9} 4 \dots \log_{3^9} n \geq f(3^8)$$

$$\text{- Nếu } n = 3^9 \Rightarrow f(3^9) = f(3^8) \cdot \log_{3^9} 3^9 = f(3^8)$$

$$\text{- Nếu } n > 3^9 \Rightarrow \log_{3^9} n > 1 \Rightarrow f(n) = f(3^9) \cdot \log_{3^9} (3^9 + 1) \dots \log_{3^9} n > f(3^9)$$

$$\text{Từ đó suy ra } \min f(n) = f(3^9) = f(3^8).$$

Câu 116: (Hội các trường chuyên 2019 lần 3) Cho $x, y \in (0; 2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8) = ey(ey-11)$.

Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{1 + \ln y}$ bằng

A. $\sqrt{1 + \ln 3 - \ln 2}$.

B. $2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.

C. $1 + \sqrt{\ln 3 - \ln 2}$.

D. $1 + \sqrt{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1, y \geq \frac{1}{e}.$$

$$\text{Ta có: } (x-3)(x+8) = ey(ey-11) \Leftrightarrow x^2 + 5x - 24 = e^2 y^2 - 11ey$$

$$\Leftrightarrow e^2 y^2 - 11ey - (x^2 + 5x - 24) = 0 \quad (*), \text{ có } \Delta = (2x+5)^2 > 0, \forall x \geq 1.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} ey = \frac{11 + (2x+5)}{2} \\ ey = \frac{11 - (2x+5)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ey = x+8 \\ ey = 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+8}{e} \\ y = \frac{3-x}{e} \end{cases}.$$

$$\text{+) Do } y = \frac{x+8}{e} > \frac{9}{e} > 2 \text{ nên loại } y = \frac{x+8}{e}.$$

$$\text{+) Với } y = \frac{3-x}{e}, 1 \leq x < 2:$$

Cách 1:

$$\text{Khi đó, ta được: } P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)} \text{ trên } [1; 2).$$

Ta có $P' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}}$

$$P' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{1}{2(3-x)\sqrt{\ln(3-x)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} - x\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow (3-x)\sqrt{\ln(3-x)} = x\sqrt{\ln x} \quad (**)$$

Xét hàm $f(t) = t\sqrt{\ln t}$ trên $[1; +\infty)$, có $f'(t) = \sqrt{\ln t} + \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} > 0, \forall t \in (1; +\infty)$.

Khi đó $(**) \Leftrightarrow f(3-x) = f(x) \Leftrightarrow 3-x = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	1	$\frac{3}{2}$	2
P'	+	0	-
P		$2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$	

Từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ tại $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2e}$.

Cách 2:

Khi đó, ta được: $P = \sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)}$ trên $[1; 2)$.

$$\Rightarrow P^2 = \left[\sqrt{\ln x} + \sqrt{\ln(3-x)} \right]^2 \leq 2(\ln x + \ln(3-x)) = 2\ln[x(3-x)]$$

$$\leq 2\ln\left(\frac{x+3-x}{2}\right)^2 = 4(\ln 3 - \ln 2), \forall x \in [1; 2)$$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{\ln x} = \sqrt{\ln(3-x)} \\ x = 3-x \\ x \in [1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy Từ đó $P_{\max} = 2\sqrt{\ln 3 - \ln 2}$ tại $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{2e}$.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I - PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1 - Phương trình mũ cơ bản:

Với $a > 0, a \neq 1$:

$$a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$$

2 - Một số phương pháp giải phương trình mũ

a) Đưa về cùng cơ số:

Với $a > 0, a \neq 1$:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Chú ý: Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì: $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

b) Lôgarit hoá:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b) \cdot g(x)$$

c) Đặt ẩn phụ:

• **Dạng 1:** $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$, trong đó $P(t)$ là đa thức theo t .

• **Dạng 2:** $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$

Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

• **Dạng 3:** $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$, với $ab = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

• Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).

• Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:

$\left[\begin{array}{l} f(x) \text{ đồng biến và } g(x) \text{ nghịch biến (hoặc đồng biến không nghiêm ngặt).} \\ f(x) \text{ nghịch biến và } g(x) \text{ đồng biến} \end{array} \right. \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_0$

• Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

e) Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt

• **Phương trình tích** $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

• **Phương trình** $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

f) Phương pháp đối lập

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

• Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

• Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:

– Đưa về cùng cơ số.

– Đặt ẩn phụ.

–

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**I - PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

Câu 1: Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x+1}{4}+\frac{1}{x}} = 4$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Chọn D

Điều kiện $x \neq 0$

- Nếu $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \geq 1$, dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 1$,

dấu bằng xảy ra khi $x = 2$ suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x+1}{4}+\frac{1}{x}} > 4, \forall x > 0$

- Nếu $x < 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{4x} \geq 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4x} \leq -1 \Rightarrow 2^{x+\frac{1}{4x}} \leq \frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = -\frac{1}{2}$

và $-\frac{x}{4} - \frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \leq -1 \Rightarrow 2^{\frac{x+1}{4}+\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi $x = 2$

Suy ra $2^{x+\frac{1}{4x}} + 2^{\frac{x+1}{4}+\frac{1}{x}} < 1, \forall x < 0$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bình luận:

Sử dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

Câu 2: Phương trình $2^{x-3} = 3^{x^2-5x+6}$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, hãy chọn phát biểu đúng?

- A. $3x_1 - 2x_2 = \log_3 8$. B. $2x_1 - 3x_2 = \log_3 8$.
C. $2x_1 + 3x_2 = \log_3 54$. D. $3x_1 + 2x_2 = \log_3 54$.

Lời giải

Logarit hóa hai vế của phương trình (theo cơ số 2) ta được: $(3) \Leftrightarrow \log_2 2^{x-3} = \log_2 3^{x^2-5x+6}$

$$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2 = (x^2-5x+6)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-3) - (x-2)(x-3)\log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \cdot [1 - (x-2)\log_2 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 1-(x-2)\log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (x-2)\log_2 3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x-2=\frac{1}{\log_2 3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\log_3 2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\log_3 2+\log_3 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\log_3 18 \end{cases}$$

Câu 3: Phương trình $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$ có tổng các nghiệm là?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \quad (7)$$

$$(7) \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 10^3 \Leftrightarrow 27 \cdot \left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} \right) + 81 \cdot \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) = 10^3 \quad (7')$$

$$\text{Đặt } t = 3^x + \frac{1}{3^x} \stackrel{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

Khi đó: $(7') \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \quad (N)$

Với $t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (7'')$

Đặt $y = 3^x > 0$. Khi đó: $(7'') \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \quad (N) \\ y = \frac{1}{3} \quad (N) \end{cases}$

Với $y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Với $y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=-1}$

Câu 4: Phương trình $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm không âm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

$$3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4 \cdot 3^x - 5 = 0 \Leftrightarrow (3^{2x} - 1) + 2x(3^x + 1) - (4 \cdot 3^x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x + 1) + (2x - 4)(3^x + 1) = 0 \Leftrightarrow (3^x + 2x - 5)(3^x + 1) = 0 \Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x + 2x - 5$, ta có: $f(1) = 0$.

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 1$

BÌNH LUẬN

Có thể đặt $t = 3^x > 0$ sau đó tính delta theo x

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2016^x + 2017^x = 2016 - x$.

A. 1. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2016^x + 2017^x = 2016 - x$ (*) có:

Vế trái (*): $2^x + 3^x + 4^x + \dots + 2016^x + 2017^x = f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vế phải (*): $2016 - x = g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình (*) có không quá 1 nghiệm.

Mà $f(0) = 2016 = g(0)$ nên suy ra (*) có 1 nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Câu 6: **(Sở Ninh Bình Lần 1)** Số nghiệm của phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $50^x + 2^{x+5} = 3 \cdot 7^x \Leftrightarrow 50^x + 2^{x+5} - 3 \cdot 7^x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = 50^x + 2^{x+5} - 3 \cdot 7^x$

$f'(x) = 50^x \ln 50 + 2^{x+5} \ln 2 - 3 \cdot 7^x \ln 7$

$f''(x) = 50^x (\ln 50)^2 + 2^{x+5} (\ln 2)^2 - 3 \cdot 7^x (\ln 7)^2$

Khi $x \geq 0$ thì $f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^x (\ln 50)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2$

$f''(x) \geq 7^x \left(\left(\frac{50}{7} \right)^0 (\ln 50)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 2^{x+5} (\ln 2)^2 > 0$

Khi $x < 0$ thì $f''(x) = 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^x 32(\ln 2)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2$

$$f''(x) > 7^x \left(\left(\frac{2}{7} \right)^0 32(\ln 2)^2 - 3(\ln 7)^2 \right) + 50^x (\ln 50)^2 > 0$$

Suy ra $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ nên $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Câu 7: (Hậu Lộc Thanh Hóa) Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

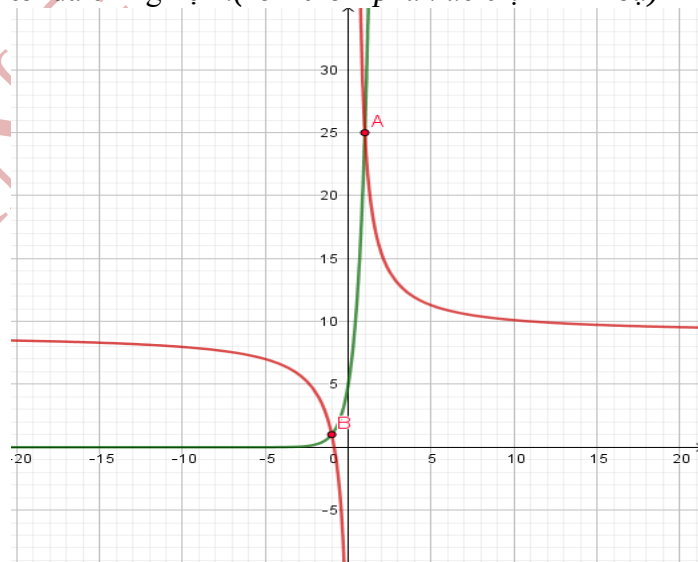
Ta thấy $x = \frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình, do đó

$$15x \cdot 5^x = 5^{x+1} + 27x + 23 \Leftrightarrow 5^{x+1} = \frac{27x + 23}{3x - 1}$$

Xét hai hàm số $f(x) = 5^{x+1}$ và $g(x) = \frac{27x + 23}{3x - 1}$ trên tập $D = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Ta có $f'(x) = 5^{x+1} \cdot \ln 5 > 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$ và $g'(x) = \frac{-96}{(3x-1)^2} < 0, \forall x \neq \frac{1}{3}$.

Do vậy hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến và $g(x)$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định nên phương trình có tối đa 02 nghiệm. (xem thêm phần đồ thị minh họa)



Nhận thấy $x = \pm 1$ là hai nghiệm của phương trình trên.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 8: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$. Khi đó, tổng hai nghiệm bằng?

A. 0.

B. 2.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

$$2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{x^2+1} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{4 \cdot 2^{2(x^2+1)} - 4 \cdot 2^{x^2+1}} + 1$$

Đặt $t = 2^{x^2+1}$ ($t \geq 2$), phương trình trên tương đương với

$$8t = t^2 + \sqrt{4t^2 - 4t + 1} \Leftrightarrow t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 + \sqrt{10} \text{ (vì } t \geq 2\text{)}. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$2^{x^2+1} = 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\log_2 \frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\log_2 \frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \end{cases}$$

Vậy tổng hai nghiệm bằng 0.

Câu 9: Giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình

$$4^{x-1} + 2^x \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1).$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4 < x_0 < 7$.

B. $x_0 > 7$.

C. $-2 < x_0 < 4$.

D. $-5 < x_0 < -2$.

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} + 2^x \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1) + 2 = 2^x + 2 \cdot \sin(2^{x-1} + y - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2)^2 + 4(2^x - 2) \sin(2^{x-1} + y - 1) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2^x - 2) + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)]^2 + 4 - 4 \sin^2(2^{x-1} + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2^x - 2) + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1)]^2 + 4 \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 2) + 2 \sin(2^{x-1} + y - 1) = 0 & (1) \\ \cos^2(2^{x-1} + y - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2^{x-1} + y - 1) = 1 \xrightarrow{(1)} 2^x = 0 \text{ (loại)}. \\ \sin(2^{x-1} + y - 1) = -1 \xrightarrow{(1)} 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2. \end{cases}$$

Chọn C.

Câu 10: (Gang Thép Thái Nguyên) Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1) \cdot 16^x - 2(2m-3) \cdot 4^x + 6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. 4.

B. 8.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành:

$$(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5=0 \Leftrightarrow m = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6} \quad (*).$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Đặt } f(t) = -\frac{t^2 + 6t + 5}{t^2 - 4t + 6} \Rightarrow f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{561}}{10}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{561}}{10}$	0	1	$\frac{1+\sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0		-	0	+
$f(x)$			$-\frac{5}{6}$			-1

$\swarrow$ -4 $\searrow$
 $\approx -11,67$

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Cách 2:

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0$ (*).

Đặt $f(x) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Điều đó xảy ra khi: } \begin{cases} (m+1)f(1) < 0 \\ (m+1)f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(3m+12) < 0 \\ (m+1)(6m+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < -1 \\ m < -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < -1.$$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m = -3$ và $m = -2$.

Câu 11: (**CHUYÊN THÁI NGUYỄN LẦN 3**) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để phương trình $2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m-3}\cos x} + (\cos^3 x + 6\sin^2 x + 9\cos x + m - 6)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1$ có nghiệm thực. Khi đó tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập S bằng

A. 28. B. 21. C. 24. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

$$2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m-3}\cos x} + (\cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + m)2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m-3}\cos x} + [(\cos x - 2)^3 + 8 + m - 3\cos x]2^{\cos x - 2} = 2^{\cos x + 1} + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m-3}\cos x} + [(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x]2^{\cos x - 2} = 1.$$

Đặt $\cos x - 2 = a$ và $\sqrt[3]{m-3}\cos x = b$.

Ta có phương trình: $2^{a+b} + (a^3 + b^3)2^a = 1$ (1).

Nhận thấy $a+b=0$ thỏa mãn phương trình (1).

Nếu $a+b > 0$ thì $2^{a+b} > 2^0 = 1$ và $(a^3 + b^3)2^a > 0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $a+b < 0$ thì $2^{a+b} < 1$ và $(a^3 + b^3)2^a < 0$ nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Vậy $a+b=0$ suy ra $\sqrt[3]{m-3}\cos x = 2 - \cos x \Leftrightarrow -\cos^3 x + 6\cos^2 x - 9\cos x + 8 = m$.

Đặt $\cos x = t$ với điều kiện $t \in [-1; 1]$, suy ra $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8 = m$.

Để thấy $\min_{t \in [-1;1]} f(t) = 4$ và $\max_{t \in [-1;1]} f(t) = 24$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \in [4; 24]$. Suy ra $S = \{4; 5; \dots; 24\}$ nên tổng của hai phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của S bằng 28.

Cách khác : Ta có $2^{\cos x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\cos x}} + [(\cos x - 2)^3 + m - 3\cos x] 2^{\cos x - 2} = 1$.

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3\cos x}} + (\sqrt[3]{m - 3\cos x})^3 = 2^{2 - \cos x} + (2 - \cos x)^3.$$

Xét hàm số đặc trưng $f(u) = 2^u + u^3$, đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó ta cũng suy ra được $\sqrt[3]{m - 3\cos x} = 2 - \cos x$.

Câu 12: (Chuyên Hưng Yên Lần 3) Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$. Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình

$f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b^2$.

A. $P = 11$.

B. $P = 7$.

C. $P = -1$.

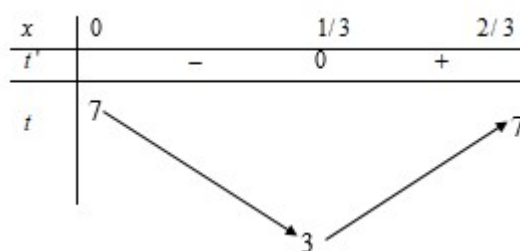
D. $P = 9$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$ (1) thì $f(t) = 1 - 2m(2)$.

$$t' = \frac{-4(6 - 18x)}{2\sqrt{6x - 9x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$



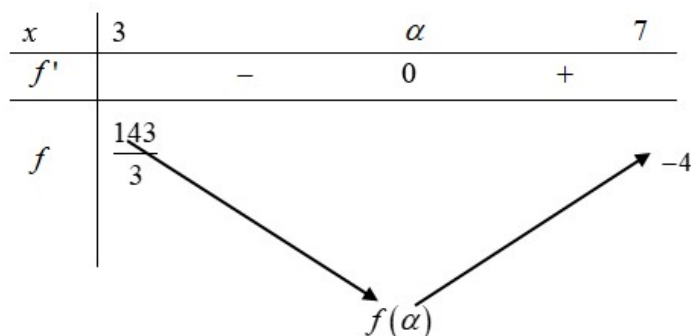
Từ BBT suy ra nếu $t \in (3; 7]$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x .

Xét hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$

$$f'(x) = 3^{x-4} \ln 3 + 2^{7-x} - (x+1) 2^{7-x} \ln 2 - 6$$

$$f''(x) = 3^{x-4} \ln^2 3 + (2^{7-x} \ln 2) [(x+1) \ln 2 - 2] > 0 \forall x \in (3; 7]$$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3; 7]$. Mặt khác, $f'(6) \cdot f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \alpha \in (6; 7)$.



Vậy, phương trình $f(t) = 1 - 2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$$f(\alpha) < 1 - 2m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m < \frac{1 - f(\alpha)}{2}$$

Kết luận, GTNN của m là $\frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2$.

Câu 13: Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. $m = 4$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Ta có: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + 2m = 0 \quad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn 2^x có: $\Delta' = (-m)^2 - 2m = m^2 - 2m$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m(m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq 0 \end{cases}$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có: $2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2m \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2} = 2m$

Do đó $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 2m \Leftrightarrow m = 4$.

Thử lại ta được $m = 4$ thỏa mãn.

Chọn A

Bình luận:

Do phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn $2^x > 0$ có thể có nghiệm $2^x < 0$ (vô lý) nên khi giải ra tham số $m = 4$ thì phải thử lại.

Câu 14: (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - (2m+3)2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

C. $\left(\frac{21}{2}; \frac{29}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{2}; \frac{19}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$). Ta có phương trình ẩn t : $t^2 - (2m+3)t + 64 = 0$ (*). Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 256 > 0 \\ 2m+3 > 0 \\ 64 > 0, \forall m \end{cases}$$

Gọi hai nghiệm của phương trình (*) là t_1, t_2 .

Khi đó: $x_1 = \log_2 t_1$; $x_2 = \log_2 t_2$. Từ giả thiết $(x_1+2)(x_2+2) = 24$

$$\Leftrightarrow (\log_2 t_1 + 2)(\log_2 t_2 + 2) = 24 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 + 2(\log_2 t_1 + \log_2 t_2) = 20$$

$$\Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 20 \Leftrightarrow 2m + 3 = 20 \Leftrightarrow m = \frac{17}{2} \text{ (TM)}.$$

Câu 15: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $5^{\sqrt{x+2}-x} - 5m = 0$ có nghiệm thực.

A. $(0; 5\sqrt[4]{5}]$.

B. $[5\sqrt[4]{5}; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $[0; 5\sqrt[4]{5}]$.

Lời giải

Chọn AĐiều kiện $m > 0$.

$$5^{\sqrt{x+2}-x} - 5m = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} - x = 1 + \log_5 m \quad (1) \quad (x \geq -2).$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+2} - x$ ($x \geq -2$) với đường thẳng $y = 1 + \log_5 m$.

Xét hàm số $y = \sqrt{x+2} - x$ ($x \geq -2$).

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - 1; y' = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{4}.$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$		
y'	$ $	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thực thì $1 + \log_5 m \leq \frac{9}{4} \Rightarrow 0 < m \leq 5\sqrt[4]{5}$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m + e^{\frac{x}{2}} = \sqrt[4]{e^{2x} + 1}$ có nghiệm thực:

A. $0 < m \leq \frac{2}{e}$.

B. $\frac{1}{e} \leq m < 1$.

C. $0 < m < 1$.

D. $-1 < m < 0$.

Lời giải

Chọn C

Biến đổi phương trình về dạng $m = \sqrt[4]{(e^x)^2 + 1} - \sqrt{e^x}$. Đặt $t = e^x$; ($t > 0$) ta xét hàm số $y = \sqrt[4]{t^2 + 1} - \sqrt{t}$ trên $(0; +\infty)$.

$$y' = \frac{t}{2\sqrt[4]{(t^2 + 1)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t^3} - \sqrt[4]{(t^2 + 1)^3}}{2\sqrt{t}\sqrt[4]{(t^2 + 1)^3}} = \frac{\sqrt[4]{(t^2)^3} - \sqrt[4]{(t^2 + 1)^3}}{2\sqrt{t}\sqrt[4]{(t^2 + 1)^3}} < 0 \quad (\forall t > 0)$$

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
y'		-
y	1	$\searrow 0$

Vậy điều kiện cần tìm là $0 < m < 1$

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt. $\begin{cases} 3^{x^2-3x+2} = u \\ 3^{4-x^2} = v \end{cases} \Rightarrow u \cdot v = 3^{6-3x}$. Khi đó phương trình trở thành

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow m(u-1) - v(u-1) = 0 \Leftrightarrow (u-1)(m-v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2-3x+2} = 1 \\ 3^{2-x^2} = m (m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 4 - x^2 = \log_3 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x^2 = 4 - \log_3 m \end{cases}$$

Để phương trình có ba nghiệm thì $x^2 = 4 - \log_3 m$ có một nghiệm khác 1; 2. Tức $4 - \log_3 m = 0 \Leftrightarrow m = 81$.

Chọn A

Câu 18: Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$.

B. $[2;4]$.

C. $(2;4)$.

D. $(3;4)$.

Chọn C.

Ta có: $6^x + (3-m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = m$

Xét hàm số $f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có

$$f'(x) = \frac{12^x \cdot \ln 3 + 6^x \cdot \ln 6 + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2, f(1) = 4$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m \in (2;4)$.

Câu 19: Tìm tập hợp tất cả các tham số m sao cho phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $(-\infty;1)$.

B. $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

C. $[2;+\infty)$.

D. $(2;+\infty)$.

Lời giải

Đặt $t = 2^{(x-1)^2} \quad (t \geq 1)$

Phương trình có dạng: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0(*)$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 3m + 2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ \sqrt{m^2 - 3m + 2} < m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ m - 1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 < m^2 - 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Chọn D**Bình luận:**

Trong bài này do đề bài yêu cầu phương trình có 4 nghiệm phân biệt nên ta cần chú ý mỗi $t \geq 1$ thì ta nhận được bao nhiêu giá trị x

Từ phương trình (*) chúng ta có thể cô lập m và ứng dụng hàm số để biện luận số nghiệm của phương trình thỏa đề bài.

Câu 20: Tìm các giá trị của m để phương trình: $\sqrt{3^x + 3} + \sqrt{5 - 3^x} = m$ có 2 nghiệm phân biệt:

A. $\sqrt{3} + \sqrt{5} < m < 4$.

B. $2\sqrt{2} < m < 4$.

C. $2\sqrt{2} < m < \sqrt{3}$.

D. $m > 2\sqrt{2}$.

Lời giải

ĐK: $x \leq \log_3 5$

Đặt: $f(x) = \sqrt{3^x + 3} + \sqrt{5 - 3^x}$ với $x \leq \log_3 5$.

$$f'(x) = \frac{3^x \ln 3}{2\sqrt{3^x + 3}} - \frac{3^x \ln 3}{2\sqrt{5 - 3^x}} = \frac{3^x \ln 3 (\sqrt{5 - 3^x} - \sqrt{3^x + 3})}{2(\sqrt{3^x + 3})(\sqrt{5 - 3^x})}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5 - 3^x} = \sqrt{3^x + 3} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

BBT

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$\sqrt{3} + \sqrt{5}$	4	$2\sqrt{2}$

Chọn A

Câu 21: (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S = -35$.

B. $S = 20$.

C. $S = 25$.

D. $S = -21$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m \Leftrightarrow 4^x - 8 \cdot 2^x = m^2 + 6m - 7(1)$.

Đặt $2^x = t$, với $x \in (1; 3)$ thì $t \in (2; 8)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t = m^2 + 6m - 7(2)$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t, t \in (2; 8)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 8; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in (2; 8)$.

Lại có $f(2) = -12; f(4) = -16; f(8) = 0$.

Mà hàm $f(t)$ xác định và liên tục trên $t \in (2; 8)$ nên $-16 \leq f(t) < 0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm trên $t \in (2; 8) \Leftrightarrow -16 \leq m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.
 Vậy $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Do đó $S = -21$.

Câu 22: (Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019) Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m$ có nghiệm $x \in (1; 3)$. Chọn đáp án đúng.

A. $S = -35$.

B. $S = 20$.

C. $S = 25$.

D. $S = -21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x + 7 = 2^{x+3} + m^2 + 6m \Leftrightarrow 4^x - 8 \cdot 2^x = m^2 + 6m - 7$ (1).

Đặt $2^x = t$, với $x \in (1; 3)$ thì $t \in (2; 8)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 8t = m^2 + 6m - 7$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t, t \in (2; 8)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 8; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in (2; 8)$.

Lại có $f(2) = -12; f(4) = -16; f(8) = 0$.

Mà hàm $f(t)$ xác định và liên tục trên $t \in (2; 8)$ nên $-16 \leq f(t) < 0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm trên $t \in (2; 8) \Leftrightarrow -16 \leq m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Vậy $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Do đó $S = -21$.

Câu 23: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 2^x - 2^m + 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $\log_2 \frac{3}{4} < m \leq 0$.

B. $\log_3 2 < m < 0$.

C. $\log_2 \frac{3}{4} < m < 0$.

D. $\frac{3}{4} < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - t - 2^m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t + 1 = 2^m$ (*).

Ta có $x < 0 \Leftrightarrow t < 1$. Do đó, bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 1)$ (vì mỗi giá trị x sẽ cho một giá trị t và ngược lại).

Xét hàm $f(t) = t^2 - t + 1$ với $t \in (0; 1)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $(0; 1)$ như sau

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$		-	+
$f(t)$	1	$\frac{3}{4}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; 1)$ khi và

chỉ khi $\frac{3}{4} < 2^m < 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{3}{4} < m < 0$.

Vậy giá trị m cần tìm là $\log_2 \frac{3}{4} < m < 0$.

Câu 24: Cho phương trình: $m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + m$ (1). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$.

B. $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{7}; \frac{1}{256} \right\}$.

C. $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{6}; \frac{1}{256} \right\}$.

D. $m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{5}; \frac{1}{256} \right\}$.

Lời giải

Viết phương trình lại dưới dạng:

$$m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2.2^{6-5x} + m$$

$$\Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6+1-x^2} + m$$

$$\Leftrightarrow m2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2^{x^2-5x+6}.2^{1-x^2} + m$$

Đặt $\begin{cases} u = 2^{x^2-5x+6} \\ v = 2^{1-x^2} \end{cases}; u, v > 0$. Khi đó phương trình tương đương:

$$mu + v = uv + m \Leftrightarrow (u-1)(v-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-5x+6} = 1 \\ 2^{1-x^2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ 2^{1-x^2} = m (*) \end{cases}$$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và 3.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1-x^2 = \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x^2 = 1 - \log_2 m \end{cases}$$

Khi đó ĐK là:

$$\begin{cases} m > 0 \\ 1 - \log_2 m > 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 0 \\ 1 - \log_2 m \neq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 2 \\ m \neq \frac{1}{8} \\ m \neq \frac{1}{256} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 2) \setminus \left\{ \frac{1}{8}; \frac{1}{256} \right\}$$

Chọn A

Câu 25: (Chuyên Thái Bình Lần 3) Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để phương trình

$$(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$$
 có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14.

B. 15.

C. 13.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$(\sqrt{10}+1)^{x^2} + m(\sqrt{10}-1)^{x^2} = 2.3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3} \right)^{x^2} + m \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3} \right)^{x^2} = 6 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3} \right)^{x^2}, t > 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3} \right)^{x^2} = \frac{1}{t}$$

$$(1) \Leftrightarrow t + m \cdot \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0 \quad (2)$$

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

(2) $\Leftrightarrow m = -t^2 + 6t$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1; +\infty)$, ta có:

$$f'(t) = -2t + 6; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Bảng biến thiên:

t	1	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	5	9	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m < 5$ hoặc $m = 9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in (-10; 10)$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 26: (**Chuyên Bắc Giang**) Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình sau có nghiệm?

$$e^m + e^{3m} = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right).$$

A. 2.

B. 0.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \in [-1; 1]$.

$$\text{Xét phương trình: } e^m + e^{3m} = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right) \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{Ta có } t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Khi đó, phương trình (1) trở thành:

$$e^m + e^{3m} = 2t\left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow e^m + e^{3m} = t(t^2 + 1) \Leftrightarrow (e^m)^3 + e^m = t^3 + t \quad (2).$$

Xét hàm số: $g(u) = u^3 + u$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(u) = 3u^2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó: } (2) \Leftrightarrow g(e^m) = g(t) \Leftrightarrow e^m = t.$$

$$\text{Khi đó ta có } (1) \Leftrightarrow e^m = x + \sqrt{1-x^2} \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. TXĐ: $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
-----	-----------	----	----------------------	---	-----------

$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		-1	$\nearrow \sqrt{2}$	$\searrow 1$	

Phương trình (1) có nghiệm $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm $x \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow -1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2}.$$

Do $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0\}$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(7-3\sqrt{5})^{x^2} + m(7+3\sqrt{5})^{x^2} = 2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m < \frac{1}{16}$.

B. $0 \leq m < \frac{1}{16}$.

C. $-\frac{1}{2} < m \leq \frac{1}{16}$.

D. $\begin{cases} -\frac{1}{2} < m \leq 0 \\ m = \frac{1}{16} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{PT} \Leftrightarrow \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2} \in (0; 1]. \text{ Khi đó PT} \Rightarrow 2t^2 - t + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = t - 2t^2 = g(t) \quad (1).$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 1 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

Suy ra bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{4}$	1	
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$	0	$\nearrow \frac{1}{8}$	$\searrow -1$	

PT đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm $t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = \frac{1}{8} \\ -1 < 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} < m \leq 0 \end{cases}.$$

Bình luận:

Trong bài này các em cần lưu ý tìm điều kiện đúng cho t và mối quan hệ số nghiệm giữa biến cũ và biến mới, tức là mỗi $t \in (0; 1)$ cho ta hai giá trị x .

Câu 28: Cho phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2) \cdot 3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có nghiệm.

A. $4 \leq m \leq \frac{64}{7}$

B. $4 \leq m \leq 8$

C. $3 \leq m \leq \frac{64}{7}$

D. $m \geq \frac{64}{7}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}} \rightarrow t \in [3;9]$

Phương trình có dạng $t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ (do $t \in [3;9]$).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ trên $t \in [3;9]$

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 4t + 3}{(t-2)^2} > 0, \forall t \in [3;9]$, nên hàm số đồng biến trên $[3;9]$. Vậy để phương trình

có nghiệm thì $\min_{[3;9]} f(t) \leq m \leq \max_{[3;9]} f(t) \Leftrightarrow f(3) \leq m \leq f(9) \Leftrightarrow 4 \leq m \leq \frac{64}{7}$.

Câu 29: Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $3^x + 3 = m \cdot \sqrt{9^x + 1}$ (1) có đúng 1 nghiệm.

A. $(1,3]$

B. $(3; \sqrt{10})$

C. $\{\sqrt{10}\}$

D. $(1;3) \cup \{\sqrt{10}\}$

Lời giải

Phương trình (1) tương đương: $\frac{3^x + 3}{\sqrt{9^x + 1}} = m$ đặt $t = 3^x$ ($t > 0$)

Phương trình (1) trở thành: $\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}} = m$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ với ($t > 0$)

Ta có: $y' = \frac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$

Dựa vào đồ thị ta có: $m \in (1,3]$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'		+	0	-
y	1	3	$\sqrt{10}$	1

Chọn A

Câu 30: (Chuyên Vinh Lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $9 \cdot 3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3) \cdot 3^x + 1 = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

A. Vô số.

B. 3.

C. 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $9.3^{2x} - m(4\sqrt{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3).3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} + \frac{1}{3^{x+1}} - \frac{m}{3}(4\sqrt{x+1} + 3m + 3) = 0$ (1)

Đặt $t = x + 1$, phương trình (1) thành $3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{m}{3}(4\sqrt{t} + 3m + 3) = 0$ (2).

Bài toán trở thành tìm số giá trị nguyên của m để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận xét: Nếu t_0 là một nghiệm của phương trình (2) thì $-t_0$ cũng là một nghiệm của phương trình (2). Do đó điều kiện cần để phương trình (2) có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là phương trình (2) có nghiệm $t = 0$.

Với $t = 0$ thay vào phương trình (2) ta có $-m^2 - m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Thử lại:

+) Với $m = -2$ phương trình (2) thành $3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3}(4\sqrt{t} - 3) = 0$

Ta có $3^t + \frac{1}{3^t} \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}$ và $\frac{2}{3}(4\sqrt{t} - 3) \geq -2, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $3^t + \frac{1}{3^t} + \frac{2}{3}(4\sqrt{t} - 3) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi $t = 0$, hay phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = 0$ nên loại $m = -2$.

+) Với $m = 1$ phương trình (2) thành $3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6) = 0$ (3)

Để thấy phương trình (3) có 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$.

Ta chứng minh phương trình (3) chỉ có 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$. Vì t là nghiệm thì $-t$ cũng là nghiệm phương trình (3) nên ta chỉ xét phương trình (3) trên $[0; +\infty)$.

Trên tập $[0; +\infty)$, (3) $\Leftrightarrow 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6) = 0$.

Xét hàm $f(t) = 3^t + \frac{1}{3^t} - \frac{1}{3}(4\sqrt{t} + 6)$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 3^{-t} \ln 3 - \frac{2}{3\sqrt{t}}, f''(t) = 3^t \ln^2 3 + 3^{-t} \ln^2 3 + \frac{1}{3(\sqrt{t})^3} > 0, \forall t > 0$.

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty) \Rightarrow f'(t) = 0$ có tối đa 1 nghiệm $t > 0 \Rightarrow f(t) = 0$ có tối đa 2 nghiệm $t \in [0; +\infty)$. Suy ra trên $[0; +\infty)$, phương trình (3) có 2 nghiệm $t = 0, t = 1$.

Do đó trên tập $\mathbb{R}$, phương trình (3) có đúng 3 nghiệm $t = -1, t = 0, t = 1$. Vậy chọn $m = 1$.

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm này, sau khi loại được $m = -2$ ta có thể kết luận đáp án C do đề không có phương án nào là không tồn tại m .

Câu 31: (Chuyên Vinh Lần 2) Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Tính giá trị biểu thức $T = b^2 - a^2$

A. $T = 36$.

B. $T = 48$.

C. $T = 64$.

D. $T = 72$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$
 $\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Mà } f(\sqrt[3]{m-3x}) = f(2-x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 2-x \Leftrightarrow m-3x = (2-x)^3$$

$$\Leftrightarrow m = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ và đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = -3x^2 + 12x - 9; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$. Suy ra $a = 4; b = 8$.

$$\text{Vậy } T = b^2 - a^2 = 48$$

Câu 32: (Hải Hậu Lần1) Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1}$ có hai nghiệm thực phân biệt là $(a; \sqrt{b})$. Tính $S = 2a + 3b$

A. $S = 29$.

B. $S = 28$.

C. $S = 32$.

D. $S = 36$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2^x + 3 = m\sqrt{4^x + 1} \Leftrightarrow m = \frac{2^x + 3}{\sqrt{4^x + 1}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{2^x + 3}{\sqrt{4^x + 1}} \text{ trên } \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1 - 3 \cdot 2^x) \cdot 2^x \ln 2}{(4^x + 1)\sqrt{4^x + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{3}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\log_2 \frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3	$\sqrt{10}$	1

Từ bản biến thiên suy ra $m \in (3; \sqrt{10})$. Do đó $\begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \end{cases} \Rightarrow S = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 36$.

