



I. NGUYÊN TẮC GHÉP TRỤC XÉT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM HỢP $g = f(u(x))$.

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm $g = f(u(x))$, giả sử ta được tập xác định

$$D = (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup \dots \cup (a_{n-1}; a_n). \text{ Ở đây có thể là } a_1 \equiv -\infty; a_n \equiv +\infty.$$

Bước 2: Xét sự biến thiên của $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$ (B2 có thể làm gộp trong bước 3 nếu nó đơn giản).

Bước 3: Lập bảng biến thiên tổng hợp xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$.

Bảng này thường có 3 dòng dạng

x	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n			
$u = u(x)$	u_1	b_1	$b_2..... b_k$	u_2		u_{n-1}	u_n	
$g = f(u(x))$		$g(u_1)$	$g(b_1)$	$g(b_2)$		$g(u_2)$		$g(u_n)$

Cụ thể các thành phần trong BBT như sau

Dòng 1: Xác định các điểm kỳ dị của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tăng dần từ trái qua phải, giả sử như sau: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý 1).

Dòng 2: Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$ với $(i = \overline{1, \dots, n})$

Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$ cần bổ xung các điểm kỳ dị $b_1; b_2; \dots; b_k$ của của hàm $y = f(x)$.

Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$ cần sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự chẳng hạn:

$$u_i < b_1 < b_2 < \dots < b_k < u_{i+1} \text{ hoặc } u_i > b_1 > b_2 > \dots > b_k > u_{i+1} \text{ (xem chú ý 2).}$$

Dòng 3: Xét chiều biến thiên của hàm $g = f(u(x))$ dựa vào BBT của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi:

$$u \text{ đóng vai trò của } x; f(u) \text{ đóng vai trò của } f(x).$$

Sau khi hoàn thiện BBT hàm hợp $g = f(u(x))$ ta thấy được hình dạng đồ thị hàm này.

Bước 4: Dùng BBT hàm hợp $g = f(u(x))$ giải quyết các yêu cầu đặt ra trong bài toán và kết luận.

Chú ý 1:

- Các điểm kỳ dị của $u = u(x)$ gồm: Điểm biên của tập xác định D , các điểm cực trị của $u = u(x)$.
- Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì trong dòng 1 các điểm kỳ dị còn có nghiệm của pt $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ với trục Ox).
- Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì trong dòng 1 các điểm kỳ dị còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ với trục Oy).

Chú ý 2:

- Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.
- Điểm kỳ dị của $y = f(x)$ gồm: Các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định; các điểm cực trị hàm số $y = f(x)$.
- Nếu xét hàm $g = |f(u(x))|$ thì trong dòng 2 các điểm kỳ dị còn có nghiệm của pt $f(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ với trục Ox).
- Nếu xét hàm $g = f(u(|x|))$ thì trong dòng 2 các điểm kỳ dị còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ với trục Oy).

II. ĐỀ MINH HỌA CỦA BỘ GIÁO DỤC.

Câu 45-MH-BGD-L1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự luận truyền thống

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm

$$-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi.$$

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Cách 2: Phương pháp ghép trực

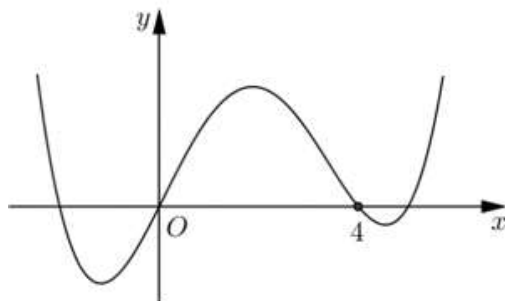
$$\text{Đặt } t = \sin x \in [-1; 1] \text{ vì } x \in [-\pi; 2\pi]; t' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases};$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$u = \sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0
$f(u)$		-1		-1		-1	

Ta có $2f(\sin x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x) = -\frac{3}{2}$.

Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 6.

