CHỦ ĐỀ 07 : TIẾP TUYẾN – SỰ TIẾP XÚC

LÍ THUYẾT

❖ **Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đồ thị hàm số:**

- Cho hàm số $(C): y=f\left(x\right)$ và điểm $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tại điểm M.
  - **Bước 1:** Tính đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến là $f'\left(x_0\right)$.
  - **Bước 2:** Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là: $y=f'\left(x\right)\left(x-x_0\right)+y_0$.

❖ **Viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước.**

- Bước 1: Gọi (Δ) là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k.
- Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'\left(x_0\right)=k \qquad (1)$.
- Giải (1) tìm x_0. Suy ra $y_0=f\left(x_0\right)$.
- Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=k\left(x-x_0\right)+y_0$

❖ **Điều kiện để hai hàm số tiếp xúc**

- Cho hai hàm số $(C): y=f\left(x\right)$ và $(C'): y=g\left(x\right)$. Đồ thị (C) và (C') **tiếp xúc nhau** khi chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} f\left(x\right)=g\left(x\right) \\ f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\end{cases}$ có nghiệm.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C). Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn1 , tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B. Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có: $y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=1$ và đường tiệm cận đứng $x=1$.

Giả sử $M(m;y_M)\in(C)$ $(m>1)$ $\Rightarrow y_M=\dfrac{m+1}{m-1}=1+\dfrac{2}{m-1}$; $y'(m)=-\dfrac{2}{(m-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1}$

$\Leftrightarrow 2x+(m-1)^2y-m^2-2m+1=0$.

Gọi A là giao điểm của Δ và đường tiệm cận ngang. Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y=1 \\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1} \end{cases}\Rightarrow x=2m-1 \Rightarrow A(2m-1;1)$.

Gọi B là giao điểm của Δ và đường tiệm cận đứng. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{2}{(m-1)^2}(x-m)+1+\dfrac{2}{m-1} \end{cases}\Rightarrow y=\dfrac{m+3}{m-1}=1+\dfrac{4}{m-1} \Rightarrow B\left(1;1+\dfrac{4}{m-1}\right)$.

Suy ra: $AB=\sqrt{(2-2m)^2+\left(\dfrac{4}{m-1}\right)^2}=\sqrt{4(m-1)^2+\dfrac{16}{(m-1)^2}}=\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$.

$d(O;\Delta)=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O;\Delta).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{|-m^2-2m+1|}{\sqrt{4+(m-1)^4}}.\dfrac{2}{|m-1|}\sqrt{(m-1)^4+4}$

$=\dfrac{|-m^2-2m+1|}{|m-1|}=\dfrac{m^2+2m-1}{m-1}$ (vì $m>1$) $=m+3+\dfrac{2}{m-1}=4+m-1+\dfrac{2}{m-1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $m-1$ và $\dfrac{2}{m-1}$: $(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 4+(m-1)+\dfrac{2}{m-1}\geq 4+2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng $4+2\sqrt{2}$ khi $\begin{cases} m-1=\dfrac{2}{m-1} \\ m>1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1+\sqrt{2}$.

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2\ (C)$. Xét hai điểm $A(a;y_A)$ và $B(b;y_B)$ phân biệt của đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song. Biết rằng đường thẳng AB đi qua. Phương trình của đường thẳng AB là

A. $x-y-2=0$. **B.** $x+y-8=0$. **C.** $x-3y+4=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A\left(a;\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{2}a^2+2\right)$ và $B\left(b;\frac{1}{2}b^3-\frac{3}{2}b^2+2\right)$ với $a\neq b$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại A và B song song với nhau.

Ta có $f'(a)=f'(b)\Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2-3a=\frac{3}{2}b^2-3b\Leftrightarrow a^2-b^2=2(a-b)\Leftrightarrow a+b=2$.

Gọi $I\left(\frac{a+b}{2};\frac{1}{4}(a^3+b^3)-\frac{3}{4}(a^2+b^2)+2\right)$ là trung điểm của đoạn AB.

Với $a+b=2$ ta có $I\left(1;\frac{8-6ab}{4}-\frac{3(4-2ab)}{4}+2\right)$ hay $I(1;1)$.

Lại có $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\frac{1}{2}(b^3-a^3)-\frac{3}{2}(b^2-a^2)\right)$ cùng phương với $\vec{u}\left(2;(a^2+b^2+ab)-3(a+b)\right)$.

Hay $\vec{u}(2;-2-ab)$. Nên đường thẳng AB có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2+ab;2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng AB là $(2+ab)(x-1)+2(y-1)=0$.

Do đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$ nên $4(2+ab)+4=0\Leftrightarrow 4ab+12=0\Leftrightarrow ab=-3$.

Thay $ab=-3$ vào phương trình AB ta được: $x-2y+1=0$.

Cách 2 – trắc nghiệm: Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+2\ (C)$ có điểm uốn là $I(1;1)$.

Do đó đường thẳng AB đi qua $D(5;3)$ và $I(1;1)$ có phương trình là $x-2y+1=0$.

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

A. 2020. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}, x\neq 1$.

Phương trình đường tiếp tuyến tại điểm x_0: $y=\dfrac{-3}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến tại điểm $A(0;a)$ là: $a=\dfrac{3x_0+\left(x_0+2\right)\left(x_0-1\right)}{\left(x_0-1\right)^2}$ $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

$\Rightarrow (a-1){x_0}^2-2(a+2)x_0+a+2=0$ (1).

Để từ điểm A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \Delta'>0\Rightarrow (a+2)^2-(a-1)(a+2)>0\Rightarrow a>-2$.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2(a+2)}{a-1} \\ x_1x_2=\dfrac{a+2}{a-1}\end{cases}$.

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía trục hoành thì: $y(x_1)y(x_2)<0$

$\Rightarrow \dfrac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0\Rightarrow \dfrac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0\Rightarrow \dfrac{9a+6}{-3}<0\Leftrightarrow a>\dfrac{-2}{3}$

Mà $a\in[-2018;2018]$; $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in[0;2018]$.

VÍ DỤ 4: Cho parabol (P): $y=x^2-2px+q$. Biết rằng qua $A(2;1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) và tập hợp tất cả các điểm $M(p;q)$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\le 0$. Biểu thức $T=3a-2b^2+c$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=2x-2p$.

Gọi $M\left(x_0;{x_0}^2-2px_0+q\right)$ là tiếp điểm, tiếp tuyến với (P) tại M có phương trình: $y=\left(2x_0-2p\right)\left(x-x_0\right)+x_0^2-2px_0+q\Leftrightarrow x_0^2-2xx_0+2px-q+y=0$.

Tiếp tuyến đi qua $A(2;1)$ nên: $x_0^2-4x_0+4p-q+1=0$ (1).

Vì qua $A(2;1)$ luôn kẻ được tiếp tuyến đến (P) nên phương trình (1) luôn có nghiệm.

Do đó: $\Delta'\ge 0$ $\Leftrightarrow 4p-q-3\le 0$ (2).

$M(p;q)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c\le 0$ nên $ap+bq+c\le 0$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{a}{4}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{-3}=m$, điều kiện: $(m>0)\Rightarrow\begin{cases} a=4m \\ b=-m \\ c=-3m\end{cases}$

$\Rightarrow T=-2m^2+9m=\dfrac{81}{8}-2\left(m-\dfrac{9}{4}\right)^2\le\dfrac{81}{8}$.

Vậy T không thể nhận giá trị bằng 11 nên ta chọn đáp án **C.**

VÍ DỤ 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-4x+4m-m^2$. Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]$ tiếp xúc với Ox.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-m\right)\left(x+m-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=4-m\end{array}\right.$.

Suy ra $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left[f\left(x\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=m\\f\left(x\right)=4-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-4x+4m-m^2=m & (1)\\x^2-4x+4m-m^2=4-m & (2)\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Nếu $m=4-m\Leftrightarrow m=2$.

Từ $(1);(2)$ suy ra $g\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-4x+2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{2}\\x=2+\sqrt{2}\end{array}\right.$. Hai nghiệm này là hai nghiệm kép của phương trình $g\left(x\right)=0$ nên đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ tiếp xúc với Ox.

Trường hợp 2: Nếu $m\neq 4-m\Leftrightarrow m\neq 2$.Khi đó $(1);(2)$ không có nghiệm chung.

Để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ tiếp xúc với $Ox\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép hoặc (2) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}m^2-3m+4=0 & (VN)\\m^2-5m+8=0 & (VN)\end{array}\right.$. Tức không có giá trị nào của m thỏa mãn trong trường hợp này.

Vây $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x^2+2\left(C\right)$. Và $A(a;-2)$. Từ A kẻ được ít nhất hai tiếp tuyến đến đồ thị $\left(C\right)$. Gọi S là tập các hợp các giá trị của a để tổng các hệ số góc bằng 9. Tính tổng các phần tử trong S.

A. $2\sqrt{6}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Δ là đường thẳng qua $A(a;-2)$ và có hệ số góc là k.

Đường thẳng Δ có phương trình: $y=k(x-a)-2$.

Vì Δ là tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$ nên hệ sau có nghiệm: $\left\{\begin{array}{l}x^3-3x^2+2=k\left(x-a\right)-2\\k=3x^2-6x\end{array}\right.$.

Suy ra $x^3-3x^2+2=\left(3x^2-6x\right)\left(x-a\right)-2\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)=\left(x-2\right)3x\left(x-a\right)$

$\left[\begin{array}{ll}x=2 & \\2x^2-\left(3a-1\right)x+2=0 & (*)\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow 9a^2-6a-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{5}{3}\\a=-1\end{array}\right.$.

Với $a=\dfrac{5}{3}$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=1$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=1$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.1^2-6.1\right)=-3$ (không thỏa mãn).

Với $a=-1$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-1$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=-1$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.(-1)^2+6.1\right)=9$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2**:** Phương trình $(*)$ có nghiệm bằng 2 khi $a=2$ khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là $x=2$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}$

Với $a=2$ thì có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=2$ có tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=2$ là: $\left(3.2^2-6.2\right)+\left(3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-6.\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$ (không tm).

Trường hợp 3**:** Phương trình $(*)$ có nghiệm khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2-6a-15>0 \\ a\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{5}{3} \\ a<-1 \end{array}\right. \\ a\neq 2 \end{cases} (**).$$

Khi đó có ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1;x_2$ và $x=2$ với $x_1;x_2$ là nghiệm phương trình $(*)$, có tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $x_1;x_2$ và $x=2$ là:

$$3{x_1}^2-6x_1+3{x_2}^2-6x_2=9 \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)^2-6(x_1+x_2)-6x_1x_2=9$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2-6\left(\frac{3a-1}{2}\right)-6=9 \Leftrightarrow 27a^2-54a-45=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3} \\ a=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (**) ta có $a=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

VÍ DỤ 7: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{14}{3}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M\left(x_1;y_1\right)$, $N\left(x_2;y_2\right)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=8\left(x_1-x_2\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $A\left(a;\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $d: y=\left(\dfrac{4}{3}a^3-\dfrac{28}{3}a\right)(x-a)+\dfrac{1}{3}a^4-\dfrac{14}{3}a^2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{1}{3}x^4-\frac{28}{3}x^2=\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x-a)+\frac{1}{3}a^4-\frac{14}{3}a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2\left(x^2+2ax+3a^2-14\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\\x^2+2ax+3a^2-14=0\,(1)\end{array}\right.$$

Đồ thị (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\6a^2-14\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)\setminus\left\{\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Theo đề bài: $y_1-y_2=8(x_1-x_2)\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a\right)(x_1-x_2)=8(x_1-x_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3-\frac{28}{3}a=8\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-1\\a=-2\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện: $\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=-2\end{array}\right.$. Vậy có 2 điểm A thỏa đề bài.

DẠNG 1 Bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2+x+2019$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là

A. $y=8x+2016$. **B.** $y=8x+2007$. **C.** $y=8x+2014$. **D.** $y=8x+2023$.

Câu 2. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x(4-x)^2$ tại điểm $M_0(1\,;9)$ là

A. $y=3x+12$. **B.** $y=3x+8$. **C.** $y=3x-3$. **D.** $y=3x+6$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-2$ là

A. $y=-40x-80.$ **B.** $y=-40x-57.$ **C.** $y=-40x+103$. **D.** $y=-40x+25$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^4+2x^2+3$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1\,;6)$ là

A. $y=8x-2$. **B.** $y=8x+5$. **C.** $y=8x-8$. **D.** $y=8x+14$.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là

A. $y=3x-5$. **B.** $y=-3x+13$. **C.** $y=3x+13$. **D.** $y=-3x+5$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\ln(x+1)+\ln x$ có đồ thị (C), điểm $M\in(C)$ có tung độ bằng $\ln 2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

A. $y=-\dfrac{3}{2}x+3+\ln 2$. **B.** $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}+\ln 2$. **C.** $y=3x-1$. **D.** $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x\ln(x-1)$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành là

A. $y=0$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=2x-4$. **D.** $y=2x+4$.

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x+1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng $y_0=-15$ là

A. $y=24x+9$. **B.** $y=24x+39$. **C.** $y=-15$. **D.** $y=24x-39$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-x^2+2x+5$ có đồ thị (C). Trong các tiếp tuyến của (C), thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tiếp xúc với (C) tại điểm có tung độ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{151}{27}$. **C.** $\dfrac{113}{27}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d: y=2$ là:

A. $y=\frac{5}{4\ln 2}x-\frac{5}{4\ln 2}$.
B. $y=\frac{1}{4\ln 2}x+2-\frac{5}{4\ln 2}$.
C. $y=x+2-\frac{5}{4\ln 2}$.
D. $y=\frac{5}{4\ln 2}x+2-\frac{5}{4\ln 2}$.

Câu 12. Biết đường thẳng $y=2\ln 4.x+m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=4^{2x}$ khi đó giá trị tham số m bằng

A. $2\ln 4-1$. **B.** 1 hoặc 3. **C.** 1. **D.** 1 hoặc $2\ln 4-1$.

Câu 13. Cho hàm số $y=x^3-4x^2+3x-3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng Δ: $2x+y+1=0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 14. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-7x+2$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc lớn nhất có phương trình là

A. $y=4x-1$. **B.** $y=4x+1$. **C.** $y=-4x-1$. **D.** $y=-4x+1$.

Câu 15. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+23$ tại điểm $A(2;-5)$ vuông góc với đường thẳng $x+4y-2019=0$. Tình $2a+b-4$.