Câu 33: (Sở Hưng Yên Lần1) (Sở Hưng Yên Lần1) Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để phương trình $4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. 2017.

B. 2016.

C. 4035.

D. 4037.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\text{+) Ta có } 4^{x^2-2x+1} - m \cdot 2^{x^2-2x+2} + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2(x^2-2x+1)} - 2m \cdot 2^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{x^2-2x+1}$. Ta có $t = 2^{x^2-2x+1} = 2^{(x-1)^2} \geq 2^0 = 1, \forall x$. Suy ra $t \geq 1$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0$. (2)

+) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } t_1 > t_2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \end{cases} \quad (3)$$

Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 3m - 2 \end{cases}$.

$$\text{+) Khi đó (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \Leftrightarrow m > 2 \\ m > 1 \end{cases}$$

Mà m nguyên và $m \in (-2019; 2019)$ nên ta có $m \in \{3; 4; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Cách 2:

$$\text{+) Ta có } 4^{x^2-2x+1} - m.2^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2(x^2-2x+1)} - 2m.2^{x^2-2x+1} + 3m - 2 = 0. \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{x^2-2x+1}$. Ta có $t = 2^{x^2-2x+1} = 2^{(x-1)^2} \geq 2^0 = 1, \forall x$. Suy ra $t \geq 1$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2mt + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow (2t - 3).m = t^2 - 2 \quad (2)$.

Vì $t = \frac{3}{2}$ không là nghiệm của (2) nên (2) $\Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{2t - 3} \quad (*)$.

Xét hàm số $y = \frac{t^2 - 2}{2t - 3}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

$$y' = \frac{2t^2 - 6t + 4}{(2t - 3)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
y'	1	$+\infty$	0	$+\infty$
y		$-\infty$	2	

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow m > 2$.

Mà m nguyên và $m \in (-2019; 2019)$ nên ta có $m \in \{3; 4; \dots; 2018\}$.

Vậy có 2016 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 34: (Ba Đình Lần 2) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4.3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

A. 27.

B. 25.

C. 23.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

ĐKXD: $x \in [0; 4]$.

Đặt $t = \sqrt{4x - x^2}$ với $x \in [0; 4]$ thì $t \in [0; 2]$

Đặt $u = 3^t$ với $t \in [0; 2]$ thì $u \in [1; 9]$

Khi đó, tìm m để phương trình $u^2 - 4u + 2m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 9]$.

$$\Leftrightarrow 2m = -u^2 + 4u + 1, \text{ với } u \in [1; 9]$$

Xét hàm số $f(u) = -u^2 + 4u + 1$.

$$f'(u) = -2u + 4 = 0 \Leftrightarrow u = 2.$$

Ta có, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(9) = -44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44 \leq 2m \leq 5 \Leftrightarrow -22 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy có 25 số nguyên của tham số m .

Câu 35: (Quỳnh Lưu Nghệ An) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2 - 4x + 3|} = m^4 - m^2 + 1 \text{ có 4 nghiệm thực phân biệt}$$

A. $m \leq 1$.

B. $0 < m \leq 1$.

C. $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

D. $-1 \leq m \leq 1$.

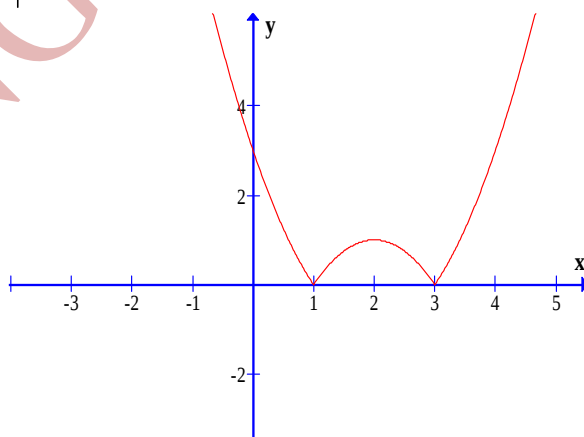
Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2 - 4x + 3|} = m^4 - m^2 + 1 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1)$

Xét đồ thị $y = |x^2 - 4x + 3|$ có dạng như hình vẽ:



Dựa vào đồ thị ta thấy để phương trình (1) có 4 nghiệm khi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1)$ giao nhau tại 4 điểm phân biệt.

$$\text{Khi đó } 0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow 1 > m^4 - m^2 + 1 > \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^4 - m^2 < 0 \\ m^4 - m^2 + \frac{1}{4} + \frac{11}{20} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(m^2 - 1) < 0 \\ \left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{20} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Đồ thị nên có đánh dấu mốc trên trục tung $y=1$ vì ta cần dùng mốc này để kết luận bài toán, cũng nên nói thêm $m^4 - m^2 + 1 > \frac{1}{5}$ luôn đúng

Câu 36: (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình

$$2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0. \text{ Có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.}$$

A. 4038.

B. 2019.

C. 2017.

D. 4039.

Lời giải

Chọn C

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{m(x-2)-1}{x-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2} &= -m. \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} - \frac{1}{x-2}$. Khi đó

$$f'(x) = 2019^x \ln 2019 + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	
$f(x)$	2 $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có 3 nghiệm thực phân biệt thì

$$-m > 2 \Rightarrow m < -2.$$

Mà $m \in [-2019; 2019]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2017 giá trị m thỏa mãn.

Câu 37: (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Tìm số nghiệm của phương trình $(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0$.

A. 3.

B. 4

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn B

$$(|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} - \log 2 = 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 e^{(|x|-1)} = \log 2, \quad (1)$$

Đặt $t = |x| - 1$, điều kiện $t \geq -1$ khi đó phương trình trở thành $t^2 e^t = \log 2$, (2)

Đặt $f(t) = t^2 e^t$, $f'(t) = (t^2)' e^t + t^2 (e^t)' = (t^2 + 2t) e^t$.

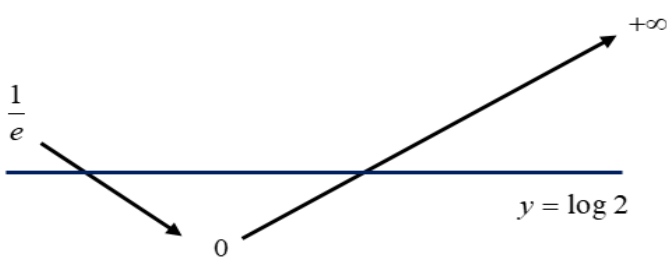
Ta có

$$+) f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t) e^t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}, (t = -2 \text{ loại vì } t \geq -1).$$

$$+) f'(t) > 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t) e^t > 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t > 0 \Leftrightarrow t \in (0; +\infty), (\text{vì } t \geq -1)$$

$$+) \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^t = +\infty$$

Từ đó thu được bảng biến thiên của hàm số $y = f(t) = t^2 e^t$ trên $[-1; +\infty)$ như sau:

t	-1	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_1 < t_2$. Ứng với mỗi nghiệm này cho ta được hai nghiệm x nên phương trình (1) có 4 nghiệm.

Câu 38: Cho số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

A. 4

B. $3\sqrt[3]{2}$

C. $3\sqrt[3]{4}$

D. $\sqrt[3]{4}$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } x^2 - 1 + x \log_b a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}.$$

Khi đó

Câu 39: Cho các số nguyên dương a, b lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$.

A. 12

B. 46

C. 44

D. 22

Lời giải

Chọn B

Với $a^{x^2+1} = b^x$, lấy logarit cơ số a hai vế ta được:

$$x^2 + 1 = x \log_a b \Leftrightarrow x^2 - x \log_a b + 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \log_a b > 2 \Leftrightarrow b > a^2.$$

$$\text{Tương tự } b^{x^2-1} = (9a)^x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \log_b(9a) \Rightarrow \Delta = (\log_b(9a))^2 + 4 > 0.$$

Khi đó theo Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_a b \\ x_3 + x_4 = \log_b(9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b \log_b(9a) < 3 \Leftrightarrow \log_a(9a) < 3 \Leftrightarrow 9a < a^3 \Rightarrow a \geq 4.$$

Vì vậy $b > 16 \Rightarrow S > 3.4 + 2.17 = 46$.

Câu 40: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a4^x - b.2^x + 50 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b.3^x + 50a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$.

A. 49

B. 51

C. 78

D. 81

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \Delta_1 > 0; S_1 > 0; P_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0; S_2 > 0; P_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 - 200a > 0.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 2^{x_1+x_2} = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = \frac{50}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \log_2 \frac{50}{a} \\ 3^{x_3+x_4} = 2^{x_3} \cdot 2^{x_4} = 50a \Leftrightarrow x_3 + x_4 = \log_3(50a) \end{cases}$$

Vì vậy

$$x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Leftrightarrow \log_3(50a) > \log_2\left(\frac{50}{a}\right) \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow b^2 > 200a > 600 \Rightarrow b \geq 25 \Rightarrow S = 2a + 3b \geq 81$$

Câu 41: (CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho a, b là hai số thực thỏa mãn $a > 0; a \neq 1$ biết phương trình $a^x - \frac{1}{a^x} = 2 \cos bx$ có 7 nghiệm thực phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $a^{2x} - 2a^x(\cos bx + 2) + 1 = 0$?

A. 28.

B. 14.

C. 0.

D. 7.

Lời giải

$$a^{2x} - 2a^x(\cos bx + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow a^x + \frac{1}{a^x} - 2 = 2 \cos 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = 4 \cos^2 \frac{bx}{2} \Leftrightarrow \left|a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right| = 2 \left|\cos \frac{bx}{2}\right|$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \text{ ta có phương trình } \left|a^t - \frac{1}{a^t}\right| = 2 |\cos bt|$$

$$\left|a^t - \frac{1}{a^t}\right| = 2 |\cos bt| \Leftrightarrow \begin{cases} a^t - \frac{1}{a^t} = 2 \cos bt (1) \\ a^t - \frac{1}{a^t} = -2 \cos bt (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^t - \frac{1}{a^t} = 2 \cos bt (1) \\ -a^t + \frac{1}{a^t} = 2 \cos(-bt) (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^t - \frac{1}{a^t} = 2 \cos bt (1) \\ a^{-t} - \frac{1}{a^{-t}} = 2 \cos(-bt) (2) \end{cases}$$

Nếu t_0 là nghiệm (1) thì $-t_0$ là nghiệm (2). Dễ thấy phương trình (1) có nghiệm khác 0 nên theo giả thiết (1) có 7 nghiệm phân biệt có thể suy ra được phương trình (2) cũng có bảy nghiệm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt

Câu 42: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Tìm tham số m để tổng các nghiệm của phương trình sau đạt giá trị nhỏ nhất:

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x.$$

A. 0.

B. 2.

C. $-\frac{1}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$1 + [2x^2 - m(m+1)x - 2] \cdot 2^{1+mx-x^2} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{mx(1-m)} + x^2 - m^2x$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 - mx - 1) + (x^2 - m^2x - 1)] \cdot 2^{-(x^2 - mx - 1)} = (x^2 - mx - 1) \cdot 2^{(x^2 - m^2x - 1) - (x^2 - mx - 1)} + (x^2 - m^2x - 1).$$

Đặt $a = (x^2 - mx - 1)$, $b = (x^2 - m^2x - 1)$ thì phương trình trên trở thành

$$(a+b) \cdot 2^{-a} = a \cdot 2^{b-a} + b \Leftrightarrow a+b = a \cdot 2^b + b \cdot 2^a \Leftrightarrow a(2^b - 1) + b(2^a - 1) = 0 \quad (*).$$

Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ thì phương trình (*) thỏa mãn.

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình (*) tương đương $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} = 0 \quad (**).$

Nhận xét:

Với $a > 0$ thì $2^a > 1$, tức là $2^a - 1 > 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Với $a < 0$ thì $2^a < 1$, tức là $2^a - 1 < 0$ nên $\frac{2^a - 1}{a} > 0$.

Suy ra $\frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0$.

Tương tự: $\frac{2^b - 1}{b} > 0, \forall b \neq 0$.

Nên $\frac{2^b - 1}{b} + \frac{2^a - 1}{a} > 0, \forall a \neq 0, b \neq 0$. Suy ra phương trình (**) vô nghiệm.

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$.

Tức là phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x^2 - mx - 1 = 0 \\ x^2 - m^2x - 1 = 0 \end{cases}$.

Hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trùng nhau khi $m=0$ hoặc $m=1$.

Nếu $m=0$ thì hai phương trình đều là $x^2 - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_1 = 0$.

Nếu $m=1$ thì hai phương trình đều là $x^2 - x - 1 = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm và tổng hai nghiệm đó là $T_2 = 1$.

Khi $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì hai phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ và $x^2 - m^2x - 1 = 0$ không có nghiệm nào trùng nhau.

Phương trình bậc hai $x^2 - mx - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_1 + x_2 = m$.

Phương trình bậc hai $x^2 - m^2x - 1 = 0$ có $a.c < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt và tổng hai nghiệm đó là $x_3 + x_4 = m^2$.

Suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt và tổng của chúng là

$$T_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m + m^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

$$T_3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}, \text{ nên } \min T_3 = -\frac{1}{4}.$$

So sánh $T_1, T_2, \min T_3$ thì được giá trị nhỏ nhất của tổng các nghiệm của phương trình đã cho là

$$-\frac{1}{4} \text{ và đạt tại } m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 43: (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) \cdot 3^{x-3} = 3^x + 1$ có ba nghiệm phân biệt bằng

A. 45.

B. 38.

C. 34.

D. 27.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tương đương với

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 9x^2 + 24x + m) = 27 + 3^{3-x} \Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 3t^2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

$$3^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 3^{3-x} + (3-x)^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{m-3x} = 3-x \Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x$$

$$\Leftrightarrow m = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27.$$

$$\text{Đặt } g(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow g'(x) = -3x^2 + 18x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$						$-\infty$
			↘		↗		
			7		11		

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $7 < m < 11 \Rightarrow m \in \{8; 9; 10\}$. Vậy tổng các giá trị m bằng 27.

Câu 44: Cho các phương trình:

$$x^{2017} + x^{2016} + \dots + x - 1 = 0(1)$$

$$x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 1 = 0(2)$$

Biết rằng phương trình (1), (2) có nghiệm duy nhất lần lượt là a và b . Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a.e^b = b.e^a$.

B. $a.e^b > b.e^a$.

C. $a.e^b < b.e^a$.

D. $a.e^a < b.e^b$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^{2017} + x^{2016} + \dots + x - 1$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ ta có:

$f(x) = 2017x^{2016} + 2016x^{2015} + \dots + 1 > 0, \forall x \geq 0$ nên hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

Mặt khác $f(0) \cdot f(1) = -2016 < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $a \in (0; 1)$.

Chứng minh tương tự với hàm số $g(x) = x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 1$ thì $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $b \in (0; 1)$.

Ta có $g(a) = a^{2018} + f(a) = a^{2018} > 0 = g(b) \Rightarrow a > b \Rightarrow a.e^a > b.e^b$.

Để so sánh $a.e^b$ và $b.e^a$ ta xét hiệu $a.e^b - b.e^a = ab \left(\frac{e^b}{b} - \frac{e^a}{a} \right) = ab(h(b) - h(a)) > 0$.

Trong đó $h(x) = \frac{e^x}{x}, 0 < x < 1$, ta có $h'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} < 0 \Rightarrow h(a) < h(b)$.

Vậy $a.e^b > b.e^a$

Câu 45: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Gọi S là tập chứa các giá trị nguyên của m để phương trình $e^{3x^3-18x+30-m} + e^{x^3-6x+10-m} - e^{2m} = 1$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Tính tổng các phần tử của tập S .

A. 110.

B. 106.

C. 126.

D. 24.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^3 - 6x + 10$.

Ta có phương trình $e^{3t-m} + e^{t-m} - e^{2m} = 1 \Leftrightarrow e^{3t} + e^t = e^{3m} + e^m$ (1).

Xét hàm số $f(x) = e^{3x} + e^x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3e^{3x} + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1), ta có $f(t) = f(m)$, suy ra $t = m$ hay $x^3 - 6x + 10 = m$ (2).

Phương trình $e^{3x^3-18x+30-m} + e^{x^3-6x+10-m} - e^{2m} = 1$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 6x + 10$ với $x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$			$10 + 4\sqrt{2}$		$10 - 4\sqrt{2}$	
	$-\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $10 - 4\sqrt{2} < m < 10 + 4\sqrt{2}$.

Ta có $10 - 4\sqrt{2} \approx 4,34$ và $10 + 4\sqrt{2} \approx 15,66$. Suy ra $S = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.

Tổng các phần tử của S là $\frac{11}{2}(5+15) = 110$.

- Câu 46: (Đặng Thành Nam Đề 12)** Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|2^{x+1} - 8| = \frac{1}{2}x^2 + m$ có 3 nghiệm thực phân biệt?
- A. 8.** **B. 9.** **C. 6.** **D. 7.**

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho tương đương với: $m = |2^{x+1} - 8| - \frac{1}{2}x^2 (*)$.

Xét hàm số:

$$f(x) = |2^{x+1} - 8| - \frac{1}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{1}{2}x^2 & (x \geq 2) \\ 8 - 2^{x+1} - \frac{1}{2}x^2 & (x < 2) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - x & (x > 2) \\ h(x) = -2^{x+1} \ln 2 - x & (x < 2) \end{cases}$$

(Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 2$).

Ta có:

$$\square g'(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 1 > 2^{2+1} \ln 2 - 1 > 0, \forall x > 2 \Rightarrow g(x) > g(2) = 2^3 \ln 2 > 0, \forall x > 2 \quad (1).$$

$$\square h'(x) = -2^{x+1} \ln 2 - 1 < 0, \forall x < 2 \quad \text{và} \quad \begin{cases} h(-1) = -\ln 2 + 1 > 0 \\ h(0) = -2 \ln 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow h(0).h(-1) < 0 \quad \text{do đó} \quad h(x) = 0$$

có nghiệm duy nhất $x_0 \in (-1; 0)$. Dùng máy tính tìm được $x_0 \approx -0,797563$ lưu nghiệm này vào biến nhớ A, ta có $f(x_0) = f(A) \approx 6,53131$.

Vậy ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \in (-1; 0)$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_0)$	-2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi: $-2 < m < f(x_0) \approx 6,53131$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn yêu cầu.

- Câu 47: (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2(x + \sqrt{1-x^2})(1 + x\sqrt{1-x^2})$ có nghiệm.

A. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2\right]$ **C.** $\left(0; \frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty\right)$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t^2 = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow x\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Ta có } t' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}, t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

x	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
t'		+	0
t			-
	1	$\sqrt{2}$	1

Vậy $t \in [-1; \sqrt{2}]$.

Phương trình trở thành $e^{3m} + e^m = 2t \left(1 + \frac{t^2 - 1}{2}\right) \Leftrightarrow e^{3m} + e^m = t^3 + t \Leftrightarrow e^m = t$. (sử dụng hàm đặc trưng).

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq e^m \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow m \in (-\infty; \frac{1}{2} \ln 2]$.

Câu 48: (CHUYÊN KHTN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho số thực α sao cho phương trình $2^x - 2^{-x} = 2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là

A. 2019.

B. 2018.

C. 4037.

D. 4038.

Lời giải

Ta có

$$2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 4\cos^2 \frac{\alpha x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{\alpha x}{2} & (1) \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{\alpha x}{2} & (2) \end{cases}$$

Nhận xét

Phương trình (1) có 2019 nghiệm khác 0 (do giả thiết và 0 không là nghiệm).

x_0 là nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi $-x_0$ là nghiệm của phương trình (2) vì

$$2^{\frac{x_0}{2}} - 2^{-\frac{x_0}{2}} = 2\cos \frac{\alpha x_0}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{(-x_0)}{2}} - 2^{-\frac{(-x_0)}{2}} = -2\cos \frac{\alpha (-x_0)}{2}.$$

Hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung vì

$$\begin{cases} 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 2\cos \frac{\alpha x}{2} \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = -2\cos \frac{\alpha x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{\alpha x}{2} = 0 \\ 2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ là 4038.

Câu 49: (Sở Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$		$\frac{15}{13}$		$\frac{15}{13}$	
			1			$-\infty$

Giá trị lớn nhất của m để phương trình: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.

A. e^5 .B. $e^{\frac{15}{13}}$.C. e^3 .D. e^4 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}} = m \Leftrightarrow 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2} = \ln m$.

Đặt $g(x) = 2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) + \frac{3}{2}$.

$g'(x) = f'(x)[6f^2(x) - 13f(x) + 7]$.

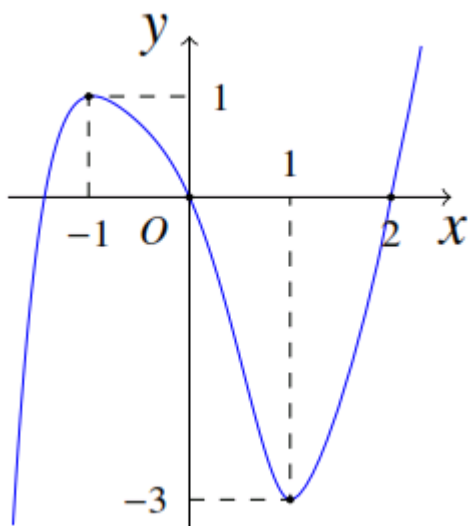
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 3 \\ x = 1; x = a > 3 \\ x = b < 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2]$:

x	$-\infty$	b	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$		0	+	0	-	0	
$g(x)$				4			

Giá trị lớn nhất của m để phương trình có nghiệm trên đoạn $[0; 2]$ là: $\ln m = 4 \Leftrightarrow m = e^4$.

Câu 50: (ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có

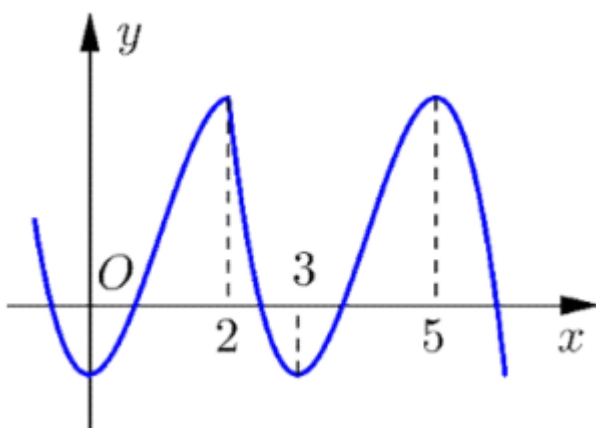
$$f(2 + f(e^x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + f(e^x) = -1 \\ 2 + f(e^x) = a, (2 < a < 3) \end{cases}$$

$$2 + f(e^x) = -1 \Leftrightarrow f(e^x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ e^x = b < -1 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$2 + f(e^x) = a \Leftrightarrow f(e^x) = a - 2, (0 < a - 2 < 1) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = c < -1 \\ e^x = d < 0 \\ e^x = t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Câu 51: (Chuyên Vinh Lần 2) Cho số thực m và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình có $f(2^x + 2^{-x}) = m$ nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = t(x) = 2^x + 2^{-x}$ với $x \in [-1; 2]$.

Hàm số $t = t(x)$ liên tục trên $[-1; 2]$ có $t'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2$ và $t'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2^{-x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	2
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{17}{4}$

Nhận xét: Dựa vào bảng biến thiên với mỗi $t \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị của x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$

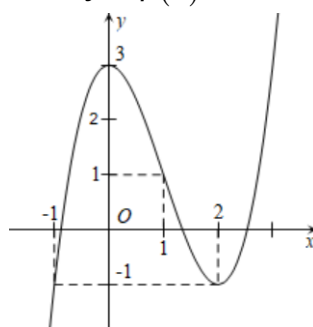
và với mỗi $t \in \left\{2\right\} \cup \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị x thỏa mãn $t = 2^x + 2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t) = m$ với $t \in \left[2; \frac{17}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm t_1, t_2 trong đó có: $t_1 \in \left(2; \frac{5}{2}\right]$ và $t_2 \in \left(\frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right]$.

Vậy phương trình $f(2^x + 2^{-x}) = m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Câu 52: (Sở Ninh Bình 2019 lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $\left[f(e^{\sqrt{x}})\right]^2 - f(e^{\sqrt{x}}) - 2 = 0$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $t = e^{\sqrt{x}}$. Do $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$ và ứng với mỗi giá trị $t \geq 1$ chỉ cho một giá trị $x \geq 0$.

Ta có phương trình trở thành: $\left[f(t)\right]^2 - f(t) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = -1 \\ f(t) = 2 \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên $[1; +\infty)$ suy ra phương trình $f(t) = -1$ có 1 nghiệm và phương trình $f(t) = 2$ có 1 nghiệm khác với nghiệm của phương trình $f(t) = -1$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 53: (CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn

$$2018^{2x+\sqrt{x+1}} - 2018^{2+\sqrt{x+1}} + 2019x \leq 2019.$$

A. $m \in \left(2\sqrt{6}; \frac{11\sqrt{3}}{3}\right).$

B. $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}].$

C. $m \in [2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}].$

D. $m \in \left(3\sqrt{3}; \frac{11\sqrt{3}}{3}\right) \cup \{2\sqrt{6}\}.$

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $2018^{2x+\sqrt{x+1}} - 2018^{2+\sqrt{x+1}} + 2019x \leq 2019$ (1). Điều kiện: $x \geq -1$.

Đặt $\begin{cases} a = 2x + \sqrt{x+1} \\ b = 2 + \sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow a - b = 2(x-1) \Rightarrow x-1 = \frac{a-b}{2}.$

Bất phương trình (1) thành:

$$2018^a - 2018^b + 2019 \frac{a-b}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 2(2018)^a + 2019a \leq 2(2018)^b + 2019b \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 2(2018)^t + 2019t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(t) = 2 \cdot 2018^t \ln 2018 + 2019 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Với $-1 \leq x \leq 1$, ta có:

$$5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)^2 + 2(x^2+2) = m(x+2)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow 3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} + 2 \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2} = m \quad (3).$$

Đặt $t = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ với $x \in [-1; 1]$.

$t' = \frac{2-2x}{(\sqrt{x^2+2})^3} \geq 0, \forall x \in [-1; 1]$ nên hàm t đồng biến trên $[-1; 1]$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}$.

Do hàm t đơn điệu trên $[-1; 1]$ nên ứng với mỗi giá trị của $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$ ta tìm được đúng một giá trị của $x \in [-1; 1]$ và ngược lại.

Viết lại phương trình (3) theo ẩn t :

$$3t + \frac{2}{t} = m \quad (4) \text{ với } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

(3) có 2 nghiệm thực phân biệt $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow (4)$ có 2 nghiệm thực phân biệt $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$

(*) .

Xét hàm số $g(t) = 3t + \frac{2}{t}$ liên tục trên $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right]$.

$$g'(t) = 3 - \frac{2}{t^2}. \text{ Cho } g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2}{3}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right].$$

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{3}$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có (*) $\Leftrightarrow m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$

Vậy $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 54: (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$. Giả sử $m_0 = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) là giá trị nhỏ nhất của tham số thực m sao cho phương trình $f(7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) + 2m - 1 = 0$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b^2$.

A. $P = 11$.

B. $P = 7$.

C. $P = -1$.

D. $P = 9$.

Lời giải

Đặt $t = 7 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$ (1) thì $f(t) = 1 - 2m$ (2).

$$t' = \frac{-4(6 - 18x)}{2\sqrt{6x - 9x^2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
t'		-	0	+
t	7	3	7	

Từ BBT suy ra nếu $t \in (3; 7]$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm x .

Xét hàm số $f(x) = 3^{x-4} + (x+1) \cdot 2^{7-x} - 6x + 3$

$$f'(x) = 3^{x-4} \ln 3 + 2^{7-x} - (x+1) 2^{7-x} \ln 2 - 6$$

$$f''(x) = 3^{x-4} \ln^2 3 + (2^{7-x} \ln 2) [(x+1) \ln 2 - 2] > 0 \forall x \in (3; 7]$$

Do đó hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $(3; 7]$. Mặt khác, $f'(6) \cdot f'(7) < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \alpha \in (6; 7)$.

x	3	α	7
f'		-	0
			+
f	$\frac{143}{3}$		-4

$f(\alpha)$

Vậy, phương trình $f(t) = 1 - 2m$ có nhiều nghiệm nhất khi

$$f(\alpha) < 1 - 2m \leq -4 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq m < \frac{1 - f(\alpha)}{2}$$

Kết luận, GTNN của m là $\frac{5}{2} \Rightarrow a = 5, b = 2$.

Câu 55: (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 2^y + x = 2y \\ 2^x + 1 = (m^2 + 2)2^y \sqrt{1-y^2} \end{cases} (1), m \text{ là tham số. Gọi } S \text{ là tập giá trị } m \text{ nguyên để hệ (1) có}$$

ng nghiệm duy nhất. Tập S có bao nhiêu phần tử.

A. 0

B. 1

C. 3

D. 2

Lời giải

ĐK: $-1 \leq y \leq 1$

Ta có: $2^{x-y} - 2^y + x = 2y \Leftrightarrow 2^{x-y} + x - y = 2^y + 2y \Leftrightarrow f(x-y) = f(y) (*)$

Trong đó $f(t) = 2^t + t, t \in \mathbb{R}$.

Lại có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) = 2^t + t$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$. Với $x = 2y$ thì phương trình $2^x + 1 = (m^2 + 2)2^y \sqrt{1-y^2}$

được viết lại thành: $2^{2y} + 1 = (m^2 + 2)2^y \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow \frac{1}{m^2 + 2} = \frac{2^y \sqrt{1-y^2}}{2^{2y} + 1} (2)$

+) Nếu y_0 là nghiệm của (2) thì $-y_0$ cũng là nghiệm của (2). Suy ra (2) có nghiệm duy nhất

khi $y_0 = -y_0 \Leftrightarrow y_0 \Rightarrow \frac{1}{m^2 + 2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 0$.

+) Với $m = 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^y \sqrt{1-y^2}}{2^{2y} + 1} \Leftrightarrow 2^{2y} + 1 - 2 \cdot 2^y \sqrt{1-y^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(2^y - \sqrt{1-y^2}\right)^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2^y - \sqrt{1-y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$$

Vậy $m = 0$ thì (2) có nghiệm duy nhất. Suy ra hệ (1) có nghiệm duy nhất.

Câu 56: (KTNL GIA BÌNH NĂM 2018-2019) Gọi a, b lần lượt là các nghiệm dương của phương trình $x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + \dots + x - 1 = 0$ (1) và $x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 1 = 0$ (2). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $b > a + 1$

B. $a > b + 1$

C. $a \ln b > b \ln a$

D. $b \ln a > a \ln b$

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + \dots + x - 1, g(x) = x^{2019} + x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 1$.

+ Khi $x \geq 1$: $\begin{cases} f(x) \geq 2017 > 0 \\ g(x) \geq 2018 > 0 \end{cases}$ nên (1) và (2) vô nghiệm trên $(1; +\infty)$

+ Ta có $f(x), g(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ mà $\begin{cases} f(0) \cdot f(1) = -2017 < 0 \\ g(0) \cdot g(1) = -2018 < 0 \end{cases}$ nên $f(x), g(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0, 1)$.

+ $\begin{cases} f'(x) = 2018x^{2017} + 2017x^{2016} + 2016x^{2015} + \dots + 2x + 1 > 0, \forall x > 0 \\ g'(x) = 2019x^{2018} + 2018x^{2017} + 2017x^{2016} + \dots + 2x + 1 > 0, \forall x > 0 \end{cases}$ nên $f(x), g(x)$ đồng biến

trên $(0, +\infty)$. Do đó a, b là nghiệm duy nhất của (1) và (2) và $a, b \in (0, 1)$

$$\begin{cases} a^{2018} + a^{2017} + a^{2016} + \dots + a - 1 = 0 & (3) \\ b^{2019} + b^{2018} + b^{2017} + \dots + b - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

. Trừ vế theo vế của (4) và (3) ta được:

$$b^{2019} + (b^{2018} - a^{2018}) + (b^{2017} - a^{2017}) + (b^{2016} - a^{2016}) + (b - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^{2019} = (a^{2018} - b^{2018}) + (a^{2017} - b^{2017}) + (a^{2016} - b^{2016}) + (a - b) \quad (*)$$

Vì $b \in (0, 1) \Rightarrow b^{2019} > 0 \Rightarrow VP(*) > 0$ hay $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$.

Xét hàm số $y = h(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên $(0, 1)$. Có $h'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0, \forall x \in (0, 1)$ nên $h(x)$

đồng biến trên $(0, 1)$. Mà $a > b \Rightarrow h(a) > h(b) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow b \ln a > a \ln b$.

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Câu 57: Bất phương trình $2.5^{x+2} + 5.2^{x+2} \leq 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S = [a; b]$ thì $b - 2a$ bằng

A. 6

B. 10

C. 12

D. 16

Lời giải

Ta có: $2.5^{x+2} + 5.2^{x+2} \leq 133.\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50.5^x + 20.2^x \leq 133.\sqrt{10^x}$ chia hai vế bất phương trình cho

$$5^x \text{ ta được: } 50 + \frac{20.2^x}{5^x} \leq \frac{133\sqrt{10^x}}{5^x} \Leftrightarrow 50 + 20.\left(\frac{2}{5}\right)^x \leq 133.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x, (t \geq 0) \text{ phương trình (1) trở thành: } 20t^2 - 133t + 50 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{25}{4}$$

$$\text{Khi đó ta có: } \frac{2}{5} \leq \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{5}\right)^x \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2 \text{ nên } a = -4, b = 2$$

Vậy $b - 2a = 10$

Bình luận

Phương pháp giải bất phương trình dạng $ma^{2\alpha} + n(ab)^\alpha + pb^{2\alpha} > 0$; chia 2 vế của bất phương trình cho $a^{2\alpha}$ hoặc $b^{2\alpha}$.

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 3 \leq 3^{x^2} + 3^{\sqrt{x-1}}$.

A. $2 \leq x$.B. $1 \leq x \leq 2$.C. $2 \leq x \leq 7$.D. $2 \leq x \leq 4$.

Lời giải

ĐK: $x \geq 1$

$$\text{Ta có: } 3^{x^2+\sqrt{x-1}-1} + 3 \leq 3^{x^2} + 3^{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 3^{x^2+\sqrt{x-1}} + 9 - 3.3^{x^2} - 3.3^{\sqrt{x-1}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2} - 3)(3^{\sqrt{x-1}} - 3) \leq 0$$

+với $x=1$, thỏa mãn;

$$\text{+Với } x > 1: \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x-1}} \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Chọn B

Câu 59: Tập nghiệm của bất phương trình: $81.9^{x-2} + 3^{x+\sqrt{x}} - \frac{2}{3}.3^{2\sqrt{x}+1} \geq 0$ là:

A. $S = [1; +\infty) \cup \{0\}$.B. $S = [1; +\infty)$.C. $S = [0; +\infty)$.D. $S = [2; +\infty) \cup \{0\}$.

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0$.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 81.\frac{9^x}{81} + 3^x.3^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3}.3.3^{2\sqrt{x}} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x.3^{\sqrt{x}} - 2.3^{2\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow (3^x - 3^{\sqrt{x}})(3^x + 2.3^{\sqrt{x}}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x - 3^{\sqrt{x}} \geq 0 \left(\text{do } 3^x + 2.3^{\sqrt{x}} > 0, \forall x \geq 0 \right)$$

$$\Rightarrow 3^x \geq 3^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 1 \\ \sqrt{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của BPT là $S = [1; +\infty) \cup \{0\}$.