Câu 46-MH-BGD-L1: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận truyền thống

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

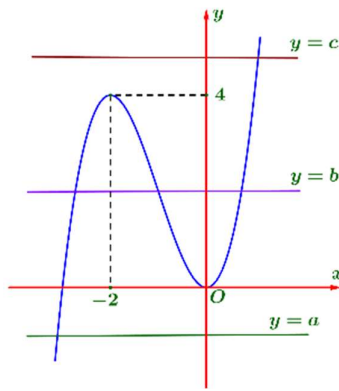
Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	
$h(x)$	$-\infty$		4		0		$+\infty$



Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Xét hàm số $u = x^3 + 3x^2$ ta có $u' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

x	$-\infty$		-2		0					$+\infty$
$u = x^3 + 3x^2$	$-\infty$	a	b	4	b	0	b	4	c	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$		$f(b)$		$f(b)$		$f(b)$		$+\infty$	
		$f(a)$		0		0		-2		0
									$f(c)$	

Gọi a, b, c là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ khi đó $a < 0 < b < 4 < c$

Và ta cũng có $f(a) < f(c) < 0$; $f(b) > 0$.

Suy ra $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 46-MH-BGD-L2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			2		0		2		
	$-\infty$								$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C**Cách 1: Tự luận truyền thống**

$$\text{Đặt } t = \sin x, x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên, ta có } f(t) = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\pi < x_1 < x_2 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$.

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$$0 < x_3 < x_4 < \pi; 2\pi < x_5 < \frac{5\pi}{2};$$

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

$$\text{Đặt } t = \sin x, x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$

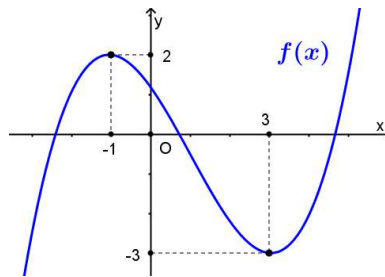
x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$u = \sin x$	0	1	-1	1
$f(u)$	0	2	0	2

Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 5.

III. PHÁT TRIỂN CÂU 45 – 46

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho như ở hình vẽ bên dưới. Hỏi phương trình

$$\left| f(x^3 - 3x + 1) - 2 \right| = 1 \text{ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?}$$



A. 8.

B. 6.

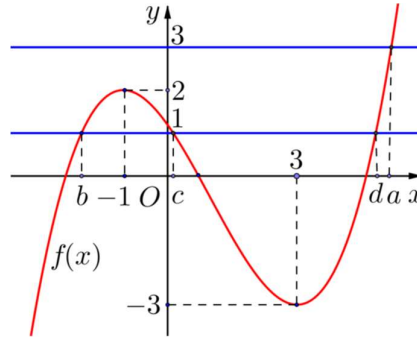
C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

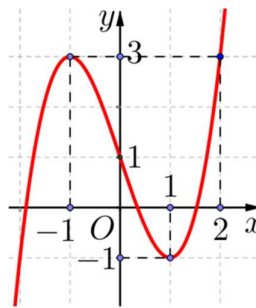
Cách 1: Tự luận truyền thống



- Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta có:

$$|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x + 1) = 1 \\ f(x^3 - 3x + 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = b \quad (b < -1) \quad (2) \\ x^3 - 3x + 1 = c \quad (-1 < c < 3) \quad (3) \\ x^3 - 3x + 1 = d \quad (d > 3) \quad (4) \\ x^3 - 3x + 1 = a \quad (a > d) \quad (1) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (hình vẽ dưới đây)



Ta suy ra: Phương trình (1), (2), (4) mỗi phương trình có 1 nghiệm, phương trình (3) có 3 nghiệm và các nghiệm này đều phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = x^3 - 3x + 1$