A. 15. **B.** 23. **C.** -23. **D.** -15.

Câu 16. Đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ tại hai điểm phân biệt. Tìm tung độ tiếp điểm.

A. -35. **B.** 35. **C.** -19. **D.** 19.

Câu 17. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-\ln(2x-2)$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số vuông góc với đường thẳng $y=-x+2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 18. Cho hàm số $y=e^x-e^{-x}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là

A. $y=0$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x+2$. **D.** $y=2x$.

Câu 19. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-6x+1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0;1)$.

A. $y=-\frac{33}{4}x+11$. **B.** $y=-\frac{33}{4}x+12$. **C.** $y=-\frac{33}{4}x+1$. **D.** $y=-\frac{33}{4}x+2$.

Câu 20. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;0)$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 21. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x-2}{x-3}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(4;1)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 22. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(0;1)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 23. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2-9x-9m$ tiếp xúc với trục hoành. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 24. Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3ax+b$ với a,b là các số thực. Gọi M, N là hai điểm phân biệt thuộc (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại hai điểm đó có hệ số góc bằng 3. Biết khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng MN bằng 1. Khi đó giá trị lớn nhất của a^2-b^2 bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -2. **D.** $\frac{-2}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 26. Cho hàm số: $y=\frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ thỏa mãn phương trình $|x_0|-2=0$ là

A. $y=-\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}, y=4x+14$. **B.** $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$, $y=4x+1$.

C. $y=-\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$, $y=4x+1$. **D.** $y=-\frac{4}{9}x-\frac{2}{9}$, $y=-4x+14$.

Câu 27. Cho hàm số $y=4x^2(1-x)+x^4$ (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với parabol (P): $y=x^2$ là

A. $y=0$; $y=1$; $y=24x-6$. **B.** $y=9$; $y=1$; $y=24x-6$.

C. $y=0$; $y=5$; $y=24x-63$. **D.** $y=0$; $y=1$; $y=24x-63$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Gọi I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Gọi $M(x_0,y_0)$, $x_0<-3$ là một điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại A,B thỏa mãn $AI^2+IB^2=40$. Khi đó tích x_0y_0 bằng

A. -1. **B.** -12. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (H). Tìm trên Oy tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (H).

A. $M(0;1)$. **B.** $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$.

C. Không tồn tại. **D.** $M(0;-1)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến này cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại các điểm A, B phân biệt thỏa mãn $AB=\sqrt{82}.OB$.

A. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$ và $y=-\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$.
B. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$.
C. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{13}{9}$.
D. $y=-\frac{1}{9}x+\frac{17}{9}$ và $y=\frac{1}{9}x+\frac{25}{9}$.

Câu 31. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{x+1}$ tại điểm có hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình $16x^2-2x-8=6\sqrt{2x-1}$ là

A. $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$.
B. $y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$.
C. $y=\frac{9}{2}$.
D. $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{4}$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ không nhỏ hơn 3, biết tiếp tuyến cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB cân.

A. $y=x-5$.
B. $y=-x+5$.
C. $y=x-1$.
D. $y=-x+1$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\frac{3x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Biết $y=ax+b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $2a+b$.

A. -2.
B. 9.
C. 7.
D. 5.

Câu 34. Cho hàm số $y=\frac{3-x}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$. Tính tổng tất cả các giá trị của m thỏa mãn Δ là tiếp tuyến của (C).

A. 10.
B. 3.
C. -13.
D. -10.

Câu 35. Cho hàm số $y=x^2\left(x^2-2\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi $M(0;b)$ là điểm thuộc trục Oy mà từ đó kẻ được 4 tiếp tuyến đến $\left(C\right)$. Giá trị của b là

A. $0<b<1$.
B. $\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.
C. $-1<b<1$.
D. $0<b<\frac{1}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có hai tiếp tuyến của $\left(C\right)$ qua $A\left(a;2\right)$ với hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1+k_2+10k_1^2.k_2^2=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 7.
B. $\frac{7}{2}$.
C. $\frac{7-\sqrt{5}}{2}$.
D. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên thuộc trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ đến $\left(C\right)$ duy nhất một tiếp tuyến?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. Vô số.

Câu 38. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm a để từ điểm $A(0;a)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành.

A. $\begin{cases} a>-2 \\ a\neq 1 \end{cases}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1 \end{array}\right.$. **C.** $\begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1 \end{cases}$. **D.** $-2<a<-\dfrac{2}{3}$.

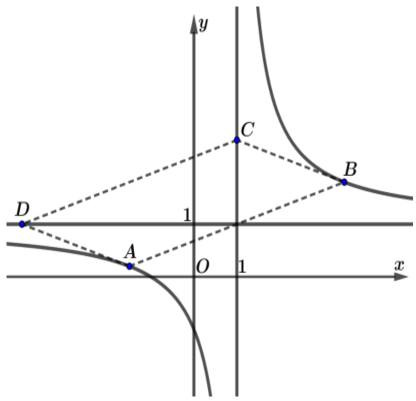
Câu 39. Cho hàm số $y=-x^3+mx^2-x-4m$ có đồ thị (C_m) và A là điểm cố định có hoành độ âm của (C_m). Giá trị của m để tiếp tuyến tại A của (C_m) vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất là

A. $m=-6$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\dfrac{-7}{2}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0;y_0)$ (với $x_0>1$) là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S=x_0+4y_0$.

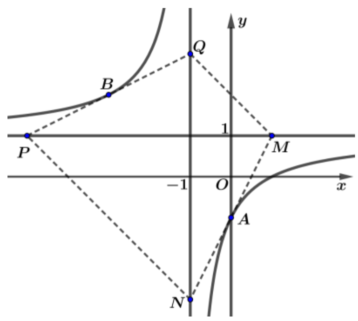
A. $S=8$. **B.** $S=\dfrac{17}{4}$. **C.** $S=\dfrac{23}{4}$. **D.** $S=2$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau $(x_A<x_B)$. Tiếp tuyến tại A cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại D, tiếp tuyến tại B cắt đường tiệm cận đứng của (C) tại C (tham khảo hình vẽ bên dưới). Chu vi tứ giác $ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng



A. 16. **B.** 8.
C. 20. **D.** 12.

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) lần lượt tại các điểm M, N, P, Q (tham khảo hình vẽ bên dưới). Diện tích tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất bằng



A. 16. **B.** 32. **C.** 8.
D. 4.

Câu 43. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+3m$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2 **D.** Vô số.

Câu 44. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành?

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=e^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$.

A. $m=e$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-e$. **D.** $m=-1$.

Câu 46. Số tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+4$ và $(C_2): y=x^2+4$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 47. Cho hai hàm số $y=x^2\ (C_1)$ và $y=\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}\ (C_2)$. Phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (C_1), (C_2) có hệ số góc dương là

A. $y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{16}$. **B.** $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. **C.** $y=\dfrac{-1}{4}x-\dfrac{1}{16}$. **D.** $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

Câu 48. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$, biết $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)$ là đường thẳng nào sau đây?

A. $3x-7y+6=0$. **B.** $x-7y-6=0$. **C.** $x+7y+6=0$. **D.** $3x+7y+6=0$.

Câu 49. Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x)-2.f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

A. $y=-3x$. **B.** $y=2x-4$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x$.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C). M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại A,B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây ***đúng***?

A. $a-b+4=0$. **B.** $2a-b<0$. **C.** $a^2+b^2=100$. **D.** $\log_a b=2$.

Câu 51. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+4m$ có đồ thị (C_m). Tìm tham số m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $(d): y=3$ tại hai điểm phân biệt

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=16\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=13\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=13\end{array}\right.$.

Câu 52. Giá trị m để đường thẳng $\Delta: y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị $(C): y=-x^3+3x^2-2$ tại 3 điểm phân biệt $A(2;2),B,C$ sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Câu 53. Cho hàm số $y=\left(-x^2-2x-2\right)e^{-x}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị (C) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B (với A, B khác O) sao cho $\cos ABO=\frac{5}{\sqrt{26}}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

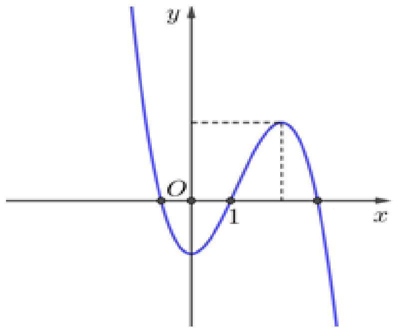
Câu 54. Biết rằng tồn tại duy nhất một giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2-6x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x^2}$. Giá trị m thuộc khoảng nào được cho dưới đây?

A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(-6;0)$. **C.** $(0;6)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Câu 56. Cho hàm đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị (C). Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 1. Hỏi Δ và (C) có bao nhiêu điểm chung?



A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 57. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C), điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y=1-2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B. Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là H. Độ dài đoạn OH là

A. $\sqrt{34}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Câu 58. Cho hàm số $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-10;10]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa ba điểm A, B, C?

A. 19. **B.** 1. **C.** 20. **D.** 10.

Câu 59. Cho đồ thị $(C): y=x^3-3x^2$. Có bao nhiêu số nguyên $b\in(-10;10)$ để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 17. **D.** 16.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.B	4.A	5.B	6.D	7.B	8.C	9.A	10.B
11.D	12.C	13.A	14.D	15.D	16.D	17.B	18.D	19.C	20.A
21.B	22.A	23.B	24.D	25.B	26.D	27.D	28.B	29.B	30.A
31.A	32.B	33.D	34.D	35.D	36.C	37.B	38.C	39.C	40.A
41.D	42.A	43.B	44.D	45.D	46.D	47.D	48.C	49.D	50.A
51.D	52.D	53.B	54.D	55.B	56.B	57.D	58.C	59.C	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn D

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=2015$. Ta có $y'=3x^2-4x+1\Rightarrow y'(-1)=8$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ có phương trình $y=8(x+1)+2015$ hay $y=8x+2023$.

Câu 2. Chọn D

Ta có $y=x(4-x)^2=x^3-8x^2+16x\Rightarrow y'=3x^2-16x+16$ nên hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là: $y'(1)=3$.

Tiếp tuyến tại điểm $M_0(1\,;4)$ có phương trình $y=3(x-1)+9$ hay $y=3x+6$.

Câu 3. Chọn B

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=23$. Ta có $y'=4x^3+4x\ \Rightarrow y'(-2)=-40$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=-2$ là $y=-40(x+2)+23$ hay $y=-40x-57$.

Câu 4. Chọn A

Ta có $y'=4x^3+4x$

Với $x_0=1\Rightarrow y'(x_0)=y'(1)=8$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1\,;6)$ là $y=8(x-1)+6$ hay $y=8x-2$.

Câu 5. Chọn B

Điều kiện $x\neq 2$. **Hoành độ** tiếp điểm là nghiệm của phương trình

$\dfrac{x+1}{x-2}=4\Rightarrow x+1=4(x-2)\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn)

Ta có: $y'=\dfrac{-3}{(x-2)^2}\Rightarrow y'(3)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y=-3(x-3)+4$ hay $y=-3x+13$.

Câu 6. Chọn D

Điều kiện $x\neq 1$.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình

$\frac{1}{x-1}=1\Rightarrow x-1=1\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Ta có: $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(2)=-1$.

Phương trình tiếp tuyến $y=-1(x-2)+1$ hay $y=-x+3$.

Tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(3\,;0); B(0\,;3)$.

Do đó diện tích tam giác OAB là $\frac{9}{2}$.

Câu 7. Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Hoành độ tiếp điểm M là nghiệm phương trình $\ln x+\ln(x+1)=\ln 2\ ,(x>0)$

$\ln x+\ln(x+1)=\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$y=\ln x+\ln(x+1)\Rightarrow y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\Rightarrow y'(1)=\frac{3}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm $y=\frac{3}{2}(x-1)+\ln 2$ hay $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\ln 2$.

Câu 8. Chọn C

Điều kiện: $x>1$. **Tung độ** tiếp điểm bằng 0.

Hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm phương trình

$x\ln(x-1)=0\Leftrightarrow \ln(x-1)=0\Leftrightarrow x=2$ (do $x>1$)

$y'=\ln(x-1)+\frac{x}{x-1}\Rightarrow y'(2)=2$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=2(x-2)$ hay $y=2x-4$

Câu 9. Chọn A

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, do $y_0=-15$ nên hoành độ x_0 là nghiệm của phương trình

$y_0=-15\Leftrightarrow x_0^3-6x_0^2+9x_0+1=-15\Leftrightarrow x_0^3-6x_0^2+9x_0+16=0\Leftrightarrow x_0=-1$

Ta có $y'=3x^2-12x+9$ nên $y'(-1)=24$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=24(x+1)-15=24x+9$.

Câu 10. Chọn B

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm trên (C). Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc k là

$k=y'(x_0)=3x_0^2-2x_0+2=3\left(x_0^2-\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{3}=3\left(x_0-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ge\frac{5}{3}$

Do đó ta có $\min k=\frac{5}{3}$ đạt được khi $x_0=\frac{1}{3}\Rightarrow y_0=\frac{151}{27}$.

Câu 11. Chọn D

Gọi $M(a,b)$ là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng d.

Ta có $M\in(C)\Rightarrow b=\log_2\frac{a+3}{2-a},(-3<a<2)$ và $M\in(d)\Rightarrow b=2\Rightarrow a=1\Rightarrow M(1;2)$.

Phương trình cần là $y = y'(1).(x-1)+2$.

Lại có $y' = \dfrac{5}{(2-x)(x+3)\ln 2} \Rightarrow y'(1) = \dfrac{5}{4\ln 2}$. Vậy $y = \dfrac{5}{4\ln 2}x + 2 - \dfrac{5}{4\ln 2}$.

Câu 12. Chọn C

Đường thẳng $y = 2\ln 4.x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4.x + m \\ 2.4^{2x}\ln 4 = 2\ln 4 \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $\begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4.x + m \\ 2.4^{2x}\ln 4 = 2\ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{2x} = 2\ln 4.x + m \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Câu 13. Chọn A

Ta có : $y' = 3x^2 - 8x + 3$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -2$, hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $3x^2 - 8x + 3 = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = -3$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -2(x-1) - 3 \Leftrightarrow y = -2x - 1$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).

Với $x = \dfrac{5}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{121}{27}$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -2\left(x - \dfrac{5}{3}\right) - \dfrac{121}{27} \Leftrightarrow y = -2x - \dfrac{31}{27}$.

Câu 14. Chọn D

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x - 7 = -3(x-1)^2 - 4 \le -4$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1 \Rightarrow y = -3$.