Chọn A

Câu 60: (Chuyên-Thái-Nguyên-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3) Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. 5.

B. -1.

C. -5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{TH1: } x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} 9^{x^2-4} \geq 9^0 = 1 \\ 2019^{x-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow 9^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 2019^{x-2} \geq 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{TH2: } x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} 9^{x^2-4} < 9^0 = 1 \\ 0 < 2019^{x-2} < 2019^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 2019^{x-2} < 1.$$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Khi đó tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình

$$9^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 2019^{x-2} \geq 1 \text{ là khoảng } (-2; 2).$$

Suy ra $a = -2; b = 2$.

Vậy $b-a = 4$.

Câu 61: (Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1) Cho các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy} \leq \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2}. \text{ Hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức } \frac{x}{y}$$

A. $\frac{1}{5}$.B. $\frac{5}{4}$.C. $\frac{5}{2}$.**D. $\frac{1}{4}$.**

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy} &\leq \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{xy+5y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{10}{9}\right)^{2x^2-5xy} \leq \left(\frac{10}{9}\right)^{\frac{-(xy+5y^2)}{2}} \\ \Leftrightarrow 2x^2-5xy &\leq \frac{-(xy+5y^2)}{2} \\ \Leftrightarrow 4x^2-9xy+5y^2 &\leq 0 \quad (*). \end{aligned}$$

$$\text{Với } x, y > 0, \text{ chia cả hai vế của } (*) \text{ cho } y^2 \text{ ta được } 4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 9\frac{x}{y} + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{5}{4}.$$

$$\text{Ta có } \frac{x}{y} = 1 \text{ khi } x = y = t \text{ với } t > 0 \text{ và } \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \text{ khi } x = 5t, y = 4t \text{ với } t > 0.$$

$$\text{Suy ra } m = \min\left(\frac{x}{y}\right) = 1, M = \max\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{5}{4} \text{ khi } x, y > 0. \text{ Vậy } M - m = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}.$$

Câu 62: (Đặng Thành Nam Đề 10) Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}(e^x - e^{-x})$. Có bao nhiêu số nguyên dương m thỏa mãn bất phương trình $f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0$?

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.**Lời giải****Chọn D**Tập xác định $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng.Ta có $f(x) = e^{x+\sqrt{x^2+1}} - e^{-x+\sqrt{x^2+1}}$ và $f(-x) = e^{-x+\sqrt{x^2+1}} - e^{x+\sqrt{x^2+1}} = -(e^{x+\sqrt{x^2+1}} - e^{-x+\sqrt{x^2+1}}) = -f(x)$.Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.Ta có $f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{x+\sqrt{x^2+1}} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)e^{-x+\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x$. $\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f(m-7) + f\left(\frac{12}{m+1}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(m-7) \leq -f\left(\frac{12}{m+1}\right) = f\left(-\frac{12}{m+1}\right).$$

$$\Leftrightarrow m-7 \leq -\frac{12}{m+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 5 \\ m < -1 \end{cases}.$$

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Câu 63: (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Số các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2019^{\sin^2 x} + 2018^{\cos^2 x} \geq m \cdot 2019^{\cos^2 x}$ có nghiệm là

A. 1.

B. 2020.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải**Chọn B**Ta có $2019^{\sin^2 x} + 2018^{\cos^2 x} \geq m \cdot 2019^{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{2019^{\sin^2 x} + 2018^{\cos^2 x}}{2019^{\cos^2 x}} \geq m$ (*)Đặt $t = \cos^2 x$ ($0 \leq t \leq 1$). Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow m \leq \frac{2019^{1-t} + 2018^t}{2019^t} = 2019^{1-2t} + \left(\frac{2018}{2019}\right)^t \text{ có nghiệm } t \in [0; 1] \text{ nên}$$

$$m \leq \max_{t \in [0; 1]} \left\{ 2019^{1-2t} + \left(\frac{2018}{2019}\right)^t \right\}$$

Xét hàm số $g(t) = 2019^{1-2t} + \left(\frac{2018}{2019}\right)^t$ trên đoạn $[0; 1]$.

Vì $g'(t) = -2 \cdot 2019^{1-2t} \ln 2019 + \left(\frac{2018}{2019}\right)^t \ln \frac{2018}{2019} < 0; \forall t \in [0; 1]$ nên hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $[0; 1]$.

$$\text{Vậy } m \leq \max_{t \in [0; 1]} \{g(t)\} = g(0) = 2020.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, \dots, 2020\}$. Do đó số giá trị nguyên dương của tham số m để thỏa mãn điều kiện bài toán là 2020.

Câu 64: (THPT Nghèn Lần 1) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $5 \cdot 4^x + m \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0$ có nghiệm. Số phần tử của S là

A. 3.

B. Vô số.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 5 \cdot 4^x + m \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x \leq 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + m \leq 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + m \leq 0.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{2}{5}\right)^x, t > 0. \text{ Bất phương trình trở thành: } 5t^2 - 7t + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -5t^2 + 7t = g(t).$$

$$\text{Ta lại có: } g'(t) = -10t + 7 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{10}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{7}{10}$	$+\infty$
$g'(t)$		0	
$g(t)$	0	$\frac{49}{20}$	$-\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $\max_{t \in (0; +\infty)} g(t) = \frac{49}{20}$ khi $t = \frac{7}{10}$.

$$\text{Để bất phương trình đề bài cho thỏa mãn điều kiện có nghiệm } \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in (0; +\infty)} g(t) = \frac{49}{20}.$$

Do m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$.

Câu 65: (THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng) Cho bất phương trình $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$.

A. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$.

B. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } m \cdot 3^{x+1} + (3m+2)(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3m \cdot 3^x + (3m+2) \frac{9^x}{(4+\sqrt{7})^x} + (4+\sqrt{7})^x > 0$$

$$\Leftrightarrow (4+\sqrt{7})^{2x} + 3m \cdot (4+\sqrt{7})^x \cdot 3^x + (3m+2) \cdot 3^{2x} > 0 \quad (1).$$

$$\text{Vì } 3^{2x} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } (1) \Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{2x} + 3m \cdot \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m+2 > 0 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x = t. \text{ Vì } x \in (-\infty; 0) \text{ và } \frac{4+\sqrt{7}}{3} > 1 \text{ nên } t \in (0; 1).$$

$$\text{Bất phương trình (2) trở thành } t^2 + 3mt + 3m+2 > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+2}{t+1} > -3m \quad (*) \text{ (vì } t \in (0; 1) \text{ nên } t+1 > 0).$$

Xét $f(t) = \frac{t^2 + 2}{t + 1}$ trên $(0; 1)$.

Ta có $f'(t) = 1 - \frac{3}{(t+1)^2}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{3} - 1 \\ t = -\sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Vì $t \in (0; 1)$ nên $t = \sqrt{3} - 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(t)$ trên $(0; 1)$.

t	0	$\sqrt{3} - 1$	1
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	$-2 + 2\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{(0;1)} f(t) = f(\sqrt{3} - 1) = -2 + 2\sqrt{3}$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $t \in (0; 1)$

$\Leftrightarrow \min_{(0;1)} f(t) > -3m$

$\Leftrightarrow -2 + 2\sqrt{3} > -3m$

$\Leftrightarrow m > \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 66: Tất cả các giá trị của m để bất phương trình $(3m+1)12^x + (2-m)6^x + 3^x < 0$ có nghiệm đúng $\forall x > 0$ là:

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-2; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $2^x = t$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$.

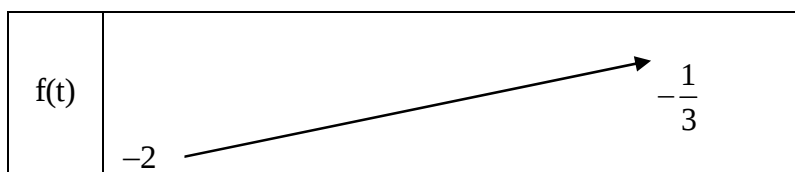
Khi đó ta có: $(3m+1)t^2 + (2-m)t + 1 < 0, \forall t > 1$

$$\Leftrightarrow (3t^2 - t)m < -t^2 - 2t - 1 \quad \forall t > 1 \Leftrightarrow m < \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t} \quad \forall t > 1$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 - 2t - 1}{3t^2 - t}$ trên $(1; +\infty) \Rightarrow f'(t) = \frac{7t^2 + 6t - 1}{(3t^2 - t)^2} > 0 \quad \forall t \in (1; +\infty)$

BBT

t	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	



Do đó $m \leq \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bình luận

$$\begin{aligned} &+ m \geq f(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \geq \max f(x) \forall x \in D \\ \text{Sử dụng} &+ m \leq f(x) \forall x \in D \Leftrightarrow m \leq \min f(x) \forall x \in D \end{aligned}$$

Câu 67: Tìm m để bất phương trình $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1)$.

A. $0 \leq m \leq 6$

B. $m \leq 6$.

C. $m \geq 6$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0 \Leftrightarrow m.\left(\frac{9}{4}\right)^x - (2m+1)\left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x. \text{ Vì } x \in (0;1) \text{ nên } 1 < t < \frac{3}{2}$$

$$\text{Khi đó bất phương trình trở thành } m.t^2 - (2m+1)t + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2}.$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t}{(t-1)^2}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-t-1}{(t-1)^3}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Bảng biến thiên.

t	-1	1	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	+ 0 -	-	-
$f(t)$		$+\infty$	6

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \leq \lim_{t \rightarrow \frac{3}{2}} f(t) = 6$.

Câu 68: Số các giá trị nguyên dương để bất phương trình $3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \geq m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

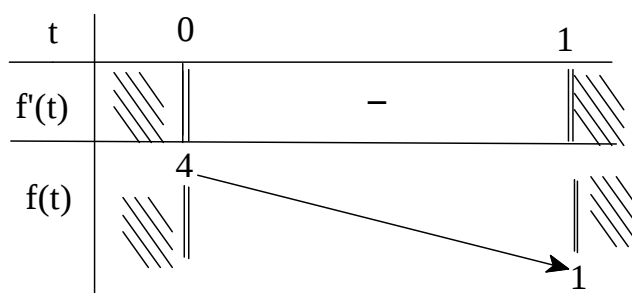
Chọn A

$$\text{Đặt } \sin^2 x = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$3^{\cos^2 x} + 2^{\sin^2 x} \geq m.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 3^{(1-t)} + 2^t \geq 3^t \Leftrightarrow \frac{3}{3^t} + 2^t \geq m.3^t \Leftrightarrow \frac{3}{(3^t)^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^t \geq m$$

$$\text{Đặt: } y = \frac{3}{9^t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$y' = 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \cdot \ln \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \text{Hàm số luôn nghịch biến}$$



Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m \leq 1$ thì phương trình có nghiệm

Suy ra các giá trị nguyên dương cần tìm $m = 1$.

Câu 69: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình sau có tập nghiệm là

$$(-\infty; 0]: m2^{x+1} + (2m+1)(1-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0.$$

A. $m \leq -\frac{1}{2}.$

B. $m \leq \frac{1}{2}.$

C. $m < \frac{1}{2}.$

D. $m < -\frac{1}{2}.$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương

$$2m + (2m+1)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x < 0 \quad (1). \text{ Đặt } t = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x > 0, \text{ ta được:}$$

$$2m + (2m+1)\frac{1}{t} + t < 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt + 2m + 1 < 0 \quad (2)$$

BPT (1) nghiệm đúng $\forall x \leq 0$ nên BPT (2) có nghiệm $0 < t \leq 1$, suy ra

Phương trình $f(t) = 0$ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa $t_1 \leq 0 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 \leq 0 \\ 4m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -0,5 \\ m < -0,5 \end{cases} \text{ và } m < -\frac{1}{2} \text{ thỏa Ycvt.}$$

Chọn D

Câu 70: (ĐH Vinh Lần 1) Cho hàm số $f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong các số nguyên m thỏa mãn $f(m) + f(2m - 2^{12}) < 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [1513; 2019).$

B. $m_0 \in [1009; 1513).$

C. $m_0 \in [505; 1009).$

D. $m_0 \in [1; 505).$

Lời giải

Chọn B

Phân tích:

+ Bài toán nếu thế vào: $P(m) = 2^m - 2^{-m} + 2^{2m-2^{12}} - 2^{-2m+2^{12}} < 0$

+ Biểu thức $P(m)$ khá phức tạp. Điều này chứng tỏ bài toán cho hàm số $y = f(x)$ chắc chắn có tính chất đặc biệt.

+ Nhìn yếu tố xuất hiện hàm số $y = f(x) = 2^x - 2^{-x}$. Ta có hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$. Đây chính là chìa khóa ta giải quyết bài toán.

Lời giải

Ta có hàm số $y = f(x) = 2^x - 2^{-x}$ hàm số lẻ và tăng trên $\mathbb{R}$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow f(2m - 2^{12}) < -f(m) = f(-m) \Leftrightarrow 2m - 2^{12} < -m \Leftrightarrow m < \frac{2^{12}}{3}$$

$$m \text{ nguyên lớn nhất là: } m = \left\lfloor \frac{2^{12}}{3} \right\rfloor = 1365$$

Bài toán tổng quát:

Giải bất phương trình: $f(u(x, m)) + f(v(x, m)) < 0$ (*)

Với $f(x)$ là hàm số lẻ và tăng (hoặc giảm) trên tập D_f

Con đường sáng tạo bài toán: (VD: Một vài hàm đặc trưng f)

☐ $f(x) = a^x - a^{-x}, 0 < a \neq 1$

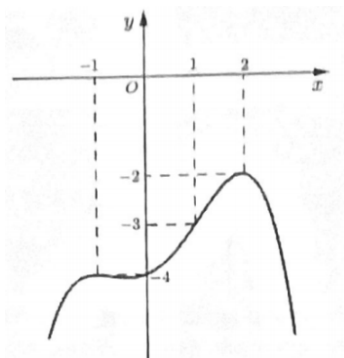
☐ $f(x) = x^3 + ax, a > 0$

☐ $f(x) = \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}$

Ta có (*) $\Leftrightarrow u(x, m) < -v(x, m)$

Đây là nguồn gốc chúng ta tạo lớp bài toán này.

Câu 71: (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$$

đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 10.

B. 4.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} \quad (*)$$

Đặt $t = f(x) \in (-\infty; -2]$.

Bất phương trình (*) theo t : $9 \cdot 6^t + (4 - t^2) \cdot 9^t \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^t$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq -m^2 + 5m \quad (**)$$

$$\text{Đặt: } g(t) = 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \left[9 + (4 - t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t\right], t \in (-\infty; -2].$$

Xét hàm số: $h(t) = 9 + (4 - t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ với $t \in (-\infty; -2]$

$$h'(t) = -2t \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \ln \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \left[-2t + (4 - t^2) \cdot \ln \frac{3}{2}\right].$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}}{\ln \frac{3}{2}} > -2 \\ t = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}}{\ln \frac{3}{2}} < -2 \end{cases}.$$

Ta có BBT:

t	$-\infty$	$\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\left(\ln \frac{3}{2}\right)^2}}{\ln \frac{3}{2}}$	-2
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	9		9

Từ BBT $\Rightarrow h(t) \leq 9 \forall t \in (-\infty; -2]$ (1).

Vì $t \in (-\infty; -2] \Rightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^t \leq \frac{4}{9}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $g(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t \cdot \left[9 + (4 - t^2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t\right] \leq 4 \forall t \in (-\infty; -2]$

$\Rightarrow \max_{(-\infty; -2]} g(t) = 4$. (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = -2$).

Bất phương trình (*) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình (**) đúng với $\forall t \in (-\infty; -2]$

$\Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq \max_{(-\infty; -2]} g(t) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tổng các giá trị nguyên của m là: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Cách 2

Bất phương trình: $9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \quad (1)$$

Từ đồ thị suy ra $f(x) \leq -2 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4 \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, do $f(x) \leq -2 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4 - f^2(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó: $g(x) = 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max_{\mathbb{R}} g(x) = 4$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq \max_{\mathbb{R}} g(x)$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy tổng các giá trị nguyên của m là $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Câu 72: (Sở Cần Thơ 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-

Xét hàm số $g(x) = e^{f(1+x-x^2)}$, tập nghiệm của bất phương trình $g'(x) > 0$ là

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (1-2x) \cdot f'(1+x-x^2) \cdot e^{f(1+x-x^2)}, \forall x \in \mathbb{R}$

Yêu cầu của bài toán $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-2x) f'(1+x-x^2) e^{f(1+x-x^2)} > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x > 0 \\ f'(1+x-x^2) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < 0 \\ f'(1+x-x^2) < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Xét trường hợp 1: $\begin{cases} 1-2x > 0 \\ f'(1+x-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -1 < 1+x-x^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 < 0 \\ x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}.$$

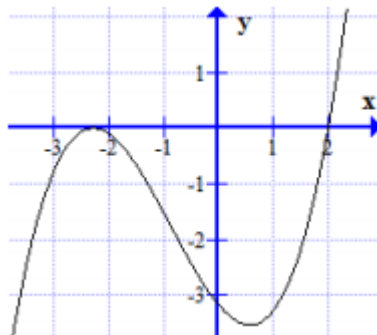
Xét trường hợp 2: $\begin{cases} 1-2x < 0 \\ f'(1+x-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -x^2 + x + 1 < -1 \\ -x^2 + x + 1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 > 0 \\ -x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Kết hợp hai trường hợp ta được
$$\begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Câu 73: (THANH CHƯƠNG 1 NGHỆ AN 2019 LẦN 3) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left[x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3\right] \cdot (2^{f(x)} - 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số tập con của tập hợp S là



A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét phương trình $2^{f(x)} - 1 = 0$ có một nghiệm đơn $x = 2$ nên biểu thức sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 2$. Do đó để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình

$$x(m - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + m^2 - 3 = 0 \text{ phải có một nghiệm } x = 2 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Thử lại với $m = 1$ ta có:

$$\left[x(1 - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} - 2\right] \cdot (2^{f(x)} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(1 - 2^{f(\sin x)})(2^{f(x)} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{f(\sin x)} \leq 1 \Leftrightarrow f(\sin x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 2 \text{ luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1 \text{ thỏa mãn ycbt.}$$

Thử lại với $m = -3$ ta có:

$$\left[x(-3 - 2^{f(\sin x)}) + 2 \cdot 2^{f(\sin x)} + 6\right] \cdot (2^{f(x)} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 2)(3 + 2^{f(\sin x)})(2^{f(x)} - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{f(\sin x)} \leq 0 \text{ (vô lý)} \Rightarrow m = -3 \text{ không thỏa mãn ycbt.}$$

Vậy $S = \{1\}$. Số tập con của S là 2 đó là $\{1\}$ và $\emptyset$.

Câu 74: (Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
y'	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi:

A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$.

B. $m \geq f(1) - e$.

C. $m > f(1) - e$.

D. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có: $m > f(x) - e^x = g(x), \forall x \in (-1; 1) (*)$.

Xét hàm số $g(x)$ trên $(-1; 1)$ ta có: $g'(x) = f'(x) - e^x$. Ta có hàm số $y = e^x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ nên: $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e} > 0, \forall x \in (-1; 1)$. Mà $f'(x) < 0, \forall x \in (-1; 1)$.

Từ đó suy ra $g'(x) = f'(x) - e^x < 0, \forall x \in (-1; 1)$. Nghĩa là hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1) (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: $m \geq g(-1) \Leftrightarrow m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$.

Câu 75: (Đặng Thành Nam Đề 2) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y	4	1	3	1	3

Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

A. $m \geq f(-2) - 3$. B. $m > f(2) - 3e^4$. C. $m \geq f(2) - 3e^4$. D. $m > f(-2) - 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) < 3e^{x+2} + m \Leftrightarrow f(x) - 3e^{x+2} < m$.

Đặt $h(x) = f(x) - 3e^{x+2} \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2}$.

Vì $\forall x \in (-2; 2), f'(x) \leq 3$ và $x \in (-2; 2) \Rightarrow x+2 \in (0; 4) \Rightarrow 3e^{x+2} \in (3; 3e^4)$

Nên $h'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 0, \forall x \in (-2; 2) \Rightarrow f(2) - 3e^4 < h(x) < f(-2) - 3$.

Vậy bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi $m > f(2) - 3e^4$.

Câu 76: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	6	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. B. $m < \frac{1}{3}[f(0) - 2]$. C. $m \leq \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$. D. $m < \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) > 2^{\cos x} + 3m \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) - 2^{\cos x} > 3m \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm $g(x) = f(x) - 2^{\cos x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2$

Vì $f'(x) \geq 1 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin x > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2 > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên ta suy ra

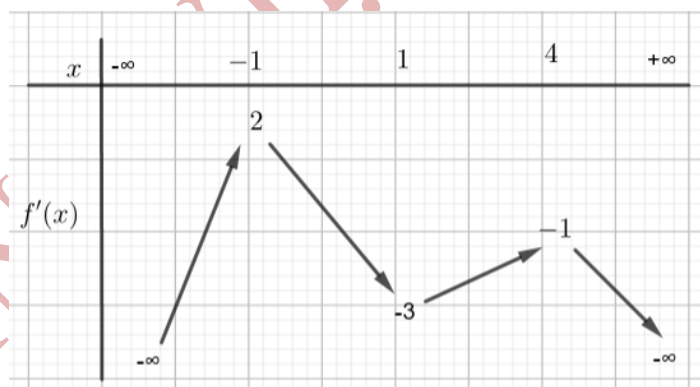
$$g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x} \sin x \cdot \ln 2 > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Vậy ta có bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$g(0)$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Từ bảng biến thiên ta có ycbt $\Leftrightarrow g(0) \geq 3m \Leftrightarrow 3m \leq f(0) - 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}[f(0) - 2]$.

Câu 77: (KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điều kiện của m để bất phương trình $f(x+2) - xe^x < m$ nghiệm đúng với mọi giá trị của $x \in [-1; 1]$.

A. $m > f(1) + \frac{1}{e}$.

B. $m > f(3) + 2e$.

C. $m > f(-1) + \frac{1}{e}$.

D. $m > f(3) - 2e$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f(x+2) - xe^x$ trên đoạn $[-1; 1]$

Ta có: $g'(x) = f'(x+2) - (x+1)e^x$

Với mọi $x \in [-1; 1]$, ta có:

$$0 \leq (x+1)e^x$$

Và $1 \leq x+2 \leq 3$ suy ra $f'(x+2) < -1$

Do đó, ta có $g'(x) < 0, \forall x \in [-1; 1]$. Vì vậy $g(1) \leq g(x) \leq g(-1) = f(1) + \frac{1}{e}, \forall x \in [-1; 1]$.

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi

$$m > \max_{[-1; 1]} g(x) \Rightarrow m > f(1) + \frac{1}{e}$$

Câu 78: (THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m \geq f(0) - 1.$

B. $m > f(-1) - e.$

C. $m > f(0) - 1.$

D. $m \geq f(-1) - e.$

Lời giải

Chọn C

$$f(x) < e^{x^2} + m \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} < m$$

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - e^{x^2}; g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}.$

Trên khoảng $(-1; 0)$ ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0).$

Trên khoảng $(0; 1)$ ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1).$

Tại điểm $x = 0$ ta có $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ -2xe^{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = 0.$

Suy ra bảng biến thiên của $g'(x)$:

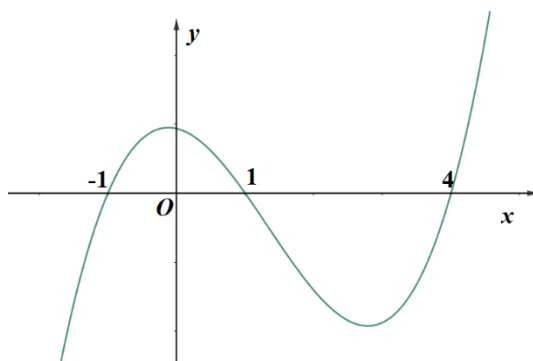
x	-1	0	1
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow f(0) - 1 \searrow$		

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(-1; 1)} g(x) = f(0) - 1.$

Do đó bất phương trình $m > g(x)$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

$$m > \max_{(-1; 1)} g(x) = f(0) - 1.$$

Câu 79: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Bất phương trình $f(1-x) < e^{x^2} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi



A. $m \geq f(1) - 1$.

B. $m \geq f(1) - e^2$.

C. $m > f(-1) - e^2$.

D. $m > f(1) - 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(1-x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ tương đương với $m > f(1-x) - e^{x^2}$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$. Xét $g(x) = f(1-x) - e^{x^2}$ với $x \in (-1;1)$.

Ta có $g'(x) = -f'(1-x) - 2xe^{x^2} = -(f'(1-x) + 2xe^{x^2})$.

Nhận xét:

+) Với $-1 < x < 0$ thì $1 < 1-x < 2$ nên $f'(1-x) < 0$ và $xe^{x^2} < 0$ suy ra $g'(x) > 0$.

+) Với $0 < x < 1$ thì $0 < 1-x < 1$ nên $f'(1-x) > 0$ và $xe^{x^2} > 0$ suy ra $g'(x) < 0$.

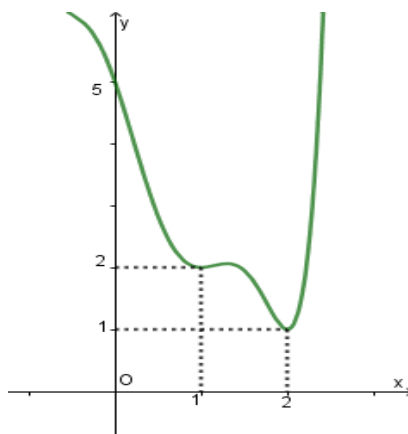
+) Với $x=0$ thì $1-x=1$ nên $f'(1-x)=0$ và $xe^{x^2}=0$ suy ra $g'(x)=0$.

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$g'(x)$		$+$	$-$
$g(x)$	$f(2) - e$ $\nearrow$ $f(1) - 1$ $\searrow$ $f(0) - e$		

Để $m > f(1-x) - e^{x^2}$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1;1)$ suy ra $m > f(1) - 1$.

Câu 80: (Thuận Thành 2 Bắc Ninh) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình $3.12^{f(x)} + (f^2(x) - 1).16^{f(x)} \geq (m^2 + 3m).3^{2f(x)}$ có nghiệm với mọi x ?

A. 5.

B. Vô số.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$3.12^{f(x)} + (f^2(x) - 1).16^{f(x)} \geq (m^2 + 3m).3^{2f(x)}, \forall x$$

$$\Leftrightarrow [f^2(x) - 1] \left(\frac{16}{9} \right)^{f(x)} + 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{f(x)} \geq m^2 + 3m, \forall x. \quad (1)$$

Mà $f(x) \geq 1, \forall x$ nên $[f^2(x) - 1] \left(\frac{16}{9} \right)^{f(x)} \geq 0, \forall x$ và $3 \left(\frac{4}{3} \right)^{f(x)} \geq 4, \forall x$.

$$\text{Đặt } h(x) = [f^2(x) - 1] \left(\frac{16}{9} \right)^{f(x)} + 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{f(x)}.$$

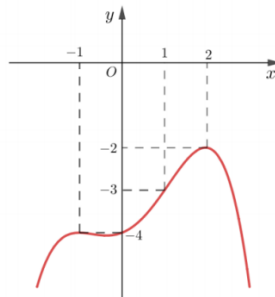
Mà $h(x) \geq 4, \forall x$.

Suy ra $\min_{\mathbb{R}} h(x) = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Khi đó $m^2 + 3m \leq h(x), \forall x \Leftrightarrow m^2 + 3m \leq \min_{\mathbb{R}} h(x) \Leftrightarrow m^2 + 3m \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$.

Câu 81: (Sở Phú Thọ) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ là

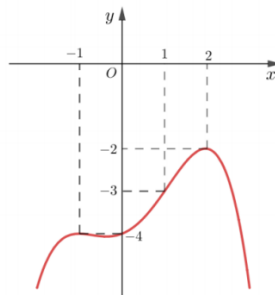
A. 10.

B. 4.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$

nhân hai vế của bất phương trình với $\frac{1}{4^{f(x)}}$

ta có $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} + (4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq -m^2 + 5m$.

Đặt $t = f(x) (t \leq -2) \Rightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq -m^2 + 5m$.

Đặt $g(t) = 9.\left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \Rightarrow -m^2 + 5m \geq \max_{(-\infty; -2]} g(t)$.

Tìm $\max_{(-\infty; -2]} g(t)$ như sau :

Với $t \leq -2 \Rightarrow 4 - t^2 \leq 0 \Rightarrow (4 - t^2).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq 0$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^t \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^t \leq 9.\frac{4}{9} = 4$.

Suy ra $g(t) = 9.\left(\frac{3}{2}\right)^t + (4 - t^2).\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} \leq 9.\frac{4}{9} + 0 = 4$.

$\Rightarrow \max_{(-\infty; -2]} g(t) = g(-2) = 4$.

Khi đó $-m^2 + 5m \geq g(t) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq \max_{(-\infty; -2]} g(t) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow -m^2 + 5m - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$, vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = 3 \\ m = 4 \end{cases}$

Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Sai lầm học sinh mắc phải

Nhìn đồ thị $y = f(x)$ phức tạp nên dễ tìm sai miền giá trị.

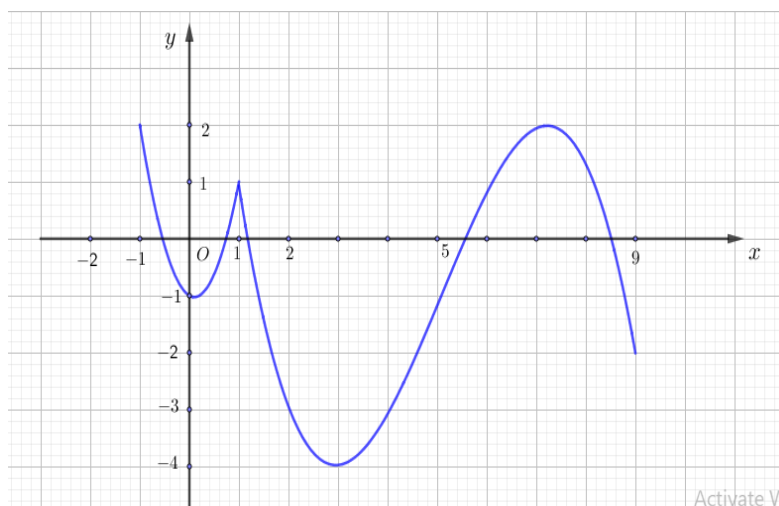
Đưa bất phương trình về phương trình bậc hai với $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}$ thì bài toán tìm max sẽ phức tạp hơn.

Khi giải bài toán tìm max, ta hay nghĩ đến xét hàm số ở vế trái và dùng công cụ đạo hàm. Ở bài toán này cách đó khá dài, không phù hợp với trắc nghiệm.

Khai thác bài toán tương tự

Mấu chốt ở đây là miền giá trị của hàm $f(x)$ và cơ số $\frac{3}{2}$, ta biến đổi một chút các con số đó ta sẽ có vô vàn bài toán mới.

Câu 82: (THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc đoạn $[-1; 9]$?

A. 32.

B. 31.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta suy ra $-4 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [-1; 9]$.

Đặt $t = f(x)$, $t \in [-4; 2]$.

Ta tìm m sao cho bất phương trình $16.3^t - [t^2 + 2t - 8].4^t \geq (m^2 - 3m).6^t$ đúng với $\forall t \in [-4; 2]$

$$bpt \Leftrightarrow \frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq m^2 - 3m \text{ với } \forall t \in [-4; 2] \quad (*).$$

Ta có $\frac{16}{2^t} \geq 4$, $\forall t \in [-4; 2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2$.

Lại có $t^2 + 2t - 8 \leq 0$ với $\forall t \in [-4; 2]$.

Do đó $(t^2 + 2t - 8).\left(\frac{2}{3}\right)^t \leq 0$, $\forall t \in [-4; 2]$. Dấu bằng xảy ra khi $t = 2 \vee t = -4$.

Như vậy $\frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq 4 \quad \forall t \in [-4; 2]$. Mà $\frac{16}{2^t} - [t^2 + 2t - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^t \geq m^2 - 3m$ với $\forall t \in [-4; 2]$.

Suy ra $m^2 - 3m \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$. Như vậy có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A – LÝ THUYẾT CHUNG

I - PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1 - Phương trình lôgarit cơ bản

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

2 - Một số phương pháp giải phương trình lôgarit

a) Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hay } g(x) > 0) \end{cases}$

b) Mũ hoá

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$

c) Đặt ẩn phụ

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

e) Đưa về phương trình đặc biệt

f) Phương pháp đối lập

Chú ý:

- Khi giải phương trình lôgarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.
- Với $a, b, c > 0$ và $a, b, c \neq 1$: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

II - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

- Khi giải các bất phương trình lôgarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số lôgarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình lôgarit:
 - Đưa về cùng cơ số.
 - Đặt ẩn phụ.
 -

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0; \quad \frac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$$

III - HỆ MŨ-LÔGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và lôgarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.
- Phương pháp đặt ẩn phụ.

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I - PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Câu 1: Biết phương trình $\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2 \log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó

a, b là các số nguyên. Tính $a + b$?

A. 5

B. -1

C. 1

D. 2

Lời giải

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Đk: } \begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) - \log_5 x = \log_3 (x-1)^2 - \log_3 4x$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (2\sqrt{x}+1) + \log_3 4x = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4x = (t-1)^2$$

$$(1) \text{ có dạng } \log_5 t + \log_3 (t-1)^2 = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (2)$$

$$\text{Xét } f(y) = \log_5 y + \log_3 (y-1)^2, \text{ do } x > 1 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow y > 1.$$

$$\text{Xét } y > 1: f'(y) = \frac{1}{y \ln 5} + \frac{1}{(y-1)^2 \ln 3} \cdot 2(y-1) > 0$$

$$\Rightarrow f(y) \text{ là hàm đồng biến trên miền } (1; +\infty)$$

$$(2) \text{ có dạng } f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \quad (\text{vn}) \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \quad (\text{tm}).$$

$$\text{Vậy } x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Chọn A

Câu 2: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. Vô nghiệm

Lời giải

$$\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \quad (2) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (16-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 (16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$$

$$+ \text{ Với } -1 < x < 4 \text{ ta có phương trình } x^2 + 4x - 12 = 0 \quad (3); \quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } -4 < x < -1 \text{ ta có phương trình } x^2 - 4x - 20 = 0 \quad (4); \quad (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{24} \\ x = 2 + \sqrt{24} \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 2(1 - \sqrt{6})$, chọn B

Câu 3: Phương trình $\log_3 (x^2 + x + 1) = x(2-x) + \log_3 x$ có bao nhiêu nghiệm

A. 1 nghiệm

B. 2 nghiệm

C. 3 nghiệm

D. Vô nghiệm

Chọn A

Lời giải

điều kiện $x > 0$

$$\text{Phương trình tương đương với } \log_3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = 2x - x^2$$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2 \leq 1$

$$\text{Và } \log_3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = \log_3 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) = \log_3 \left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 3 \right) \geq \log_3 3 = 1$$

$$\text{Do đó } \log_3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) = 2x - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 4: Cho phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$. Phương trình này có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Lời giải

Điều kiện $\sin x > 0, \cos x > 0$. Đặt $u = \log_2(\cos x)$ khi đó $\begin{cases} \cot^2 x = 3^u \\ \cos x = 2^u \end{cases}$

$$\text{Vì } \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} \text{ suy ra } \frac{(2^u)^2}{1 - (2^u)^2} = 3^u \Leftrightarrow f(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u + 4^u - 1 = 0$$

$$f'(u) = \left(\frac{4}{3}\right)^u \ln\left(\frac{4}{3}\right) + 4^u \ln 4 > 0, \forall u \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra hàm số } f(u) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}, \text{ suy ra phương}$$

trình $f(u) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm, ta thấy $f(-1) = 0$ suy ra

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Theo điều kiện ta đặt suy ra nghiệm thỏa mãn là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. Khi đó phương trình nằm trong

khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$ là $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{3}$. Vậy phương trình có hai nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right)$.