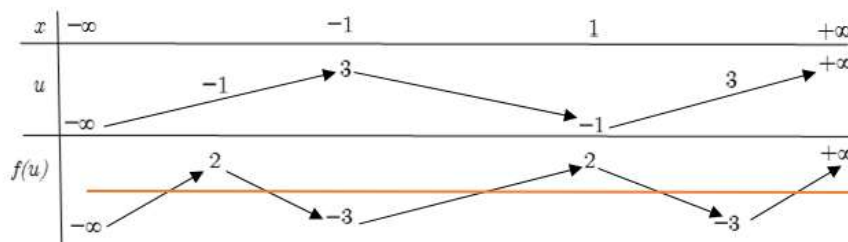
Ta có $u'(x) = 3x^2 - 3$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT của hàm số $u(x)$:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
u'	$+$	0	$-$	0	$+$
u		3		-1	

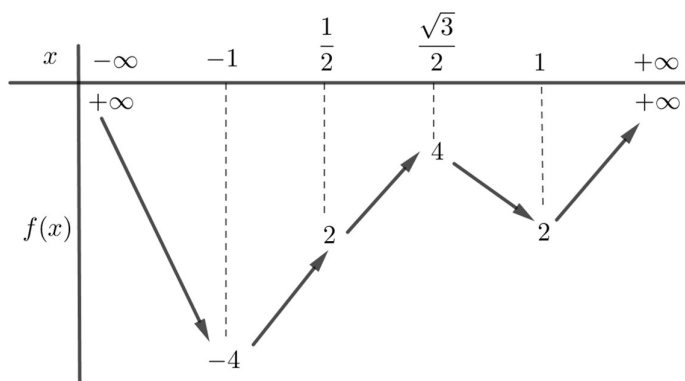
Phương trình $|f(x^3 - 3x + 1) - 2| = 1$ trở thành: $|f(u) - 2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 3 \\ f(u) = 1 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u(x) = x^3 - 3x + 1$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f(x^3 - 3x + 1) = f(u)$ như sau:



Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = 1$ có 5 nghiệm và phương trình $f(u) = 3$ có 1 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3 - m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có $f^2(\cos x) + (3 - m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$.

Đặt $t = f(\cos x)$ ta được phương trình $t^2 + (3 - m)t + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = m - 5 \end{cases}$.

+) Với $t = 2 \Rightarrow f(\cos x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} \\ x = 0 \end{cases}$ vì $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

+) Với $t = m - 5 \Rightarrow f(\cos x) = m - 5$ (1).

Để phương trình ban đầu có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ thì phương trình (1) có

đúng 1 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ khác $-\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right] \Rightarrow u = \cos x \in [-1; 1]$.

Nhận xét:

Nếu $u \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ thì có 2 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Nếu $u = 1$ hoặc $u \in \left[-1; \frac{1}{2}\right)$ thì có đúng 1 nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Do đó yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình (1) thỏa

$$f(\cos x) = m - 5 \Leftrightarrow f(u) = m - 5 \text{ có nghiệm } u \in \left[-1; \frac{1}{2}\right).$$

Từ bảng biến thiên suy ra $-4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

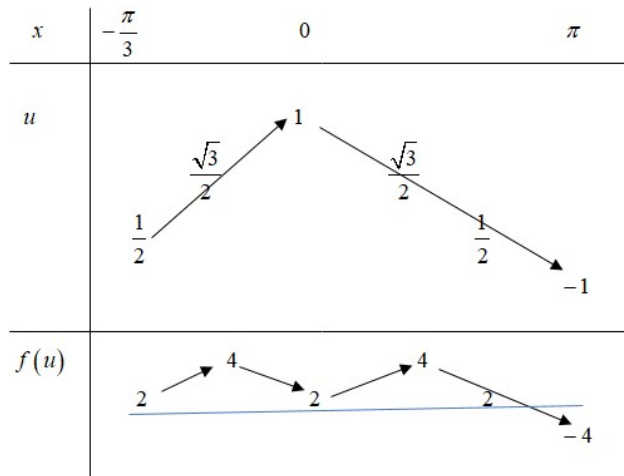
Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $t = \cos x \in [-1; 1]$ vì $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases}$$

Khi đó phương trình $f^2(\cos x) + (3 - m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ thành

$$f(t)^2 + (3 - m)f(t) + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 2 \\ f(t) = m - 5 \end{cases}$$