Do đó, tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc lớn nhất bằng -4 và là tiếp tuyến tại điểm $M(1\,;-3)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -4(x-1) - 3 \Leftrightarrow y = -4x + 1$.

Câu 15. Chọn D

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

Đường thẳng $x + 4y - 2019 = 0$ có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $f'(2) = 4 \Leftrightarrow 4(8a + b) = 4 \Leftrightarrow 8a + b = 1$.

$A(2;-5)$ thuộc đồ thị hàm số nên $16a + 4b + 23 = -5 \Leftrightarrow 4a + b = -7$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 8a + b = 1 \\ 4a + b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -15 \end{cases} \Rightarrow 2a + b - 4 = -15$.

Câu 16. Chọn D

Cách 1 :

Đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đường cong $(C): f(x) = x^4 - 8x^2 + 35$ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 8x^2 - 35 = m \\ \left(x^4 - 8x^2 - 13\right)' = m' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 - 35 = m & (1) \\ 4x^3 - 16x = 0 & (2) \end{cases}.$$

Từ (2) $\Rightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Với $x=0$ thay vào (1) ta được $m=35$.

Với $x=2$ thay vào (1) ta được $m=19$.

Với $x=-2$ thay vào (1) ta được $m=19$.

Vì đường thẳng $y=m$ tiếp xúc với đồ thị $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ tại hai điểm phân biệt, tức là phương trình (2) có 2 nghiệm kép. Thử lại, ta có $m=19$ thỏa mãn.

Khi đó, tung độ tiếp điểm là $y=19$.

Cách 2:

Dựa vào dạng đồ thị của hàm trùng phương ta thấy đường thẳng $y=m$ (song song với trục Ox) tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): f(x)=x^4-8x^2+35$ chỉ có thể tại hai điểm cực tiểu hoặc điểm cực đại. Do đường thẳng $y=m$ tiếp xúc tại hai điểm phân biệt nên $y=m$ đi qua hai điểm cực tiểu.

Ta có $f'(x)=4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	19	$\nearrow$	35	$\searrow$	19	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận: Đường thẳng $y=19$ tiếp xúc với (C) tại hai điểm cực tiểu hay tung độ tiếp điểm là 19.

Câu 17. Chọn B

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(2x-2)$. Điều kiện $x>1$.

Đường thẳng $y=-x+2$ có hệ số góc $k_1=-1$, suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k_2=1$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $f'(x)=1$.

Ta có $f'(x)=1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x-1}=1 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=2$ (do điều kiện $x>1$).

Vậy có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Chọn D

Gọi $M\left(a;e^a-e^{-a}\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=e^x+e^{-x}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M là $y'(a)=e^a+e^{-a}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $e^a+e^{-a}\ge 2\sqrt{e^a e^{-a}}=2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $e^a=e^{-a} \Leftrightarrow a=0$.

Vậy tiếp tuyến tại điểm $M\left(0;0\right)$ có hệ số góc nhỏ nhất $k=2$.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=2x$.

Câu 19. Chọn C

Gọi $M\left(x_0;x_0^3+3x_0^2-6x_0+1\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có: $y'=3x^2+6x-6$.

Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại M có dạng: $y=(3x_0^2+6x_0-6)(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$.

Tiếp tuyến đi qua $N(0;1)\Rightarrow 1=(3x_0^2+6x_0-6)(-x_0)+x_0^3+3x_0^2-6x_0+1$

$\Leftrightarrow 2x_0^3+3x_0^2=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=-\dfrac{3}{2}$.

Với $x_0=0$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-6x+1$.

Với $x_0=-\dfrac{3}{2}$, suy ra phương trình tiếp tuyến: $y=-\dfrac{33}{4}x+1$.

Câu 20. Chọn A

Gọi $M\left(x_0;x_0^3-3x_0^2+2\right)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta có $y'=3x^2-6x$.

Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại M có dạng: $y=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(x-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2$.

Tiếp tuyến đi qua $A\left(1;0\right)\Rightarrow\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(1-x_0\right)+x_0^3-3x_0^2+2=0$

$\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=1$. Vậy có duy nhất một tiếp tuyến cần tìm.

Câu 21. Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{x^2-6x+5}{\left(x-3\right)^2}$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại M có dạng: $y=\dfrac{{x_0}^2-6x_0+5}{\left(x_0-3\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}$

Tiếp tuyến đi qua $A\left(4;1\right)\Rightarrow 1=\dfrac{{x_0}^2-6x_0+5}{\left(x_0-3\right)^2}\left(4-x_0\right)+\dfrac{{x_0}^2-x_0-2}{x_0-3}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq 3\\5{x_0}^2-22x_0+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=\dfrac{17}{5}\end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm.

Câu 22. Chọn A

Ta có $y'=\dfrac{2}{\left(x+1\right)^2}$. Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0}{x_0+1}\right)$ là tọa độ tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại M có dạng: $y=\dfrac{2}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0}{x_0+1}$

Tiếp tuyến đi qua $A\left(0;1\right)\Rightarrow 1=\dfrac{2}{\left(x_0+1\right)^2}\left(-x_0\right)+\dfrac{2x_0}{x_0+1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\\left(x_0+1\right)^2=-2x_0+2x_0\left(x_0+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0\neq -1\\{x_0}^2-2x_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1-\sqrt{2}\\x_0=1+\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Suy ra tích hệ số góc cần tìm là: $y'\left(1-\sqrt{2}\right).y'\left(1+\sqrt{2}\right)=\dfrac{2}{\left(1-\sqrt{2}+1\right)^2}.\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{2}+1\right)^2}=1$.

Câu 23. Chọn B

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+mx^2-9x-9m=0 & (1) \\ 3x^2+2mx-9=0 & (2) \end{cases}$

Giải $(1)\Leftrightarrow (x-3)(x+3)(x+m)=0$.

Với $x=3$, thay vào (2) ta được $m=-3$.

Với $x=-3$, thay vào (2) ta được $m=3$.

Với $x=-m$, thay vào (2) ta được $m=\pm 3$.

Vậy $S=\{-3;3\}$. Khi đó tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 24. Chọn D

Giả sử $M(x_1\,;y_1),N(x_2\,;y_2)$.

Ta có $y'=3x^2+3a$ suy ra $3x_1^2+3a=3x_2^2+3a=3 \Rightarrow x_1^2+a=x_2^2+a=1$.

Mặt khác, $y_1=x_1^3+3ax_1+b=x_1^3+ax_1+2ax_1+b=x_1\left(x_1^2+a\right)+2ax_1+b=(2a+1)x_1+b$.

Tương tự $y_2=(2a+1)x_2+b$.

Suy ra phương trình đường thẳng MN là $(2a+1)x-y+b=0$.

Giả thiết có $d(O,MN)=1\Leftrightarrow \dfrac{|b|}{\sqrt{(2a+1)^2+1}}=1\Leftrightarrow b^2=4a^2+4a+2$.

Vậy $a^2-b^2=-3a^2-4a-2=-3\left(a+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}\le\dfrac{-2}{3}$.

Giá trị lớn nhất của a^2-b^2 bằng $\dfrac{-2}{3}$ khi $a=\dfrac{-2}{3},b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 25. Chọn B

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+1}$ suy ra $t>0$ (vì $\sqrt{x^2+1}>|x|$ với mọi x và $|x|+x\ge 0$ với mọi x).

Ta có $\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-1$ suy ra $x-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{-1}{t}$.

Vậy $f(t)=\dfrac{-1}{t}$ với $t>0$ hay $f(x)=\dfrac{-1}{x}$ với $x>0$.

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$ suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$ là đường thẳng Δ có phương trình: $y=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4x-4$.

Khi đó Δ cắt Ox tại điểm $A(1\,;0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0\,;-4)$ nên diện tích của ΔOAB là $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}|1|.|-4|=2$.

Câu 26. Chọn D

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0\,;y_0) \in (C), (x_0 \neq 1)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$y = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$ với $y'(x_0) = \dfrac{-4}{(x_0-1)^2}$ và $y_0 = \dfrac{2x_0+2}{x_0-1}$

Do $|x_0| - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$, hay $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$, $M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$ là $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là $y = -4x + 14$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$, $y = -4x + 14$.

Câu 27. Chọn D

Ta có: $y = 4x^2(1-x) + x^4 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$. Gọi $M(x_0;y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ là $y = (4x_0^3 - 12x_0^2 + 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và parabol (P): $y = x^2$:

$$x_0^4 - 4x_0^3 + 4x_0^2 = x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 - 4x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right..$$

- $x_0 = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.
- $x_0 = 1$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 1$.
- $x_0 = 3$ ta có phương trình tiếp tuyến là: $y = 24x - 63$.

Câu 28. Chọn B

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị tại $M(x_0, y_0)$ là $y = \dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0-1}{x_0+1}$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang $y = 2$ là $A(2x_0+1;2)$, $IA = 2|x_0+1|$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng $x = -1$ là $B\left(-1;\dfrac{2x_0-4}{x_0+}\right)$, $IB = \dfrac{6}{|x_0+1|}$.

Theo bài ra $AI^2 + IB^2 = 40 \Leftrightarrow 4(x_0+1)^2 + \dfrac{36}{(x_0+1)^2} = 40 \Leftrightarrow 4(x_0+1)^4 - 40(x_0+1)^2 + 36 = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x_0+1)^2 = 9 \\ (x_0+1)^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1 = \pm 3 \\ x_0+1 = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2; x_0 = -4 \\ x_0 = 0; x_0 = -2 \end{array}\right..$$

Do $x_0 < -3$ nên $x_0 = -4$ suy ra điểm $M(-4;3)$. Vậy $x_0 y_0 = -12$.

Câu 29. Chọn B

Ta gọi $M(0;a)$ là điểm cần tìm. Phương trình đường thẳng d đi qua M có dạng $y = kx + a$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến duy nhất của $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = kx + a \quad (1) \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} = k \quad (2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Thế (2) vào (1) ta có phương trình $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}x + a \ (*)$

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(a+1)x + a + 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ (**)

Yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình (**) có một nghiệm $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta = 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; a = 1 \\ \begin{cases} x = 0; a = -1 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; a = 1 \\ x = 0; a = -1 \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thõa mãn là $M_1(0;1)$ và $M_2(0;-1)$.

Câu 30. Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Gọi $M\left(a; \dfrac{2a-1}{a-1}\right), (a \neq 1)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = \dfrac{-1}{(a-1)^2}(x-a) + \dfrac{2a-1}{a-1}$.

Tiếp tuyến cắt trục Ox tại $A(2a^2 - 2a + 1; 0)$; cắt trục Oy tại $B\left(0; \dfrac{2a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2}\right)$.

Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$. Mặt khác $AB = \sqrt{82}.OB$

$\Rightarrow OA^2 + OB^2 = 82.OB^2 \Leftrightarrow OA = 9OB$ (1).

Từ (1) ta có $2a^2 - 2a + 1 = 9.\dfrac{2a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = 4 \end{array}\right.$

Với $a = -2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{13}{9}$.

Với $a = 4$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{25}{9}$.

Câu 31. Chọn A

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$. Ta có $16x^2 - 2x - 8 = 6\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 16x^2 = \left(3 + \sqrt{2x-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-1} + 3 - 4x\right)\left(\sqrt{2x-1} + 3 + 4x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 4x - 3$ vì $\sqrt{2x-1} + 3 + 4x > 0 \ \forall x \geq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2-26x+10=0 \\ x \ge \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Lại có $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Với $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ tại $M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ là

$y=\dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}$.

Câu 32. Chọn B

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ ($x_0 \ge 3$) có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Do tiếp tuyến cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân nên tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=x$.

Suy ra $\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}=\dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=3 \end{array}\right.$. So điều kiện thì ta loại $x_0=1$.

Với $x_0=3$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-x+5$.

Câu 33. Chọn D

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Ta có $f'(x_0)=\dfrac{-2}{(x_0-1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x_0-1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất mà x_0 phải là số nguyên dương khác 1 nên $x_0=2$ thỏa mãn yêu cầu.

Suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=-2(x-2)+5 \Leftrightarrow y=-2x+9$.

Câu 34. Chọn D

Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Đường thẳng $\Delta: y=-4x+m$ là tiếp tuyến của (C) suy ra $f'(x_0)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x-0)+3 \Leftrightarrow y=-4x+3$.

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến là $y=-4(x+2)-5 \Leftrightarrow y=-4x-13$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu là $m=3; m=-13$ suy ra tổng các giá trị m là -10.

Câu 35. Chọn D

Phương trình đường thẳng d qua $M(0;b)$ có hệ số góc k là $d: y=kx+b$.

d là tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 = kx + b \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases} \Rightarrow b = -3x^4 + 2x^2 \ (1).$$

Xét hàm số: $g(x) = -3x^4 + 2x^2$.

$$g'(x) = -12x^3 + 4x;\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = b$ là đường thẳng song song với trục hoành.

Qua $M(0;b)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) khi phương trình (1) có 4 nghiệm hay đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $g(x)$ tại 4 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi $0 < b < \dfrac{1}{3}$.

Câu 36. Chọn C

Đường thẳng d đi qua $A(a;2)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-a) + 2$.

(d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-a) + 2 = \dfrac{x+1}{x-1} \\ k = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-2(x-a)}{(x-1)^2} + 2 = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 6x + 2a + 3 = 0 (1) \end{cases}.$$

Có 2 tiếp tuyến của (C) qua A suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2a - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3 \\ a \neq 1 \end{cases} \ (*).$$

Hệ số góc của các tiếp tuyến là $k_1 = \dfrac{-2}{(x_1-1)^2}$, $k_2 = \dfrac{-2}{(x_2-1)^2}$ với x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Ta có:

$$k_1 + k_2 = -2\left[\frac{1}{(x_1-1)^2} + \frac{1}{(x_2-1)^2}\right] = -2\left[\frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 2}{(x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)^2}\right] = \frac{2a-10}{(a-1)^2}.$$

$$k_1.k_2 = \frac{4}{\left[(x_1-1)(x_2-1)\right]^2} = \frac{4}{\left[x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1\right]^2} = \frac{1}{(a-1)^2}.$$

Từ giả thiết: $k_1+k_2+10k_1^2.k_2^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{2a-10}{(a-1)^2}+\dfrac{10}{(a-1)^4}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 1 \\ 2a^3-14a^2+22a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được: $a=0$ hoặc $a=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng $\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 37. Chọn B

Đường thẳng (d) qua $A(a;0)\in Ox$, $a\in\mathbb{Z}$ có hệ số góc k có phương trình là $y=k(x-a)$.