Chọn C

Câu 5: Tìm số nghiệm của phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$ (1).

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Phương trình:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}(2x^2 + x + 1)}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}(2x-1) + \log_{x+1}(x+1)}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\log_{x+1}(2x-1)} + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4 \quad (3)$$

Đặt $t = \log_{x+1}(2x-1)$, khi đó (3) viết thành:

$$2t + \frac{1}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x-1) = 1 \\ \log_{x+1}(2x-1) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 = 2x - 1 \\ \sqrt{x+1} = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Chọn C**Câu 6:** Số nghiệm của phương trình $\log_3 |x^2 - \sqrt{2}x| = \log_5 (x^2 - \sqrt{2}x + 2)$ là**A. 3.****B. 2.****C. 1.****D. 4.****Chọn B**ĐK: $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.

$$\text{Đặt } t = x^2 - \sqrt{2}x \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 2 = t + 2$$

$$\Rightarrow \log_3 |t| = \log_5 (t + 2).$$

$$\text{Đặt } \log_3 |t| = \log_5 (t + 2) = u$$

$$\begin{cases} \log_3 |t| = u \\ \log_5 (t + 2) = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |t| = 3^u \\ t + 2 = 5^u \end{cases}$$

$$\Rightarrow |5^u - 2| = 3^u$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^u - 2 = 3^u \\ 5^u - 2 = -3^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 \\ 3^u + 2 = 5^u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^u + 3^u = 2 & (1) \\ \left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1 & (2) \end{cases}$$

□ Xét (1): $5^u + 3^u = 2$ Ta thấy $u = 0$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 0$ là duy nhất.Với $u = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.□ Xét (2): $\left(\frac{3}{5}\right)^u + 2\left(\frac{1}{5}\right)^u = 1$ Ta thấy $u = 1$ là 1 nghiệm, dùng phương pháp hàm số hoặc dùng BĐT để chứng minh nghiệm $u = 1$ là duy nhất.Với $u = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \neq 0; x \neq \sqrt{2}$.**BÌNH LUẬN:**Cho $f(x) = g(x)$ (1) nếu $f(x), g(x)$ đối nghịch nhau nghiêm ngặt hoặc $g(x) = \text{const}$ và $f(x)$ tăng, giảm nghiêm ngặt thì (1) có nghiệm duy nhất.**Câu 7:** Biết rằng phương trình $(x-2)^{\log_2 [4(x-2)]} = 4 \cdot (x-2)^3$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Tính $2x_1 - x_2$.**A. 1.****B. 3.****C. -5.****D. -1.****Lời giải****Chọn D**□ Điều kiện $x > 2$.□ Phương trình thành $(x-2)^{\log_2 4 + \log_2 (x-2)} = 4 \cdot (x-2)^3$ □ $\Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (x-2)^{\log_2 (x-2)} = 4 \cdot (x-2)^3$ hay $(x-2)^{\log_2 (x-2)} = 4 \cdot (x-2)$.

□ Lấy lôgarit cơ số 2 hai vế ta được $\log_2(x-2) \cdot \log_2(x-2) = \log_2[4(x-2)]$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(x-2) = 2 + \log_2(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-2) = -1 \\ \log_2(x-2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 6 \end{cases}$$

□ Suy ra $x_1 = \frac{5}{2}$ và $x_2 = 6$. Vậy $2x_1 - x_2 = 2 \cdot \frac{5}{2} - 6 = -1$.

Câu 8: (Lương Thế Vinh Lần 3) Phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\frac{a}{b}$ (với

$a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5.$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} - 1 = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3(x-1)^2 - (2x-1).$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-1) + (2x-1) = \log_3(3(x-1)^2) + 3(x-1)^2 \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_3(t) + t$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \quad \forall t > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow f(2x-1) = f(3(x-1)^2).$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy hai nghiệm của phương trình là 2 và $\frac{2}{3}$ suy ra $b = 3$.

Câu 9: (ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019) Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình

$$\log_3(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2) + 5^{x^2 - 3x + 1} = 2 \text{ và } x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương.}$$

Tính $a - 2b$?

A. 5.

B. -1.

C. 1.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình: } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \text{ với } t \geq 0. \text{ Phương trình đã cho trở thành } \log_3(t+2) + 5^{t^2-1} - 2 = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3(t+2) + 5^{t^2-1} - 2$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{(t+2)\ln 3} + 2t \cdot 5^{t^2-1} \ln 5 > 0, \forall t \geq 0$.

Suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà $f(0) = \log_3 2 - \frac{9}{5} < 0$

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có đúng 1 nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Xét $t=1$ ta có $\log_3(1+2) + 5^{1^2-1} - 2 = 0$ (đúng)

Suy ra $t=1$ là nghiệm duy nhất.

$$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = \frac{1}{2}(9+\sqrt{5}).$$

Suy ra $a=9, b=5$. Vậy $a-2b=-1$.

Câu 10: (Ba Đình Lần 2) Nghiệm dương của phương trình $\log_2(\sqrt{2x^2-3x+1}) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$ có dạng

$\frac{a+\sqrt{b}}{c} (a, b, c \in \mathbb{N})$. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 20.

B. 23.

C. 24.

D. 42.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $2x^2-3x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

Ta có: $\log_2(\sqrt{2x^2-3x+1}) + \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x^2+3x} = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{2x^2-3x+1}) + 2^{2x^2-3x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(\sqrt{2x^2-3x+1}) = 2 - 2^{2x^2-3x-1} (*)$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2-3x}; t \geq 0$. Khi đó phương trình (*) trở thành: $\log_2(t+1) = 2 - 2^{t^2-1} (1)$.

Nhận thấy rằng phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = \log_2(t+1)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $y = 2 - 2^{t^2-1}$ luôn nghịch biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t=1$ (nhận).

Từ đó ta có phương trình: $\sqrt{2x^2-3x}=1 \Leftrightarrow 2x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$

Vậy $a=3; b=17; c=4$. $a+b+c=24$.

Câu 11: (KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG) Phương

trình

$\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$ có nghiệm các nghiệm $x_1; x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

A. 31

B. -31.

C. 1

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $3x^2 - 5x + 8 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên đk của phương trình là: $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -1 \end{cases}$

$$\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + 2) - \log_2 (3x^2 - 5x + 8) = \frac{1}{2} [(3x^2 - 5x + 8) - (x^2 + 3x + 2)]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2) = \log_2 (3x^2 - 5x + 8) + \frac{1}{2} (3x^2 - 5x + 8)$$

Xét hàm số

$$f(t) = \log_2 t + \frac{1}{2}t, (t > 0); f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + \frac{1}{2} > 0 \forall t > 0.$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $(0; +\infty)$.

$$\text{Mà phương trình có dạng : } f(x^2 + 3x + 2) = f(3x^2 - 5x + 8).$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(3x^2 - 5x + 8) = (x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} (t/m).$$

$$\text{Vậy } A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 1.$$

Câu 12: (THPT NINH BÌNH - BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019) Tính tích tất cả các nghiệm thực của

$$\text{phương trình } \log_2 \left(\frac{2x^2 + 1}{2x} \right) + 2^{\left(x + \frac{1}{2x} \right)} = 5.$$

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.**Chọn D**Điều kiện $x > 0$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{2x}, (t \geq \sqrt{2}).$$

$$\text{Phương trình trở thành: } \log_2 t + 2^t = 5 \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(t) = \log_2 t + 2^t \text{ với } t \geq \sqrt{2}.$$

Ta có $f(2) = 5$ nên $x = 2$ là một nghiệm của phương trình (1).

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2^t \ln 2 > 0 \quad \forall t \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ luôn đồng biến trên khoảng } (\sqrt{2}; +\infty)$$

$$\Rightarrow \text{Đồ thị hàm số } y = f(t) \text{ cắt đường thẳng } y = 5 \text{ nhiều nhất tại 1 điểm.}$$

Vậy $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Với $t = 2$: $x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$ (2).

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và tích tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{1}{2}$.

Câu 13: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b} 2^{1000})) = 0$. Giá trị lớn nhất của ab là:

A. 500.

B. 375.

C. 250.

D. 125.

Lời giải

Chọn A

Ta có biến đổi mũ và lôgarit

$$\log_2(\log_{2^a}(\log_{2^b} 2^{1000})) = 0 \Leftrightarrow \log_{2^a}(\log_{2^b} 2^{1000}) = 1 \Leftrightarrow \log_{2^b} 2^{1000} = 2^a \Leftrightarrow 2^{1000} = 2^{b \cdot 2^a} \Leftrightarrow b \cdot 2^a = 1000$$

Do a, b là các số nguyên dương nên $1000 : 2^a \Rightarrow a < 3$.

+) Nếu $a = 3 \Rightarrow b = 125 \Rightarrow ab = 375$.

+) Nếu $a = 2 \Rightarrow b = 250 \Rightarrow ab = 500$.

+) Nếu $a = 1 \Rightarrow b = 500 \Rightarrow ab = 500$.

Vậy giá trị lớn nhất của ab là 500.

Câu 14: (Đặng Thành Nam Đề 6) Biết rằng phương trình $\log_2(|2x-1|+m) = 1 + \log_3(m+4x-4x^2-1)$ có nghiệm thực duy nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (0; 1)$.

B. $m \in (1; 3)$.

C. $m \in (3; 6)$.

D. $m \in (6; 9)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_2(|2x-1|+m) = \log_3[3(m+4x-4x^2-1)] \Leftrightarrow \log_2(|2x-1|+m) = \log_3[3(m-(2x-1)^2)].$$

Nếu $2x_0 - 1$ là nghiệm của phương trình thì $-(2x_0 - 1)$ cũng là nghiệm của phương trình.

$$\text{Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì } 2x_0 - 1 = -(2x_0 - 1) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Với $x_0 = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ta có: $\log_2 m = \log_3 3m = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2^t \\ 3m = 3^t \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 2^t = 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 3 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}} 3 \Rightarrow m = 2^{\log_{\frac{3}{2}} 3} \approx 6,54.$$

Câu 15: (CỤM-CHUYÊN-MÔN-HẢI-PHÒNG) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho

$$\text{phương trình } \log_2 \frac{3x^2 + 3x + m + 1}{2x^2 - x + 1} = x^2 - 5x - m + 2 \text{ có nghiệm?}$$

A. Vô số.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2x^2 - x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 1 = 2\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) + \frac{7}{8} = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó điều kiện để phương trình xác định là $3x^2 + 3x + m + 1 > 0$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2(3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2(2x^2 - x + 1) = x^2 - 5x - m + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) + 3x^2 + 3x + m + 1 = \log_2(2x^2 - x + 1) + 1 + 4x^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) + 3x^2 + 3x + m + 1 = \log_2(4x^2 - 2x + 2) + 4x^2 - 2x + 2 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t \in (0; +\infty)$, do đó

$$f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty) \text{ nên } (2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + m + 1 = 4x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow m = x^2 - 5x + 1 \quad (3)$$

Xét hàm số $\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 5x + 1$, $f'(x) = 2x - 5$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{21}{4}$	$+\infty$

Vậy (3) có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -\frac{21}{4}$. khi đó

$$3x^2 + 3x + m + 1 = 3x^2 + 3x + x^2 - 5x + 1 + 1 = 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + (x-1)^2 + 1 > 0 \text{ nên (1) đúng.}$$

Vậy $m \geq -\frac{21}{4}$, mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$.

Câu 16: (Lương Thế Vinh Lần 3) Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0 \quad (1)$. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0 \quad (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \quad (i).$$

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2$. Vì $x_1 < x_2$ nên $t_1 < t_2$.

$$\text{Mặt khác, } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4$$

$$\Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16.$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m-3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \quad (ii).$$

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 17: (SỞ GD&ĐT KIÊN GIANG 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} - 2m + 2018 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$.

Số phần tử của S là

A. 7.

B. 9.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn AĐK: $x \neq 0$

$$2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} + 2018 = 2m.$$

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x}$. Vì $x \in [1; 2] \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0; 1]$.

$\Rightarrow f(t) = 4t^2 + 2t + 1009 = m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$

$$f'(t) = 8t + 2 > 0, \forall t \in [0; 1]$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$			+	
$f(t)$		1009	1015	

$$\Rightarrow 1009 \leq m \leq 1015 \Rightarrow S = \{1009; 1010; 1011; 1012; 1013; 1014; 1015\}.$$

Số phần tử của S là: 7.**Câu 18: (Hùng Vương Bình Phước)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \text{ có nghiệm thuộc khoảng } (0; 1).$$

A. $m \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

B. $m \in (-\infty; 0]$.

C. $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

Lời giải**Chọn D**ĐKXD: $x > 0$.

Cách 1: Ta có: $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 (*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow m = -\log_2^2 x - \log_2 x.$$

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0; 1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $m = -t^2 - t (**)$.

Để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $t < 0$.

Xét $f(t) = -t^2 - t$ với $t < 0$. Ta có $f'(t) = -2t - 1$ và $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$		+	-
$f(t)$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

Vậy để phương trình (**) có nghiệm $t < 0$ thì $m \leq \frac{1}{4}$ hay $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$.

Cách 2: Ta có:

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 (*) \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$$

Đặt $\log_2 x = t$, với $x \in (0;1)$ thì $t < 0$. Phương trình đã cho trở $t^2 + t + m = 0$ (**).

Để phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1) \Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm

$$t < 0 \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

Vì khi $\Delta \geq 0$ phương trình (**) có nghiệm $t_1; t_2$ thì theo Định lí Viet $t_1 + t_2 = -1$ nên luôn có ít nhất một nghiệm âm.

Vậy $m \in \left[-\infty; \frac{1}{4}\right]$ thì phương trình (*) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Câu 19: (HSG Bắc Ninh) Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m$ (*). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

A. 2021.

B. 2019.

C. 4038.

D. 2020.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ m + \log_2 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 8\log_2 x - 4\sqrt{m + \log_2 x} = 4m$$

$$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 = 4\sqrt{m + \log_2 x} + 4(m + \log_2 x) + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 = (2\sqrt{m + \log_2 x} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = 2\log_2 x - 1 \\ 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = -2\log_2 x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \\ \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \end{cases}$$

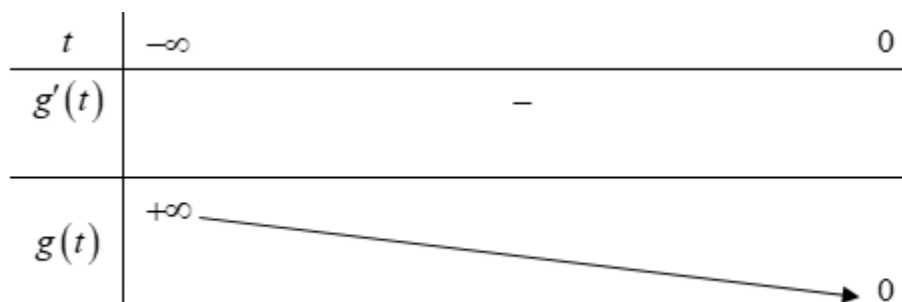
$$* \text{ TH1: } \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 0 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - m = 0 \end{cases} (1)$$

Đặt: $t = \log_2 x (t \leq 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = m$ (2)

Đặt: $g(t) = t^2 - t (t \in (-\infty; 0])$. Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$

$$\text{Ta có: } g(t) = t^2 - t \Rightarrow g'(t) = 2t - 1 < 0 \forall t \leq 0$$

Ta có BBT:



Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm $t \leq 0$ thì $m \geq 0$ (*)

$$* \text{ TH 2 : } \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 - m = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Đặt: $t = \log_2 x (t \geq 1)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 3t + 1 \quad (4)$

Đặt: $g(t) = t^2 - 3t + 1, t \in [1; +\infty)$

Ta có: $g(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow g'(t) = 2t - 3$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \in [1; +\infty)$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số m để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$

Ta có BBT:

t	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	-1	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình (4) có ít nhất 1 nghiệm $t \geq 1$ thì $m \geq -\frac{5}{4} \quad (**)$

Kết hợp (*) và (**), $m \in [-2019; 2019] \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của m thỏa mãn yc bt

Câu 20: (CỤM TRẦN KIM HÙNG - HÙNG YÊN NĂM 2019) Xác định m để phương trình

$$2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1) \text{ có nghiệm}$$

A. $m < 1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $m > 1$.

D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $0 < m^2 + 2 \neq 1 \quad \forall m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình } 2\log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log_{(m^2+2)}(x-1)^2 = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 - \frac{2}{x} \text{ với } x \in (1; +\infty).$$

Yêu cầu bài toán trở thành định m để phương trình $m = 1 - \frac{2}{x}$ có nghiệm trên khoảng $(1; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0 \forall x \in (1; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $-1 < m < 1$.

Câu 21: Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$.

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = 25$. D. $m = \frac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_3^2 x - (m+2) \cdot \log_3 x + 3m - 1 = 0 \quad (1).$$

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$. Ta có phương trình: $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0 \quad (2)$.

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$,

thì phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8 > 0 \\ m=1 \end{cases} \Rightarrow m=1.$$

Câu 22: (SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in (-2; 0)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \in [-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.

Nhận thấy với $x = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $0 = 1$ (vô lí), nên $x = 0$ không là nghiệm của phương trình với mọi m .

Xét $-1 < x \neq 0$ ta có:

$$x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}] \Leftrightarrow \log_3(x+1)^x = \log_3[3(x+1)^m]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^{x-m} = 3 \Leftrightarrow x-m = \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow m = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)} \quad \text{với } -1 < x \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\ln 3}{(x+1)\ln^2(x+1)} > 0, \quad \forall x \in (-1; +\infty) \setminus \{0\}.$$

Ta lập được bảng biến thiên:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	-1	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình $m = x - \frac{\ln 3}{\ln(x+1)}$ có hai nghiệm thực phân biệt khi $m \in (-1; +\infty)$.

Câu 23: (CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong khoảng $(-20; 20)$ để phương trình có nghiệm.

A. 15.

B. 14.

C. 19.

D. 17.

Lời giải

Chọn C

• Đặt $5^x + m = \log_5(x - m) = t$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5^x + m = t \\ \log_5(x - m) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ x - m = 5^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x + m = t \\ 5^t + m = x \end{cases}$.

Trừ hai vế ta được: $5^x - 5^t = t - x \Leftrightarrow 5^x + x = 5^t + t \Leftrightarrow f(x) = f(t)$.

• Với $f(x) = 5^x + x \Rightarrow f'(x) = 5^x \cdot \ln 5 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = f(t)$ có nghiệm duy nhất $x = t$.

• Với $x = t$ ta có $5^x + m = x \Leftrightarrow 5^x - x = -m$.

Xét hàm số $g(x) = 5^x - x$.

$$g'(x) = 5^x \cdot \ln 5 - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x = \log_5 \frac{1}{\ln 5}.$$

x	$-\infty$	$\log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5}$	$+\infty$

$$\Rightarrow \text{với } -m > \frac{1}{\ln 5} - \log_5 \frac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{\ln 5} + \log_5 \frac{1}{\ln 5}.$$

Do m là số nguyên và $m \in (-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1\}$.

Vậy có 19 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 24: (Nguyễn Khuyến) Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20.

B. 21.

C. 9.

D. 19.

Lời giải

Chọn D

Ta có $5^x + m = \log_5(x - m)$ (*). Đặt $t = 5^x + m$.

Suy ra (*) $\Leftrightarrow t = \log_5(x - m) \Leftrightarrow x - m = 5^t \Leftrightarrow x = 5^t + m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t = 5^x + m \\ x = 5^t + m \end{cases} \Rightarrow t - x = 5^x - 5^t \Leftrightarrow x + 5^x = t + 5^t$ (1).

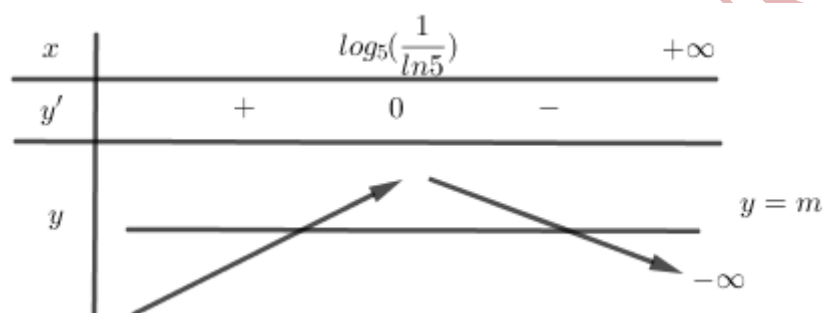
Xét hàm số $f(u) = u + 5^u$ có $f'(u) = 1 + 5^u \ln 5 > 0, \forall u$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(1) $\Leftrightarrow x = t$. Khi đó ta được $x = 5^x + m \Leftrightarrow x - 5^x = m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 5^x$ và đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng trục hoành.

Xét $y = x - 5^x$ có $y' = 1 - 5^x \ln 5$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = \log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq f\left(\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)\right) \in (-1; 0)$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-20; 20) \end{cases}$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; -1\}$. Vậy có 19 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 25: (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1) Cho $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 2019.

B. 2018.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Do $0 \leq x \leq 2020$ nên $\log_2(2x+2)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x+1 = 3y - 2^{3y}$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2^{\log_2(x+1)} = 3y + 2^{3y}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t + 2^t$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $f'(t) = 1 + 2^t \ln 2 \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) = 3y \Leftrightarrow x+1 = 2^{3y}$

$\Leftrightarrow y = \log_8(x+1)$.

Ta có $0 \leq x \leq 2020$ nên $1 \leq x+1 \leq 2021$ suy ra $0 \leq \log_8(x+1) \leq \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021 \approx 3,66$ nên nếu $y \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0; 0), (7; 1), (63; 2), (511; 3)$.

Câu 26: (Đặng Thành Nam Đề 9) Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. 399.

B. 199.

C. 200.

D. 398.

Lời giải

Chọn B

Vì $e^x + e^{x+a} > 0, \forall x$ nên $\ln(1+x) > \ln(1+x+a) \Leftrightarrow 1+x > 1+x+a \Leftrightarrow a < 0$.

Điều kiện của phương trình là $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x+a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1-a, \forall a < 0$.

Phương trình tương đương với: $e^x + e^{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1) = 0$.

Xét hàm số $f(x) = e^x + e^{x+a} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1)$.

Ta có

$$f'(x) = e^x + e^{x+a} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+a+1} = e^x + e^{x+a} - \frac{a}{(x+1)(x+a+1)} > 0 \quad \forall a < 0, \forall x > -a-1.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(-1-a; +\infty)$ với $\forall a < 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -(a+1)^+} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-1-a$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a < 0$.

Vì $a \in (-200; 200)$ nên có 199 số a nguyên thỏa mãn.

Câu 27: (Sở Phú Thọ) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1-2x-2y$ và $\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$.

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1-2x-2y$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + 3x+5y-10 = e^{x+3y-9} + x+3y-9$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm là duy nhất. Tức là:

$$3x+5y-10 = x+3y-9 \Leftrightarrow 2y = 1-2x.$$

Thay vào phương trình thứ 2, ta được:

$$\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0 \quad (1).$$

Đặt $\log_5(x+5) = t$ ($t \in \mathbb{R}, x > -5$). Khi đó phương trình (1) trở thành

$$t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (2).$$

Tồn tại x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm, tức là:

$$\Delta = (m+6)^2 - 4(m^2+9) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 28: (Hoàng Hoa Thám Hưng Yên) Cho a, b là các số dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$, với m, n là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$.

A. 22209.

B. 20190.

C. 2019.

D. 14133.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có } 5\log_a x \cdot \log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0 \Leftrightarrow 5 \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} - 4 \frac{\ln x}{\ln a} - 3 \frac{\ln x}{\ln b} - 2019 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x. \text{ Ta được phương trình: } \frac{5t^2}{\ln a \cdot \ln b} - \left(\frac{4\ln a + 3\ln b}{\ln a \cdot \ln b} \right)t - 2019 = 0 \quad (*)$$

Do $a, b > 1 \Rightarrow \ln a \cdot \ln b > 0$. Vậy (*) luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 . Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Mặt khác ta có: } t_1 + t_2 = \frac{4\ln a + 3\ln b}{5} = \frac{4\ln a + 3\ln(2019-a)}{5}.$$

$$\Rightarrow \ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = t_1 + t_2 = \frac{4\ln a + 3\ln(2019-a)}{5}$$

Vì $a > 1, b > 1$ và $a+b=2019$ nên $a \in (1; 2018)$.

$$\text{Xét hàm số } f(u) = \frac{4\ln u + 3\ln(2019-u)}{5} \text{ trên } (1; 2018).$$

$$\text{Ta có } f'(u) = \frac{6057-7u}{5u(2019-u)} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{6057}{7}$$

Bảng biến thiên:

u	1	$\frac{6057}{7}$	2018
$f'(u)$	+	0	-
$f(u)$	$\frac{3}{5}\ln\frac{6057}{7} + \frac{4}{5}\ln\frac{8076}{7}$		

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } \ln(x_1 x_2) \text{ bằng } \frac{3}{5}\ln\frac{6057}{7} + \frac{4}{5}\ln\frac{8076}{7}.$$

Do đó $m=6075, n=8076$ hay $S = m + 2n = 22209$.

Câu 29: Tập hợp các giá trị của m để phương trình $m \cdot \ln(1-2^x) - x = m$ có nghiệm thuộc $(-\infty; 0)$ là

A. $(\ln 2; +\infty)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(1; e)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1-2^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $m = \frac{x}{\ln(1-2^x)-1}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\ln(1-2^x)-1}$ với $x < 0$. Có $f' = \frac{\ln(1-2^x)-1-x \cdot \frac{-2^x \cdot \ln 2}{1-2^x}}{(\ln(1-2^x)-1)^2}$
 $= \frac{(1-2^x)\ln(1-2^x)-(1-2^x)+x \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(1-2^x)(\ln(1-2^x)-1)^2}$. Vì $x < 0$ nên $0 < 1-2^x < 1$, do đó $f'(x) < 0 \quad \forall x < 0$.

Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Mặt khác, dễ thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Ta có BBT sau:

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		—	
$f(x)$	$+\infty$		0

Vậy phương trình có nghiệm khi $m > 0$.

Câu 30: (Đặng Thành Nam Đề 17) Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_2(2x+m) - 2\log_2 x = x^2 - 4x - 2m - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2x+m > 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$\log_2(2x+m) - \log_2 x^2 = x^2 - 4x - 2m - 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 = \log_2(2x+m) + 4x + 2m + 1.$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 = \log_2(4x+2m) + 4x + 2m \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $D = (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \quad \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên D .

Suy ra phương trình (1) tương đương với phương trình: $x^2 = 4x + 2m \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2m = 0 \quad (2)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+2m > 0 \\ 4 > 0 \\ -2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0.$$

Vậy có duy nhất số nguyên $m = -1$.

Câu 31: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Tìm các giá trị m để phương trình

$$3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5) \text{ có nghiệm.}$$

A. $\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$.

B. $-5 \leq m \leq 5$.

C. $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$.

D. $-\sqrt{6} \leq m \leq 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x - |m| + 5} = \log_{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}(|m| + 5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10}}{3^{|m| + 5}} = \frac{\ln(|m| + 5)}{\ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10)}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10} \cdot \ln(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = 3^{|m| + 5} \cdot \ln(|m| + 5)$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 5$

$$f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 5$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(\sin x + \sqrt{5} \cos x + 10) = f(|m| + 5)$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 10 = |m| + 5$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{5} \cos x + 5 = |m|$$

$$\text{Mà } -\sqrt{6} \leq \sin x + \sqrt{5} \cos x \leq \sqrt{6}$$

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có $5 - \sqrt{6} \leq m \leq 5 + \sqrt{6}$

Câu 32: (Sở Bắc Ninh) Cho phương trình $m \ln^2(x+1) - (x+2-m) \ln(x+1) - x - 2 = 0$ (1). Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $(3,8;3,9)$.B. $(3,6;3,7)$.C. $(3,7;3,8)$.D. $(3,5;3,6)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > -1$.Vì $x = 0$ không thỏa mãn phương trình nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow [m \ln(x+1) - x - 2][\ln(x+1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \ln(x+1) = x + 2 \\ \ln(x+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2}{\ln(x+1)}, (2) \\ x = \frac{1}{e} - 1 \end{cases}$$

Do nghiệm $x = \frac{1}{e} - 1 < 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt sao cho $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x+2}{\ln(x+1)}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1} = 0, (3).$$

Xét hàm số $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x+2}{x+1}$ có $h'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x > 0$ nên $h(x)$ đồng biến

trên $(0; +\infty)$ do đó phương trình $f'(x) = 0$ có không quá một nghiệm.

Mà $f'(2) \cdot f'(4) < 0$ và $f'(x)$ là hàm số liên tục trên $[2; 4]$ suy ra phương trình (3) có duy nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 4)$. Từ đó ta có bảng biến thiên

x	0	2	x_0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		$\frac{4}{\ln 3}$	$\frac{6}{\ln 5}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ khi và chỉ khi $m > \frac{6}{\ln 5} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{6}{\ln 5}; +\infty \right)$.

Vậy $a = \frac{6}{\ln 5} \in (3, 7; 3, 8)$.

- Câu 33:** (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Cho phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-2019; 2019]$ để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt.
- A. 4036. B. 4034. C. 4038. D. 4040.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \log_2(2|x-m| + 2) \quad (1).$$

Xét hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ với $t \geq 0$.

Hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = 2^t \cdot \log_2(t+2) \cdot \ln 2 + \frac{2^t}{(t+2) \ln 2} > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Vậy hàm số $y = 2^t \cdot \log_2(t+2)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow f((x-1)^2) = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2(x-m) \\ -(x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 & (1) \\ 2m = x^2 + 1 & (2) \end{cases} (*)$$

□ Xét phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	3	$-\infty$

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ vô nghiệm khi $2m > 3 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

□ Xét phương trình $2m = x^2 + 1$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = x^2 + 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt khi $2m > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ có 1 nghiệm khi $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Phương trình $2m = x^2 + 1$ vô nghiệm khi $2m < 1 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

□ Khi $m = \frac{3}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có nghiệm $x = 2$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{2}$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{3}{2}$.

□ Khi $m = \frac{1}{2}$: phương trình $2m = -x^2 + 4x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 2 \pm \sqrt{2}$, phương trình $2m = x^2 + 1$ có nghiệm $x = 0$. Vậy (*) có 3 nghiệm phân biệt, suy ra loại $m = \frac{1}{2}$.

□ Xét phương trình $-x^2 + 4x - 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ suy ra không tồn tại m để phương trình (1) và (2) có cùng tập nghiệm gồm 2 phần tử. Vậy không tồn tại m để (*) có 2 nghiệm phân biệt.

□ Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\text{TH1: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

$$\text{TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt và (1) vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

$$\text{TH3: (1) có nghiệm } x=2 \text{ và (2) có nghiệm } x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Kết hợp với điều kiện m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ ta có $m \in \left[-2019; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2019\right]$.

Vì m nguyên nên ta có 4038 giá trị của m .

Câu 34: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1; 8]$.

A. $3 \leq m \leq 6..$

B. $6 \leq m \leq 9..$

C. $2 \leq m \leq 6..$

D. $2 \leq m \leq 3..$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$

$$\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2 \log_2 x + 3 = m$$

Đặt $t = \log_2 x$

$$\text{Phương trình trở thành } t^2 - 2t + 3 = m \quad (1)$$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in [1; 8] \Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $x \in [0; 3]$.

$$\text{Đặt } g(t) = t^2 - 2t + 3$$

$$g'(t) = 2t - 2. \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

BBT

x	0	1	3	
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	3		2	6

Từ BBT ta suy ra để phương trình đã có nghiệm $x \in [1; 8]$ thì $2 \leq m \leq 6$.

Câu 35: Điều kiện cần và đủ của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - (m-1)\log_2 x + 4 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1; 4]$ là

A. $3 < m \leq 4.$

B. $3 \leq m \leq \frac{10}{3}.$

C. $\frac{10}{3} < m \leq 4.$

D. $3 < m \leq \frac{10}{3}.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x \in [1; 4]$ nên $t \in [0; 2]$.

Phương trình trở thành $t^2 - (m-1)t + 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 4}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t + 4}{t+1}$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-3	0	1	2	$+\infty$
$f'(t)$			-	0	+	
$f(t)$			4		$\frac{10}{3}$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1; 4]$ thì $3 < m \leq \frac{10}{3}$.

Câu 36: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $\left\{\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right\}$.

B. $\left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

C. $\left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right\}$.

D. $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ (1)

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t+2), t \geq 0$.

Vì $f'(t) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Khi đó } (2) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (3) \\ x^2 = 2m - 1 & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT (4)

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2}, \text{ thay vào PT (4) thỏa mãn}$$

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT (3)

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

(4) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$, với $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m = 1$.

KL: $m \in \left\{ \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \right\}$.

BÌNH LUẬN:

B1: Đưa phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ với u, v là hai hàm theo x .

B2: Xét hàm số $f(t), t \in D$.

B3: Dùng đạo hàm chứng minh hàm số $f(t), t \in D$ tăng hoặc giảm nghiêm ngặt trên **D**.

B4: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:
 $\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0$.

A. $-\frac{1}{4} < m < 0$.

B. $5 \leq m \leq \frac{21}{4}$.

C. $5 < m < \frac{21}{4}$.

D. $-\frac{1}{4} \leq m \leq 2$.

Chọn C

Lời giải

$$\log_3(1-x^2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+m-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ \log_3(1-x^2) = \log_3(x+m-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 1) \\ 1-x^2 = x+m-4 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + x + m - 5 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\in (-1; 1)$

Cách 1: Dùng định lý về dấu tam thức bậc hai.

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa: $-1 < x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.f(-1) > 0 \\ a.f(1) > 0 \\ \Delta > 0 \\ -1 < \frac{S}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 > 0 \\ m-3 > 0 \\ 21-4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < \frac{21}{4}.$$

Cách 2: Với điều kiện có nghiệm, tìm các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ rồi so sánh trực tiếp các nghiệm với 1 và -1.

Cách 3: Dùng đồ thị

Đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 5$ tại hai điểm phân biệt trong khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $\in (-1; 1)$.

Cách 4: Dùng đạo hàm

Xét hàm số $f(x) = x^2 + x - 5 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Có $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{21}{4}$; $f(1) = -3$; $f(-1) = -5$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-5	$-\frac{21}{4}$	3

Dựa vào bảng biến thiên, để có hai nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1;1)$ khi

$$-\frac{21}{4} < -m < -5 \Rightarrow \frac{21}{4} > m > 5.$$

Cách 5: Dùng MTCT

Sau khi đưa về phương trình $x^2 + x + m - 5 = 0$, ta nhập phương trình vào máy tính.