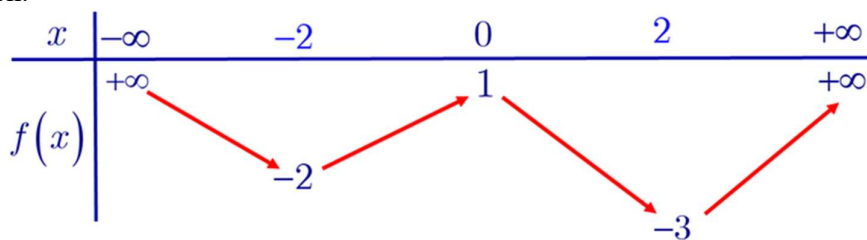


Do phương trình $f(t) = 2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình

$$f(t) = m - 5 \text{ có duy nhất một nghiệm } -4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 3: **[CHUYÊN VINH LẦN 1-2020].** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Xác định số nghiệm của phương trình $\left|f(x^3 - 3x^2)\right| = \frac{3}{2}$, biết $f(-4) = 0$.

A. 6.

B. 9.

C. 10.

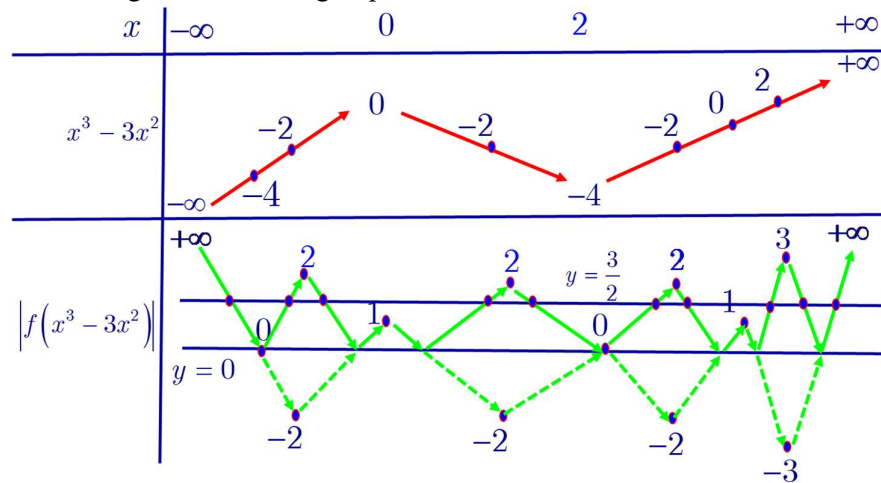
D. 11.

Lời giải

Chọn C

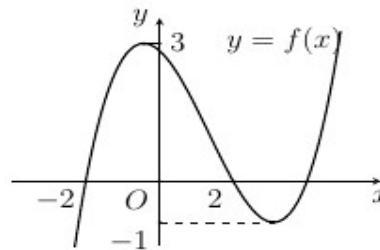
Phương pháp ghép trực

Theo bài ra ta có bảng biến thiên tổng hợp:



Đồ thị hàm số $y = \left| f(x^3 - 3x^2) \right|$ là phần nét liền.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left| 3f(x^3 - 3x) \right| = m$ có 8 nghiệm phân biệt



A. 5.

B. 4.

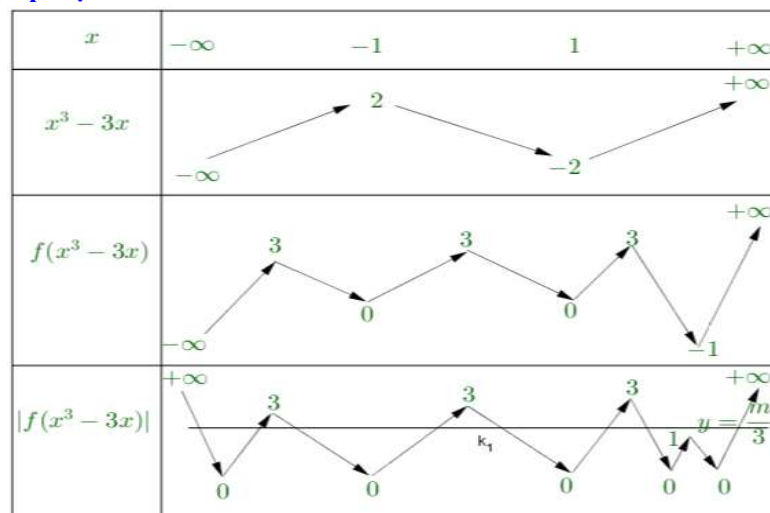
C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp ghép trực