(d) là tiếp tuyến duy nhất với (C) khi hệ phương trình sau có duy nhất nghiệm

$\begin{cases} x^3-3x^2+4=k(x-a) \\ 3x^2-6x=k \end{cases} \quad (I)$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2-x-2)=k(x-a) \\ 3x(x-2)=k \end{cases} \Rightarrow (x-2)\left[2x^2-(3a-1)x+2\right]=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x^2-(3a-1)x+2=0 \quad (*) \end{array}\right.$.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x=2$

Trường hợp 1: Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow -1<a<\dfrac{5}{3}$. Vì $a\in\mathbb{Z}$ nên $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ \dfrac{3a-1}{4}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing$.

Vậy tồn tại hai điểm có tọa độ nguyên thỏa mãn là $A(0;0)$ hoặc $A(1;0)$.

Câu 38. Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)$ có phương trình:

$y=-\dfrac{3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến đi qua $A(0;a)$ nên $\dfrac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}=a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ 3x_0 + (x_0+2)(x_0-1) = a(x_0-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 1 \\ (a-1)x_0^2 - 2(a+2)x_0 + a + 2 = 0 \, (1) \end{cases}$.

Để từ $A(0;a)$ kẻ đến (C) hai tiếp tuyến thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \Delta' = (a+2)^2 - (a-1)(a+2) > 0 \\ (a-1) - 2(a+2) + a + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases} . (*)$

Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của phương trình (1).

Khi đó tọa độ các tiếp điểm là $E\left(x_1; \frac{x_1+2}{x_1-1}\right); F\left(x_2; \frac{x_2+2}{x_2-1}\right)$.

Để các tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi $\frac{x_1+2}{x_1-1} . \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{a+2}{a-1} + 2\frac{2(a+2)}{a-1} + 4}{\frac{a+2}{a-1} - \frac{2(a+2)}{a-1} + 1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow 9a + 6 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}$. Kết hợp với điều kiện $(*)$ suy ra $\begin{cases} a > -\frac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$.

Câu 39. Chọn C

Gọi $A(x_0; y_0)$ với $x_0 < 0$ là điểm cố định cần tìm.

$\Rightarrow y_0 = -x_0^3 + mx_0^2 - x_0 - 4m, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2 - 4)m - x_0^3 - x_0 - y_0 = 0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 4 = 0 \\ -x_0^3 - x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \; (\text{vì } x_0 < 0) \\ y_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow A(-2;10)$.

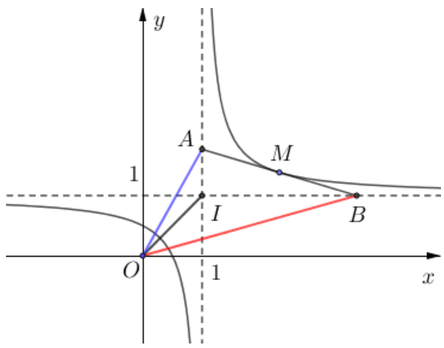
Ta có $y' = -3x^2 + 2mx - 1 \Rightarrow y'(-2) = -4m - 13$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $A(-2;10)$ là $y = (-4m-13)(x+2) + 10$ hay $y = (-4m-13)x - 8m - 16 \; (\Delta)$.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất có phương trình $d: y = x$.

Vì $\Delta \perp d \Leftrightarrow -4m - 13 = -1 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 40. Chọn A



Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Tiệm cận đứng: $x = 1 \; (d_1)$, tiệm cận ngang: $y = 1 \; (d_2) \Rightarrow I(1;1)$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(2x-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng $y=\dfrac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{2x_0-2}$

$A=\Delta\cap d_1\Rightarrow A\left(1;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)$; $B=\Delta\cap d_2\Rightarrow B(2x_0-1;1)$; $\overrightarrow{IB}=(2x_0-2;0)$, $\overrightarrow{IA}=\left(0;\dfrac{1}{x_0-1}\right)$.

Ta có $S_{\Delta OIB}=8S_{\Delta OIA}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.OI.IB.\sin OIB=8.\dfrac{1}{2}.OI.IA.\sin OIA$

$\Leftrightarrow IB=8IA$ (vì $OIB=OIA=135^0$) $\Leftrightarrow|2x_0-2|=8\left|\dfrac{1}{x_0-1}\right|$

$\Leftrightarrow(x_0-1)^2=4\Rightarrow x_0=3$ (do $x_0>1$) $\Rightarrow y_0=\dfrac{5}{4}\Rightarrow S=x_0+4y_0=3+4.\dfrac{5}{4}=8$

Câu 41. Chọn D

Tiệm cận đứng: $x=1$ (d_1), tiệm cận ngang: $y=1$ (d_2).

Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của (C) tại A, B. Ta có $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

$\Delta_1//\Delta_2\Rightarrow y'(x_A)=y'(x_B)\Leftrightarrow\dfrac{-2}{(x_A-1)^2}=\dfrac{-2}{(x_B-1)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_A=x_B\ (l)\\x_A+x_B=2\end{array}\right.$.

Đặt $x_A=m$ với $m<1$. Suy ra $A\left(m;\dfrac{m+1}{m-1}\right)$, $B\left(2-m;\dfrac{m-3}{m-1}\right)$.

Tiếp tuyến tại A là $\Delta_1:y=\dfrac{-2}{(m-1)^2}(x-m)+\dfrac{m+1}{m-1}$.

Tiếp tuyến tại B là $\Delta_2:y=\dfrac{-2}{(m-1)^2}(x+m-2)+\dfrac{m-3}{m-1}$.

$D=\Delta_1\cap d_2\Rightarrow D(2m-1;1)$; $C=\Delta_2\cap d_1\Rightarrow C\left(1;\dfrac{m-5}{m-1}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\left(2-2m;\dfrac{-4}{m-1}\right)$ $\Rightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{BC}=\left(m-1;\dfrac{-2}{m-1}\right)$. Chu vi P hình bình hành $ABCD$ bằng

$$P=2(AB+BC)=2\left(\sqrt{4(m-1)^2+\frac{16}{(m-1)^2}}+\sqrt{(m-1)^2+\frac{4}{(m-1)^2}}\right)=6\sqrt{(m-1)^2+\frac{4}{(m-1)^2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm $(m-1)^2$ và $\dfrac{4}{(m-1)^2}$, ta có:

$P\ge6\sqrt{2\sqrt{(m-1)^2.\dfrac{4}{(m-1)^2}}}=12$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow(m-1)^2=\dfrac{4}{(m-1)^2}\Leftrightarrow m=1-\sqrt{2}$.

Câu 42. Chọn A

Tiệm cận đứng: $x=-1\ (d_1)$, tiệm cận ngang: $y=1\ (d_2)$. Ta có $y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Xét điểm $A\left(a-1;\dfrac{a-2}{a}\right)\in(C)$, $a>0$. Tiếp tuyến tại A là Δ_1: $y=\dfrac{2}{a^2}(x-a+1)+\dfrac{a-2}{a}$

$M=\Delta_1\cap d_2\Rightarrow M(2a-1;1)$; $N=\Delta_1\cap d_1\Rightarrow N\left(-1;\dfrac{a-4}{a}\right)$.

Xét điểm $B\left(b-1;\dfrac{b-2}{b}\right)\in(C)$, $b<0$. Tiếp tuyến tại B là $\Delta_2: y=\dfrac{2}{b^2}(x-b+1)+\dfrac{b-2}{b}$

$P=\Delta_2\cap d_2\Rightarrow P(2b-1;1)$; $Q=\Delta_1\cap d_1\Rightarrow Q\left(-1;\dfrac{b-4}{b}\right)$.

$\overrightarrow{MP}=(2b-2a;0)$, $\overrightarrow{NQ}=\left(0;\dfrac{4}{a}-\dfrac{4}{b}\right)$

Ta có $MP\perp NQ\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MP.NQ=\dfrac{1}{2}.2|a-b|.4\left|\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right|=\dfrac{4(a-b)^2}{-ab}=\dfrac{4\left(a^2+b^2-2ab\right)}{-ab}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm a^2 và b^2, ta có: $a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2.b^2}=-2ab$

$\Rightarrow S_{MNPQ}\ge\dfrac{4(-4ab)}{-ab}=16$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $a=-b$.

Câu 43. Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$; $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị đó có hai điểm cực trị (trong bài toán này là hai cực tiểu) thuộc trục hoành.

Khi đó ta có $\begin{cases}m>0\\f\left(\sqrt{m}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m^2-2m^2+3m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m(3-m)=0\end{cases}\Rightarrow m=3.$

Vậy có 1 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Chọn D

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}=0\\ \dfrac{\left(4x^3-3x^2-2m^2x+m^2\right).\left(x^2+1\right)-\left(x^4-x^3-m^2x^2+m^2x\right).2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\end{cases}(I).$$

Ta có $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3-m^2x^2+m^2x}{x^2+1}=0\\ \dfrac{\left(4x^3-3x^2-2m^2x+m^2\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}-\dfrac{\left(x^4-x^3-m^2x^2+m^2x\right).2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-x^3-m^2x^2+m^2x=0\quad(1)\\4x^3-3x^2-2m^2x+m^2=0\ (2)\end{cases}$.

$(1)\Leftrightarrow x\left(x^2-m^2\right)(x-1)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1;\pm m\}$

Khi $x=0$ thay vào (2) suy ra $m=0$.

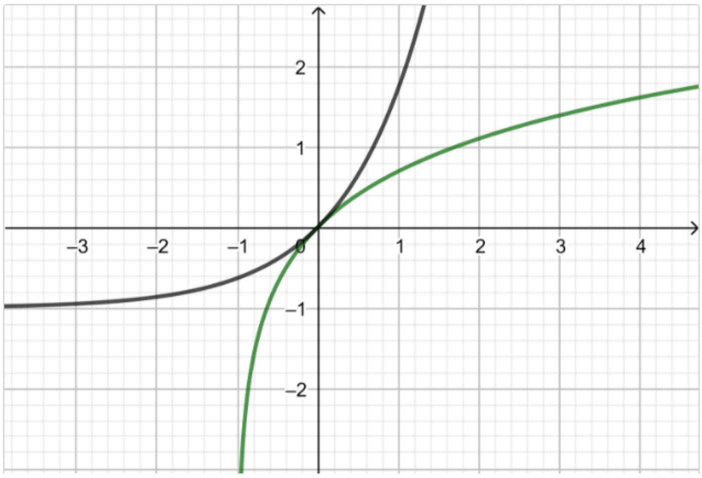
Khi $x=1$ thay vào (2) suy ra $m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$.

Khi $x=m$ thay vào (2) suy ra $2m^3-2m^2=0 \Rightarrow m=1, m=0$.

Khi $x=-m$ thay vào (2) suy ra $-2m^3-2m^2=0 \Rightarrow m=-1, m=0$.

Vậy có ba giá trị của m. Chọn đáp án D

Câu 45. Chọn D



Đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x+m=\ln(x+1) \\ \left(\mathrm{e}^x+m\right)'=\left[\ln(x+1)\right]' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^x+m=\ln(x+1) & (1) \\ \mathrm{e}^x=\dfrac{1}{x+1} & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy rằng hàm số $y=\mathrm{e}^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=\dfrac{1}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ và $x=0$ là nghiệm của phương trình (2) nên phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Thay $x=0$ vào phương trình (1) ta được $m=-1$.

Câu 46. Chọn D

Gọi phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị là $y=ax+b$, hoành độ tiếp điểm của $(C_1),(C_2)$ lần lượt là x_1, x_2. Ta có $\begin{cases} \dfrac{x_1^4}{4}-2x_1^2+4=ax_1+b & (1) \\ x_1^3-4x_1=a & (2) \\ x_2^2+4=ax_2+b & (3) \\ 2x_2=a & (4) \end{cases}$.

Từ (4) ta có $x_2=\dfrac{a}{2}$, thế vào (3) suy ra $b=4-\dfrac{a^2}{4}$ (5).

Thế (2) vào (5) ta được $b=4-\dfrac{\left(x_1^3-4x_1\right)^2}{4}$ (6).

Thế (2) và (6) vào (1) ta có

$$\frac{x_1^4}{4}-2x_1^2+4=x_1\left(x_1^3-4x_1\right)+4-\frac{\left(x_1^3-4x_1\right)^2}{4}\Leftrightarrow x_1^2\left(-x_1^2+8+4x_1^2-16-x_1^4+8x_1^2-16\right)=0$$

$\Leftrightarrow x_1^2\left(-x_1^4+11x_1^2-24\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_1=\pm\sqrt{3}\\x_1=\pm\sqrt{8}\end{array}\right.$. Thế vào (2) ta được 5 giá trị của a là $a=0$, $a=\mp\sqrt{3}$, $a=\pm 8\sqrt{2}$. Do vậy hai đồ thị có 5 tiếp tuyến chung.

Câu 47. Chọn D

Gọi d là phương trình tiếp tuyến chung của (C_1), (C_2) và $x_0=a$ là hoành độ tiếp điểm của d với (C_1) thì phương trình d là

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2.$$

d tiếp xúc với (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}=2ax-a^2 & (1)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=2a & (2)\end{cases}$

Thế (2) vào (1) ta có $\sqrt{5-x^2}-\dfrac{41}{16}=\dfrac{-x^2}{\sqrt{5-x^2}}-\dfrac{x^2}{4(5-x^2)}$. Đặt $t=\sqrt{5-x^2}$ (ĐK: $t>0$)

Ta có phương trình $t-\dfrac{41}{16}=\dfrac{t^2-5}{t}+\dfrac{t^2-5}{4t^2}\Leftrightarrow 45t^2-80t-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\dfrac{-2}{9}\end{array}\right.$.

Do điều kiện: $t>0$ nên nhận $t=2$. Với $t=2$ suy ra $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$, thế vào (2) ta có $\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{4}\\a=\dfrac{-1}{4}\end{array}\right.$.

Do đó (C_1), (C_2) có hai tiếp tuyến chung là $\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{-1}{2}x-\dfrac{1}{16}\\y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}\end{array}\right.$. Vậy phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (C_1), (C_2) có hệ số góc dương là $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

Câu 48. Chọn C

Ta có: $f^2(1+2x)=x-f^3(1-x)\Leftrightarrow f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$.