* Giải khi $m = -0,2$: không thỏa $\Rightarrow$ loại A, D.

* Giải khi $m = 5$: không thỏa $\Rightarrow$ loại B.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_2 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$?

A. $m \in (1; \sqrt{3}]$. B. $m \in [1; \sqrt{3})$ C. $m \in [-1; \sqrt{3})$ D. $m \in (-\sqrt{3}; 1]$.

Lời giải

ĐK: $x > 0$. Khi đó phương trình tương đương:

$$\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$$

Đặt: $t = \log_2 x$, với $x \geq 32 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 32 = 5$ hay $t \geq 5$.

Phương trình trở thành: $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3)$ (*).

Khi đó bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \geq 5$.

Với $t \geq 5$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} = m(t-3) \Leftrightarrow t-3(\sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}$$

Ta có: $\frac{t+1}{t-3} = 1 + \frac{4}{t-3}$. Với $t \geq 5 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{4}{t-3} \leq 1 + \frac{4}{5-3} = 3$ hay:

$$1 < \frac{t+1}{t-3} \leq 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} \leq \sqrt{3}$$

Suy ra $1 < m \leq \sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm thỏa ycbt với $1 < m \leq \sqrt{3}$.

Chọn A

Câu 39: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt khi:

A. $m < 19$ B. $m > 39$ C. $19 < m < \frac{39}{2}$ D. $19 < m < 39$

Lời giải

$$\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) - \log_2(-14x^2 + 29x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x}$$

$$f(x) = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 19 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{121}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên suy ra đáp án **C**.

Câu 40: Tìm m để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$

A. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $-3 < m \leq \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\frac{5}{2}, 4\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

$$4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m-5)t + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(t^2 + t + 1) = t^2 + 5t + 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}$$

$$\Leftrightarrow g(m) = f(t)$$

Xét $f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}$ với $t \in [-1; 1]$

$$f'(t) = \frac{4 - 4t^2}{(t^2 + t + 1)^2} \geq 0 \quad \forall t \in [-1; 1] \Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên đoạn } [-1; 1]$$

Để phương trình có nghiệm khi hai đồ thị $g(m); f(t)$ cắt nhau $\forall t \in [-1; 1]$

$$\Rightarrow f(-1) \leq g(m) \leq f(1) \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}$$

BÌNH LUẬN:

Đây là dạng toán ứng dụng hàm số để giải bài toán chứa tham số. Đối với bài toán biện luận nghiệm mà chứa tham số thì phải tìm điều kiện đúng cho ẩn phụ sau đó cô lập m rồi tìm max, min hàm số.

Câu 41: Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $1 < m < 2$. B. $3 < m < 4$. C. $0 < m < \frac{3}{2}$. D. $2 < m < 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$ Đk: $x > 0$

$$\Leftrightarrow 4(\log_{3^2} x)^2 + m\log_{3^{-1}} x + \frac{1}{6}\log_{3^{-\frac{1}{2}}} x + m - \frac{2}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - m\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x - \left(m + \frac{1}{3}\right)\log_3 x + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x. \text{ Khi đó phương trình (1) } \Leftrightarrow t^2 - \left(m + \frac{1}{3}\right)t + m - \frac{2}{9} = 0 \quad (2)$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 3 \Leftrightarrow \log_3 x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 1$$

(Với $t_1 = \log_3 x_1$ và $t_2 = \log_3 x_2$)

Áp dụng hệ thức Vi-et cho phương trình (2)

$$\text{Ta có } t_1 + t_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{-b}{a} = 1 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$$

Vậy $0 < m < \frac{3}{2}$ là mệnh đề đúng.

Câu 42: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$. 466666

- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 25$. C. $S_{\min} = 33$. D. $S_{\min} = 17$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2 > 20a$.

Đặt $t = \ln x$, $u = \log x$ khi đó ta được $at^2 + bt + 5 = 0$ (1), $5u^2 + bu + a = 0$ (2).

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x , một u thì có một x .

Ta có $x_1 \cdot x_2 = e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2} = e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3 \cdot x_4 = 10^{u_1+u_2} = 10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}}$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \geq 3 \text{ (do } a, b \text{ nguyên dương), suy ra } b^2 > 60 \Rightarrow b \geq 8.$$

Vậy $S = 2a + 3b \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 30$, suy ra $S_{\min} = 30$ đạt được $a = 3, b = 8$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$?

A. $m \in (1; \sqrt{3}]$. B. $m \in [1; \sqrt{3})$. C. $m \in [-1; \sqrt{3})$. D. $m \in (-\sqrt{3}; 1]$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Khi đó phương trình tương đương: $\sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$.

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \geq 32 \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 32 = 5$ hay $t \geq 5$.

Phương trình có dạng $\sqrt{t^2 - 2t - 3} = m(t - 3)$ (*).

Khi đó bài toán được phát biểu lại là: “Tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \geq 5$ ”

Với $t \geq 5$ thì (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} = m(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{t-3}(\sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t+1} - m\sqrt{t-3} = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}$$

Ta có $\frac{t+1}{t-3} = 1 + \frac{4}{t-3}$. Với $t \geq 5 \Rightarrow 1 < 1 + \frac{4}{t-3} \leq 1 + \frac{4}{5-3} = 3$ hay

$$1 < \frac{t+1}{t-3} \leq 3 \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} \leq \sqrt{3}$$

suy ra $1 < m \leq \sqrt{3}$. Vậy phương trình có nghiệm với $1 < m \leq \sqrt{3}$.

BÌNH LUẬN:

Chúng ta có thể dùng hàm số để tìm max, min của hàm số $y = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}, t \geq 5$

Câu 44: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1} - 2m - 5 = 0$ có nghiệm trên đoạn $[1; 2^{\sqrt{3}}]$.

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

B. $m \in [-2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0)$.

D. $m \in [-2; 0]$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1} - 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1} = 2m + 5.$$

Xét $f(x) = \log_2^2 x + \sqrt{\log_2^2 x + 1}, x \in [1; 2^{\sqrt{3}}]$.

$$f'(x) = \frac{2\log_2 x}{x \cdot \ln 2} + \frac{2\log_2 x}{x \cdot \ln 2 \cdot 2\sqrt{\log_2^2 x + 1}} = \frac{2\log_2 x}{x \cdot \ln 2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\log_2^2 x + 1}} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Tm).}$$

$f'(x)$ không xác định tại $x = 0$ (loại).

BBT

x	1	$2^{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	1	5

Vậy phương trình có nghiệm khi: $1 \leq 2m+5 \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Câu 45: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m$ có nghiệm $x \geq 1$.

- A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. C. $[1; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot 5^x - 2) = m \quad (1)$$

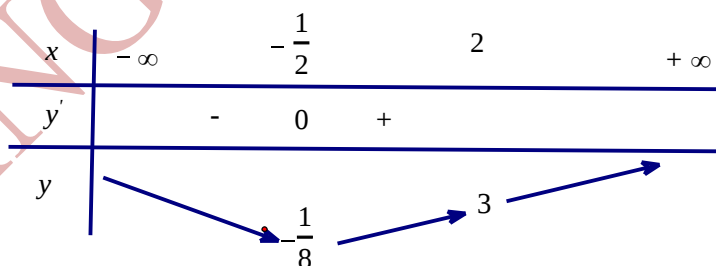
$$\Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot \frac{1}{2} \log_2[(5^x - 1)2] = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(5^x - 1) [\log_2(5^x - 1) + 1] = m$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(5^x - 1), \text{ PTTT: } \frac{1}{2}t(t+1) = m \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = m \quad (2)$$

PT (1) có nghiệm $x \geq 1$ khi và chỉ khi PT(2) có nghiệm $t \geq 2$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, \quad f'(t) = t + \frac{1}{2}$$



Dựa vào BBT, PT(2) có nghiệm $t \geq 2$ khi và chỉ khi $m \geq 3$.

Câu 46: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình

$$(m-1) \log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5) \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0 \text{ có nghiệm thực trong đoạn } \left[\frac{5}{4}; 4\right]:$$

- A. $m < -3$. B. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.
C. $m > \frac{7}{3}$. D. $-3 < m < \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 2$.

$$(m-1)\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2} + 4m-4=0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2(x-2) + 4(m-5)\log_2(x-2) + 4m-4=0(*)$$

Đặt $\log_2(x-2)=t$.

$$x \in \left[\frac{5}{4}; 4\right] \Rightarrow 0 \leq x-2 \leq 2 \text{ (Kết hợp với điều kiện). Vậy } t \leq 1.$$

Phương trình (*) có dạng: $\Leftrightarrow 4(m-1)t^2 + 4(m-5)t + 4m-4=0(**)$

Ta cần tìm m sao cho PT (**) có nghiệm thỏa mãn $t \leq 1$.

$$\Leftrightarrow (m-1)t^2 + (m-5)t + m-1=0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}.$$

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t^2 + t + 1}; f'(t) = \frac{-4t^2 + 4}{(t^2 + t + 1)^2}.$$

Lập bảng biến thiên ta có

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	-3	$\frac{7}{3}$	

Vậy $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$ thì phương trình có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $2\log_2|x| + \log_2|x+3| = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (0; 2)$.

B. $m \in \{0; 2\}$.

C. $m \in (-\infty; 2)$.

D. $m \in \{2\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$2\log_2|x| + \log_2|x+3| = m \Leftrightarrow \log_2 x^2|x+3| = m \Leftrightarrow x^2|x+3| = 2^m$$

Xét hàm số: $y = x^2|x+3|$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 + 6x & x > -3 \\ -3x^2 - 6x & x < -3 \end{cases}$$

Bảng biến

Thiên

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	0	4	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có hai nghiệm khi: $\begin{cases} 2^m = 0 \\ 2^m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$

Câu 48: Cho m và n là các số nguyên dương khác 1. Gọi P là tích các nghiệm của phương trình $8(\log_m x)(\log_n x) - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$. Khi P là một số nguyên, tìm tổng $m+n$ để P nhận giá trị nhỏ nhất?

A. $m+n=20$.

B. $m+n=48$.

C. $m+n=12$.

D. $m+n=24$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log_m x$, lúc đó $x = m^t$

Phương trình trở thành

$$8t(\log_n m^t) - 7t - 6\log_n m^t - 2017 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 \log_n m - 7t - 6t \log_n m - 2017 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(\log_n m)t^2 - (7 + 6\log_n m)t - 2017 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = (7 + 6\log_n m)^2 + 4 \cdot 2017 \cdot 8\log_n m$$

$$\text{Lúc đó } x_1 = m^{t_1}; x_2 = m^{t_2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = m^{t_1+t_2} = m^{\frac{7+6\log_n m}{8\log_n m}} = P \text{ nguyên}$$

Lần lượt thử các đáp án ta chọn được đáp án C.

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_{\frac{3}{2}}|x-2| - \log_{\frac{2}{3}}(x+1) = m$ có ba nghiệm phân

biệt.

A. $m > 3$.

B. $m < 2$.

C. $m > 0$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Điều kiện: $-1 < x \neq 2$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \log_{\frac{3}{2}}|x-2| + \log_{\frac{3}{2}}(x+1) = m$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{3}{2}}(|x-2|(x+1)) = m \Leftrightarrow |x-2|(x+1) = \left(\frac{3}{2}\right)^m. (*)$$

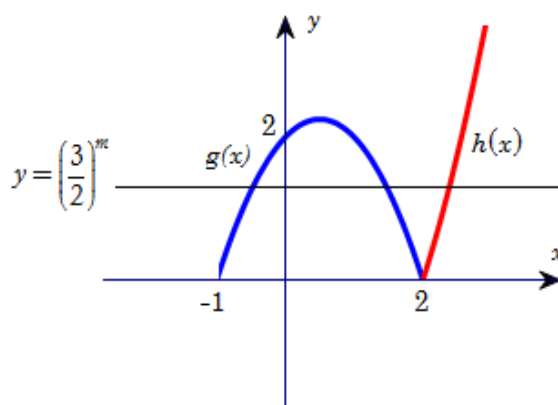
Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = |x-2|(x+1)$

và đường thẳng $y = \left(\frac{3}{2}\right)^m$ (cùng phương với trục hoành).

Xét hàm số $f(x) = |x-2|(x+1)$ xác định trên $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(x) = |x-2|(x+1) = \begin{cases} h(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 & \text{khi } x > 2 \\ g(x) = -(x-2)(x+1) = -x^2 + x + 2 & \text{khi } -1 < x < 2 \end{cases}$$

Đồ thị



Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi $0 < \left(\frac{3}{2}\right)^m < \max_{(-1;2)} g(x)$

$$\longleftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^m < \frac{9}{4} \longleftrightarrow m < 2.$$

Chọn B

Câu 50: Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$.

A. 25

B. 33

C. 30

D. 17

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện để hai phương trình có hai nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} \Delta_1 = b^2 - 20a > 0 \\ \Delta_2 = b^2 - 20a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 > 20a$$

Khi đó theo Vi-ét, ta có

Vậy theo giả thiết, ta có

$$x_1 x_2 > x_3 x_4 \Leftrightarrow e^{\frac{b}{a}} > 10^{\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} > -\frac{b}{5} \ln 10 \Leftrightarrow a > \frac{5}{\ln 10} \approx 2,1714$$

$$\Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow b^2 > 20a \geq 20 \cdot 3 = 60 \Rightarrow b \geq 8 \Rightarrow S \geq 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 = 24 + 6 = 30.$$

Câu 51: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2 \log_a x - 3 \log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = mn$.

A. $\frac{279}{4}$

B. 90

C. $\frac{81}{4}$

D. $\frac{45}{2}$

Lời giải

Chọn A

Phương trình tương đương với

$$(\log_a x)(\log_b a \log_a x) - 2 \log_a x - 3 \log_b x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_b a (\log_a x)^2 - 2 \log_a x - 3 = 0.$$

Theo Vi-ét ta có

$$\log_a m + \log_a n = \frac{2}{\log_b a} = 2 \log_a b = \log_a b^2 \Leftrightarrow \log_a (mn) = \log_a b^2 \Leftrightarrow mn = b^2.$$

$$\text{Vậy } P = b^2 - 9a = b^2 + 9(10 - b) = \left(b - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{279}{4} \geq \frac{279}{4}.$$

Dấu bằng đạt được tại $b = \frac{9}{2}, a = \frac{11}{2}$.

Câu 52: Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = mn$

A. $\frac{16875}{16}$

B. $\frac{4000}{27}$

C. 15625

D. 3456

Lời giải

Chọn D

Phương trình tương đương với

$$(\log_a x)(\log_b a \cdot \log_a x) - (2 + 3\log_b a)\log_a x - 1 = 0.$$

Theo Vi-ét ta có

$$\log_a m + \log_a n = \frac{(2 + \log_b a)}{\log_b a} = 2\log_a b + 2 = \log_a (a^3 b^2) \Leftrightarrow mn = a^3 b^2.$$

$$\text{Khi đó ta có } S = f(a) = a^3(10-a)^2 \leq \max_{(1;9)} f(a) = f(6) = 3456.$$

Câu 53: Biết rằng khi m, n là các số nguyên dương thay đổi và lớn hơn 1 thì phương trình $8\log_m x \cdot \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt a, b . Tính $S = m + n$ để ab là một số nguyên dương nhỏ nhất.

A. $S = \frac{500}{3}$.

B. $S = \frac{700}{3}$.

C. $S = \frac{650}{3}$.

D. $S = 200$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình tương đương với:

$$8\log_m x \cdot \log_n m \cdot \log_m x - 7\log_m x - 6\log_n m \cdot \log_m x - 2017 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\log_n m (\log_m x)^2 - (7 + 6\log_n m) \cdot \log_m x - 2017 = 0$$

$$\Rightarrow \log_m a + \log_m b = \frac{7 + 6\log_n m}{8\log_n m} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8}\log_m n \Leftrightarrow \log_m (ab) = \log_m \left(m^{\frac{6}{8}} \cdot n^{\frac{7}{8}} \right)$$

$$\Leftrightarrow ab = m^{\frac{6}{8}} \cdot n^{\frac{7}{8}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 8; n = 4; ab = 16 \Rightarrow S = 8 + 4 = 12$$

Mẹo: Bước cuối thay $n = S - m$ với S ở mỗi đáp án; nhập hàm $F(X) = X^{\frac{6}{8}}(S - X)^{\frac{7}{8}}$ Start?2 End? $S - 2$ và Step? 1.

Nên thử với S nhỏ trước.

Chọn đáp án cho kết quả $F(X)$ nguyên dương nhỏ nhất.

Câu 54: Cho ba số thực a, b, c thay đổi lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b + c = 100$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính $S = a + 2b + 3c$ khi mn đạt giá trị lớn nhất.

A. $S = \frac{500}{3}$.

B. $S = \frac{700}{3}$.

C. $S = \frac{650}{3}$.

D. $S = 200$.

Lời giải

Chọn B

Theo Viet ta có:

$$\log_a m + \log_a n = 1 + 2\log_a b + 3\log_a c = \log_a (ab^2c^3) \Leftrightarrow mn = ab^2c^3.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$mn = ab^2(100-a-b)^3 = \frac{4}{27} \left(3a \cdot \frac{3b}{2} \cdot \frac{3b}{2} (100-a-b)(100-a-b)(100-a-b) \right) \\ \leq \frac{4}{27} \left(\frac{3a + 2\left(\frac{3b}{2}\right) + 3(100-a-b)}{6} \right)^6 = \frac{625 \cdot 10^8}{27}.$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } 3a = \frac{3b}{2} = 100 - a - b \Leftrightarrow a = \frac{50}{3}, b = \frac{100}{3}, c = \frac{150}{3} \Rightarrow S = \frac{700}{3}$$

Câu 55: Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m

A. $1 < a_0 < 2$.

B. $e < a_0 < e^2$.

C. $2 < a_0 < 3$.

D. $e^2 < a_0 < e^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình tương đương với:

$$(1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2018 \Leftrightarrow \log_a x \log_b x + \log_a x + \log_b x + 1 = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_b (\log_a x)^2 + (1 + \log_b a) \log_a x - 2017 = 0.$$

Khi đó theo Viet ta có:

$$\log_a m + \log_a n = -\frac{1 + \log_b a}{\log_b a} = -\log_a b - 1 = \log_a \frac{1}{ab} \Leftrightarrow mn = \frac{1}{ab}$$

Vì áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P = (4a^2 + 9b^2) \left(\frac{36}{a^2 b^2} + 1 \right) \geq 2\sqrt{4a^2 \cdot 9b^2} \cdot 2\sqrt{\frac{36}{a^2 b^2} \cdot 1} = 144$$

$$\text{Dấu bằng đạt tại } 4a^2 = 9b^2, \frac{36}{a^2 b^2} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 2.$$

Câu 56: Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt m

A. $1 < a_0 < 2$.

B. $e < a_0 < e^2$.

C. $2 < a_0 < 3$.

D. $e^2 < a_0 < e^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình tương đương với:

$$8\log_m x \cdot \log_n m \cdot \log_m x - 7\log_m x - 6\log_n m \cdot \log_m x - 2017 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\log_n m (\log_m x)^2 - (7 + 6\log_n m) \cdot \log_m x - 2017 = 0$$

$$\text{Theo viet ta có } \log_m a + \log_m b = \frac{6\log_n m + 7}{8\log_n m} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8}\log_m n \Leftrightarrow \log_m(ab) = \log_m \left(m^{\frac{6}{8}} \cdot n^{\frac{7}{8}} \right).$$

$$\text{Vì } ab = m^{\frac{6}{8}} \cdot n^{\frac{7}{8}} = m^{\frac{3}{4}} (2017 - m)^{\frac{7}{8}} \Rightarrow \ln(ab) = f(m) = \frac{3}{4}\ln m + \frac{7}{8}\ln(2017 - m)$$

Khảo sát hàm số ta có

$$f'(m) = \frac{3}{4m} - \frac{7}{8(2017 - m)} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{12102}{13} \Rightarrow \ln(ab) = f\left(\frac{12102}{13}\right) = \frac{3}{4}\ln \frac{12102}{13} + \frac{7}{8}\ln \frac{14119}{13}$$

$$\text{Do đó } c = 12102, d = 14119 \Rightarrow S = 66561.$$

Câu 57: (Cổ Loa Hà Nội) Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + e^x - e^{-x}$. Hỏi phương trình

$$f(3^x) + f(2x - 1) = 0 \text{ có bao nhiêu nghiệm thực?}$$

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2+1}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(-x) &= \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right) + e^{-x} - e^x = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + e^{-x} - e^x \\ &= -\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + e^x - e^{-x}\right) = -f(x) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(x) \text{ là hàm số lẻ.} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x.$$

Điều kiện: Ta có $\sqrt{x^2+1}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(-x) &= \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right) + e^{-x} - e^x = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + e^{-x} - e^x \\ &= -\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + e^x - e^{-x}\right) = -f(x) \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } f(x) \text{ là hàm số lẻ.} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x} + e^x + e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(3^x) + f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow f(3^x) = -f(2x-1) \Leftrightarrow f(3^x) = f(1-2x) \Leftrightarrow 3^x = 1-2x.$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $h(x) = 1-2x$ nghịch biến trên

$\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ có nhiều nhất một điểm chung. Vì $g(0) = h(0)$

suy ra phương trình $3^x = 1-2x$ có một nghiệm duy nhất $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 58: (PHÂN TÍCH BŁ PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019.) Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$

để phương trình $\frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} = x+a$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 0.

B. 2022.

C. 2014.

D. 2015.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} = x+a \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} - x = a$$

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} \ln(x+5) \neq 0 \\ x+5 > 0 \\ 3^x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x > -5 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt hàm số } f(x) = \frac{1}{\ln(x+5)} + \frac{1}{3^x-1} - x \text{ có TXĐ } D = (-5; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$$

Suy ra $f'(x) = \frac{-1}{(x+5)\ln^2(x+5)} - \frac{3^x \ln 3}{(3^x - 1)^2} - 1 < 0$ nên $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định

Tính: $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \frac{1}{3^{-5} - 1} + 5 = 5 - \frac{243}{242}$; $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Bảng biến thiên

x	-5	-4	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$5 - \frac{243}{242}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Phương trình $f(x) = a$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $a \geq 5 - \frac{243}{242}$

Do $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in (-2019; 2019) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [4; 2018] \end{cases}$. Vậy có $2018 - 4 + 1 = 2015$ giá trị của a .

Câu 59: (Sở Phú Thọ) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y$ và

$$\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = 1 - 2x - 2y \Leftrightarrow e^{3x+5y-10} - e^{x+3y-9} = (x+3y-9) - (3x+5y-10)$$

$$\Leftrightarrow e^{3x+5y-10} + (3x+5y-10) = e^{x+3y-9} + (x+3y-9) \quad (1)$$

Do hàm số $f(t) = e^t + t$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 3x+5y-10 = x+3y-9 \Leftrightarrow 2x+2y=1$$

Khi đó phương trình

$$\log_5^2(3x+2y+4) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5^2(x+5) - (m+6)\log_5(x+5) + m^2 + 9 = 0, \text{ đặt } t = \log_5(x+5), t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } t^2 - (m+6)t + m^2 + 9 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta = (m+6)^2 - 4(m^2 + 9) = -3m^2 + 12m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn là 4 giá trị.

Câu 60: (KHTN Hà Nội Lần 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($|m| < 10$) để phương trình

$$2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \text{ có nghiệm?}$$

A. 9.

B. 10.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn AĐK: $x+2m > 0$

$$\text{Ta có } 2^{x-1} = \log_4(x+2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x+2m) + 2m$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x+2m) \text{ ta có } \begin{cases} 2^x = t + 2m \\ 2^t = x + 2m \end{cases} \Rightarrow 2^x + x = 2^t + t \quad (1)$$

Do hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1) \Leftrightarrow t = x$. Khi đó:

$$2^x = x + 2m \Leftrightarrow 2m = 2^x - x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 2^x - x \Rightarrow g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_2(\ln 2).$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_2(\ln 2)$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$g(-\log_2(\ln 2))$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$2m \geq g(-\log_2(\ln 2)) \Leftrightarrow m \geq \frac{g(-\log_2(\ln 2))}{2} \approx 0,457 \text{ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện}$$

$$\text{vì } x+2m = 2^x > 0)$$

Do m nguyên và $|m| < 10$, nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Câu 61: (Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1) \text{ có đúng 1 nghiệm là}$$

A. 1.

B. 0.

C. -2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1) \Leftrightarrow 2^{x^2+4x+6-(m^2+1)} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x^2 + 4x + 6 \\ b = m^2 + 1 \end{cases}, \text{ ta có } a \geq 2; b \geq 1, \text{ phương trình đã cho trở thành } 2^{a-b} = \log_a b.$$

$$\text{Nếu } a > b \text{ thì } \begin{cases} 2^{a-b} > 1 \\ \log_a b < 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$$

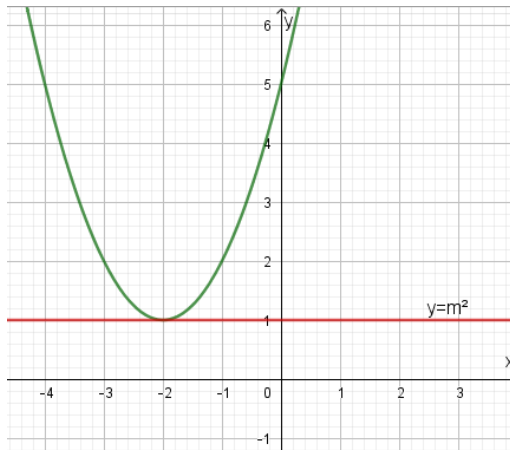
$$\text{Nếu } a < b \text{ thì } \begin{cases} 2^{a-b} < 1 \\ \log_a b > 1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn.}$$

Do đó $a = b$, khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 4x + 6 = m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của parabol $y = x^2 + 4x + 5$ và đường thẳng $y = m^2$

Ta có hình ảnh minh họa sau



Dựa vào đồ thị, phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.
Vậy tổng các giá trị của tham số m là 0.

Câu 62: (KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|) \text{ có đúng ba nghiệm phân biệt là}$$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}.$

Phương trình: $\frac{1}{2} \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + x^2 = 2(x + |x - m|) \quad (*)$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{2x^2 - 4x + 6}{|x - m| + 1} + 2x^2 = 4(x + |x - m|)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) - \log_2 (|x - m| + 1) + 2x^2 - 4x = 4|x - m|$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (|x - m| + 1) + 2 + (4|x - m| + 4)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 - 4x + 6) + (2x^2 - 4x + 6) = \log_2 (4|x - m| + 4) + (4|x - m| + 4) \quad (1)$$

• Xét hàm $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

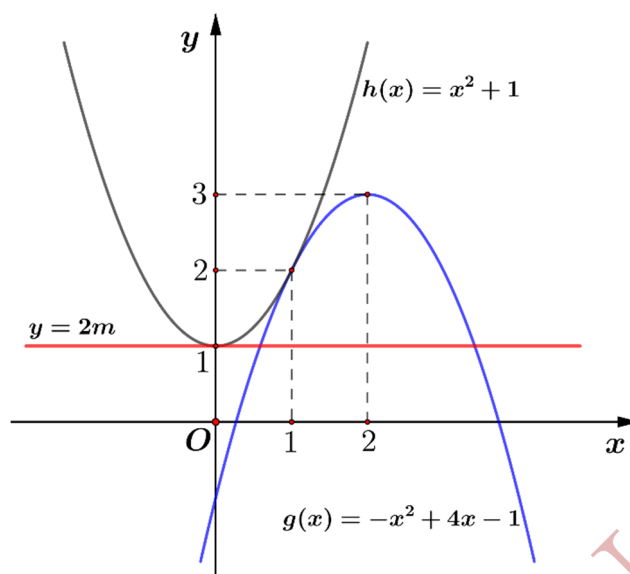
Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(2x^2 - 4x + 6) = f(4|x - m| + 4) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 6 = 4|x - m| + 4$

$$\Leftrightarrow 2|x - m| = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2m = x^2 - 2x + 1 \\ 2x - 2m = -(x^2 - 2x + 1) \end{cases} \quad (\text{do } x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases} \quad (2)$$

• Vẽ đồ thị hai hàm số $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ và $h(x) = x^2 + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy



(Chú ý: Hai đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = h(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(1; 2)$)

Để phương trình (*) có đúng ba nghiệm phân biệt thì (2) phải có đúng ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = 2m$ và hai đồ thị trên có đúng ba điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 1 \\ 2m = 2 \\ 2m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của m bằng 3.

Câu 63: (THPT PHỤ DỤC – THÁI BÌNH) Tìm số giá trị nguyên của m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4} \text{ có nghiệm?}$$

A. 12.

B. 23.

C. 25.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4} > 0$.

$$\log_2(x^2 + m + x\sqrt{x^2 + 4}) = (2m - 9)x - 1 + (1 - 2m)\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x(\sqrt{x^2 + 4} + x) + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} + m\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx}{\sqrt{x^2 + 4} - x}\right) = 2mx - 9x - 1 + \sqrt{x^2 + 4} - 2m\sqrt{x^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x + m\sqrt{x^2 + 4} - mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + 1 = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) + (8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx) = \log_2(\sqrt{x^2 + 4} - x) + (\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$, $t \in (0; +\infty)$.

$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số luôn đồng biến trên TXĐ.

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 8x + 2m\sqrt{x^2 + 4} - 2mx = \sqrt{x^2 + 4} - x$$

$$\Leftrightarrow 2m(\sqrt{x^2 + 4} - x) = (\sqrt{x^2 + 4} - x) - 8x$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - \frac{8x(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 - 2x(\sqrt{x^2 + 4} + x)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + 4} + x^2 = \frac{1 - 2m}{2}.$$

Xét hàm số $g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} + x^2$ với $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x(\sqrt{x^2 + 4} + x) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 1} = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1 \right) \right] = +\infty.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$			$+\infty$
	-2		

Để phương trình có nghiệm thì $\frac{1 - 2m}{2} > -2 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$.

Do m nguyên thuộc $[-20; 20]$ nên số giá trị m là 23.

Câu 64: (Cụm 8 trường chuyên lần 1) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2]$ để phương trình $(x - 1)[\log_3(4x + 1) + \log_5(2x + 1)] = 2x - m$ có đúng hai nghiệm thực là

A. 2.

B. 2022.

C. 1.

D. 2021.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > \frac{-1}{4}$.

Trường hợp 1: $m = 2$, phương trình đã cho trở thành:

$$(x - 1)[\log_3(4x + 1) + \log_5(2x + 1) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \log_3(4x + 1) + \log_5(2x + 1) - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - 2$ là hàm đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Khi đó, nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì x_0 là nghiệm duy nhất.

Ta có: $f(0) = -2$; $f(1) > 0$, suy ra $f(0)f(1) < 0$.

Theo hệ quả của định lý trung gian, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Do vậy: $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $m < 2$, dẫn đến $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1} = 0$$

Xét hàm số $g(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1) - \frac{2x-m}{x-1}$, có tập xác định:

$$D = \left(-\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Đạo hàm: } g'(x) = \frac{4}{(4x+1)\ln 3} + \frac{2}{(2x+1)\ln 5} + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra: phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x_1 \in \left(-\frac{1}{4}; 1\right)$;

$x_2 \in (1; +\infty)$ với mọi $m < 2$.

Vậy với mọi giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2]$ thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt.

Có 2022 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phân tích :

- Đây là bài toán về sự tương giao.

- Tuy nhiên nếu chúng ta cô lập m thì việc khảo sát hàm biến x khá phức tạp. Ý tưởng của tác giả: Cho $m \leq 2$ sử dụng tính chất đơn điệu trên từng khoảng và ứng với từng khoảng tương ứng phương trình có 1 nghiệm

Bài toán tổng quát

$F(x, m) = f(x) + \frac{ax+b}{cx+d} = 0$ với $f'(x) > 0$ và $ad - bc > 0$ (đây cũng là nguồn gốc sáng tạo bài toán)

Cách 2 :

Đặt $f(x) = \log_3(4x+1) + \log_5(2x+1)$

$$\text{TH1 : } m = 2, \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Vì $f(x)$ là hàm số tăng trên $\left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \Rightarrow f(x) = 2$ có nghiệm duy nhất khác 1.

Vậy $m = 2$ thỏa mãn bài toán.

TH2 : $m < 2$, dẫn đến $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Phương trình đã cho trở thành : $f(x) - \frac{2x-m}{x-1} = 0$

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{2x-m}{x-1}$

$g'(x) = f'(x) + \frac{2-m}{(x-1)^2} > 0$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Vậy $m \in [-2019; 2]$ nên ta có 2022 giá trị nguyên m .

Bài toán tương tự:

Câu 65: (PHÂN-TÍCH-BÌNH-LUẬN-THPT-CHUYÊN-HÀ-TĨNH) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3.

B. -2.

C. -3.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$3^{x^2+2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2+2x+3}(2|x-m|+2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{x^2+2x+3}}{3^{2|x-m|+2}} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2+2x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+2x+3) \cdot 3^{x^2+2x+3} = \ln(2|x-m|+2) \cdot 3^{2|x-m|+2}$$

Xét $f(t) = \ln(t) \cdot 3^t, \forall t \geq 2$

$$f'(t) = \frac{1}{t} 3^t + \ln(t) 3^t \ln(3) > 0, \forall t \geq 2$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

$$f(x^2+2x+3) = f(2|x-m|+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+3 = 2|x-m|+2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1-2m & (1) \\ x^2+4x = -1+2m & (2) \end{cases}$$

Điều kiện cần để phương trình có 3 nghiệm là :

Th1 : (1) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-1}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Th2 : (2) có nghiệm kép $\Rightarrow m = \frac{-3}{2}$ thử lại ta thấy thỏa mãn

Th3 : (1) và (2) có nghiệm chung $\Rightarrow x = m$. Thế (1) vào ta có $m = -1$

Ta có $\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} + (-1) = -3$

Bình luận : Bài toán là sự giao thoa giữa phương pháp sử dụng tính đơn điệu hàm số với biện luận nghiệm .

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

II - BẤT PT LÔGARIT

Câu 66: Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}) > 2\log_2 \sqrt{a}$. Tìm phần nguyên của $\log_2(2017a)$.

A. 14

B. 22

C. 16

D. 19

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[6]{a}, t > 0$, từ giả thiết ta có $3\log_3(1+t^3+t^2) > 2\log_2 t^3$

$$\Leftrightarrow f(t) = \log_3(1+t^3+t^2) - \log_2 t^2 > 0$$

$$f'(t) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{3t^2+2t}{t^3+t^2+1} - \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{(3\ln 2 - 2\ln 3)t^3 + (2\ln 2 - 2\ln 3)t^2 - 2\ln 3}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot (t^4 + t^3 + t)}$$

Vì đề xét a nguyên dương nên ta xét $t \geq 1$.

$$\text{Xét } g(t) = (3\ln 2 - 2\ln 3)t^3 + (2\ln 2 - 2\ln 3)t^2 - 2\ln 3$$

$$\text{Ta có } g'(t) = 3\ln \frac{8}{9}t^2 + 2\ln \frac{4}{9}t = t \left(3\ln \frac{8}{9}t + 2\ln \frac{4}{9} \right)$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2\ln \frac{9}{4}}{3\ln \frac{8}{9}} < 0.$$

Lập bảng biến thiên suy ra hàm số $g(t)$ giảm trên khoảng $[1; +\infty)$.

$$\text{Suy ra } g(t) \leq g(1) = 5\ln 2 - 6\ln 3 < 0 \Rightarrow f'(t) < 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn giảm trên khoảng $[1; +\infty)$.