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $|3f(x^3 - 3x)| = m$ có 8 nghiệm phân biệt khi và chỉ

khi $1 < \frac{m}{3} < 3 \Leftrightarrow 3 < m < 9$. $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x) - 1)$ là

A. 8.

B. 3

C. 4.

D. 11.

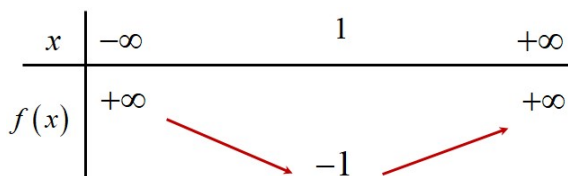
Lời giải

Chọn B

Phương pháp ghép trục

$$y = f(x) = x^2 - 2x$$

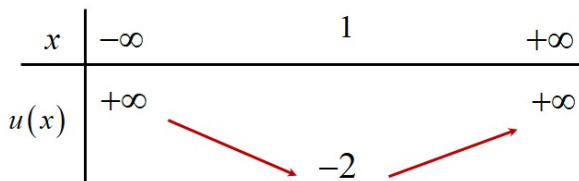
BBT



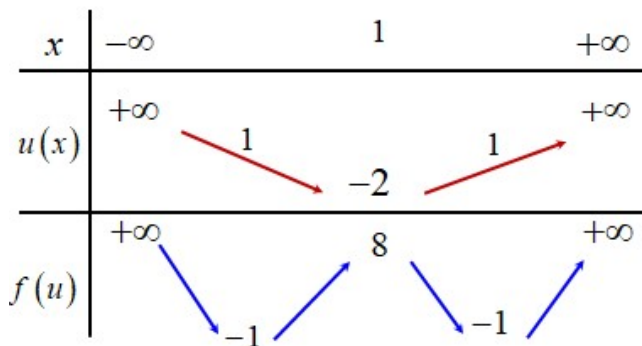
Đặt $u = f(x) - 1$

Ta có $u'(x) = f'(x)$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow u = -2$.

BBT của hàm số $u(x)$:

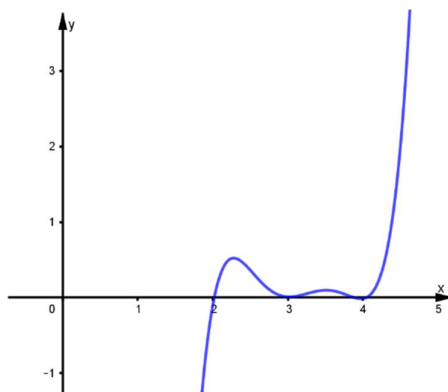


Từ hai BBT trên ta có BBT của hàm số $g(x) = f(f(x) - 1) = f(u)$



Vậy hàm số ban đầu có 3 điểm cực trị.

Câu 6: [CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG-2020] Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 sao cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$.

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 2: PP tự luận truyền thống

- Đầu tiên ta nhận xét tại $x=3$ và $x=4$ đồ thị $f'(x)$ tiếp xúc trục Ox nên ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \text{ trong đó } x=3, x=4 \text{ là nghiệm kép.} \\ x=4 \end{cases}$$

- Ta có $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$, nên

$$g'(x) = (2x+4)f'(x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ f'(x^2 + 4x + 5) = 0 \end{cases}$$

- Xét phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=3 \\ t=4 \end{cases}$, ta loại hai nghiệm $t=3$ và $t=4$ do nghiệm kép không

là điểm cực trị.