Đạo hàm hai vế $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$, ta có

$$4.f(2x+1).f'(2x+1)-3f^2(1-x).f'(1-x)=1.$$

Cho $x=0$ ta được $4f(1).f'(1)-3.f^2(1).f'(1)=1\Leftrightarrow f(1).f'(1).\left[4-3f(1)\right]=1$. (1)

Từ $f^2(2x+1)+f^3(1-x)=x$, cho $x=0$ ta có

$$f^2(1)+f^3(1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\f(1)=-1\end{array}\right..$$

Nếu $f(1)=0$ thì mâu thuẫn với (1), do đó $f(1)=-1$, khi đó

$$(1)\Leftrightarrow -f'(1).(4+3)=1\Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{7}.$$

Phương trình tiếp tuyến $y=-\frac{1}{7}(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$ hay $x+7y+6=0$.

Câu 49. Chọn D

$f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2.g(x)+36x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (1).

Vì (1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ nên cũng đúng với $x=0\Rightarrow f^3(2)-2f^2(2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(2)=0\\ f(2)=2\end{array}\right.$.

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$-3f^2(2-x).f'(2-x)-12f(2+3x).f'(2+3x)+2x.g(x)+x^2.g'(x)+36=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $x=0\Rightarrow -3f^2(2).f'(2)-12f(2).f'(2)+36=0$ (2).

Ta thấy $f(2)=0$ không thỏa mãn (2) nên $f(2)=2$, khi đó $f'(2)=1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $x_o=2$ là

$y=f'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=x$.

Câu 50. Chọn A

Ta có $y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$. Giả sử $M(x_0\,;y_0)\in(C),(x_0\neq 1)$ suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình $y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1}=+\infty,\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{x-1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

Mà $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C), suy ra $I(1\,;2)$.

Điểm $A\left(1\,;\frac{2x_0}{x_0-1}\right)$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến, điểm $B(2x_0-1\,;2)$ là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến.

Ta có chu vi của tam giác IAB bằng $IA+IB+AB=\frac{2}{|x_0-1|}+2|x_0-1|+\sqrt{4(x_0-1)^2+\frac{4}{(x_0-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $IA+IB+AB\geq 2\sqrt{4}+\sqrt{4.2}=4+\sqrt{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=0\\ x_0=2\end{array}\right.$

Vậy chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4+\sqrt{8}$ khi $M(0\,;1)$ hoặc $M(2\,;3)$.

Suy ra $a=4,b=8$ nên $a-b+4=0$.

Câu 51. Chọn D

Ta có (C_m) tiếp xúc với đường thẳng (d) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^4-(m+1)x_0^2+4m=3 & (1) \\ 4x_0^3-2(m+1)x_0=0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm x_0.

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0^2=\dfrac{m+1}{2}$.

Nếu $x_0=0$ thay vào (1) ta được $m=\dfrac{3}{4}$.

-Nếu $x_0^2=\dfrac{m+1}{2}$ thay vào (1) ta được $\left(\dfrac{m+1}{2}\right)^2-\dfrac{(m+1)^2}{2}+4m=3$

$\Leftrightarrow m^2-14m+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=13 \end{array}\right.$

Thử lại:

Khi $m=\dfrac{3}{4}$ thì (C_m) tiếp xúc với (d) tại chỉ một điểm $(0;3)$ nên $m=\dfrac{3}{4}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Khi $m=1$ thì $x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(1;3);(-1;3)$

Khi $m=13$ thì $x_0^2=7 \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{7}$, suy ra (C_m) tiếp xúc với (d) tại hai điểm $(\sqrt{7};3)$, $(-\sqrt{7};3)$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m=1; m=13$.

Câu 52. Chọn D

Ta có : $y=-x^3+3x^2-2$; $y'=-3x^2+6x$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C):

$$-x^3+3x^2-2=m(2-x)+2 \ (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \quad (y=2) \\ x^2-x-2-m=0 \ (2) \end{array}\right..$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2;2),B,C$

$\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ (2)^2-(2)-2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+9>0 \\ -m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases} (*).$$

Với điều kiện (*), phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_B và x_C.

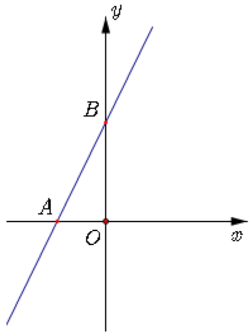
Theo định lý Viet, ta có: $\begin{cases} x_B+x_C=1 \\ x_B.x_C=-m-2 \end{cases}$.

Tích hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại B và C là

$$k_B.k_C=f'(x_B)f'(x_C)=(-3x_B^2+6x_B)(-3x_C^2+6x_C)=9(x_B^2-2x_B)(x_C^2-2x_C).$$
$$=9\left[x_B^2x_C^2-2x_Bx_C(x_B+x_C)+4x_Bx_C\right]=9\left[(m+2)^2-2(m+2)\right]$$
$$=9\left[(m+1)^2-1\right]=9(m+1)^2-9\geq -9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$ (thỏa điều kiện (*)). Vậy $m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 53. Chọn B



Từ $\dfrac{1}{\cos^2 ABO}=1+\tan^2 ABO \Rightarrow \tan^2 ABO=\dfrac{1}{\cos^2 ABO}-1=\dfrac{26}{25}-1=\dfrac{1}{25}$.

$\Rightarrow \tan ABO=\dfrac{1}{5}$ hay $\tan OAB=5$ (do $OAB+ABO=90°$).

Suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\pm\tan OAB=\pm 5$.

Ta có $y'=x^2e^{-x}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y'=5 \Leftrightarrow x^2e^{-x}=5$.

Xét hàm số $g(x)=x^2e^{-x}$. Ta có $g'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

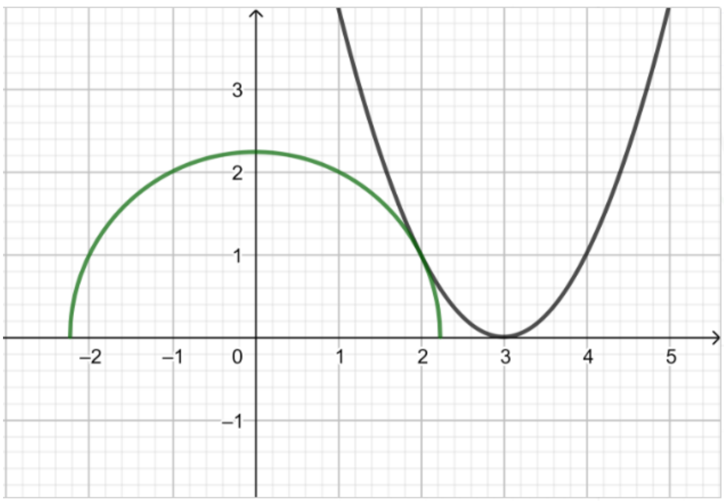
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4.e^{-2}$	$\searrow$	0

Nhận thấy $4.e^{-2}<5$ nên suy ra phương trình $x^2e^{-x}=5$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy có duy nhất một tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 54. Chọn D



Đồ thị hàm số $y=x^2-6x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x^2}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\sqrt{5-x^2}=x^2-6x+m\\ \left(\sqrt{5-x^2}\right)'=\left(x^2-6x+m\right)'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5-x^2}=x^2-6x+m & (1)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=2x-6 & (2)\end{cases}$$

Phương trình (2) tương đương với $\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}+2x-6=0$. (3)

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}+2x-6$ xác định, liên tục trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$ và $f'\left(x\right)=\dfrac{5}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^3}+2>0$, $\forall x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Suy ra, hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Lúc đó, phương trình (3) tương đương với $f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow x=2.$

Thay $x=2$ vào phương trình (1) ta được $m=9$.

Câu 55. Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}=4x^2+3x\Leftrightarrow x.f'\left(x\right)+f\left(x\right)=4x^3+3x^2$.

$\Leftrightarrow\left(x.f\left(x\right)\right)'=4x^3+3x^2\Leftrightarrow x.f\left(x\right)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{dx}\Leftrightarrow x.f\left(x\right)=x^4+x^3+C$.

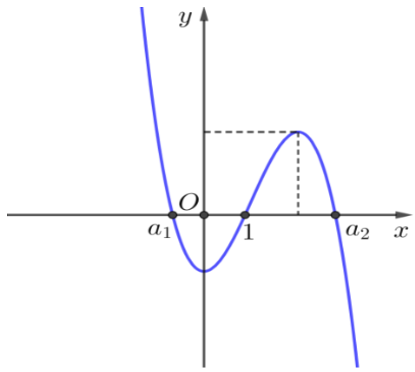
Vì $f\left(1\right)=2\Rightarrow 1.f\left(1\right)=2+C\Leftrightarrow 2=2+C\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $x.f\left(x\right)=x^4+x^3\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+x^2$.

Khi đó: $f'\left(x\right)=3x^2+2x; f'\left(2\right)=16; f\left(2\right)=12$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là $y=16\left(x-2\right)+12\Leftrightarrow y=16x-20$.

Câu 56. Chọn B



Ta có tiếp tuyến Δ của $\left(C\right)$ tại $x=1$ là $y=f'\left(1\right)\left(x-1\right)+f\left(1\right)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$, ta có $f'\left(1\right)=0$.

Vậy $\Delta: y=f\left(1\right)$.

Gọi a_1, a_2 là hai nghiệm còn lại của $f'\left(x\right)$. Dựa vào đồ thị hàm số ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a_1		1		a_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a_1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(a_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Delta : y = f(1)$ và (C) có ba điểm chung.

Câu 57. Chọn D

Gọi $M(m;1-2m) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng $\Delta : y = k(x-m)+1-2m$.

Để Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} = k(x-m)+1-2m \\ -\dfrac{4}{(x-1)^2} = k \end{cases}$ có nghiệm.

Thay $k = -\dfrac{4}{(x-1)^2}$ vào phương trình $\dfrac{x+3}{x-1} = k(x-m)+1-2m$ ta được $mx^2+2(2-m)x-m-2=0 \ (*)$.

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến với (C) khi và chỉ khi phương trình $g(x) = mx^2+2(2-m)x-m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta' = (2-m)^2 + m(m+2) > 0 \\ g(1) = m+4-2m-m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ là hai tiếp điểm, với x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Theo địnhlý Vi-et ta có $\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{2(m-2)}{m} \\ x_A x_B = -\dfrac{m+2}{m} \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $I\left(\dfrac{m-2}{m};\dfrac{m+3}{m-1}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A;\dfrac{2m(x_B-x_A)}{m-1}\right) \Rightarrow$ một vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n} = (2m;1-m)$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm AB có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2m;1-m)$ và đi qua điểm $I\left(\dfrac{m-2}{m};\dfrac{m+3}{m-1}\right)$ là $2mx+(1-m)y+7-m=0$.

Gọi $H(x_H;y_H)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua.

Khi đó, $2mx_H+(1-m)y_H-m+7=0 \Leftrightarrow m(2x_H-y_H-1)+y_H+7=0$ với mọi $m\neq 0$ và $m\neq 1$.

Suy ra $\begin{cases}2x_H-y_H-1=0\\ y_H+7=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_H=-3\\ y_H=-7\end{cases} \Rightarrow H(-3;-7)$. Vậy $OH=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2}=\sqrt{58}$.

Câu 58. Chọn C

Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$

Ta có: A là điểm cố định mà đồ thị (C_m) luôn đi qua nên $A\in(C_m), \forall m$

$\Leftrightarrow y_A=(m+1)x_A^3-(2m+1)x_A-m+1, \forall m$

$\Leftrightarrow m(x_A^3-2x_A-1)+x_A^3-x_A+1-y_A=0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ x_A^3-x_A+1-y_A=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ y_A=x_A^3-2x_A-1+x_A+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A^3-2x_A-1=0\\ y_A=x_A+2\end{cases}$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $y_B=x_B+2$ và $y_C=x_C+2$.

Hay ba điểm A, B, C thuộc đường thẳng $\Delta: y=x+2$.

Ta lại có: $y'=3(m+1)x^2-(2m+1)$ và gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Khi đó để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ thì phương trình $y'(x_o)=\dfrac{-1}{k_\Delta}=-1$ phải có nghiệm $\Leftrightarrow 3(m+1)x_0^2-2m=0$ $(*)$ phải có nghiệm

Xét $m=-1:(*)\Leftrightarrow 2=0$ (vô lí) nên loại $m=-1$

Xét $m\neq -1:(*)\Leftrightarrow x_0^2=\dfrac{2m}{3(m+1)}$

Để $(*)$ có nghiệm thì $\dfrac{2m}{3(m+1)}\geq 0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$

So với điều kiện $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ ta được $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;-1)\cup[0;10]$

Hay $m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 20 số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 59. Chọn C

Gọi $M_0(x_0;x_0^3-3x_0^2)$ là tiếp điểm.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M_0 có dạng $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Δ qua $B(0;b)\Leftrightarrow b=(3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2 \Leftrightarrow -b=2x_0^3-3x_0^2$ (*).

Có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $B(0;b)\Leftrightarrow$ (*) có đúng 1 nghiệm x_0.

Đặt $g\left(x\right)=2x^3-3x^2$; $g'\left(x\right)=6x^2-6x$; $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g\left(x\right)$		↗	0	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				-1		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $\left(*\right)$ có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -b>0 \\ -b<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b<0 \\ b>1 \end{array}\right.$.

Vì b nguyên và $b \in \left(-10;10\right)$, suy ra $b \in \left\{-9;-8;...;-1;2;3;....;9\right\}$, có 17 giá trị của b.

DẠNG 2 Bài toán về tiếp tuyến thường gặp

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A, B. Có bao số nguyên dương m thuộc $[-2020; 2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB?

A. 4041. **B.** 2021. **C.** 2019 **D.** 2020.

Câu 2: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = 4x - 3$. **B.** $y = 5x - 4$. **C.** $y = 8x - 7$. **D.** $y = 6x - 5$.

Câu 3: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

A. $x + y - 5 = 0$. **B.** $x + y - 1 = 0$ và $x + y - 5 = 0$.

C. $x + y + 1 = 0$ và $x + y + 5 = 0$. **D.** $x + y - 1 = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - m}{x + m} (m \neq 0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Giá trị của $a + b$ là

A. -3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

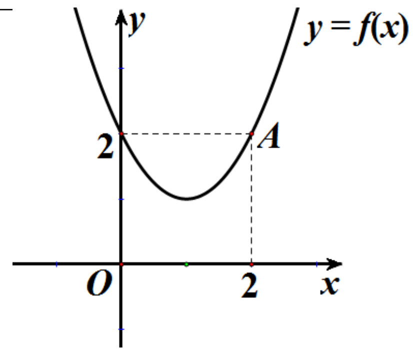
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $\left[f(1+x)\right]^3 + 2.f(1+x) - 21x - 3 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

A. $y = 3x + 1$. **B.** $y = 3x + 2$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = 3x - 1$.

Câu 6: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\frac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\frac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\frac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\frac{1}{2}$.