Nên $t = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

$$\text{Suy ra } f(t) > 0 \Leftrightarrow f(t) > f(4) \Leftrightarrow t < 4 \Leftrightarrow \sqrt[6]{a} < 4 \Leftrightarrow a < 4096.$$

Nên số nguyên a lớn nhất thỏa mãn giả thiết bài toán là $a = 4095$.

$$\text{Lúc đó } \log_2(2017a) \approx 22,97764311.$$

Nên phần nguyên của $\log_2(2017a)$ bằng 22.

Chọn B

Câu 67: Biết $x = \frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình $2\log_a(23x-23) > \log_{\sqrt{a}}(x^2+2x+15)$ (*). Tập nghiệm T của bất phương trình (*) là:

A. $T = \left(-\infty; \frac{19}{2}\right)$.

B. $T = \left(1; \frac{17}{2}\right)$.

C. $T = (2; 8)$.

D. $T = (2; 19)$.

Lời giải

$$2\log_a(23x-23) > \log_{\sqrt{a}}(x^2+2x+15) \Leftrightarrow \log_a(23x-23) > \log_a(x^2+2x+15)$$

Nếu $a > 1$ ta có

$$\log_a(23x-23) > \log_a(x^2+2x+15) \Leftrightarrow \begin{cases} 23x-23 > x^2+2x+15 \\ x^2+2x+15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 19$$

Nếu $0 < a < 1$ ta có

$$\log_a(23x-23) > \log_a(x^2+2x+15) \Leftrightarrow \begin{cases} 23x-23 < x^2+2x+15 \\ 23x-23 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > 19 \end{cases}$$

Mà $x = \frac{15}{2}$ là một nghiệm của bất phương trình.

Chọn D**BÌNH LUẬN:**

- Sử dụng tính chất của hàm số lôgarit $y = \log_a b$ đồng biến nếu $a > 1$ nghịch biến nếu $0 < a < 1$

$$- \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Câu 68: (Trần Đại Nghĩa) Bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ khi $m \in (a; b]$. Tính $a.b$?

A. 4.**B.** 6.**C.** 10.**D.** 8.**Lời giải****Chọn C**

Ta có

$$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \end{cases} \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ (7-m)x^2 - 4x + 7-m \geq 0 \end{cases} \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$+) \quad mx^2 + 4x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 = 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

$$+) \quad (7-m)x^2 - 4x + (7-m) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m = 4 = 0 \\ 7-m \geq 0 \\ 7-m > 0 \\ 4-(7-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 5. \\ m \geq 9 \end{cases}$$

Kết hợp lại ta được $2 < m \leq 5$, do đó $m \in (2; 5]$.

Câu 69: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1$?

A. $m \geq 6$.**B.** $m > 6$.**C.** $m \leq 6$.**D.** $m < 6$.**Lời giải**

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2.5^x - 2) \leq m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1) \cdot [1 + \log_2(5^x - 1)] \leq m$$

$$\text{Đặt } t = \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \text{ do } x \geq 1 \Rightarrow t \in [2; +\infty)$$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow t(1+t) \geq m \Leftrightarrow t^2 + t \geq m \Leftrightarrow f(t) \geq m$$

$$\text{Với } f(t) = t^2 + t$$

$$f'(t) = 2t + 1 > 0 \text{ với } t \in [2; +\infty) \text{ nên hàm đồng biến trên } t \in [2; +\infty)$$

Nên $\text{Minf}(t) = f(2) = 6$

Do đó để bất phương trình $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_2(2 \cdot 5^x - 2) \geq m$ có nghiệm với mọi $x \geq 1$ thì:

$$m \leq \text{Minf}(t) \Leftrightarrow m \leq 6$$

Câu 70: (Đặng Thành Nam Đề 5) Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Có tất cả bao nhiêu số nguyên

$$m \text{ thỏa mãn bất phương trình } f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0$$

A. 65.

B. 66.

C. 64.

D. 63.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $m > 1$ (do m là số nguyên và $m > 0, m \neq 1$), suy ra $\log m > 0$.

Hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x$, nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$f(\log m) + f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \leq 0 \Leftrightarrow f(\log m) \leq -f\left(\log_m \frac{1}{2019}\right) \Leftrightarrow f(\log m) \leq f\left(-\log_m \frac{1}{2019}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log m \leq -\log_m \frac{1}{2019} \Leftrightarrow \log m \leq \frac{\log 2019}{\log m} \Leftrightarrow m \leq 10^{\sqrt{\log 2019}} \approx 65,77.$$

Suy ra $m \in \{2; 3; \dots; 65\}$. Vậy có tất cả 64 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 71: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình

$$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m), \forall x \in \mathbb{R}.$$

A. $m \in (2; 5]$.

B. $m \in (-2; 5]$.

C. $m \in [2; 5)$.

D. $m \in [-2; 5)$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương $7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2 - 4x + 7-m \geq 0 & (2) \\ mx^2 + 4x + m > 0 & (3) \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

☐ $m = 7$: (2) không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$

☐ $m = 0$: (3) không thỏa $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(1) \text{ thỏa } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-m > 0 \\ \Delta'_2 = 4 - (7-m)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ \Delta'_3 = 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5.$$

Câu 72: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2; 3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x^2 + 1) > \log_5(x^2 + 4x + m) - 1$ (1).

A. $m \in [-12; 13]$.

B. $m \in [12; 13]$.

C. $m \in [-13; 12]$.

D. $m \in [-13; -12]$.

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > \frac{x^2 + 4x + m}{5} \\ x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 4x = f(x) \\ m < 4x^2 - 4x + 5 = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Hệ trên thỏa mãn } \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{2 < x < 3} f(x) = -12 \text{ khi } x = 2 \\ m \leq \min_{2 < x < 3} g(x) = 13 \text{ khi } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow -12 \leq m \leq 13.$$

Câu 73: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm.

A. $m > 2\sqrt{3}$.

B. $m \geq 2\sqrt{3}$.

C. $m \geq 12\log_3 5$.

D. $2 \leq m \leq 12\log_3 5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x\sqrt{x} + \sqrt{x+12} \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \frac{1}{\log_{(5-\sqrt{4-x})} 3} \leq m$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \log_3 (5 - \sqrt{4-x}) \leq m$$

Đặt $g(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \log_3 (5 - \sqrt{4-x})$.

Yêu cầu bài toán trở thành $m \geq \max g(x)$

Điều kiện

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+12 \geq 0 \\ 5-\sqrt{4-x} > 0 \\ 5-\sqrt{4-x} \neq 1 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -21 \\ x \neq -12 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4.$$

$$g'(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} \right) \cdot \log_3 (5 - \sqrt{4-x}) + (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \frac{1}{(5 - \sqrt{4-x}) \cdot \ln 3}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} \right) \cdot \log_3 (5 - \sqrt{4-x}) + (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x} \cdot (5 - \sqrt{4-x}) \cdot \ln 3}$$

$$\Rightarrow g'(x) > 0 \quad \forall x \in [0; 4]$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên } [0; 4].$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0; 4]} g(x) = g(4) = (4\sqrt{4} + \sqrt{4+12}) \cdot \log_3 (5 - \sqrt{4-4}).$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0; 4]} g(x) = 12\log_3 5.$$

$$\Rightarrow m \geq 12\log_3 5.$$

Câu 74: (Sở Bắc Ninh) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$ là

$$[-\sqrt{a}; -\sqrt{b}].$$

Khi đó a, b bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } x\sqrt{x^2+2} - x^2 = x(\sqrt{x^2+2} - x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x}.$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x\sqrt{x^2+2} + 4 - x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2+2} - x) + 4) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2} + x} + 4\right) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x + 2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2} + x} + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2+2} + x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Điều kiện: } 3x + 2\sqrt{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2 + 8 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$$

Với điều kiện (*), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(3x + 2\sqrt{x^2+2}) + 3x + 2\sqrt{x^2+2} \leq \log_2(\sqrt{x^2+2} + x) + \sqrt{x^2+2} + x, (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_2 t + t \text{ với } t > 0. \text{ Có } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

$$\text{Hàm số } f(t) = \log_2 t + t \text{ đồng biến trên } (0; +\infty), (3x + 2\sqrt{x^2+2}) \in (0; +\infty) \text{ và}$$

$$(\sqrt{x^2+2} + x) \in (0; +\infty)$$

$$\text{Nên } (2) \Leftrightarrow f(3x + 2\sqrt{x^2+2}) \leq f(\sqrt{x^2+2} + x)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{x^2+2} \leq \sqrt{x^2+2} + x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2 + 2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là } \left[-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \text{ hay } a.b = \frac{16}{15}.$$

Chọn đáp án C.

Câu 75: (GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HÙNG-NAM-ĐÌNH) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(\ln^4 x - 16) + 3m(\ln^2 x - 4) - 14(\ln x - 2) \geq 0$ đúng với mọi $x \in (0; +\infty)$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng:

A. $-\frac{3}{8}$.

B. -2 .

C. $-\frac{7}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt $t = \ln x, t \in \mathbb{R}$ ta được:

$$f(t) = m^2(t^4 - 16) + 3m(t^2 - 4) - 14(t - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)[m^2(t^3 + 2t^2 + 4t + 8) + 3m(t + 2) - 14] \geq 0 \Leftrightarrow (t - 2)g(t) \geq 0$$

$$\text{Ta có bất phương trình đã cho nghiệm đúng } \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nếu $t = 2$ không phải là nghiệm của $g(t)$ thì $f(t)$ sẽ đổi dấu khi t đi qua $t = 2$. Do đó điều kiện cần để $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ là $t = 2$ phải là nghiệm của $g(t) = 0$

$$\Rightarrow g(2) = 0 \Leftrightarrow 32m^2 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{8} \end{cases}.$$

Thử lại:

Với $m = \frac{1}{2}$ thì $f(t) = \frac{1}{4}(t-2)^2(t^2 + 4t + 18) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Với $m = -\frac{7}{8}$ thì $f(t) = \frac{1}{64}(t-2)^2(49t^2 + 196t + 420) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = -\frac{7}{8}$ thỏa mãn.

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{7}{8} \right\}$. Nên tổng các phần tử của S là $\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{8}$.

Cách 2:

Đặt $t = \ln x, t \in \mathbb{R}$ ta được

$$f(t) = m^2(t^4 - 16) + 3m(t^2 - 4) - 14(t - 2) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

+ Điều kiện cần: ta có $f(2) = 0$ nên $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(t) \geq f(2), \forall t \in \mathbb{R}$, hay $t = 2$ là điểm cực trị của hàm số, suy ra $f'(2) = 0$

$$f'(t) = 4m^2.t^3 + 6m.t - 14 \Rightarrow f'(2) = 32m^2 + 12m - 14$$

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32m^2 + 12m - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = -\frac{7}{8} \end{cases}.$$

+ Điều kiện đủ:

Với $m = \frac{1}{2}$ thì $f(t) = \frac{1}{4}(t-2)^2(t^2 + 4t + 18) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Với $m = -\frac{7}{8}$ thì $f(t) = \frac{1}{64}(t-2)^2(49t^2 + 196t + 420) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $m = -\frac{7}{8}$ thỏa mãn.

Vậy $S = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{7}{8} \right\}$. Nên tổng các phần tử của S là $\frac{1}{2} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{8}$.

Câu 76: (Yên Phong 1) Cho bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 5$. Biết đoạn $[a; b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình thỏa mãn với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tổng $a + b$?

A. $a + b = 4$.

B. $a + b = 2$.

C. $a + b = 0$.

D. $a + b = 6$.

Lời giải

Chọn D

Giải điều kiện: $\log_4(x^2 - 2x + m) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -x^2 + 2x + 1$ thỏa mãn $\forall x \in [0; 2]$.

Khi đó $m \geq \max_{[0; 2]} f(x)$ với $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$

$$f'(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		1	2	1	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \geq \max_{[0;2]} f(x) \Rightarrow m \geq 2$. (1)

Khi đó xét bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} \leq 5$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x^2 - 2x + m) + 4\sqrt{\frac{1}{2} \log_2 (x^2 - 2x + m)} \leq 5 \quad (\text{vì } m \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x + m \geq x^2 - 2x + 2 > 0)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{1}{2} \log_2 (x^2 - 2x + m)}$, $t \geq 0$

Bất phương trình tương đương: $t^2 + 4t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-5; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Do đó $0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x^2 - 2x + m) \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -x^2 + 2x + 4$ với mọi $x \in [0; 2]$.

$$\Rightarrow m \leq \min_{[0;2]} f(x) \text{ với } f(x) = -x^2 + 2x + 4$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ với $x \in [0; 2]$.

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		4	5	4	

Dựa vào bảng biến thiên: $m \leq \min_{[0;2]} f(x) \Rightarrow m \leq 4$. (2)

Từ (1), (2) ta có $m \in [2; 4]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $a + b = 6$.

Cách 2.

Đặt $t = -x^2 + 2x$, $x \in [0; 2]$.

$$t' = -2x + 2, t' = 0 \Leftrightarrow x = 1. t(1) = 1, t(0) = t(2) = 0 \Rightarrow t \in [0; 1].$$

Bài toán trở thành định m để $\log_2 \sqrt{m-t} + 4\sqrt{\log_4 (m-t)} \leq 5$ (*) đúng với $\forall t \in [0; 1]$.

Với điều kiện $m-t \geq 0$ thì BPT (*) tương đương $\log_2 \sqrt{m-t} + 4\sqrt{\log_2 \sqrt{m-t}} \leq 5$

$$\Leftrightarrow -5 \leq \sqrt{\log_2 \sqrt{m-t}} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2 \sqrt{m-t} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{m-t} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq m-t \leq 4.$$

$$\text{YCBT } t+1 \leq m \leq t+4, \forall t \in [0; 1] \Leftrightarrow \max_{t \in [0;1]} (t+1) \leq m \leq \min_{t \in [0;1]} (t+4) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4.$$

Câu 77: (THIT số 3) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình

$$\left| \frac{3\ln^2 x + 2\ln x + 12}{\ln^2 x - (m+1)\ln x + 4} \right| \geq 2 \text{ nghiệm đúng với mọi } x > 0.$$

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \ln x$, $t \in \mathbb{R}$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left| \frac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4} \right| \geq 2$ (1) nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Để (1) nghiệm đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$, điều kiện cần là $t^2 - (m+1)t + 4 = 0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \Delta_t < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 3$ (*).

Điều kiện đủ: Do $3t^2 + 2t + 12 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ và với m thỏa mãn điều kiện (*), ta thấy $t^2 - (m+1)t + 4 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên (1) tương đương với

$$\frac{3t^2 + 2t + 12}{t^2 - (m+1)t + 4} \geq 2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t^2 + 2(m+2)t + 4 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện (*) và điều kiện m nguyên, ta được các giá trị m cần tìm là $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 78: Hệ bất phương trình $\begin{cases} \ln^2 x - m \ln x + m + 4 \leq 0 \\ \frac{x-3}{x^2} > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi

A. $m < -3$ hoặc $m \geq 6$.

B. $m \leq -3$.

C. $m < -3$.

D. $m \geq 6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\frac{x-3}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$\ln^2 x - m \ln x + m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m(\ln x - 1) \leq \ln^2 x + 3$$

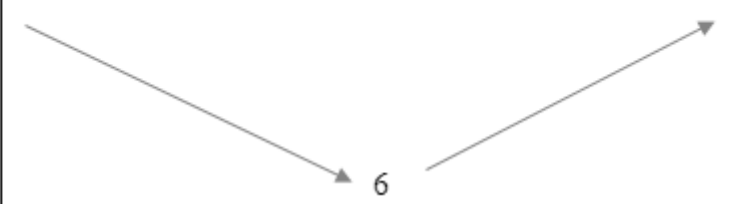
$$m \leq \frac{\ln^2 x + 3}{\ln x - 1}$$

$$\text{Đặt } t = \ln x; t \geq \ln 3$$

$$\text{Ta xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1} = t + 1 + \frac{4}{t - 1}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{4}{(t-1)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(t-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

x	$\ln 3$	3	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

Vậy hệ có nghiệm khi $m \geq 6$.

- Câu 79: (Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng
- A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định:

$$\frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 > 0 \text{ (vì } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x). (*)$$

Khi đó:

$$\log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} \geq 2x^2 + 4x + 5 - 2m \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{2x^2 + x + m + 1}{3(x^2 + x + 1)} \geq 2x^2 + 4x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) - \log_3 3(x^2 + x + 1) \geq -2(2x^2 + x + m + 1) + 6(x^2 + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x^2 + x + m + 1) + 2(2x^2 + x + m + 1) \geq \log_3 3(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1). (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + 2t$ với $t > 0$.Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 2 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó (1) tương đương với

$$f(2x^2 + x + m + 1) \geq f(3(x^2 + x + 1)) \Leftrightarrow 2x^2 + x + m + 1 \geq 3(x^2 + x + 1) \text{ (thỏa mãn (*))}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 \leq m.$$

BPT $x^2 + 2x + 2 \leq m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min g(x)$ với $g(x) = x^2 + 2x + 2$.Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + 2$ với $x \in \mathbb{R}$ có $g'(x) = 2x + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min g(x) = 1$. Do đó $m \geq 1$.Vì $m \in [-10;10]$ nên tập $S = \{1; 2; \dots; 10\}$. Vậy S có 10 phần tử.

- Câu 80:** Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2} (2x+y) \geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ bằng:

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{9}{8}$. D. 9.

Chọn B

$$\text{Bất PT} \Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 > 1 \\ 2x+y \geq x^2+2y^2 \end{cases} \quad (I), \quad \begin{cases} 0 < x^2+2y^2 < 1 \\ 0 < 2x+y \leq x^2+2y^2 \end{cases} \quad (II).$$

Xét $T = 2x + y$

TH1: $(x; y)$ thỏa mãn (II) khi đó $0 < T = 2x + y \leq x^2 + 2y^2 < 1$

TH2: $(x; y)$ thỏa mãn (I) $x^2 + 2y^2 \leq 2x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \leq \frac{9}{8}$. Khi đó

$$2x + y = 2(x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \frac{9}{4} \leq \sqrt{(2^2 + \frac{1}{2}) \left[(x-1)^2 + (\sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}})^2 \right]} + \frac{9}{4} \leq \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{8}} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \max T = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x; y) = (2; \frac{1}{2})$$

BÌNH LUẬN:

- Sử dụng tính chất của hàm số lôgarit $y = \log_a b$ đồng biến nếu $a > 1$ nghịch biến nếu $0 < a < 1$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Sử dụng bất đẳng thức BCS cho hai bộ số $(a; b), (x; y)$ thì $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} > 0$

Câu 81: (Chuyên Vinh Lần 3) Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A. $S = \{-1; 1\}$.

B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.

C. $S = \{-5; 5\}$.

D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq m^2$ là một hình tròn (C_1) tâm $I(2; 2)$,

bán kính $R_1 = |m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2; 2)$ với $m = 0$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ là một đường tròn (C_2) tâm $J(-1; 2)$, bán kính $R_2 = 2$.

TH1: Với $m = 0$ ta có: $I(2; 2) \notin (C_2)$ suy ra $m = 0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

TH2: Với $m \neq 0$.

Để hệ $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thì hình tròn (C_1) và

đường tròn (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + 0^2} = |m| + 2 \Leftrightarrow |m| = 1$

$\Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 82: (GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2) Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn

$$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1 \text{ và } x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$$

A. $\sqrt{10} - 2$ và $\sqrt{10} + 2$.

B. $\sqrt{10} - 2$.

C. $(\sqrt{10} - 2)^2$.

D. $(\sqrt{10} - 2)^2$ và $(\sqrt{10} + 2)^2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \leq 4x + 4y - 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 2, \quad (1)$$

Tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn (1) là hình tròn tâm $I(2; 2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$ kể cả các điểm trên đường tròn đó.

Phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m \quad (2)$

Với $m \leq 0$ thì (1) và (2) không có điểm chung.

Với $m > 0$ thì tập hợp các điểm $(x; y)$ thỏa mãn (2) là đường tròn tâm $I'(-1; 1)$, bán kính $R' = \sqrt{m}$.

Để tồn tại duy nhất cặp $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời cả (1) và (2) thì hai đường tròn

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ và $(x+1)^2 + (y-1)^2 = m$ có một điểm chung suy ra chúng phải tiếp xúc trong hoặc tiếp xúc ngoài với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} II' = R + R' \\ II' = |R - R'| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10} = \sqrt{m} + \sqrt{2} \\ \sqrt{10} = |\sqrt{m} - \sqrt{2}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m} = \sqrt{10} - \sqrt{2} \\ \sqrt{m} = \sqrt{10} + \sqrt{2} \\ \sqrt{m} = -\sqrt{10} + \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2 \\ m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 \end{cases}$$

Câu 83: Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y$

A. $P = 6$.

B. $P = 2\sqrt{2} + 3$.

C. $P = 2 + 3\sqrt{2}$.

D. $P = \sqrt{17} + \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y$. Ta xét:

Nếu $0 < x \leq 1$ thì $y \geq xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow 0 \geq x^2$ mâu thuẫn.

Nếu $x > 1$ thì $xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 \Leftrightarrow y \geq \frac{x^2}{x-1}$. Vậy $P = x + y \geq x + \frac{x^2}{x-1}$.

Ta có $f(x) = x + \frac{x^2}{x-1}$ xét trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min_{(1; +\infty)} f(x) = f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 3.$$

Câu 84: Cho 2 số dương a và b thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của $S = a + b$ là

A. $\min S = 12$.

B. $\min S = 14$.

C. $\min S = 8$.

D. $\min S = 16$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6 \Leftrightarrow \log_2(a+1)(b+1) \geq 6 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) \geq 64$

$$\text{Mà } 64 \leq (a+1)(b+1) \leq \left(\frac{a+b+2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 252 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 14 \\ a+b \leq -18(L) \end{cases}$$

Nên $\min S = 14$.

Câu 85: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2x - y$.

A. $P_{\min} = 4$. B. $P_{\min} = -4$. C. $P_{\min} = 2\sqrt{3}$. D. $P_{\min} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x-y > 0 \\ x+y > 0 \end{cases}$

Từ điều kiện ta có: $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ta có: $\log_4(x+y) + \log_4(x-y) \geq 1 \Leftrightarrow \log_4(x^2 - y^2) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \geq 4$

Vì $x^2 - y^2 \geq 4$ và $x > 0$ ta có: $x \geq \sqrt{y^2 + 4}$

$P = 2x - y = 2\sqrt{y^2 + 4} - y$

Xét: $f(y) = 2\sqrt{y^2 + 4} - y \Rightarrow f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{y^2 + 4}} - 1 \Rightarrow f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$+\infty$
y'		0	
y		$2\sqrt{3}$	

Từ bảng biến thiên ta có: $P_{\min} = 2\sqrt{3}$

Câu 86: (Sở Nam Định) Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\log_{2019}(x+y) \leq 0$ và $x+y + \sqrt{2xy+m} \geq 1$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} 0 < x+y \leq 1 & (1) \\ x+y + \sqrt{2xy+m} \geq 1 & (2) \end{cases}$

Điều kiện cần.

Giả sử tồn tại cặp số $(x_0; y_0)$ thỏa mãn điều kiện (1) và (2), thì cặp số $(y_0; x_0)$ cũng thỏa điều kiện.

Do đó, để tồn tại cặp số $(x_0; y_0)$ duy nhất suy ra $x_0 = y_0$. Ta có

$$\begin{cases} 0 < x_0 \leq \frac{1}{2} \\ 2x_0 + \sqrt{2x_0^2 + m} \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Do (3), ta có

$$(4) \Leftrightarrow \sqrt{2x_0^2 + m} \geq 1 - 2x_0 \Leftrightarrow 2x_0^2 + m \geq 1 - 4x_0 + 4x_0^2 \Leftrightarrow m \geq 2x_0^2 - 4x_0 + 1 \quad (5).$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, với bảng biến thiên như sau

x	0	$\frac{1}{2}$
y'		—
y	1	$-\frac{1}{2}$

Để bất phương trình (5) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ.

Với $m = -\frac{1}{2}$, hệ (1), (2) trở thành

$$\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ x + y + \sqrt{2xy - \frac{1}{2}} \geq 1 \end{cases} \quad (6) \quad (7)$$

Do điều kiện (6), ta có

$$\begin{aligned} (7) \quad &\Leftrightarrow \sqrt{2xy - \frac{1}{2}} \geq 1 - (x + y) \\ &\Leftrightarrow 2xy - \frac{1}{2} \geq 1 - 2(x + y) + x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + \frac{3}{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - (x + y)) \leq 0. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 87: (Chuyên Vinh Lần 3) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P_{\min} = 9$. **B.** $P_{\min} = 8$. **C.** $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$. **D.** $P_{\min} = \frac{17}{2}$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có:

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow xy \geq x + y^2$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{y^2}{y-1} \text{ (Vì } x, y > 0 \text{)} \\ y > 1 \end{cases}$$

Ta có: $P = x + 3y \geq \frac{y^2}{y-1} + 3y = 4y + 1 + \frac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 4y + 1 + \frac{1}{y-1}; y > 1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 4 - \frac{1}{(y-1)^2}$.

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

y	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$		0	+
$f(y)$	$+\infty$	9	$+\infty$

Câu 88: (Chuyên Vinh Lần 3) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2x + y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $T_{\min} \in (7; 8)$.

B. $T_{\min} \in (6; 7)$.

C. $T_{\min} \in (5; 6)$.

D. $T_{\min} \in (8; 9)$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có:

$$\log_{2019} x + \log_{2019} y \geq \log_{2019} (x^2 + y) \Leftrightarrow \log_{2019} xy \geq \log_{2019} (x^2 + y) \Leftrightarrow xy \geq x^2 + y$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{x^2}{x-1} \\ x > 1 \end{cases}$$

Ta có: $T = 2x + y \geq 2x + \frac{x^2}{x-1} = 3x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

Xét hàm số: $f(x) = 3x + 1 + \frac{1}{x-1}; x > 1$.

Đạo hàm: $f'(x) = 3 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (do } x > 1 \text{)}.$$

Bảng biến thiên.

x	1	$1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$4 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$

Do đó: $T_{\min} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 89: (Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đắk Lắk) Cho các số dương x, y thỏa mãn

$$\log_5 \left(\frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x + 2y \leq 4. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } A = 6x + 2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} \text{ bằng}$$

A. $\frac{31\sqrt{6}}{4}$.

B. $11\sqrt{3}$.

C. $\frac{27\sqrt{2}}{2}$.

D. 19.

Lời giải

Chọn D

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \frac{x+y-1}{2x+3y} > 0 \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x+y > 1$$

Ta có:

$$\log_5 \left(\frac{x+y-1}{2x+3y} \right) + 3x + 2y \leq 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_5(x+y-1) + 1) + 5(x+y-1) \leq \log_5(2x+3y) + 2x+3y$$

$$\Leftrightarrow \log_5[5(x+y-1)] + 5(x+y-1) \leq \log_5(2x+3y) + 2x+3y (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_5(t) + t$ trên $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty).$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t) = \log_5(t) + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow 5(x+y-1) \leq 2x+3y$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y \leq 5$$

Mặt khác, ta có:

$$A = 6x + 2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y}$$

$$= \left(9x + \frac{4}{x} \right) + \left(4y + \frac{9}{y} \right) - (3x + 2y) \geq 2.6 + 2.6 - 5 = 19$$

$$\Rightarrow \text{GTNN của } A = 19, \text{ dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = \frac{4}{x} \\ 4y = \frac{9}{y} \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} (N)$$

Câu 90: (THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019) Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2\log_3 \sqrt{x} + x(x+y) \geq \log_{\sqrt{3}} \sqrt{8-y} + 8x$. Biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{18}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = a, y = b$. Tính $S = 3a + 2b$.

A. $S = 19$.B. $S = 20$.C. $S = 18$.D. $S = 17$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2\log_3 \sqrt{x} + x(x+y) \geq \log_{\sqrt{3}} \sqrt{8-y} + 8x$ (1)Điều kiện: $x > 0; 0 < y < 8$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x + x(x+y) \geq \log_3 (8-y) + 8x \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{x}{8-y} \right) + x(x+y-8) \geq 0$$

$$\text{Nếu } x+y < 8 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 8-y \\ x+y-8 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{8-y} < 1 \\ x(x+y-8) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \left(\frac{x}{8-y} \right) < 0 \\ x(x+y-8) < 0 \end{cases} \Rightarrow VT < 0 (!)$$

Vậy $x+y \geq 8$.

$$\text{Ta có: } P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{18}{y} = \left(\frac{3}{2}x + \frac{6}{x} \right) + \left(\frac{1}{2}y + \frac{18}{y} \right) + \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y \right) \geq 6 + 6 + \frac{3}{2}.8 = 24$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{3}{2}x = \frac{6}{x} \\ \frac{1}{2}y = \frac{18}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (do } x, y > 0).$$

Vậy $S = 3.2 + 2.6 = 18$.

I - BÀI TOÁN LÃI SUẤT – TRẢ GÓP

A – LÝ THUYẾT CHUNG

1. Lãi đơn

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra.

Công thức tính lãi đơn: $V_n = V_0(1 + r.n)$

Trong đó:

V_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

V_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

2. Lãi kép

Là số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a. Lãi kép, gửi một lần: $T_n = T_0(1 + r)^n$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

b. Lãi kép liên tục: $T_n = T_0.e^{nr}$

Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

c. Lãi kép, gửi định kỳ.

● Trường hợp gửi tiền định kì cuối tháng.

Bài toán 1: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là:

$$T_n = \frac{m}{r} \left[(1 + r)^n - 1 \right]$$

Chứng minh

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	Chưa gửi	m
2	m	$m(1+r) + m$
3	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$
...	...	...
n		$m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m$

Vậy sau tháng n ta được số tiền $T_n = m(1+r)^{n-1} + \dots + m(1+r) + m$

$$= m[(1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) + 1],$$

Ta thấy trong ngoặc là tổng n số hạng của cấp số nhân có $u_1 = 1$, $u_n = (1+r)^{n-1}$, $q = 1+r$

Ta biết rằng: $S_n = u_1 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ nên $T_n = \frac{m}{r} [(1+r)^n - 1]$

Bài toán 2: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}$

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} [(1+r)^n - 1]$, mà đề cho số tiền đó chính là A nên

$$A = \frac{m}{r} [(1+r)^n - 1] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1}.$$

Bài toán 3: Cứ cuối mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$.

Chứng minh:

Áp dụng bài toán 1 ta có số tiền thu được là $T_n = \frac{m}{r} [(1+r)^n - 1]$, mà đề cho số tiền đó chính là A nên

$$A = \frac{m}{r} [(1+r)^n - 1] \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r)^n - 1} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m} + 1 \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{Ar}{m} + 1 \right)$$

Như vậy trong trường hợp một này ta cần nắm vững công thức Bài toán 1 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở bài toán 2, Bài toán 3.

● **Trường hợp gửi tiền định kì đầu tháng.**

Bài toán 4: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	m	$m(1+r)$
2	$m(1+r) + m$	$m(1+r)^2 + m(1+r)$
3	$m(1+r)^2 + m(1+r) + m$	$m(1+r)^3 + m(1+r)^2 + m(1+r)$
...	...	...
n	...	$m(1+r)^n + \dots + m(1+r)$

Vậy sau tháng n ta được số tiền:

$$T_n = m(1+r)^n + \dots + m(1+r) = m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] = m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bài toán 5: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tiền gửi mỗi tháng m là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền cần gửi mỗi tháng là: $m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 4. Ta có số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$, mà đề cho số tiền đó là A nên

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]}.$$

Bài toán 6: Cứ đầu mỗi tháng gửi vào ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Sau n (tháng hoặc năm) số tiền thu được là A triệu. Hỏi số tháng hoặc năm n là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tháng thu được đề bài cho là: $n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right].$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 4. Ta có: số tiền thu được là: $T_n = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r)$, mà đề cho số tiền đó là A nên

$$A = \frac{m}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right] (1+r) \Leftrightarrow m = \frac{Ar}{(1+r) \left[(1+r)^n - 1 \right]} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{Ar}{m(1+r)} + 1.$$

$$\Rightarrow n = \log_{1+r} \left[\frac{Ar}{m(1+r)} + 1 \right].$$

Như vậy trong trường hợp này ta cần nắm vững công thức bài toán 4 từ đó có thể dễ dàng biến đổi ra các công thức ở bài toán 5, bài toán 6.

● Trường hợp vay nợ và trả tiền định kì đầu tháng.

Bài toán 7: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Chứng minh.

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	$A - m$	$(A - m)(1 + r) = A(1 + r) - m(1 + r)$
2	$A(1 + r) - m(1 + r) - m$	$A(1 + r)^2 - m(1 + r)^2 - m(1 + r)$
3	$A(1 + r)^2 - m(1 + r)^2 - m(1 + r) - m$	$A(1 + r)^3 - m(1 + r)^3 - m(1 + r)^2 - m(1 + r)$
...	...	...
n	...	$A(1 + r)^n - m(1 + r)^n - \dots - m(1 + r)^2 - m(1 + r)$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$\begin{aligned} T_n &= A(1+r)^n - m(1+r)^n - \dots - m(1+r)^2 - m(1+r) \\ &= A(1+r)^n - m \left[(1+r)^n + \dots + (1+r) \right] \\ &= A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

Trường hợp vay nợ và trả định kì cuối tháng.

Bài toán 8: Vay ngân hàng A triệu đồng. Cứ đầu mỗi tháng (năm) trả ngân hàng m triệu, lãi suất kép $r\%$ (tháng hoặc năm). Hỏi sau n (tháng hoặc năm) số tiền còn nợ là bao nhiêu?

Người ta chứng minh được số tiền còn nợ là: $T_n = A(1+r)^n - m(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Chứng minh

Ta xây dựng bảng sau:

Tháng	Đầu tháng	Cuối tháng
1	A	$A(1 + r) - m$

2	$A(1+r) - m$	$A(1+r)^2 - m(1+r) - m$
3	$A(1+r)^2 - m(1+r) - m$	$A(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r) - m$
...	...	...
n	...	$A(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - \dots - m(1+r) - m$

Vậy sau tháng n ta còn nợ số tiền:

$$\begin{aligned}
 T_n &= A(1+r)^n - m(1+r)^{n-1} - \dots - m(1+r) - m \\
 &= A(1+r)^n - m \left[(1+r)^{n-1} + \dots + (1+r) + 1 \right] \\
 &= A(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}
 \end{aligned}$$

Sau đây cùng tìm hiểu cách áp dụng các lý thuyết vào các bài toán tính tiền lãi, tiền nợ phải trả như thế nào?

B - BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

A. 172 triệu.

B. 72 triệu.

C. 167,3042 triệu.

D. 104,907 triệu.

Lời giải**Chọn C**

Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là $6 \cdot 12 = 72$ triệu đồng

Sau một năm giá trị xe công nông còn $100(1 - 0,4\%)^{12} \approx 95,3042$ triệu đồng

Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là 167,3042 triệu đồng

Câu 2: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015–2021 (6 năm) là 10,6% so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%).

A. 1,13%.

B. 1,72%.

C. 2,02%.

D. 1,85%.

Lời giải**Chọn D**

Gọi x ($x \in \mathbb{N}^*$) là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2015.

Gọi r là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là: $x \cdot r$.

Số người còn lại sau năm thứ nhất là: $x - x \cdot r = x(1 - r)$.

Tương tự, số người mất việc sau năm thứ hai là: $x(1 - r)r$.