- Từ $t=2$; $x^2 + 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

- Tóm lại hàm số $g(x)$ có ba điểm cực trị là $x = -1$; $x = -2$; $x = -3$.

Cách 2: PP ghép trực

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	?	$+\infty$

Đặt $u = x^2 + 4x + 5$

$$u' = 2x + 4$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow u = 1$$

BBT của u

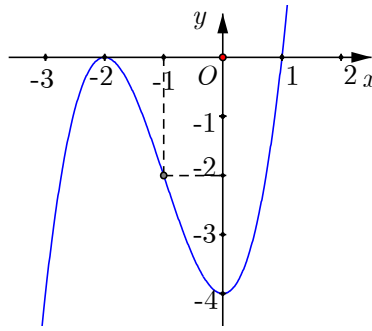
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

BBT của hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5) = f(u)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$		$+\infty$

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có ba điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

A. 3.

B. 4.

C. 2.

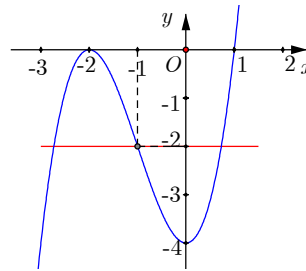
D. 6.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: PP tự luận truyền thống

Ta có $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = -2$

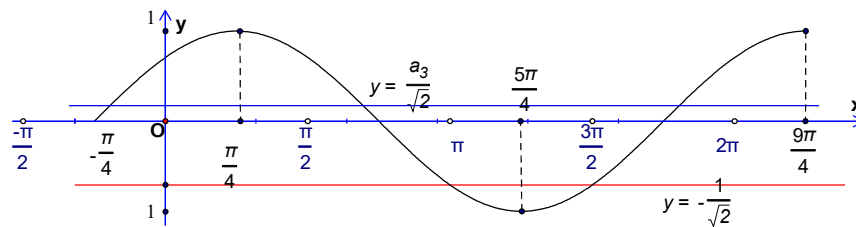


Dựa vào đồ thị ta có

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a_1 \in (-\infty; -2) \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a_3 \in (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ta có $\frac{a_1}{\sqrt{2}} < -1$ nên phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ trên đoạn $[0; 2\pi]$



Ta thấy phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ có 2 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$; phương trình

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a_3}{\sqrt{2}}$ có 2 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$ và các nghiệm là khác nhau.

Vậy của phương trình $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0$ có 4 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Ta có $f(\sin x + \cos x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x + \cos x) = -2$

Đặt $u = \sin x + \cos x$

Ta có $u' = \cos x - \sin x$;

$$u' = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\text{Mà } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

BBT của hàm số $u(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
u'	+	0	-	+
u	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1

Hàm số u có 2 điểm cực trị là $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$.

Ta có $f(\sqrt{2}) = a$, $f(-\sqrt{2}) = b$ với $a > 0$, $-2 < b < 0$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u = \sin x + \cos x$ ta có bảng sau:

x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
u'	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1
$f(u)$						

Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = -2$ có 4 nghiệm x .

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm x .

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$ của phương trình $|f(2\cos x - 1)| = 2(1)$ là

A. 8.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Cách 2: PP tự luận truyền thống

Đặt $u = 2\cos x - 1, x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$

$$\Rightarrow u'(x) = -2\sin x; u'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = 1 \\ u(\pi) = -3 \end{cases}$$

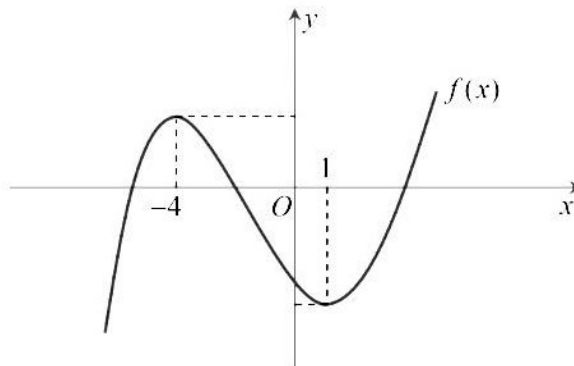
BBT của $u(x)$

x	$-\frac{\pi}{3}$	0	π	2π
u'	+	0	-	0
u	0	1	-3	1

x	$-\frac{\pi}{3}$	0	π	2π
$u = 2\cos x - 1$	0	1	-3	0
$f(u)$	2	-3	2	-2
$ f(u) $	2	3	2	2