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=g(x)=x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

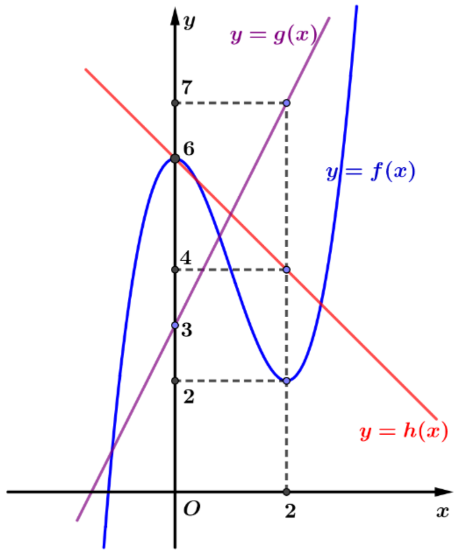
Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1,k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=2$. **B.** $k_1.k_2=\frac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2=4$. **D.** $k_1.k_2=3$.

Câu 11: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0),N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\frac{47}{100}$. **B.** $R=\frac{9}{2}$. **C.** $R=\frac{12}{25}$. **D.** $R=\frac{161}{36}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



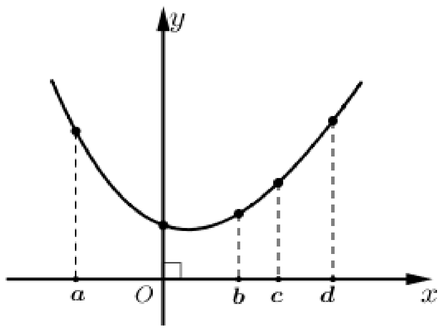
Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y = \dfrac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng $k = \dfrac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 3x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = \{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Câu 15: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(2x^2 - 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = 4x - 3$. **B.** $y = 5x - 4$. **C.** $y = 8x - 7$. **D.** $y = 6x - 5$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 18: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 19: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

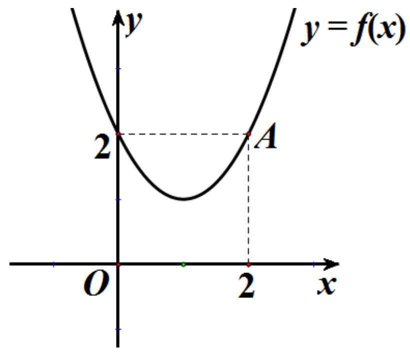
Câu 20: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 21: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\dfrac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\dfrac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=g(x)=x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

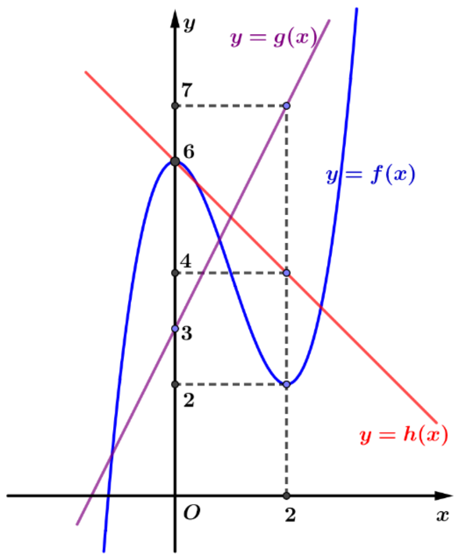
Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=2$. **B.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2=4$. **D.** $k_1.k_2=3$.

Câu 26: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0), N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\dfrac{47}{100}$. **B.** $R=\dfrac{9}{2}$. **C.** $R=\dfrac{12}{25}$. **D.** $R=\dfrac{161}{36}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



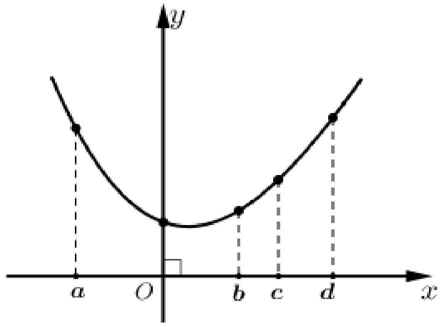
Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 29: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Câu 30: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(2x^2-1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Câu 31: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Câu 33: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 34: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\dfrac{4}{3}\right)$.

Câu 35: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 36: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P). Gọi $(d_1),(d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1),(d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M. Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $an=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua M, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm M luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A=(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 40: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y=\frac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Câu 41: Trên đường thẳng $d: y=2x+1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y=\frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D. Vô số**.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1$ có đồ thị (C_m), biết rằng đồ thị (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định A, B. Có bao số nguyên dương m thuộc $[-2020; 2020]$ để (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB?

A. 4041. **B.** 2021. **C.** 2019 **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

Ta tìm toạ độ hai điểm cố định A, B.

Ta có $y = x^3 + (m-1)x^2 - 3mx + 2m + 1 \Leftrightarrow m\left(x^2 - 3x + 2\right) + x^3 - x^2 + 1 - y = 0$. Toạ độ hai điểm cố định A, B là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^3 - x^2 + 1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 1 \\ x = 2, y = 5 \end{array}\right. \Rightarrow A(1;1), B(2;5).$$

Khi đó ta có: $(AB): -4x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow (AB): y = 4x - 3$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C_m) tại $M(x_0; y_0)$ là $y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0(m-1) - 3m$.

Vì tiếp tuyến vuông góc với AB nên $y'(x_0).4 = -1$.

Suy ra: $4.\left(3x_0^2 + 2x_0(m-1) - 3m\right) = -1 \Leftrightarrow 12x_0^2 + 8(m-1)x_0 - 12m + 1 = 0 \quad (*)$

Để phương trình $(*)$ có nghiệm thì

$$\Delta' = \left[4(m-1)\right]^2 - 12(1 - 12m) \geq 0 \Leftrightarrow 16m^2 + 112m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -6,69 \\ m \geq -0,036 \end{array}\right.$$

Vì $m \in [-2020; 2020]$ và $m \in \mathbb{Z}^+$ nên $1 \leq m \leq 2020$.

Vậy có 2019 giá trị m nguyên dương.

Câu 2: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f\left(2x^2 - 1\right)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

A. $y = 4x - 3$. **B.** $y = 5x - 4$. **C.** $y = 8x - 7$. **D.** $y = 6x - 5$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = 1$ có phương trình là $y = 2x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 2 \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

Đặt $g(x) = f\left(2x^2 - 1\right)$; $g'(x) = 4x.f'\left(2x^2 - 1\right)$; $g'(1) = 4.f'(1) = 4.2 = 8$; $g(1) = f(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$\Leftrightarrow y = 8(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = 8x - 7$.

Câu 3: Cho đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. Viết tất cả các phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm $I(1;2)$ đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

A. $x+y-5=0$. **B.** $x+y-1=0$ và $x+y-5=0$.

C. $x+y+1=0$ và $x+y+5=0$. **D.** $x+y-1=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) có dạng:

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-2x_0{}^2+2x_0-1=0$$

Theo đề $d(I,\Delta)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{\left|1+2(x_0-1)^2-2x_0{}^2+2x_0-1\right|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow(x_0-1)^4-2(x_0-1)^2+1=0\Leftrightarrow(x_0-1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\\x_0=0\end{array}\right..$$

Với $x_0=2$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y=-(x-2)+3\Leftrightarrow x+y-5=0$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y=-(x-0)+1\Leftrightarrow x+y-1=0$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}(m\neq0)$ có đồ thị (C_m). Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y=ax+b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d). Giá trị của $a+b$ là

A. -3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\dfrac{2m^2}{(x+m)^2}$.

Đường thẳng (d) luôn tiếp xúc với đồ thị (C_m) suy ra hệ phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị $m\neq0$.

$$\begin{cases}\dfrac{2m^2}{(x+m)^2}=a\\\dfrac{(2m-1)x-m}{x+m}=ax+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m^2}{(x+m)}=a(x+m)\\\dfrac{(2m-1)(x+m)-2m^2}{x+m}=ax+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m^2}{(x+m)}=ax+am & (1)\\(2m-1)-\dfrac{2m^2}{x+m}=ax+b & (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $-(2m-1)+\dfrac{4m^2}{x+m}=am-b\Leftrightarrow\dfrac{m}{x+m}=\dfrac{(a+2)m-b-1}{4m}$

Thay vào (1) ta được: $\left(\dfrac{(a+2)m-(b+1)}{4m}\right)^2=\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow((a+2)m-(b+1))^2=8am^2$

$$\Leftrightarrow(a-2)^2m^2-2(b+1)(a+2)m+(b+1)^2=0\ (*)$$

Vì đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng (d) nên $(*)$ luôn xảy ra với mọi giá trị $m \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2=0\\ 2(b+1)(a+2)=0\\ (b+1)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}.$$

Vậy $a+b=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn: $\left[f(1+x)\right]^3+2.f(1+x)-21x-3=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$.

A. $y=3x+1$. **B.** $y=3x+2$. **C.** $y=3x-2$. **D.** $y=3x-1$.

Lời giải

Chọn C

- Xét phương trình: $\left[f(1+x)\right]^3+2.f(1+x)-21x-3=0$.
- Từ cho $x=0$ ta có: $f^3(1)+2.f(1)-3=0 \Leftrightarrow f(1)=3$.
- Đạo hàm hai vế của ta có $3f^2(1+x)f'(1+x)+4f'(1+2x)-21=0$.
- Từ cho $x=0$ ta được: $3f^2(1)f'(1)+4f'(1)-21=0$

$\Leftrightarrow 3f'(1)+4f'(1)-21=0 \Leftrightarrow f'(1)=3$.

- Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là:

$y=f'(1).(x-1)+f(1)=3.(x-1)+1=3x-2$.

Câu 6: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Giả sử $M(a;b)\in(C)$. Khi đó $b=\dfrac{2a+1}{a-1}$ với $a\in\mathbb{Z}, a\neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$\Delta: y=-\dfrac{3}{(a-1)^2}.(x-a)+\dfrac{2a+1}{a-1}$.

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d: y=2$.

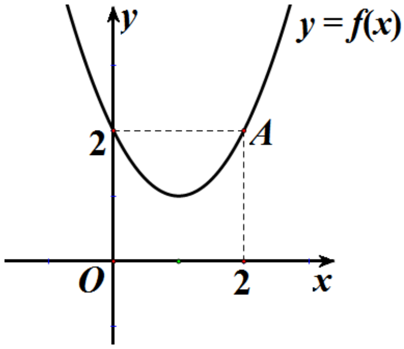
Ta có $\Delta\cap d=A(2a-1;2)$.

Theo bài ra ta có $OA<2\sqrt{10} \Leftrightarrow (2a-1)^2+4<40$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 4a - 35 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Do $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1 \Rightarrow a \in \{-2; -1; 0; 2; 3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2) = \frac{1}{2}$. **B.** $g'(2) = \frac{1}{4}$. **C.** $g'(2) = -\frac{1}{4}$. **D.** $g'(2) = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực và $a > 0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2;2), B(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2 = 4a + 2b + c \\ 2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ c = 2 \end{cases}, (1).$$

Vì đường thẳng $\Delta: y = 2x - 2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có

$f'(2) = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 2, (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$.

Ta có $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$ suy ra $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x} = x - 2 + \frac{2}{x}$.

Ta có $g'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow g'(2) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Lời giải

Chọn C

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\ln 3} = \log_3 e$. Khi đó $A(0; \log_3 e)$.

Ta có $y' = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3}}{\ln 3} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$y = y'(0)(x-0) + y(0) = \dfrac{1}{2}x + \log_3 e$.

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B\left(-2\log_3 e;0\right)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$S = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.\log_3 e.\left|-2\log_3 e\right| \approx 0,829$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A\left(a;a^2\right)$ thuộc đồ thị (P). Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y = g'(a)(x-a) + a^2$.

Hay $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2\ (d)$.

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

Ta có điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} x^3 - 3x = 2ax - a^2 & (1) \\ 3x^2 - 3 = 2a & (2) \end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được $x^3 - 3x = \left(3x^2 - 3\right)x - \left(\dfrac{3x^2-3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 3x^3 - 3x - \dfrac{9x^4 - 18x^2 + 9}{4}$

$\Leftrightarrow 9x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,82 \\ x \approx 0,68 \end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 10: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2 = 2$. **B.** $k_1.k_2 = \dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2 = 4$. **D.** $k_1.k_2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0\,(x \ne -2)\,(1)$

Đặt $f(x) = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$. Ta có $f(-2) = -1 \ne 0$. $\Delta = m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2. Theo Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{m-6}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Từ $y=\frac{x+1}{x+2}$ ta có $y'=\frac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1=\frac{1}{(x_1+2)^2};k_2=\frac{1}{(x_2+2)^2}$.

$k_1.k_2=\frac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\frac{1}{\left[x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4\right]^2}=$

Mà $\left[x_1.x+2(x_1+x_2)+4\right]^2=\left(\frac{3-2m}{2}+\frac{2m-12}{2}+4\right)^2=\frac{1}{4}$.

Vậy $k_1.k_2=4$. Chọn đáp án **C.**

Câu 11: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0),N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\frac{47}{100}$. **B.** $R=\frac{9}{2}$. **C.** $R=\frac{12}{25}$. **D.** $R=\frac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$y=\frac{x^2-3x+4}{x-1}=x-2+\frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}$$

Gọi $Q(x_0;y_0),y_0=x_0-2+\frac{2}{x_0-1}$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên

$$1=f'(x_0).(4-x_0)+y_0.$$

$$\Leftrightarrow 1=\left[1-\frac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0)+x_0-2+\frac{2}{x_0-1}$$

$$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=(x_0^2-2x_0-1).(4-x_0)+(x_0^2-3x_0+4)(x_0-1)$$

$$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=-x_0^3+6x_0^2-7x_0-4+x_0^3-4x_0^2+7x_0-4$$

$$\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-9=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\frac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0=-1-\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\frac{2+2\sqrt{10}}{9} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right),N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$$

Vì (P) đi qua $M\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right), N\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$ nên

$$\begin{cases} a\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\frac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \\ a\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\frac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=-8 \end{cases}$$

Do đó Parabol cần tìm là $y=18x^2-8x-8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{2}{9};\frac{-80}{9}\right)$.