Số người còn lại sau năm thứ hai là: $x(1 - r) - x(1 - r) \cdot r = x(1 - r)^2$.

$\Rightarrow$ Số người mất việc sau năm thứ sáu là: $x(1 - r)^5 \cdot r$.

Tổng số người mất việc là: $x \cdot r + x \cdot (1 - r) \cdot r + x \cdot (1 - r)^2 \cdot r + \dots + x \cdot (1 - r)^5 \cdot r = 10,6\%x$

$\Leftrightarrow r + (1 - r)r + (1 - r)^2 r + \dots + (1 - r)^5 r = 0,106$

$\Leftrightarrow \frac{r[1 - (1 - r)^6]}{1 - (1 - r)} = 0,106 \Rightarrow r \approx 0,0185$.

Vì tỉ lệ giảm hàng năm bằng với tỉ lệ tuyển dụng mới nên tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là 1,85%.

Câu 3: Bác B gửi tiết kiệm số tiền ban đầu là 50 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,72% tháng. Sau một năm bác B rút cả vốn lẫn lãi và gửi theo kỳ hạn 6 tháng với lãi suất 0,78% tháng. Sau khi gửi đúng một kỳ hạn 6 tháng do gia đình có việc bác gửi thêm 3 tháng nữa thì phải rút tiền trước hạn cả gốc lẫn lãi được số tiền là 57.694.945,55 đồng (chưa làm tròn). Biết rằng khi rút tiền trước hạn lãi suất được tính theo lãi suất không kỳ hạn, tức tính theo hàng tháng. Trong số 3 tháng bác gửi thêm lãi suất là

- A. 0,55% . B. 0,3% . C. 0,4% . D. 0,5% .

Lời giải

Chọn C.

Số tiền bác B rút ra sau năm đầu: $T_1 = 50.000.000 \cdot (1 + 0,0072 \cdot 3)^4$

Số tiền bác B rút ra sau sáu tháng tiếp theo: $T_2 = T_1 \cdot (1 + 0,0078 \cdot 6)$

Số tiền bác B rút ra sau ba tháng tiếp theo:

$$T_3 = T_2 \cdot (1 + r)^3 = 57.694.945,55 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{57.694.945,55}{T_2}} - 1 \approx 0,004 = 0,4\%.$$

Câu 4: Một người muốn có 2 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách mỗi năm gửi vào ngân hàng số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 8% một năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi), số tiền được làm tròn đến đơn vị nghìn đồng?

- A. 252.436.000. B. 272.631.000. C. 252.435.000. D. 272.630.000.

Lời giải

Chọn A

Gọi T_n là số tiền vốn lẫn lãi sau n tháng, a là số tiền hàng tháng gửi vào ngân hàng và r (%) là lãi suất kép. Ta có

$$T_1 = a \cdot (1 + r),$$

$$T_2 = (a + T_1)(1 + r) = (a + a(r + 1))(1 + r) = a(1 + r) + a(1 + r)^2$$

$$T_3 = (a + T_2)(1 + r) = a(1 + r) + a(1 + r)^2 + a(1 + r)^3$$

....

$$T_6 = a \left((1 + r) + (1 + r)^2 + \dots + (1 + r)^6 \right) = a \cdot S_6$$

S_6 là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với dãy $(u_n) = 1 + r = 1,08; q = 1,08$.

$$S_6 = \frac{u_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{1,08(1 - 1,08^6)}{1 - 1,08}$$

$$\text{Theo đề ra } a = \frac{T_6}{S_6} = \frac{2.10^9}{\frac{1,08(1 - 1,08^6)}{1 - 1,08}} = 252435900,4. \text{ Quy tròn đến phần nghìn}$$

Câu 5: Anh Nam vay tiền ngân hàng 1 tỷ đồng theo phương thức trả góp (chịu lãi số tiền chưa trả) với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh Nam trả 30 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh Nam trả hết nợ?

- A. 35 tháng. B. 36 tháng. C. 37 tháng. D. 38 tháng.

Lời giải

Chọn C

Gọi a là số tiền vay, r là lãi, m là số tiền hàng tháng trả.

Số tiền nợ sau tháng thứ nhất là: $N_1 = a(1+r) - m$.

Số tiền nợ sau tháng thứ hai là:
$$N_2 = [a(1+r) - m] + [a(1+r) - m]r - m$$
$$= a(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$$

....

Số tiền nợ sau n tháng là: $N_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Sau n tháng anh Nam trả hết nợ: $N_n = a(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$.

$$\Leftrightarrow 1000(1+0,005)^n - 30 \frac{(1+0,005)^n - 1}{0,0005} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 36,55$$

Vậy 37 tháng thì anh Nam trả hết nợ.

Câu 6: Bạn Nam là sinh viên của một trường Đại học, muốn vay tiền ngân hàng với lãi suất ưu đãi trang trải kinh phí học tập hàng năm. Đầu mỗi năm học, bạn ấy vay ngân hàng số tiền 10 triệu đồng với lãi suất là 4% . Tính số tiền mà Nam nợ ngân hàng sau 4 năm, biết rằng trong 4 năm đó, ngân hàng không thay đổi lãi suất (kết quả làm tròn đến nghìn đồng).

- A. 46794000 đồng. B. 44163000 đồng. C. 42465000 đồng. D. 41600000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Tổng số tiền bạn Nam vay (gốc và lãi) sau 4 năm là:

$$A = 10^6(1+0,04)^4 + 10^6(1+0,04)^3 + 10^6(1+0,04)^2 + 10^6(1+0,04)$$
$$= 10^6(1+0,04)[1 + (1+0,04) + (1+0,04)^2 + (1+0,04)^3]$$
$$= 10^6(1+0,04) \cdot \frac{1-(1+0,04)^4}{1-(1+0,04)} = 44163256$$

Nên $A = 44163000$ đồng

Câu 7: Một kỹ sư được nhận lương khởi điểm là 8.000.000 đồng/tháng. Cứ sau hai năm lương mỗi tháng của kỹ sư đó được tăng thêm 10% so với mức lương hiện tại. Tính tổng số tiền T (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc.

- A. 633.600.000. B. 635.520.000. C. 696.960.000. D. 766.656.000.

Lời giải

Chọn B

Lương 2 năm đầu tiên của công nhân đó nhận được là $T_1 = 8.10^6 \cdot 24 = 192.10^6$ (đồng)

Theo công thức tính lãi kép, lương 2 năm tiếp theo công nhân đó nhận được:

$$T_2 = 24.8.10^6 \cdot (1+10\%)^1 = 212,2.10^6 \text{ (đồng)}$$

Lương 2 năm cuối cùng công nhân đó nhận được:

$$T_3 = 24.8.10^6 \cdot (1+10\%)^2 = 232,32.10^6 \text{ (đồng)}$$

Tổng số tiền T (đồng) kỹ sư đó nhận được sau 6 năm làm việc:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 635,520,000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 8: Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm 4.000.000 đồng/tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7%/1 tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được tất cả bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).

A. 1.287.968.000 đồng **B.** 1.931.953.000 đồng.

C. 2.575.937.000 đồng **D.** 3.219.921.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi a là số tiền lương khởi điểm, r là lương được tăng thêm.

+ Số tiền lương trong ba năm đầu tiên: $36a$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36[a + a.r] = 36a(1+r)^1$

+ Số tiền lương trong ba năm kế tiếp: $36a(1+r)^2$

...

+ Số tiền lương trong ba năm cuối: $36a(1+r)^{11}$.

Vậy sau 36 năm làm việc anh Hưng nhận được:

$$\left[1 + (1+r)^1 + (1+r)^2 + (1+r)^3 + \dots + (1+r)^{11} \right] \cdot a \cdot 36 = 2.575.936983 \approx 2.575.937.000 \text{ đồng}.$$

Câu 9: Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8% / tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

A. 38.400.000 đồng. **B.** 10.451.777 đồng. **C.** 76.800.000 đồng. **D.** 39.200.000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Để thuận tiện trong trình bày, tất cả các số tiền dưới đây được tính theo đơn vị triệu đồng.

Số tiền phải trả tháng thứ 1: $\frac{200}{48} + 200 \cdot 0,8\%$.

Số tiền phải trả tháng thứ 2:

$$\frac{200}{48} + \left(200 - \frac{200}{48} \right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\%.$$

Số tiền phải trả tháng thứ 3:

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 2 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 46 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\%.$$

Số tiền phải trả tháng thứ 48

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 47 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\%.$$

Suy ra tổng số tiền lãi phải trả là:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 2 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + \dots + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 200 \cdot 0,8\% \\ &= \frac{200}{48} \cdot 0,8\% (1 + 2 + \dots + 48) = \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \cdot \frac{48(1+48)}{2} = 39,2 \end{aligned}$$

Câu 10: Một người đem gửi tiền tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 1% một tháng. Biết rằng cứ sau mỗi quý (3 tháng) thì lãi sẽ được cộng dồn vào vốn gốc. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu năm thì người đó nhận lại được số tiền bao gồm cả vốn lẫn lãi gấp ba lần số tiền ban đầu

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Lời giải

Chọn C

Gọi a là số tiền người đó gửi ban đầu

Số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi sau N năm là $T = a(1 + 0,03)^{\frac{N}{4}}$

$$\frac{T}{a} = 3 \Leftrightarrow (1 + 0,03)^{4N} = 3 \Leftrightarrow 4N \cdot \ln 1,03 = \ln 3 \Rightarrow N = \frac{\ln 3}{4 \ln 1,03} \approx 9,29$$

Câu 11: Một người vay ngân hàng một tỷ đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất người đó trả 40 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu người đó trả hết số tiền trên?

- A. 29 tháng. B. 27 tháng. C. 26 tháng. D. 28 tháng.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là số tiền vay, a là số tiền gửi hàng tháng r là lãi suất mỗi tháng.

Đến cuối tháng thứ n thì số tiền còn nợ là:

$$T = A(1+r)^n - a \left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + 1 \right] = A(1+r)^n - \frac{a \left[(1+r)^n - 1 \right]}{r}$$

$$\text{Hết nợ đồng nghĩa } T = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n - \frac{a \left[(1+r)^n - 1 \right]}{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a - Ar}{r} (1+r)^n = \frac{a}{r} \Leftrightarrow n = \log_{1+r} \frac{a}{a - Ar}$$

Áp dụng với $A = 1$ (tỷ), $a = 0,04$ (tỷ), $r = 0,0065$ ta được $n \approx 27,37$.

Vậy cần trả 28 tháng.

Câu 12: Một người gửi ngân hàng 100 triệu theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

- A. 46 tháng. B. 45 tháng. C. 44 tháng. D. 47 tháng.

Lời giải:

Chọn B

Sau 1 tháng, người đó nhận được $100 + 100 \cdot 0,5\%$ (triệu đồng) $= 100 \cdot 1,005^1$ triệu đồng.

Sau 2 tháng, người đó nhận được:

$$100 \cdot 1,005 + 100 \cdot 1,005 \cdot 0,005 = 100 \cdot 1,005(1 + 0,005) = 100 \cdot (1,005)^2 \text{ triệu đồng}$$

Sau n tháng, người đó nhận được: $100 \cdot (1,005)^n$ triệu đồng.

Theo đề: $100 \cdot (1,005)^n > 125 \Leftrightarrow n > \log_{1,005} 1,25 = 44,7$ tháng.

Vậy sau 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

Câu 13: Năm 2014, một người đã tiết kiệm được x triệu đồng và dùng số tiền đó để mua nhà nhưng trên thực tế người đó phải cần $1,55x$ triệu đồng. Người đó quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất là 6,9% / năm theo hình thức lãi kép và không rút trước kỳ hạn. Hỏi năm nào người đó mua được căn nhà đó (giả sử rằng giá bán căn nhà đó không thay đổi).

- A. Năm 2019. B. Năm 2020. C. Năm 2021. D. Năm 2022.

Lời giải

Chọn C

Số tiền người gửi tiết kiệm sau n năm là $x(1 + 6,9\%)^n$

Ta cần tìm n để $x(1 + 6,9\%)^n = 1,55x \Leftrightarrow (1 + 6,9\%)^n = 1,55 \Leftrightarrow n \approx 6,56...$

Do đó, người gửi tiết kiệm cần gửi trọn 7 kỳ hạn, tức là 7 năm.

Vậy đến năm 2021 người đó sẽ có đủ tiền cần thiết.

Câu 14: Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng 1 năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau, hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{(1,0115)^{12} - 1}$ (triệu đồng).

B. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12}}{(1,0115)^{12} - 1}$ (triệu đồng).

C. $\frac{55 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{3}$ (triệu đồng).

D. $\frac{220 \cdot (1,0115)^{12}}{3}$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn A

Mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng $x = \frac{a(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$

$$= \frac{220(1+1,15\%)^{12} \cdot 1,15\%}{(1+1,15\%)^{12} - 1} = \frac{220 \cdot (1,0115)^{12} \cdot 0,0115}{(1,0115)^{12} - 1} \text{ với } a = 200, r = 1,15\%, n = 12$$

Chúng minh công thức tổng quát: **Trả góp ngân hàng hoặc mua đồ trả góp.**

Ta xét bài toán tổng quát sau: Một người vay số tiền là a đồng, kì hạn 1 tháng với lãi suất cho số tiền chưa trả là $r\%$ một tháng (hình thức này gọi là tính lãi trên dư nợ giảm dần nghĩa là tính lãi trên số tiền mà người vay còn nợ ở thời điểm hiện tại), số tháng vay là n tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay, người này bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau, số tiền đều đặn trả vào ngân hàng là x đồng. Tìm công thức tính x ? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian vay.

Chứng minh

Gọi P_n là số tiền còn lại sau tháng thứ n .

Sau tháng thứ nhất số tiền gốc và lãi là: $a + ar = a(1+r) = ad$ với $d = 1+r$

Trả x đồng thì số tiền còn lại **sau tháng thứ nhất** là: $P_1 = ad - x = ad - x \frac{d-1}{d-1}$

Sau tháng thứ hai số tiền gốc và lãi là: $ad - x + (ad - x)r = (ad - x)(1+r) = (ad - x)d$

Trả x đồng thì số tiền còn lại **sau tháng thứ 2** là:

$$P_2 = (ad - x)d - x = ad^2 - xd - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x \frac{d^2 - 1}{d-1}$$

Sau tháng thứ ba số tiền gốc và lãi là:

$$ad^2 - x(d+1) + [ad^2 - x(d+1)]r = [ad^2 - x(d+1)](1+r) = [ad^2 - x(d+1)]d$$

Trả x đồng thì số tiền còn lại **sau tháng thứ 3** là:

$$P_3 = [ad^2 - x(d+1)]d - x = ad^3 - xd^2 - xd - x = ad^3 - x(d^2 + d + 1) = ad^3 - x \frac{d^3 - 1}{d-1}$$

.....

Số tiền còn lại **sau tháng thứ n** là: $P_n = ad^n - x \frac{d^n - 1}{d-1} \Leftrightarrow P_n = a(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (5a)$ với

$$d = 1+r$$

Do sau tháng thứ n người vay tiền đã trả hết số tiền đã vay ta có

$$P_n = 0 \Leftrightarrow ad^n - x \frac{d^n - 1}{d-1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{ad^n(d-1)}{d^n - 1} \Leftrightarrow x = \frac{a(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

Câu 15: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất 0,5% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng sau đó). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng?

A. 47 tháng.

B. 46 tháng.

C. 45 tháng.

D. 44 tháng.

Lời giải

Chọn C

- Số tiền cả vốn lẫn lãi người gửi có sau n tháng là $S = 100(1 + 0,005)^n = 100.1,005^n$ (triệu đồng) $\Rightarrow 1,005^n = \frac{S}{100} \Rightarrow n = \log_{1,005} \frac{S}{100}$.

- Để có số tiền $S = 125$ (triệu đồng) thì phải sau thời gian

$$n = \log_{1,005} \frac{S}{100} = \log_{1,005} \frac{125}{100} \approx 44,74 \text{ (tháng)}$$

- Vậy: sau ít nhất 45 tháng người đó có nhiều hơn 125 triệu đồng.

Câu 16: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ số tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu đồng (giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi)

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi T_n là tiền vốn lẫn lãi sau t tháng, a là số tiền ban đầu

Tháng 1 ($t = 1$): $T_1 = a(1 + r)$

Tháng 2 ($t = 2$): $T_2 = a(1 + r)^2$

.....

Tháng n ($t = n$): $T_n = a(1 + r)^t$

$$T_n = a(1 + r)^t \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{T_n}{a}}{\ln(1 + r)} = \frac{\ln \frac{140}{100}}{\ln(1 + 1\%)} \approx 33,815 \text{ (tháng)}$$

Để số tiền lãi nhận được lớn hơn 40 triệu thì $n > \frac{t}{12} \approx 2,818$

Vậy $n = 3$.

Câu 17: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là

A. $101 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.B. $101 \cdot [(1,01)^{26} - 1]$ triệu đồng.C. $100 \cdot [(1,01)^{27} - 1]$ triệu đồng.D. $100 \cdot [(1,01)^6 - 1]$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Quy bài toán về tính tổng cấp số nhân, rồi áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân.

Dãy $U_1; U_2; U_3; \dots; U_n$ được gọi là 1 CSN có công bội q nếu: $U_k = U_{k-1}q$.

Tổng n số hạng đầu tiên: $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.

+ Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân.

Cách giải: + Gọi số tiền người đó gửi hàng tháng là $a = 1$ triệu.

+ Đầu tháng 1: người đó có a .

Cuối tháng 1: người đó có $a(1+0,01) = a \cdot 1,01$.

+ Đầu tháng 2 người đó có: $a + a \cdot 1,01$.

Cuối tháng 2 người đó có: $1,01(a + a \cdot 1,01) = a(1,01 + 1,01^2)$.

+ Đầu tháng 3 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2)$.

Cuối tháng 3 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2) \cdot 1,01 = a(1 + 1,01^2 + 1,01^3)$.

....

+ Đến cuối tháng thứ 27 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{27})$.

Ta cần tính tổng: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{27})$.

Áp dụng công thức cấp số nhân trên với công bội là 1,01 ta được $\frac{1-1,01^{27}}{1-0,01} = 100 \cdot (1,01^{27} - 1)$ triệu đồng.

Câu 18: Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng. B. 309604 đồng. C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

Lời giải

Chọn D

Vậy sau 4 năm bạn Hùng nợ ngân hàng số tiền là:

$$s = 3000000 \left[(1+3\%)^4 + (1+3\%)^3 + (1+3\%)^2 + (1+3\%) \right] = 12927407,43$$

Lúc này ta coi như bạn Hùng nợ ngân hàng khoản tiền ban đầu là 12.927.407,43 đồng,

số tiền này bắt đầu được tính lãi và được trả góp trong 5 năm.

Ta có công thức:

$$\Rightarrow T = \frac{N(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} = \frac{12927407,4(1+0,0025)^{60} \cdot 0,0025}{(1+0,0025)^{60} - 1} \approx 232289$$

Câu 19: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6,5%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi khoảng bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 11 năm.

B. 9 năm.

C. 8 năm.

D. 12 năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi là x số tiền gửi ban đầu.Giả sử sau n năm số tiền vốn và lãi là $2x$.Ta có $2x \approx x \cdot (1,065)^n \Leftrightarrow (1,065)^n \approx 2 \Leftrightarrow n \approx \log_2 1,065 \Leftrightarrow n \approx 11$.

Câu 20: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó và tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

A. 45 tháng.

B. 47 tháng.

C. 44 tháng.

D. 46 tháng.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức lãi kép gửi 1 lần: $N = A(1+r)^n$, Với $A = 100 \cdot 10^6$ và $r = 0,5\%$.Theo đề bài ta tìm n bé nhất sao cho: $10^8 (1+0,5\%)^n > 125 \cdot 10^6$

$$\Leftrightarrow (1+0,5\%)^n > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n > \log_{\frac{201}{200}} \frac{5}{4} \approx 44,74$$

Câu 21: Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% năm. Hỏi người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lại suất $\frac{5}{12}\%$ tháng ?

A. Nhiều hơn.

B. Ít hơn.

C. Không thay đổi.

D. Không tính được.

Lời giải

Gọi a là tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất, sau một tháng sẽ là: $a(1+r)$ Sau n tháng số tiền cả gốc lãi là: $T = a(1+r)^n$

Số tiền sau 10 năm với lãi suất 5% một năm :

$$10\,000\,000(1+5\%)^{10} = 16\,288\,946,27 \text{ đ}$$

Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất $\frac{5}{12}\%$ tháng :

$$10\,000\,000 \left(1 + \frac{5}{12}\%\right)^{120} = 16\,470\,094,98 \text{ đ}$$

Vậy số tiền gửi theo lãi suất $\frac{5}{12}\%$ tháng nhiều hơn : 1 811 486,7069 đ. **Chọn (A)**

Câu 22: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng A với số tiền là 100 triệu đồng với lãi suất mỗi quý (3 tháng) là 2,1% . Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi quý. Sau 2 năm người đó vẫn tiếp tục gửi tiết kiệm số tiền thu được từ trên nhưng với lãi suất 1,1% mỗi tháng. Số tiền lãi được cộng vào vốn sau mỗi tháng. Hỏi sau 3 năm kể từ ngày gửi tiết kiệm vào ngân hàng A người đó thu được số tiền gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 134,65 triệu đồng.

B. 130,1 triệu đồng.

C. 156,25 triệu đồng.

D. 140,2 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ta có 2 năm có 8 quý.

Tổng số tiền người đó thu được sau 3 năm: $100000000 \times (1,021)^8 \times (1,011)^{12} \approx 134654169$ đồng.

Câu 23: Ông A gửi số tiền 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 7% trên năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. sau thời gian 10 năm nếu không rút lãi lần nào thì số tiền mà ông A nhận được tính cả gốc lẫn lãi là

- A. $10^8 \cdot (1 + 0,07)^{10}$. B. $10^8 \cdot 0,07^{10}$. C. $10^8 \cdot (1 + 0,7)^{10}$. D. $10^8 \cdot (1 + 0,007)^{10}$.

Chọn A

Theo công thức lãi kép $C = A(1+r)^N$ với giả thiết

$$A = 100.000.000 = 10^8; r = 7\% = 0,07 \text{ và } N = 10.$$

Vậy số tiền nhận được ... $10^8 \cdot (1 + 0,07)^{10}$

Chọn A

Câu 24: Ông Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn một năm với lãi suất là 12% một năm. Sau n năm ông Nam rút toàn bộ tiền (cả vốn lẫn lãi). Tìm n nguyên dương nhỏ nhất để số tiền lãi nhận được hơn 40 triệu đồng. (Giả sử rằng lãi suất hàng năm không thay đổi).

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n năm là $C = 100(1 + 0,12)^n$

Số tiền lãi thu được sau n năm là $L = 100(1 + 0,12)^n - 100$

$$L > 40 \Leftrightarrow 100(1 + 0,12)^n - 100 > 40 \Leftrightarrow 1,12^n > \frac{7}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,12} \frac{7}{5} \approx 2,97.$$

Câu 25: Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau 3 năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

- A. 726,74 triệu. B. 71674 triệu. C. 858,72 triệu. D. 768,37 triệu.

Lời giải

Chọn D

Mức lương 3 năm đầu: 1 triệu	Tổng lương 3 năm đầu: 36. 1
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \left(1 + \frac{2}{5}\right)$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2$

Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^3$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^3$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^4$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^4$
Mức lương 3 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5$	Tổng lương 3 năm tiếp theo: $36 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5$
Mức lương 2 năm tiếp theo: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6$	Tổng lương 2 năm tiếp theo: $24 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6$

Tổng lương sau tròn 20 năm là

$$\begin{aligned}
 S &= 36 \left[1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right) + \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{2}{5}\right)^5 \right] + 24 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6 \\
 &= 36 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6}{1 - \left(1 + \frac{2}{5}\right)} + 24 \left(1 + \frac{2}{5}\right)^6 \approx 768,37
 \end{aligned}$$

Câu 26: Giả sử vào cuối năm thì một đơn vị tiền tệ mất 10% giá trị so với đầu năm. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất sao cho sau n năm, đơn vị tiền tệ sẽ mất đi ít nhất 90% giá trị của nó?

- A. 16 B. 18. C. 20. D. 22.

Lời giải

Chọn D.

Gọi x ($x > 0$) là giá trị tiền tệ lúc ban đầu. Theo đề bài thì sau 1 năm, giá trị tiền tệ sẽ còn $0,9x$.

Cuối năm 1 còn $0,9x$

Cuối năm 2 còn $0,9 \cdot 0,9x = 0,9^2 x$

...

Cuối năm n còn $0,9^n x$

Ycbt $\Leftrightarrow 0,9^n x = 0,1x \Rightarrow n \approx 21,58$. Vì n nguyên dương nên $n = 22$.

Câu 27: Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhưng vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25% / tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A. 232518 đồng. B. 309604 đồng. C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

Lời giải

Chọn D

+ Tính tổng số tiền mà Hùng nợ sau 4 năm học:

Sau 1 năm số tiền Hùng nợ là: $3 + 3r = 3(1+r)$

Sau 2 năm số tiền Hùng nợ là: $3(1+r)^2 + 3(1+r)$

Tương tự: Sau 4 năm số tiền Hùng nợ là:

$$3(1+r)^4 + 3(1+r)^3 + 3(1+r)^2 + 3(1+r) = 12927407,43 = A$$

+ Tính số tiền T mà Hùng phải trả trong 1 tháng:

Sau 1 tháng số tiền còn nợ là: $A + Ar - T = A(1+r) - T$.

Sau 2 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r) - T + (A(1+r) - T)r - T = A(1+r)^2 - T(1+r) - T$

Tương tự sau 60 tháng số tiền còn nợ là: $A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \dots - T(1+r) - T$.

Hùng trả hết nợ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & A(1+r)^{60} - T(1+r)^{59} - T(1+r)^{58} - \dots - T(1+r) - T = 0 \\ \Leftrightarrow & A(1+r)^{60} - T[(1+r)^{59} + (1+r)^{58} + \dots + (1+r) + 1] = 0 \\ \Leftrightarrow & A(1+r)^{60} - T \frac{(1+r)^{60} - 1}{1+r-1} = 0 \\ \Leftrightarrow & A(1+r)^{60} - T \frac{(1+r)^{60} - 1}{r} = 0 \\ \Leftrightarrow & T = \frac{Ar(1+r)^{60}}{(1+r)^{60} - 1} \\ \Leftrightarrow & T \approx 232.289 \end{aligned}$$

Câu 28: Ông Việt dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Việt gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

A. 140 triệu đồng. **B.** 154 triệu đồng. **C.** 145 triệu đồng. **D.** 150 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức lãi kép: $P_n = x(1+r)^n$, trong đó

P_n là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

x là vốn gốc.

r là lãi suất mỗi kì.

Ta cũng tính được số tiền lãi thu được sau n kì là: $P_n - x = x(1+r)^n - x = x[(1+r)^n - 1]$ (*)

Áp dụng công thức (*) với $n=3, r=6,5\%$, số tiền lãi là 30 triệu đồng.

Ta được $30 = x[(1+6,5\%)^3 - 1] \Rightarrow x \approx 144,27$

Số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng.

Câu 29: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 200 triệu đồng, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: sau một tháng bắt đầu từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 10 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, tổng số tiền lãi m mà ông A phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1}$ (triệu đồng).

B. $m = \frac{200 \cdot (1,12)^{10}}{10}$ (triệu đồng).

C. $m = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1} - 200$ (triệu đồng).

D. $m = \frac{10 \cdot (1,12)^{10}}{(1,12)^{10} - 1} - 200$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn C

Đặt $T = 200$ triệu, M là số tiền phải trả hàng tháng mà ông A trả cho ngân hàng

Lãi suất 12% trên năm tương ứng 1% trên tháng, tức là $r = 0,01$.

Số tiền gốc sau 1 tháng là: $T + T \cdot r - M = T(1+r) - M$

Số tiền gốc sau 2 tháng là: $T(1+r)^2 - M[(1+r) + 1]$

....

Số tiền gốc sau 10 tháng là: $T(1+r)^{10} - M[(1+r)^9 + (1+r)^8 + \dots + (1+r) + 1] = 0$

Do đó $M = \frac{T(1+r)^{10}}{(1+r)^9 + (1+r)^8 + \dots + (1+r) + 1}$

$= \frac{T \cdot (1+r)^{10} \cdot r}{(1+r)^{10} - 1} = \frac{200 \cdot (1+0,01)^{10} \cdot 0,01}{(1+0,01)^{10} - 1} = \frac{2 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1}$ (triệu đồng)

$\Rightarrow$ Tổng số tiền lãi phải trả cho ngân hàng là: $m = 10M = \frac{20 \cdot (1,01)^{10}}{(1,01)^{10} - 1} - 200$ (triệu đồng)

Câu 30: Thầy Đông gửi 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng. Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành 1,15%/tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn 0,9%/tháng. Thầy Đông tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 5787710,707 đồng. Hỏi thầy Đông đã gửi tổng thời gian bao nhiêu tháng?

A. 18 tháng.

B. 17 tháng.

C. 16 tháng.

D. 15 tháng.

Lời giải

Chọn C

☒ Gọi a là số tháng mà thầy Đông gửi tiền với lãi suất 0,7%.

Gọi b là số tháng mà thầy Đông gửi tiền với lãi suất 0,9%.

☒ Theo đề bài, ta có phương trình:

$$5000000(1+0,7\%)^a \cdot (1+1,15\%)^6 \cdot (1+0,9\%)^b = 5787710,707 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (1+0,7\%)^a \cdot (1+0,9\%)^b = 1,080790424$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a < \log_{1,007} 1,080790424 \\ 0 < b < \log_{1,009} 1,080790424 \\ a, b \in N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{1,009} 1,080790424 < a+b < \log_{1,007} 1,080790424 \Rightarrow 9 \leq a+b \leq 11$$

☑ Với $a+b=9$, thử $a, b \in N$ ta thấy (*) không thỏa mãn.

Với $a+b=10$, thử $a, b \in N$ ta được $a=6; b=4$ thỏa mãn (*).

Với $a+b=11$, thử $a, b \in N$ ta thấy (*) không thỏa mãn.

☑ Vậy thầy Đông gửi tổng thời gian là 16 tháng.

Câu 31: Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

A. $800 \cdot (1,005)^{11} - 72$ (triệu đồng).

B. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{12}$ (triệu đồng).

C. $800 \cdot (1,005)^{12} - 72$ (triệu đồng).

D. $1200 - 400 \cdot (1,005)^{11}$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn B

Từ ngày 01 tháng 01 năm 2017 đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, ông An gửi được tròn 12 tháng.

Gọi a là số tiền ban đầu, r là lãi suất hàng tháng, n là số tháng gửi, x là số tiền rút ra hàng tháng, P_n là số tiền còn lại sau n tháng.

Khi gửi được tròn 1 tháng, sau khi rút số tiền là x , số tiền còn lại là:

$$P_1 = a + ar - x = a(r+1) - x = ad - x, d = r+1$$

Khi gửi được tròn 2 tháng, sau khi rút số tiền là x , số tiền còn lại là:

$$P_2 = P_1 + P_1 \cdot r - x = ad^2 - x(d+1) = ad^2 - x \cdot \frac{d^2-1}{d-1}.$$

Khi gửi được tròn 3 tháng, sau khi rút số tiền là x , số tiền còn lại là:

$$P_3 = P_2 + P_2 \cdot r - x = ad^3 - x(d^2+d+1) = ad^3 - x \cdot \frac{d^3-1}{d-1}$$

Tương tự, khi gửi được tròn n tháng, sau khi rút số tiền là x , số tiền còn lại là:

$$P_n = ad^n - x \cdot \frac{d^n-1}{d-1}.$$

Áp dụng với $a=800$ triệu, $r=0,5\%$, $n=12$, $x=6$ triệu, số tiền còn lại của ông An là:

$$P_{12} = 800 \cdot (1,005)^{12} - 6 \cdot \frac{1,005^{12} - 1}{0,005} = 800 \cdot (1,005)^{12} - 1200 \cdot (1,005^{12} - 1) = 1200 - 400 \cdot 1,005^{12}$$

(triệu đồng).

Câu 32: Ngày 01 tháng 6 năm 2016 ông An đem một tỉ đồng gửi vào ngân hàng với lãi suất 0.5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 6 năm 2017, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

A. $200 \cdot (1,005)^{12} + 800$ (triệu đồng). **B.** $1000 \cdot (1,005)^{12} - 48$ (triệu đồng).

C. $200 \cdot (1,005)^{11} + 800$ (triệu đồng). **D.** $1000 \cdot (1,005)^{11} - 48$ (triệu đồng).

Lời giải

Chọn B

Số tiền gửi ban đầu là 1000 (triệu đồng)

Số tiền tiết kiệm của ông An sau tháng thứ n là: $1000 \cdot (1 + 0,005)^n$ (triệu đồng).

Kể từ ngày gửi cứ tròn mỗi tháng ông đến ngân hàng rút 4 triệu, vậy số tiền của ông An sau 12 tháng là $1000 \cdot (1,005)^{12} - 48$ (triệu đồng).

Câu 33: Một người lần đầu gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 3% của một quý và lãi từng quý sẽ được nhập vào vốn (hình thức lãi kép). Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai sẽ gần với kết quả nào sau đây?

A. 232 triệu. **B.** 262 triệu. **C.** 313 triệu. **D.** 219 triệu.

Lời giải

Chọn A.

Công thức tính lãi suất kép là $A = a(1 + r)^n$.

Trong đó a là số tiền gửi vào ban đầu, r là lãi suất của một kì hạn (có thể là tháng; quý; năm), n là kì hạn.

Sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai thì 100 triệu gửi lần đầu được gửi là 18 tháng, tương ứng với 6 quý. Khi đó số tiền thu được cả gốc và lãi của 100 triệu gửi lần đầu là

$$A_1 = 100 \left(1 + \frac{3}{100} \right)^6 \text{ (triệu).}$$

Sau 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai thì 100 triệu gửi lần hai được gửi là 12 tháng, tương ứng với 4 quý. Khi đó số tiền thu được cả gốc và lãi của 100 triệu gửi lần hai là

$$A_2 = 100 \left(1 + \frac{3}{100} \right)^4 \text{ (triệu).}$$

Vậy tổng số tiền người đó nhận được 1 năm kể từ khi gửi thêm tiền lần hai là

$$A = A_1 + A_2 = 100 \left(1 + \frac{3}{100} \right)^6 + 100 \left(1 + \frac{3}{100} \right)^4 \approx 232 \text{ triệu.}$$

Câu 34: Thầy Đông gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng tiền lãi đạt được ở hai ngân hàng là 27 507 768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền Thầy Đông gửi lần lượt ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

- A. 140 triệu và 180 triệu. B. 120 triệu và 200 triệu.
C. 200 triệu và 120 triệu. D. 180 triệu và 140 triệu.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền Thầy Đông gửi ở hai ngân hàng X và Y lần lượt là x , y (triệu)

Theo giả thiết $x + y = 320 \cdot 10^6$ (1)

□ Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được ở ngân hàng X sau 15 tháng (5 quý) là

$$A = x(1 + 0,021)^5 = x(1,021)^5$$

$$\Rightarrow \text{Số lãi sau 15 tháng là } r_A = x(1,021)^5 - x = x[(1,021)^5 - 1]$$

□ Tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được ở ngân hàng Y sau 9 tháng là

$$B = y(1 + 0,0073)^9 = y(1,0073)^9$$

$$\Rightarrow \text{Số lãi sau 9 tháng là } r_B = y(1,0073)^9 - y = y[(1,0073)^9 - 1]$$

$$\text{Theo giả thiết } x[(1,021)^5 - 1] + y[(1,0073)^9 - 1] = 27\,507\,768,13 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 140 \\ y \approx 180 \end{cases}$$

Câu 35: Một người gửi tiền tiết kiệm 200 triệu đồng vào một ngân hàng với kỳ hạn một năm và lãi suất 8,25% một năm, theo thể thức lãi kép. Sau 3 năm tổng số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được là (làm tròn đến hàng nghìn)

- A. 124,750 triệu đồng. B. 253,696 triệu đồng.
C. 250,236 triệu đồng. D. 224,750 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Số tiền người gửi nhận được sau 3 năm cả gốc lẫn lãi là $S_3 = 200(1 + 8,25\%)^3 = 253,696$ triệu đồng.