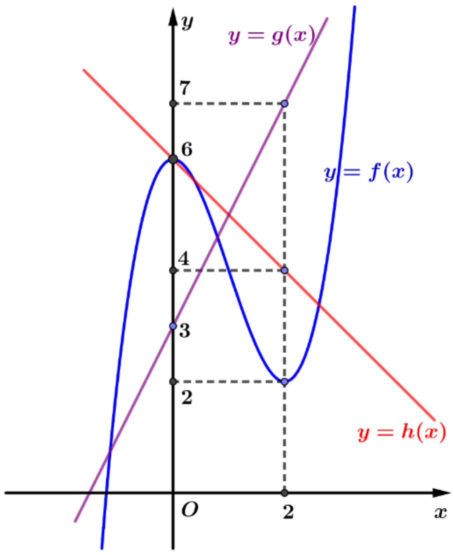
Phương trình đường thẳng $MN: y=0$.

$d(I,MN)=\frac{80}{9}; MN=\frac{4\sqrt{10}}{9}$, $MI=\frac{\sqrt{664}}{9}, NI=\frac{\sqrt{664}}{9}$

$S_{IMN}=\frac{1}{2}.MN.d(I,MN)=\frac{1}{2}.\frac{4\sqrt{10}}{9}.\frac{80}{9}=\frac{160\sqrt{10}}{81}$

$R=\frac{MN.MI.NI}{4S_{IMN}}=\frac{161}{36}$

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\frac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\frac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C'): y=\frac{f(x).h(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\frac{\left[f'(x).h(x)+f(x).h'(x)\right].g(x)-f(x).h(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $g(x)=2x+3$, $h(x)=-x+6$ và $\begin{cases} f(2)=2; g(2)=7; h(2)=4 \\ f'(2)=0; g'(2)=2; h'(2)=-1 \end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{h(x).g(x)}{f(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$$k=y'(2)=\frac{\left[f'(2).h(2)+f(2).h'(2)\right].g(2)-f(2).h(2).g'(2)}{\left[g(2)\right]^2}=\frac{-30}{49}.$$

Như vậy $k=\dfrac{-30}{49}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases} a=-30 \\ b=49 \end{cases}\Rightarrow a+b=19$.

Câu 13: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

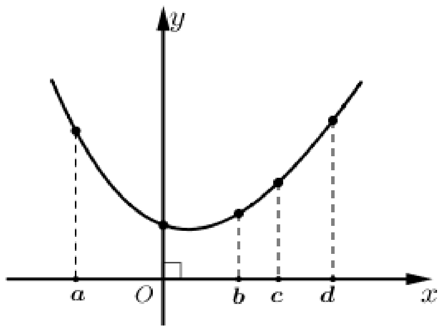
Chọn B

Để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=x^3-3x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1+3=2$.

Câu 14: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\left\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\right\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c,d.

$$\Rightarrow\begin{cases} f'(c)=\tan\alpha \\ f'(d)=\tan\beta \\ \alpha<\beta \end{cases}\Rightarrow 0<f'(c)<f'(d).$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 15: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1)=2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2(x-1)+f(1)=2x+f(1)-2$, suy ra $f(1)=1$.

Xét hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$. Ta có $y'=4xf'\left(2x^2-1\right)$. Suy ra $y'(1)=4f'(1)=8$.

Từ đây ta loại ba đáp án A,B, **D.**

Câu 16: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24\Leftrightarrow x^3-x+6=0\Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0;a)$ là $(\Delta):y=kx+a$.

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\-\dfrac{3}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{3x}{(x-1)^2}+a\Leftrightarrow(a-1)x^2-2(2+a)x+2+a=0\ (**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1}<0$.

Ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{2+a}{a-1} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ \dfrac{P+2S+4}{P-S+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a+6>0 \\ \dfrac{9a+6}{-3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \\ a > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $m \in \{0; 2; 3; 4; \ldots; 2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y - y_1 = y'(x_1).(x - x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2 - y_1 = y'(x_1)(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 4x = -24 \Leftrightarrow x^3 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 19: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M(-2;-4)$. **B.** $M\left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2;0)$. **D.** $M\left(2;-\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $-\frac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0; y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0) = x_0^2 - 1$.

Từ đó ta có $x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0 = -2$. Vậy tọa độ $M(-2;0)$.

Câu 20: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t=1-x \Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2f(1-t)+f(x)=(1-x)^2, \forall t \in \mathbb{R}$ (2).

Từ và ta có: $\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^2 \\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$.

Suy ra: $f(1)=\frac{2}{3}; f'(1)=\frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$$y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{3} \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 21: Xét điểm M có hoành độ là số nguyên thuộc đồ thị $(C): y=\frac{2x+1}{x-1}$. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M cắt đường tiệm cận ngang của (C) tại điểm A. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa điều kiện A cách gốc tọa độ một khoảng cách nhỏ hơn $2\sqrt{10}$?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-\frac{3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Giả sử $M(a;b) \in (C)$. Khi đó $b=\frac{2a+1}{a-1}$ với $a \in \mathbb{Z}, a \neq 1$.

Tiếp tuyến với (C) tại điểm M có phương trình là

$$\Delta: y=-\frac{3}{(a-1)^2}.(x-a)+\frac{2a+1}{a-1}.$$

Đồ thị (C) có TCN là đường thẳng $d: y=2$.

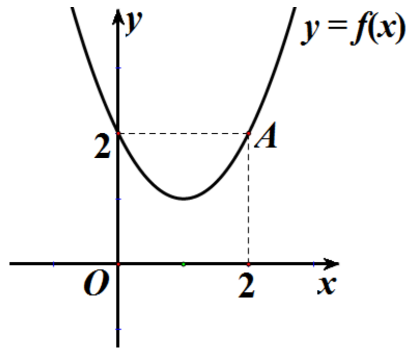
Ta có $\Delta \cap d = A(2a-1;2)$.

Theo bài ra ta có $OA<2\sqrt{10} \Leftrightarrow (2a-1)^2+4<40$

$\Leftrightarrow 4a^2-4a-35<0 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$.

Do $a\in\mathbb{Z}, a\neq 1 \Rightarrow a\in\{-2;-1;0;2;3\}$. Vậy có 5 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (P) như hình bên và đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A. Xét hàm số $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Tính $g'(2)$.



A. $g'(2)=\frac{1}{2}$. **B.** $g'(2)=\frac{1}{4}$. **C.** $g'(2)=-\frac{1}{4}$. **D.** $g'(2)=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $y=f(x)=ax^2+bx+c$, với a,b,c là các số thực và $a>0$.

Vì (P) đi qua các điểm $A(2;2), B(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}2=4a+2b+c\\2=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\c=2\end{cases}, (1).$$

Vì đường thẳng $\Delta: y=2x-2$ là tiếp tuyến của (P) tại điểm A nên ta có

$f'(2)=2\Leftrightarrow 4a+b=2, (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$.

Ta có $y=f(x)=x^2-2x+2$ suy ra $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-2x+2}{x}=x-2+\frac{2}{x}$.

Ta có $g'(x)=1-\frac{2}{x^2}\Rightarrow g'(2)=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đồ thị (G) của hàm số $y=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^x}{\ln 3}$ cắt trục tung tại điểm A và tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B. Tính diện tích của tam giác OAB.

A. $0,603$. **B.** $0,414$ **C.** $0,829$. **D.** $1,207$.

Lời giải

Chọn C

Cho $x=0\Rightarrow y=\frac{1}{\ln 3}=\log_3 e$. Khi đó $A(0;\log_3 e)$.

Ta có $y'=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^{x}\ln\sqrt{3}}{\ln 3}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^{x}$.

Tiếp tuyến của (G) tại A có phương trình dạng:

$y=y'(0)(x-0)+y(0)=\dfrac{1}{2}x+\log_3 e$.

Tiếp tuyến của (G) tại A cắt trục hoành tại điểm B nên $B\left(-2\log_3 e;0\right)$.

Diện tích tam giác OAB là:

$S=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}.\log_3 e.\left|-2\log_3 e\right|\approx 0,829$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C) và hàm số $y=g(x)=x^2$ có đồ thị (P). Hỏi hai đồ thị (C) và (P) có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến chung?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A\left(a;a^2\right)$ thuộc đồ thị (P). Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng $y=g'(a)(x-a)+a^2$.

Hay $y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2\ (d)$.

Để (d) là tiếp tuyến của (C) thì (d) và (C) phải tiếp xúc với nhau.

Ta có điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases}x^3-3x=2ax-a^2 & (1)\\ 3x^2-3=2a & (2)\end{cases}$.

Thế (2) vào (1) ta được $x^3-3x=\left(3x^2-3\right)x-\left(\dfrac{3x^2-3}{2}\right)^2\Leftrightarrow x^3-3x=3x^3-3x-\dfrac{9x^4-18x^2+9}{4}$

$\Leftrightarrow 9x^4-8x^3-18x^2+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx 1,82\\ x\approx 0,68\end{array}\right.$.

Vậy hai đồ thị (C) và (P) có tất cả hai tiếp tuyến chung.

Câu 25: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). Gọi k_1,k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tính tích $k_1.k_2$.

A. $k_1.k_2=2$. **B.** $k_1.k_2=\dfrac{1}{4}$. **C.** $k_1.k_2=4$. **D.** $k_1.k_2=3$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\dfrac{x+1}{x+2}=-2x+m-1\Leftrightarrow 2x^2+(6-m)x+3-2m=0\ (x\neq-2)\ (1)$

Đặt $f(x)=2x^2+(6-m)x+3-2m$. Ta có $f(-2)=-1\neq 0$. $\Delta=m^2+4m+12>0,\forall m$.

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2. Theo Viet ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{m-6}{2}\\ x_1.x_2=\dfrac{3-2m}{2}\end{cases}$$

Từ $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ ta có $y'=\dfrac{1}{(x+2)^2}$. Do đó ta có $k_1=\dfrac{1}{(x_1+2)^2};k_2=\dfrac{1}{(x_2+2)^2}$.

$k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\dfrac{1}{\left[x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4\right]^2}=$

Mà $\left[x_1.x+2(x_1+x_2)+4\right]^2=\left(\dfrac{3-2m}{2}+\dfrac{2m-12}{2}+4\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Vậy $k_1.k_2=4$. Chọn đáp án **C.**

Câu 26: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}$ và (P) là Parabol có phương trình $y=ax^2+bx-8$. Biết từ điểm $A(4;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến với (C). Gọi $k_1;k_2$ là hệ số góc của hai tiếp tuyến đó và gọi I là đỉnh của (P). Khi (P) đi qua $M(k_1;0),N(k_2;0)$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

A. $R=\dfrac{47}{100}$. **B.** $R=\dfrac{9}{2}$. **C.** $R=\dfrac{12}{25}$. **D.** $R=\dfrac{161}{36}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$y=\dfrac{x^2-3x+4}{x-1}=x-2+\dfrac{2}{x-1}$

$\Rightarrow y'=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

Gọi $Q(x_0;y_0),y_0=x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

Giả sử phương trình tiếp tuyến của (C) tại Q có dạng $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$.

Vì tiếp tuyến đi qua $A(4;1)$ nên

$1=f'(x_0).(4-x_0)+y_0$.

$\Leftrightarrow 1=\left[1-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}\right].(4-x_0)+x_0-2+\dfrac{2}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=(x_0^2-2x_0-1).(4-x_0)+(x_0^2-3x_0+4)(x_0-1)$

$\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+1=-x_0^3+6x_0^2-7x_0-4+x_0^3-4x_0^2+7x_0-4$

$\Leftrightarrow x_0^2+2x_0-9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1+\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9} \\ x_0=-1-\sqrt{10}\Rightarrow k_1=\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\end{array}\right.$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right),N\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$

Vì (P) đi qua $M\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9};0\right), N\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9};0\right)$ nên

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\dfrac{2-2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \\ a\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)^2+b\left(\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9}\right)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=-8 \end{cases}$$

Do đó Parabol cần tìm là $y=18x^2-8x-8$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{-80}{9}\right)$.

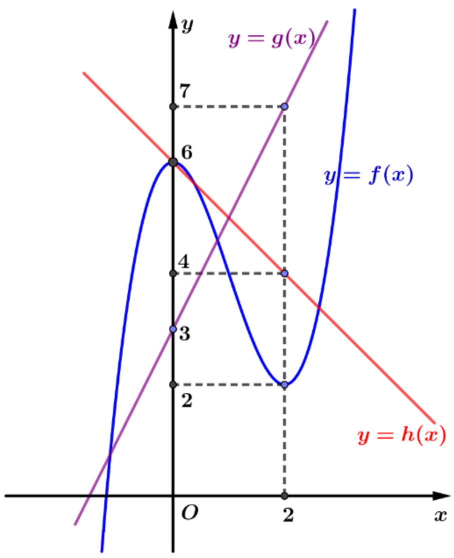
Phương trình đường thẳng $MN: y=0$.

$d(I,MN)=\dfrac{80}{9}; MN=\dfrac{4\sqrt{10}}{9}$, $MI=\dfrac{\sqrt{664}}{9}, NI=\dfrac{\sqrt{664}}{9}$

$S_{IMN}=\dfrac{1}{2}.MN.d(I,MN)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4\sqrt{10}}{9}.\dfrac{80}{9}=\dfrac{160\sqrt{10}}{81}$

$R=\dfrac{MN.MI.NI}{4S_{IMN}}=\dfrac{161}{36}$

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: y=h(x)$ và $\Delta_2: y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{f(x).h(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ có dạng $k=\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(15;25)$. **B.** $(-20;10)$. **C.** $(60;80)$. **D.** $(-30;-21)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(C'): y=\dfrac{f(x).h(x)}{g(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{\left[f'(x).h(x)+f(x).h'(x)\right].g(x)-f(x).h(x).g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

Dựa vào đồ thị ta có $g(x)=2x+3$, $h(x)=-x+6$ và $\begin{cases} f(2)=2; g(2)=7; h(2)=4 \\ f'(2)=0; g'(2)=2; h'(2)=-1 \end{cases}$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với đồ thị $(C'): y=\dfrac{h(x).g(x)}{f(x)}$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

$$k=y'(2)=\frac{\left[f'(2).h(2)+f(2).h'(2)\right].g(2)-f(2).h(2).g'(2)}{\left[g(2)\right]^2}=\frac{-30}{49}.$$

Như vậy $k=\dfrac{-30}{49}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases} a=-30 \\ b=49 \end{cases}\Rightarrow a+b=19$.

Câu 28: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

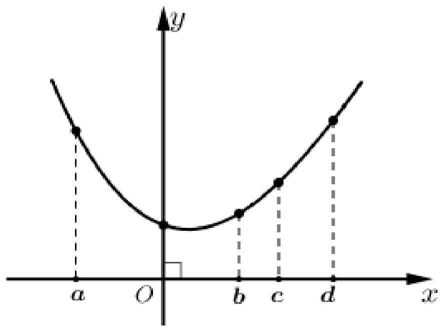
Chọn B

Để đường thẳng $y=3x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=x^3+1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải hệ $\begin{cases} x^3+1=3x+m \\ 3x^2=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m=x^3-3x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$

Vậy tổng các giá trị m là: $-1+3=2$.

Câu 29: Cho $f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S=\left\{f'(a), f'(b), f'(c), f'(d), f'(0)\right\}$. Phần tử lớn nhất trong tập hợp S là:



A. $f'(a)$. **B.** $f'(b)$. **C.** $f'(0)$. **D.** $f'(d)$.

Lời giải

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến tại c, d.

$$\Rightarrow\begin{cases} f'(c)=\tan\alpha \\ f'(d)=\tan\beta \\ \alpha<\beta \end{cases}\Rightarrow 0<f'(c)<f'(d).$$

Vậy phần tử lớn nhất trong tập hợp S là: $f'(d)$.

Câu 30: Cho biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2x-1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=4x-3$. **B.** $y=5x-4$. **C.** $y=8x-7$. **D.** $y=6x-5$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có $f'(1)=2$ và tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ là $y=2(x-1)+f(1)=2x+f(1)-2$, suy ra $f(1)=1$.

Xét hàm số $y=f\left(2x^2-1\right)$. Ta có $y'=4xf'\left(2x^2-1\right)$. Suy ra $y'(1)=4f'(1)=8$.

Từ đây ta loại ba đáp án A,B, **D.**

Câu 31: Cho hàm số $y=x^4-2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2;y_2)$ với B khác A thỏa $y_2-y_1=-24(x_2-x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y-y_1=y'(x_1).(x-x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2-y_1=y'(x_1)(x_2-x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3-4x=-24 \Leftrightarrow x^3-x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 32: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) qua $A(0;a)$ là $(\Delta): y=kx+a$.

(Δ) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\ -\dfrac{3}{(x-1)^2}=k\end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Từ hệ $(*)$ ta có $\dfrac{x+2}{x-1}=-\dfrac{3x}{(x-1)^2}+a \Leftrightarrow (a-1)x^2-2(2+a)x+2+a=0$ $(**)$.

Yêu cầu bài toán là tìm a để phương trình $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1}<0$.

Ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2+a}{a-1} \\ P = x_1x_2 = \frac{2(2+a)}{a-1} \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' > 0 \\ \frac{P+2S+4}{P-S+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ 3a+6>0 \\ \frac{9a+6}{-3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ nên $m \in \{0; 2; 3; 4; \ldots; 2018\}$.

Vậy có 2018 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại $B(x_2; y_2)$ với B khác A thỏa $y_2 - y_1 = -24(x_2 - x_1)$. Số điểm A thỏa mãn là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình $y - y_1 = y'(x_1).(x - x_1)$

Do B thuộc tiếp tuyến của (C) tại A nên $y_2 - y_1 = y'(x_1)(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -24$.

Do đó x_1 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 4x = -24 \Leftrightarrow x^3 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Từ đó suy ra có duy nhất điểm A thỏa mãn bài toán.

Câu 34: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M(-2; -4)$. **B.** $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. **C.** $M(-2; 0)$. **D.** $M\left(2; -\frac{4}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $-\frac{1}{3}$ cho nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Gọi tọa độ của M là $M(x_0; y_0)$ thì hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng $y'(x_0) = x_0^2 - 1$.

Từ đó ta có $x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right.$.

Theo giả thiết, điểm M có hoành độ âm nên $x_0 = -2$. Vậy tọa độ $M(-2; 0)$.

Câu 35: Cho đa thức $f(x)$ với hệ số thực và thỏa mãn điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=1$ của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích của tam giác đó?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2f(x)+f(1-x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}\quad(1)$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow 2f(1-t)+f(x)=(1-x)^2,\forall t\in\mathbb{R}\ (2)$.

Từ và ta có: $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$.

Suy ra: $f(1)=\frac{2}{3};\ f'(1)=\frac{4}{3}$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là:

$$y=\frac{4}{3}(x-1)+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0;-\frac{2}{3}\right)$

Suy ra diện tích tam giác OAB là: $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 36: Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P). Gọi $(d_1),(d_2)$ là các đường thẳng qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1),(d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M. Biết rằng M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $3a+2b=0$. **B.** $a+b=0$. **C.** $an=-1$. **D.** $5a+4b=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y=x^2+2x+2\Rightarrow y'=2x+2$.

Gọi $M\left(m;m^2+2m+2\right)$, phương trình tiếp tuyến tại M có dạng:

$\Delta: y=(2m+2)(x-m)+m^2+2m+2=(2m+2)x-m^2+2$.

Ta có $d_1: x=m\Rightarrow\cos(d_1;\Delta)=\frac{|2m+2|}{\sqrt{(2m+2)^2+1}}$

Gọi $d_2: y=kx+n\Rightarrow\cos(d_2;\Delta)=\frac{|k(2m+2)+1|}{\sqrt{(2m+2)^2+1}.\sqrt{a^2+1}}$

$\Rightarrow|k(2m+2)+1|=|2m+2|\sqrt{a^2+1}$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{4m^2+8m+3}{2\left(2m+2\right)}\Rightarrow n=\dfrac{4m^2+13m+8}{4m+4}$.

$\Rightarrow d_2: y=\dfrac{4m^2+8m+3}{4m+4}x+\dfrac{4m^2+13m+8}{4m+4}$

Với $x=-1\Rightarrow y=\dfrac{5m+5}{4m+4}=\dfrac{5}{4}\Rightarrow d_2$ luôn đi qua điểm $I\left(-1;\dfrac{5}{4}\right)$ cố định.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Cho điểm $M(a;b)$ sao cho có đúng hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua *M*, đồng thời hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau. Biết điểm *M* luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính của đường tròn đó là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử điểm $A\left(t;\dfrac{t^2+1}{t}\right),(t\neq 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta có $f(x)=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại *A* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là:

$y=\dfrac{t^2-1}{t^2}(x-t)+\dfrac{t^2+1}{t}$

Mà tiếp tuyến này đi qua điểm *M* nên ta có:

$b=\dfrac{t^2-1}{t^2}(a-t)+\dfrac{t^2+1}{t}\Leftrightarrow (a-b)t^2+2t-a=0.$ (1)

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y=f(x)$, đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau nên phương trình phải có hai nghiệm phân biệt $t_1,t_2\neq 0$ thỏa mãn $f'(t_1).f'(t_2)=-1$

hay $\begin{cases} a\neq b\\ a\neq 0\\ \Delta'=1+a(a-b)>0\\ \dfrac{t_1^2-1}{t_1^2}.\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2}=-1\end{cases}$

Theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{2}{b-a}\\ t_1.t_2=\dfrac{a}{b-a}\end{cases}$

nên $\dfrac{t_1^2-1}{t_1^2}.\dfrac{t_2^2-1}{t_2^2}=-1\Leftrightarrow 2t_1^2t_2^2-(t_1^2+t_2^2)+1=0$

$\Leftrightarrow 2t_1^2t_2^2-(t_1+t_2)^2+2t_1t_2+1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b-a}\right)^2-\left(\dfrac{2}{b-a}\right)^2+2\dfrac{a}{b-a}+1=0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=4.$

Do $a\neq 0$ nên từ $a^2+b^2=4$ suy ra $|b|<2$, do đó $a^2+1\geq 2|a|>|ab|\geq ab.$

Suy ra $\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a\neq b \\ a\neq 0 \end{cases}$

Như vậy, tập hợp tất cả các điểm $M(a;b)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là đường tròn tâm O, bán kính

bằng 2, bỏ đi các điểm $B(0;2)$, $C(0;2)$, $D\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $E\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$..

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^4-2x^3+x^2$ có đồ thị $\left(C\right)$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A=\left(a;0\right)$ đến $\left(C\right)$. Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi Δ **là đường thẳng đi qua** $A\left(a;0\right)$ và có hệ số góc là k, khi đó phương trình đường thẳng Δ là $y=k\left(x-a\right)$.

Do Δ **là tiếp tuyến của** $\left(C\right)$, xét hệ phương trình $\left(I\right):\begin{cases} x^4-2x^3+x^2=k\left(x-a\right) & (1) \\ 4x^3-6x^2+2x=k & (2) \end{cases}$

Thế (2) vào (1), ta có:

$x^4-2x^3+x^2=\left(4x^3-6x^2+2x\right)\left(x-a\right)\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left[3x^2-\left(4a+1\right)x+2a\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ 3x^2-\left(4a+1\right)x+2a=0 \quad (3) \end{array}\right.$.

Do $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.\Rightarrow k=0$**, ta xét** $k=0\Leftrightarrow 4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Khi $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$**, ta thu được một phương trình tiếp tuyến là** $\Delta: y=0$**.**

Khi $x=\dfrac{1}{2}$ **phương trình tiếp tuyến là** $\Delta: y=\dfrac{1}{16}$**, tiếp tuyến không đi qua** $A\left(a;0\right)$**.**

Bài toán trở thành tìm a để (3) **có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng** 1 **nghiệm thuộc** $\left\{0;1\right\}$ **hoặc** (3) **có nghiệm kép khác** $0;1;\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 1: (3) **có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng** 1 **nghiệm thuộc** $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \left[-(4a+1)\right]^2 - 4.3.2a > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2a = 0 \\ 3-(4a+1)+2a = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) **có nghiệm kép khác** $0;\,1;\,\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 16a^2 - 16a + 1 = 0 \\ 2a \neq 0 \\ 3-4(a+1)+2a \neq 0 \\ \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}(4a+1) + 2a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{array}\right..$$

Vậy đáp án của bài toán là $S = \left\{0;1;\dfrac{2-\sqrt{3}}{4};\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ có đồ thị (C). Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C). Số phần tử của S là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$, suy ra $y' = f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$.

Đường thẳng d đi qua $A(a;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-a)$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 = k(x-a) & (1) \\ 4x^3 - 6x^2 + 2x = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = (4x^3 - 6x^2 + 2x)(x-a) \Leftrightarrow 3x^4 - (4a+4)x^3 + (6a+1)x^2 - 2ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\left[3x^2 - (4a+1)x + 2a\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ g(x) = 3x^2 - (4a+1)x + 2a = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ x = 1 \Rightarrow k = 0 \end{cases}$ và phương trình tiếp tuyến tại các điểm có hoành độ $x = 0$, $x = 1$ đều có dạng $y = 0$.

Khi đó để có đúng 2 tiếp tuyến kẻ từ $A(a;0)$ đến (C) thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm hoặc bằng 0 hoặc bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \left[\begin{array}{l} g(0)=0 \\ g(1)=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2-16a+1>0 \\ \left[\begin{array}{l} 2a=0 \\ 3.1^2-(4a+1).1+2a=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2-16a+1>0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: Phương trình (3) có nghiệm kép không thuộc tập hợp $\{0;1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(0)\neq 0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2-16a+1=0 \\ a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ a=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{array}\right..$$

Do đó $S=\left\{0;1;\dfrac{2+\sqrt{3}}{4};\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Vậy tập S có 4 phần tử.

Câu 40: Gọi m là giá trị để đồ thị (C_m) của hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2m^2-1}{x-1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và các tiếp tuyến với (C_m) tại hai điểm này vuông góc với nhau. Khi đó ta có :

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là : $f(x)=x^2+2mx+2m^2-1=0\,(x\neq 1)\,(1)$.

(C_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+1>0 \\ 2m+2m^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$.

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1), theo vi et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=-2m \\ x_1x_2=2m^2-1 \end{cases}$

Ta có : $y'=\dfrac{x^2-2x-2m^2-2m+1}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến tại hai giao điểm vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2)=-1$

$\Leftrightarrow \left(x_1^2-2x_1-2m^2-2m+1\right)\left(x_2^2-2x_2-2m^2-2m+1\right)+(x_1-1)^2(x_2-1)^2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(x_1x_2-(x_1+x_2)+1\right)^2-\left(2m^2+2m\right)\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2(x_1+x_2)+2\right)+\left(2m^2+2m\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(2m^2+2m\right)^2-\left(2m^2+2m\right)\left(4m^2-4m^2+2+4m+2\right)+\left(2m^2+2m\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(2m^2+2m\right)-4m-4=0 \Leftrightarrow 6m^2+2m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\,(l) \\ m=\dfrac{2}{3}\,(tm) \end{array}\right.$. Vậy $m=\dfrac{2}{3}$.

Câu 41: Trên đường thẳng $d: y=2x+1$ có bao nhiêu điểm có thể kẻ được đến đồ thị $(C): y=\dfrac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M \in d \Rightarrow M\left(a;2a+1\right)$.

Gọi $A\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d_1 kẻ từ M với $\left(C\right)$.

Phương trình tiếp tuyến $d_1: y = y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-4}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

Vì $M \in d_1$ nên $2a+1=\dfrac{-4}{\left(x_0-1\right)^2}\left(a-x_0\right)+\dfrac{x_0+3}{x_0-1}$

$\Rightarrow \left(2a+1\right)\left(x_0-1\right)^2=-4\left(a-x_0\right)+\left(x_0+3\right)\left(x_0-1\right),\ \left(x_0\neq 1\right)$.

$\Leftrightarrow a.x_0^2-2\left(a+2\right)x_0+3a+2=0$

Từ M kẻ đến $\left(C\right)$ đúng 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ $\left(1\right)$ có đúng 1 nghiệm $x_0\neq 1$.

TH1: $a=0$

$\left(1\right)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $a=0$ thỏa mãn.

TH2: $a\neq 0$, PT có nghiệm kép $x_0\neq 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=\left(a+2\right)^2-a\left(3a+2\right)=0\\ -\dfrac{2\left(a+2\right)}{2a}\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2\end{array}\right.\\ \dfrac{a+2}{a}\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=2\end{array}\right..$$

TH3: $a\neq 0$, PT có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=-2a^2+2a+4>0\\ a.1^2-2\left(a+2\right).1+3a+2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1<a<2\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow a=1.$$

Kết hợp 3 trường hợp suy ra có 4 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.