Câu 36: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi)

- A. 4 năm 1 quý B. 4 năm 2 quý C. 4 năm 3 quý D. 5 năm

Lời giải

Chọn A

Số tiền của người ấy sau n kỳ hạn là $T = 15 \left(1 + \frac{1,65}{100} \right)^n$.

Theo đề bài, ta có $15 \left(1 + \frac{1,65}{100} \right)^n > 20 \Leftrightarrow n > \log_{1+\frac{1,65}{100}} \frac{4}{3} \approx 17,56$

Câu 37: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất $x\%/năm$, điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền là 1.058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

- A. 13%/năm. B. 14%/năm. C. 12%/năm. D. 15%/năm.

Lời giải

Chọn D

Công thức tính tiền vay lãi kép $T_n = a(1+x)^n$.

Trong đó a : số tiền vay ban đầu, x : lãi suất $x\%/năm$, n : số năm $\Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1$

Vậy $x = \sqrt[2]{\frac{1058}{800}} - 1 = 0,15$ tức là 15%/năm

Câu 38: Một người có số tiền là 20.000.000 đồng đem gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 8,5%/năm. Vậy sau thời gian 5 năm 8 tháng, người đó nhận được tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến 100 đồng). Biết rằng người đó không rút cả vốn lẫn lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kỳ hạn 0,01% một ngày. (1 tháng tính 30 ngày).

- A. 31.802.700 đồng. B. 30.802.700 đồng. C. 32.802.700 đồng. D. 33.802.700 đồng.

Lời giải

Chọn A

Lãi suất 8,5%/năm tương ứng với $\frac{8,5}{2}\%/6$ tháng.

Đổi 5 năm 8 tháng bằng 11×6 tháng + 2 tháng. Áp dụng công thức tính lãi suất $P_n = P(1+r)^n$

Số tiền được lĩnh sau 5 năm 6 tháng là $P_{11} = 20.000.000 \left(1 + \frac{8,5}{200} \right)^{11} = 31.613.071.66$ đồng.

Do hai tháng còn lại rút trước hạn nên lãi suất là 0,01% một ngày.

Suy ra số tiền được lĩnh là $T = P_{11} + P_{11} \cdot \frac{0,01}{100} \cdot 60 \approx 31.802.700$ đồng.

Câu 39: (Sở Quảng NamT) Anh A vào làm ở công ty X với mức lương ban đầu 10 triệu đồng/tháng. Nếu hoàn thành tốt nhiệm vụ thì cứ sau 6 tháng làm việc, mức lương của anh lại được tăng thêm 20%. Hỏi bắt đầu từ tháng thứ mấy kể từ khi vào làm công ty X, tiền lương mỗi tháng của anh nhiều hơn 20 triệu đồng (biết rằng trong suốt thời gian làm ở công ty X anh A luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ)?

- A. Tháng thứ 31 B. Tháng thứ 25 C. Tháng thứ 19 D. Tháng thứ 37

Lời giải

Chọn B

Gọi n là số chu kỳ 6 tháng (một chu kỳ là 6 tháng). Thì lương một tháng của anh A sau n chu kỳ là:

$$T = A(1+r)^n \text{ với } A = 10.000.000 \text{ đồng, } r = 0,2$$

$$\text{Trước hết ta tìm } n \text{ để } T = A(1+r)^n > 20.000.000 \Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 = \log_{1,2} 2 = 3,08$$

Tức là để lương của anh A nhiều hơn 20 triệu thì phải từ 3 chu kỳ trở lên.

Xét $n = 3$ (sau 18 tháng) thì lương của anh A là:

$$T = A(1+r)^n = 10.000.000.1,2^3 = 17.280.000 \text{ đ}$$

Xét $n = 4$ (sau 24 tháng) thì lương của anh A là:

$$T = A(1+r)^n = 10.000.000.1,2^3 = 20.736.000 \text{ đ}$$

Từ đó dễ thấy đáp án B thỏa mãn.

Câu 40: (Nguyễn Tất Thành Yên Bái) Ba anh em An, Bình và Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất 0,7%/ tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Giả sử mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Hỏi tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 45672000 đồng. **B.** 46712000 đồng. **C.** 63271000 đồng. **D.** 64268000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tiền mà ba anh em An, Bình và Cường vay ngân hàng lần lượt là A , B , C và X là số tiền mỗi người trả hàng tháng.

Áp dụng công thức tính số tiền còn lại sau n tháng vay lãi ngân hàng

$$S_n = M \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n - X \frac{\left(1 + \frac{r}{100} \right)^n - 1}{\frac{r}{100}}$$

Trong đó: M : Số tiền vay, $r\%$: lãi suất hàng tháng, X : Số tiền trả 1 tháng.

Khi trả hết nợ : $S_n = 0$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} A + B + C = 10^9 \\ A(1,007)^{10} - X \frac{(1,007)^{10} - 1}{0,007} = 0 \\ B(1,007)^{15} - X \frac{(1,007)^{15} - 1}{0,007} = 0 \\ C(1,007)^{25} - X \frac{(1,007)^{25} - 1}{0,007} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 206205230,7 \\ B = 304037610,4 \\ C = 489757158,9 \\ X = 21422719,34 \end{cases}$$

Vậy tổng số tiền mà ba anh em trả ở tháng thứ nhất cho ngân hàng là:

$$3 \times 21422719,34 = 64268158 \approx 64268000 \text{ đồng.}$$

Câu 41: (THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI) Anh A vay 50 triệu đồng để mua xe với lãi suất 1%/tháng. Anh ta muốn trả góp cho ngân hàng theo cách: sau đúng một tháng kể từ ngày vay anh bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ là như nhau và anh A trả hết nợ sau 2 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi không đổi 1% trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng anh A phải trả cho ngân hàng gần nhất với số nào sau đây?

- A. 2,36 triệu đồng. **B. 2,35 triệu đồng.** C. 2,34 triệu đồng. D. 2,37 triệu đồng.

Lời giải

Chọn B

Gọi số tiền nợ vay ban đầu là P . Lãi suất dư nợ hàng tháng là $r(\%)$

Gọi x là số tiền anh A trả ngân hàng hàng tháng và P_n là số dư nợ sau tháng thứ n .

Số tiền dư nợ sau tháng thứ nhất là $P_1 = P(1+r) - x$.

Số tiền dư nợ sau tháng thứ hai là $P_2 = P(1+r)^2 - x - x(1+r)$.

Số tiền dư nợ sau tháng thứ ba là $P_3 = P(1+r)^3 - x - x(1+r) - x(1+r)^2$.

Như vậy, số dư nợ sau tháng thứ n là $P_n = P(1+r)^n - x[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}]$

$$\Leftrightarrow P_n = P(1+r)^n - x \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow x = \frac{[P(1+r)^n - P_n]r}{(1+r)^n - 1}.$$

Áp dụng cho bài toán trên với $n = 24; P_{24} = 0; P = 50; r = 0,01$ ta có:

$$x = \frac{[P(1+r)^n - P_n]r}{(1+r)^n - 1} = \frac{[50 \cdot (1,01)^{24}] \cdot 0,01}{(1,01)^{24} - 1} \approx 2,3536736116. \text{ Như vậy ta chọn đáp án B.}$$

Câu 42: (Đặng Thành Nam Đề 5) Ba anh em An, Bình và Cường cùng vay tiền ở một ngân hàng với lãi suất 0,7%/tháng với tổng số tiền vay của cả ba người là 1 tỉ đồng. Biết rằng mỗi tháng ba người đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Để trả hết gốc và lãi cho

ngân hàng thì An cần 10 tháng, Bình cần 15 tháng và Cường cần 25 tháng. Số tiền trả đều đặn cho ngân hàng mỗi tháng của mỗi người gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 21422000 đồng.

B. 21900000 đồng.

C. 21400000 đồng.

D. 21090000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Giả sử ban đầu vay A đồng, lãi suất mỗi kì là r , trả nợ đều đặn mỗi kì số tiền m đồng và trả hết nợ sau kì thứ n .

Sau kì thứ nhất số tiền còn phải trả là $A_1 = A(1+r) - m$.

Sau kì thứ hai số tiền còn phải trả là

$$A_2 = A_1(1+r) - m = [A(1+r) - m](1+r) - m = A(1+r)^2 - [m + m(1+r)].$$

.....

Sau kì thứ n số tiền còn phải trả là

$$A_n = A(1+r)^n - [m + m(1+r) + \dots + m(1+r)^{n-1}] = A(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Sau kì thứ n trả hết nợ nên $A_n = 0$, do đó

$$A(1+r)^n - m \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} \text{ (đồng)}.$$

Gọi số tiền vay của An, Bình và Cường lần lượt là a, b, c và m là số tiền trả đều đặn hàng tháng của mỗi người.

Ta có $a + b + c = 10^9$ (đồng).

$$\text{An sau đúng 10 tháng trả hết nợ nên } a = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} = \frac{m((1,007)^{10} - 1)}{0,007(1,007)^{10}};$$

$$\text{Bình sau đúng 15 tháng trả hết nợ nên } b = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} = \frac{m((1,007)^{15} - 1)}{0,007(1,007)^{15}};$$

$$\text{Cường sau đúng 25 tháng trả hết nợ nên } c = \frac{m[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n} = \frac{m((1,007)^{25} - 1)}{0,007(1,007)^{25}};$$

$$\text{Vậy } \frac{m((1,007)^{10} - 1)}{0,007(1,007)^{10}} + \frac{m((1,007)^{15} - 1)}{0,007(1,007)^{15}} + \frac{m((1,007)^{25} - 1)}{0,007(1,007)^{25}} = 10^9 \Leftrightarrow m \approx 2,14227 \times 10^7 \text{ (đồng)}.$$

II - BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG

Câu 43: Số lượng của một loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t) = Q_0 \cdot e^{0.195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

- A. 20. B. 24. C. 15,36. D. 3,55.

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết ta suy ra $Q(t) = 5000 \cdot e^{0.195t}$. Để số lượng vi khuẩn là 100.000 con thì

$$Q(t) = 5000 \cdot e^{0.195t} = 100.000 \Leftrightarrow e^{0.195t} = 20 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0.195} \ln 20 \approx 15.36(h).$$

Câu 44: Theo số liệu của Tổng cục thống kê, năm 2016 dân số Việt Nam ước tính khoảng 94.444.200 người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,07%. Cho biết sự tăng dân số được tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỷ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỷ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

- A. 2040. B. 2037. C. 2038. D. 2039.

Lời giải

Chọn D

Gọi n là số năm để dân số đạt mức 120 triệu người tính mốc từ năm 2016

$$\text{Ta có: } 120.000.000 = 94.444.200e^{n \cdot 0,0107} \Rightarrow n \approx \frac{\ln 1,27}{0,0107} \approx 22.34.$$

Vậy trong năm thứ 23 (tức là năm $2016 + 23 = 2039$) thì dân số đạt mức 120 triệu người

Câu 45: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78685800 người và tỷ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỷ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỷ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người

- A. 2020. B. 2022. C. 2026. D. 2025.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } S = Ae^{Nr} \Leftrightarrow N = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A}.$$

Để dân số nước ta ở mức 120 triệu người thì cần số năm

$$N = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A} = \frac{100}{1,7} \cdot \ln \frac{120000000}{78685800} \approx 25(\text{năm}).$$

Vậy thì đến năm 2026 dân số nước ta ở mức 120 triệu người

Câu 46: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng (tính theo đơn vị là giờ). Biết

số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây.

- A. 3 giờ 20 phút. B. 3 giờ 9 phút. C. 3 giờ 40 phút. D. 3 giờ 2 phút.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{5}$$

Gọi thời gian cần tìm là t .

$$\text{Theo yêu cầu bài toán, ta có: } 200 = 100.e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt} = 2 \Leftrightarrow rt = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{5 \cdot \ln 2}{\ln 3} \approx 3,15(h)$$

Vậy $t = 3$ giờ 9 phút

Câu 47: Thang đo Richtê được Charles Francis đề xuất và sử dụng lần đầu tiên vào năm 1935 để sắp xếp các số đo độ chấn động của các cơn động đất với đơn vị Richtê. Công thức tính độ chấn động như sau: $M_L = \log A - \log A_0$, M_L là độ chấn động, A là biên độ tối đa được đo bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn. Hỏi theo thang độ Richtê, cùng với một biên độ chuẩn thì biên độ tối đa của một chấn động đất 7 độ Richtê sẽ lớn gấp mấy lần biên độ tối đa của một trận động đất 5 độ Richtê?

- A. 2. B. 20. C. 100. D. $10^{\frac{5}{7}}$.

Lời giải

Chọn C

Với trận động đất 7 độ Richtê ta có biểu thức

$$7 = M_L = \log A - \log A_0 = \log \frac{A}{A_0} \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^7 \Rightarrow A = A_0 \cdot 10^7.$$

Tương tự ta suy ra được $A' = A_0 \cdot 10^5$.

$$\text{Từ đó ta tính được tỉ lệ } \frac{A}{A'} = \frac{A_0 \cdot 10^7}{A_0 \cdot 10^5} = 100.$$

Câu 48: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

- A. 104,3 triệu người. B. 105,3 triệu người. C. 103,3 triệu người. D. 106,3 triệu người.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức $S = Ae^{ni} = 91,7.e^{10 \cdot 0,012} = 103,3$ triệu người.

Chú ý: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$: Trong đó

A : Dân số của năm lấy làm mốc tính.

S : Dân số sau n năm.

i : Tỉ lệ tăng dân số hằng năm.

Câu 49: Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận

Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} \%$. Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21%. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

- A. 3574 (năm). B. 3754 (năm). C. 3475 (năm). D. 3547 (năm).

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 65,21 \Leftrightarrow \frac{t}{5750} = \log_{0,5} \frac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 5750 \cdot \log_{0,5} \frac{65,21}{100} \Leftrightarrow t = 3547.$$

Câu 50: Biết chu kỳ bán hủy của chất phóng xạ plutôni Pu^{239} là 24360 năm (tức là một lượng Pu^{239} sau 24360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm ($r < 0$), t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t . Hỏi 10 gam Pu^{239} sau khoảng bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 1 gam?

- A. 82230 (năm). B. 82232 (năm). C. 82238 (năm). D. 82235 (năm).

Lời giải.

Chọn D.

- Pu^{239} có chu kỳ bán hủy là 24360 năm, do đó ta có:

$$5 = 10 \cdot e^{r \cdot 24360} \Rightarrow r = \frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} \approx -0,000028.$$

- Vậy sự phân hủy của Pu^{239} được tính theo công thức $S = A \cdot e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} t}$.

$$\text{- Theo đề: } 1 = 10 \cdot e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} t} \Rightarrow t = \frac{-\ln 10}{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}} \approx \frac{-\ln 10}{-0,000028} \approx 82235 \text{ (năm)}.$$

Chú ý: Theo đáp án gốc là D (SGK). **Tuy nhiên:** nếu không làm tròn r thì kết quả

$$1 = 10 \cdot e^{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360} t} \Rightarrow t = \frac{-\ln 10}{\frac{\ln 5 - \ln 10}{24360}} \approx 80922 \Rightarrow \text{Kết quả gần A nhất.}$$

Câu 51: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng $N(t)$, biết rằng $N'(t) = \frac{7000}{t+2}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Hỏi sau 10 ngày, đám vi trùng có bao nhiêu con (làm tròn số đến hàng đơn vị)?

- A. 322542 con. B. 332542 con. C. 302542 con. D. 312542 con.

Lời giải

Chọn D

$$N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{7000}{t+2} dt = 7000 \cdot \ln|t+2| + C.$$

$$N(0) = 7000 \ln 2 + C \Rightarrow 7000 \ln 2 + C = 300000 \Rightarrow C = 300000 - 7000 \ln 2.$$

$$N(10) = 7000 \ln(10+2) + C = 7000 \ln(10+2) + 300000 - 7000 \ln 2 \approx 312542,3163.$$

Câu 52: Khi ánh sáng đi qua một môi trường (chẳng hạn như không khí, nước, sương mù, ...) cường độ sẽ giảm dần theo quãng đường truyền x , theo công thức $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, trong đó I_0 là cường độ của ánh sáng khi bắt đầu truyền vào môi trường và μ là hệ số hấp thụ của môi trường đó. Biết rằng nước biển có hệ số hấp thụ $\mu = 1,4$ và người ta tính được rằng khi đi từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m thì cường độ ánh sáng giảm $l \cdot 10^{10}$ lần. Số nguyên nào sau đây gần với l nhất?

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 90.

Lời giải

Chọn B

Ta có

□ Ở độ sâu 2 m: $I(2) = I_0 e^{-2,8}$

□ Ở độ sâu 20 m: $I(20) = I_0 e^{-28}$

Theo giả thiết $I(20) = l \cdot 10^{10} \cdot I(2) \Leftrightarrow e^{-28} = l \cdot 10^{10} \cdot e^{-2,8}$

$\Leftrightarrow l = 10^{-10} \cdot e^{25,2} \approx 8,79.$

Câu 53: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

- A. Sau khoảng 24 tháng. B. Sau khoảng 22 tháng.
C. Sau khoảng 23 tháng. D. Sau khoảng 25 tháng.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $75 - 20 \ln(t+1) \leq 10$

$\Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq 24,79$. Khoảng 25 tháng.

Câu 54: (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội) Độ pH của dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ ion $[H^+]$ trong dung dịch đó. Cho dung dịch A có độ pH ban đầu bằng 6. Nếu nồng độ ion $[H^+]$ trong dung dịch A tăng lên 4 lần thì độ pH trong dung dịch mới gần bằng giá trị nào dưới đây?

- A. 5,7. B. 5,2. C. 6,6. **D. 5,4.**

Lời giải

Chọn D

Nồng độ ion $[H^+]$ trong dung dịch ban đầu là:

$pH = 6 \Leftrightarrow \log[H^+] = -6 \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-6}$

Nồng độ ion $[H^+]$ trong dung dịch A sau khi đã tăng lên 4 lần là:

$$[H^+] = 4.10^{-6}.$$

Vậy độ pH trong dung dịch mới là:

$$pH = -\log(4.10^{-6}) \approx 5,4.$$

Câu 55: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t) = Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}})$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $t \approx 1,65$ giờ. B. $t \approx 1,61$ giờ. C. $t \approx 1,63$ giờ. D. $t \approx 1,50$ giờ.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ta có

$$Q_0 \cdot (1 - e^{-t\sqrt{2}}) = 0,9 \cdot Q_0 \Leftrightarrow 1 - e^{-t\sqrt{2}} = 0,9 \Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}} \approx 1,63.$$

Câu 56:) Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = 78125; \quad s(t) = s(0) \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = \frac{s(t)}{s(0)} = 128 \Rightarrow t = 7.$$

Câu 57: Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

- A. (1.424.300; 1.424.400). B. (1.424.000; 1.424.100).
C. (1.424.200; 1.424.300). D. (1.424.100; 1.424.200).

Lời giải

Chọn C

Gọi S_1 là dân số năm 2015, ta có $S_1 = 1.153.600$, $N = 5$, $A = 1.038.229$

$$\text{Ta có: } S_1 = Ae^{Nr} \Rightarrow e^{Nr} = \frac{S_1}{A} \Rightarrow r = \frac{\ln \frac{S_1}{A}}{5}$$

Gọi S_2 là dân số đầu năm 2025, ta có $S_2 = Ae^{15 \cdot r} = 1.038.229 \cdot e^{15 \cdot \frac{\ln \frac{S}{A}}{5}} \approx 1.424.227,71$

Câu 58: Một bể nước có dung tích 1000 lít. Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

A. 3,14 giờ.

B. 4,64 giờ.

C. 4,14 giờ.

D. 3,64 giờ.

Lời giải

Chọn C

Trong giờ đầu tiên, vòi nước chảy được $60 \cdot 1 = 60$ lít nước.

Giờ thứ 2 vòi chảy với vận tốc 2 lít/1phút nên vòi chảy được $60 \cdot 2 = 120$ lít nước.

Giờ thứ 3 vòi chảy với vận tốc 4 lít/1phút nên vòi chảy được $60 \cdot 4 = 240$ lít nước.

Giờ thứ 4 vòi chảy với vận tốc 8 lít/1phút nên vòi chảy được $60 \cdot 8 = 480$ lít nước.

Trong 4 giờ đầu tiên, vòi chảy được: $60 + 120 + 240 + 480 = 900$ lít nước.

Vậy trong giờ thứ 5 vòi phải chảy lượng nước là $1000 - 900 = 100$ lít nước.

Số phút chảy trong giờ thứ 5 là $100 : 16 = 6,25$ phút

Đổi $6,25 : 60 \approx 0,1$ giờ

Vậy thời gian chảy đầy bể là khoảng 4,1 giờ.

Câu 59: Biết thể tích khí CO_2 năm 1998 là $V(m^3)$. 10 năm tiếp theo, thể tích CO_2 tăng $a\%$, 10 năm tiếp theo nữa, thể tích CO_2 tăng $n\%$. Thể tích khí CO_2 năm 2016 là

A. $V_{2016} = V \cdot \frac{(100+a)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}} (m^3)$.

B. $V_{2016} = V \cdot (1+a+n)^{18} (m^3)$.

C. $V_{2016} = V \cdot \frac{((100+a)(100+n))^{10}}{10^{20}} (m^3)$.

D. $V_{2016} = V + V \cdot (1+a+n)^{18} (m^3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

Sau 10 năm thể tích khí CO_2 là $V_{2008} = V \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = V \frac{(100+a)^{10}}{10^{20}}$

Do đó, 8 năm tiếp theo thể tích khí CO_2 là

$$\begin{aligned} V_{2016} &= V_{2008} \left(1 + \frac{n}{100}\right)^8 = V \frac{(100+a)^{10}}{10^{20}} \left(1 + \frac{n}{100}\right)^8 \\ &= V \frac{(100+a)^{10}}{10^{20}} \frac{(100+n)^8}{10^{16}} = V \frac{(100+a)^{10} \cdot (100+n)^8}{10^{36}} \end{aligned}$$

Câu 60: Tại Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Theo thống kê dân số thế giới tính đến tháng 01/2017, dân số Việt Nam có 94,970,597 người và có tỉ lệ tăng dân số là

1,03%. Nếu tỷ lệ tăng dân số không đổi thì đến năm 2020 dân số nước ta có bao nhiêu triệu người, chọn đáp án gần nhất.

- A. 98 triệu người. B. 100 triệu người. C. 102 triệu người. D. 104 triệu người.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức với $A = 94,970,597$, $n = 3$, $i = 1,03\%$ ta được $S \approx 98$ triệu người.

Câu 61: Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

- A. $7 \times \log_3 25$. B. $3^{\frac{25}{7}}$. C. $7 \times \frac{24}{3}$. D. $7 \times \log_3 24$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề bài số lượng bèo ban đầu chiếm 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 7 ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^1$ diện tích mặt hồ.

Sau 14 ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^2$ diện tích mặt hồ.

...

Sau $7 \times n$ ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì $0,04 \times 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 25 \Leftrightarrow n = \log_3 25$.

Vậy sau $7 \times \log_3 25$ ngày thì bèo vừa phủ kín mặt hồ

Câu 62: Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

- A. 35 (giờ). B. 45 (giờ). C. 25 (giờ). D. 15 (giờ).

Lời giải

Chọn C

Ta có $A = 500$, 5 giờ = 300 phút.

Sau 5 giờ, số vi khuẩn là $S(300) = 500 \cdot e^{300r} = 1500 \Rightarrow r = \frac{\ln 300}{3}$

Gọi t_0 (phút) là khoảng thời gian, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con. Ta có $121500 = 500 \cdot e^{rt_0}$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{\ln 243}{r} = \frac{300 \ln 243}{\ln 3} = 1500 \text{ (phút)}$$

= 25 (giờ).

Câu 63: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao x (đo bằng mét) so với mực nước biển được tính theo công thức $P = P_0 e^{xl}$, trong đó $P_0 = 760$ mmHg là áp suất không khí ở mực nước biển, l là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fanxipan cao mét là bao nhiêu?

A. 22,24 mmHg.

B. $y' = -6x + 2(2m-1)x - (m^2-1)$ mmHg.

C. 517,94 mmHg.

D. 530,23 mmHg.

Lời giải

Chọn D

Ở độ cao 1000 mét áp suất không khí là 672,71 mmHg

Nên $672,71 = 760e^{1000l}$

$$\Leftrightarrow e^{1000l} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow l = \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}$$

$$\text{Áp suất ở đỉnh Fanxipan } P = 760e^{3143l} = 760e^{3143 \cdot \frac{1}{1000} \ln \frac{672,71}{760}} \approx 717,94$$

Câu 64: Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu lần diện tích hiện nay?

A. $1 - \frac{4x}{100}$.B. $1 - \frac{x^4}{100}$.C. $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$.D. $1 - \left(\frac{x}{100}\right)^4$.

Lời giải

Chọn C

Gọi S_0 là diện tích rừng hiện tại.

$$\text{Sau } n \text{ năm, diện tích rừng sẽ là } S = S_0 \left(1 - \frac{x}{100}\right)^n.$$

Do đó, sau 4 năm diện tích rừng sẽ là $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^4$ lần diện tích rừng hiện tại.

Câu 65: Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: “Hạ thần chỉ xin Bệ Hạ thưởng cho một số hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất xin nhận 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 thì lại gấp đôi ô thứ 2, ... ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước”. Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan từ n ô đầu tiên (từ ô thứ nhất đến ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là

A. 18.

B. 19.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn C

Bài toán dùng tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân.

$$\text{Ta có: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + 1.2 + 1.2^2 + \dots + 1.2^{n-1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$S_n = 2^n - 1 > 10^6 \Leftrightarrow n > \log_2(10^6 + 1) \approx 19.93. \text{ Vậy } n \text{ nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài là } 20.$$

Câu 66: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ này ổn định trong 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

- A. 106,3 triệu người. B. 104,3 triệu người. C. 105,3 triệu người. D. 103,3 triệu người.

Lời giải

Chọn D

Ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng $Ae^{r.t} = 91,7.e^{1,2.10} = 103,39$.

Câu 67: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ?

- A. 1000. B. 850. C. 800. D. 900.

Lời giải

Chọn D

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } 300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5}$$

Tức tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \frac{\ln 3}{5}$ mỗi giờ.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10 \cdot \frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

Câu 68: Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

- A. $12 - \log 5$ (giờ). B. $\frac{12}{5}$ (giờ). C. $12 - \log 2$ (giờ). D. $12 + \ln 5$ (giờ).

Lời giải

Chọn A

Ta gọi u_i là số lá bèo ở giờ thứ i .

Ta có $u_0 = 1 = 10^0, u_1 = 10, u_2 = 10^2, \dots, u_{12} = 10^{12}$.

Ta có số lá bèo để phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $\frac{1}{5} \cdot 10^{12} \Rightarrow$ thời gian mà số lá bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $12 - \log 5$.

Câu 69: Số nguyên tố dạng $M_p = 2^p - 1$, trong đó p là một số nguyên tố, được gọi là số nguyên tố Mersenne (M.Mersenne, 1588 – 1648, người Pháp). Số $M_{6972593}$ được phát hiện năm 1999. Hỏi rằng nếu viết số đó trong hệ thập phân thì có bao nhiêu chữ số?

- A. 6972592 chữ số. B. 2098961 chữ số. C. 6972593 chữ số. D. 2098960 chữ số.

Lời giải

Chọn D

$M_{6973593}$ có số chữ số bằng số $2^{26972593}$ và là
 $[6973593 \cdot \log 2] + 1 = [6972593.0, 3010] + 1 = 2098960$ số.

Câu 70: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M = \log \frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A = 3$ (Ben) và $L_B = 5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

- A. 3,59 (Ben). B. 3,06 (Ben). C. 3,69 (Ben). D. 4 (Ben).

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $L_A < L_B \Rightarrow OA > OB$.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có:

$$L_A = \log \frac{k}{OA^2} \Rightarrow \frac{k}{OA^2} = 10^{L_A} \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}$$

$$L_B = \log \frac{k}{OB^2} \Rightarrow \frac{k}{OB^2} = 10^{L_B} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}$$

$$L_I = \log \frac{k}{OI^2} \Rightarrow \frac{k}{OI^2} = 10^{L_I} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}$$

$$\text{Ta có: } OI = \frac{1}{2}(OA + OB) \Rightarrow \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{10}^{L_I}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} + \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}} \right)$$

$$\Rightarrow L_I = -2 \log \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} + \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}} \right) \right] \Rightarrow L_I \approx 3,69.$$

Câu 71: Một lon nước soda $80^\circ F$ được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại $32^\circ F$. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t) = 32 + 48 \cdot (0,9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là $50^\circ F$?

- A. 1,56. B. 9,3. C. 2. D. 4.

Lời giải**Chọn B**

• Gọi t_0 là thời điểm nhiệt độ lon nước $80^\circ F \Rightarrow T(t_0) = 32 + 48 \cdot (0,9)^{t_0} = 80$ (1)

Gọi t_1 là thời điểm nhiệt độ lon nước $50^\circ F \Rightarrow T(t_1) = 32 + 48 \cdot (0,9)^{t_1} = 50$ (2)

• (1) $\Leftrightarrow (0,9)^{t_0} = 1 \Leftrightarrow t_0 = 0$

(2) $\Leftrightarrow (0,9)^{t_1} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow t_1 = \log_{0,9} \frac{3}{8} \approx 9,3$

Câu 72: Trung tâm luyện thi Đại học Diệu Hiền muốn gửi số tiền M vào ngân hàng và dùng số tiền thu được (cả lãi và tiền gốc) để trao 10 suất học bổng hằng tháng cho học sinh nghèo ở TP. Cần Thơ, mỗi suất 1 triệu đồng. Biết lãi suất ngân hàng là 1% /tháng, và Trung tâm Diệu Hiền bắt đầu trao học bổng sau một tháng gửi tiền. Để đủ tiền trao học bổng cho học sinh trong 10 tháng, trung tâm cần gửi vào ngân hàng số tiền M ít nhất là:

- A. 108500000 đồng. B. 119100000 đồng. C. 94800000 đồng. D. 120000000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi M (triệu). Lãi suất là a

Số tiền sau tháng thứ nhất và đã phát học bổng là $M(1+a)-10$

Số tiền sau tháng thứ hai và đã phát học bổng là

$$(M(1+a)-10)(1+a)-10 = M(1+a)^2 - 10(1+a) - 10$$

Số tiền sau tháng thứ ba và đã phát học bổng là

$$(M(1+a)^2 - 10(1+a) - 10)(1+a) - 10 = M(1+a)^3 - 10[(1+a)^2 + (1+a) + 1]$$

.....

Số tiền sau tháng thứ 10 và đã phát học bổng là

$$M(1+a)^{10} - 10[(1+a)^9 + \dots + (1+a) + 1] = M(1+a)^{10} - 10 \cdot \frac{(1+a)^{10} - 1}{a}$$

Theo yêu cầu đề bài

$$M(1+a)^{10} - 10 \cdot \frac{(1+a)^{10} - 1}{a} = 0 \Leftrightarrow M = \frac{10[(1+a)^{10} - 1]}{a(1+a)^{10}}$$

Thay $a=1\%$. Ta tìm được $M = 94713045 \approx 94800000$

Câu 73: Cường độ của một trận động đất được đo bằng độ Richter. Độ Richter được tính bằng công thức $M = \log A - \log A_0$, trong đó A là biên độ rung tối đa đo được bằng địa chấn kế và là biên độ chuẩn (hằng số). Vào ngày 3-12-2016, một trận động đất cường độ 2,4 độ Richter xảy ra ở khu vực huyện Bắc Trà My, tỉnh Quảng Nam; còn ngày 16-10-2016 xảy ra một trận động đất cường độ 3,1 độ Richter ở khu vực huyện Phước Sơn, tỉnh Quảng Nam. Biết rằng biên độ chuẩn được dùng chung cho cả tỉnh Quảng Nam, hỏi biên độ tối đa của trận động đất Phước Sơn ngày 16-10 gấp khoảng mấy lần biên độ tối đa của trận động đất Bắc Trà My ngày 3-12?

- A. 7 lần. B. 5 lần. C. 4 lần. D. 3 lần.

Lời giải

Chọn B

Gọi A_1 là biên độ rung tối đa ở Phước Sơn.

Gọi A_2 là biên độ rung tối đa ở Trà My.

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 3,1 \quad (1).$$

$$M_2 = \log A_2 - \log A_0 = 2,4 \quad (2).$$

$$\text{Lấy (1) - (2): } \log A_1 - \log A_2 = 0,7 \Leftrightarrow \log \frac{A_2}{A_1} = 0,7 \Leftrightarrow \frac{A_2}{A_1} = 10^{0,7}$$

Câu 74: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%.

Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = Ae^{Nr}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 150 triệu người?

- A. 2035. B. 2030. C. 2038. D. 2042.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có phương trình $150.000.000 = 78.685.800.e^{0,017N} \Leftrightarrow N \approx 37,95$ (năm)
Tức là đến năm 2038 dân số nước ta ở mức 150 triệu người.

Câu 75: Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân 1,2%/năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. 8 năm. B. 9 năm. C. 7 năm. D. 10 năm.

Lời giải

Chọn A.

Số dân của huyện A sau n năm là $x = 300.000(1 + 0,012)^n$.

$$x > 330.000 \Leftrightarrow 300.000(1 + 0,012)^n > 330.000 \Leftrightarrow n > \log_{1,012} \frac{33}{30} \Leftrightarrow n > 7,99.$$

Câu 76: Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức hợp tác và phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%, còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%.



tế

Biết rằng nếu nhiệt độ trái đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k.a^t$ (trong đó a, k là các hằng số dương). Nhiệt độ trái đất tăng thêm bao nhiêu độ C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 20%?

- A. $9,3^\circ\text{C}$. B. $7,6^\circ\text{C}$. C. $6,7^\circ\text{C}$. D. $8,4^\circ\text{C}$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} k.a^2 = 3\% \\ k.a^5 = 10\% \end{cases} \quad (1)$. Cần tìm t thỏa mãn $k.a^t = 20\%$.

$$\begin{aligned} \text{Từ (1)} \Rightarrow k &= \frac{3\%}{a^2} \text{ và } a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}. \text{ Khi đó } k.a^t = 20\% \Rightarrow \frac{3\%}{a^2}.a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \\ \Rightarrow t &= 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \Rightarrow t \approx 6,7. \end{aligned}$$

Câu 77: Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết chu kỳ bán rã của chất phóng xạ Po^{210} là 138 ngày đêm. Hỏi 0,168 gam Po^{210} sau 414 ngày đêm sẽ còn lại bao nhiêu gam?

A. 0,021.

B. 0,056.

C. 0,045.

D. 0,102.

Lời giải

Chọn A

Với $t = 414, T = 138, m_0 = 0,168 \text{ g}$.

Áp dụng công thức ta được $m(414) = 0,168 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{414}{138}} = 0,021$.