Số nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right)$ của phương trình $|f(2\cos x - 1)| = 2$ là 6

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định R và có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 4|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11

Lời giải

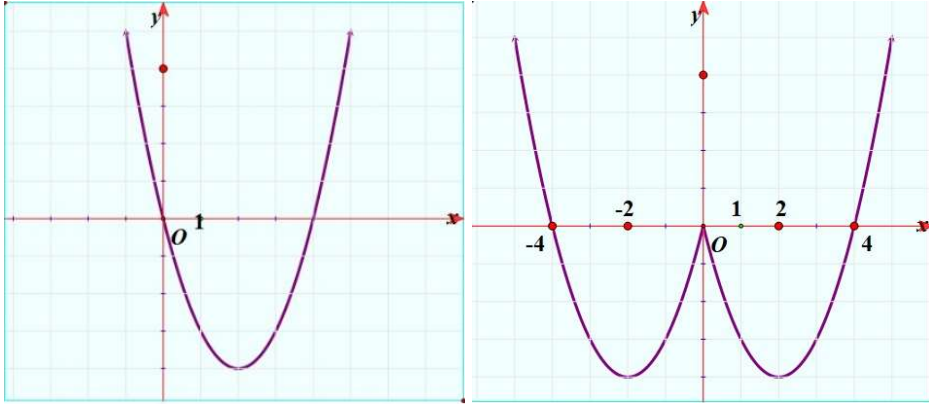
Chọn A

Cách 2: PP tự luận truyền thống

Đặt $u(x) = x^2 - 4|x| \Rightarrow u' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Đặt $t = u(|x|) = |x|^2 - 4|x|$

Vẽ đồ thị hàm số $u(x) = x^2 - 4x$, từ đó suy ra đồ thị $t = u(|x|)$

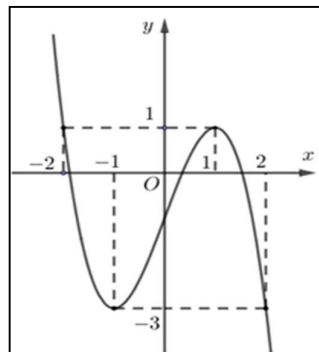


Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2						$+\infty$		
$u = x^2 - 4x$	$+\infty$		-4	-2	0	2	4	$+\infty$		
$t = u(x)$	$+\infty$	1	0	-4	0	-4	0	1	$+\infty$	
$f(t) = g(x)$	$+\infty$									$+\infty$

Suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 4|x|)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1 - f(x)) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5.

B. 7.

C. 4.

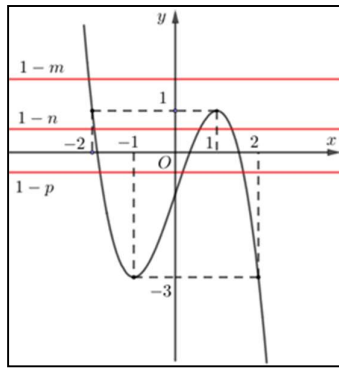
D. 6.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp tự luận

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - f(x) = m \quad (-2 < m < -1) \\ 1 - f(x) = n \quad (0 < n < 1) \\ 1 - f(x) = p \quad (1 < p < 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 - m \\ f(x) = 1 - n \\ f(x) = 1 - p \end{cases}$$



+) Do $-2 < m < -1 \Rightarrow 2 < 1-m < 3$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1-m$ có 1 nghiệm x_1 .

+) Do $0 < n < 1 \Rightarrow 0 < 1-n < 1$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1-n$ có 3 nghiệm x_2, x_3, x_4 .

+) Do $1 < p < 2 \Rightarrow -1 < 1-p < 0$

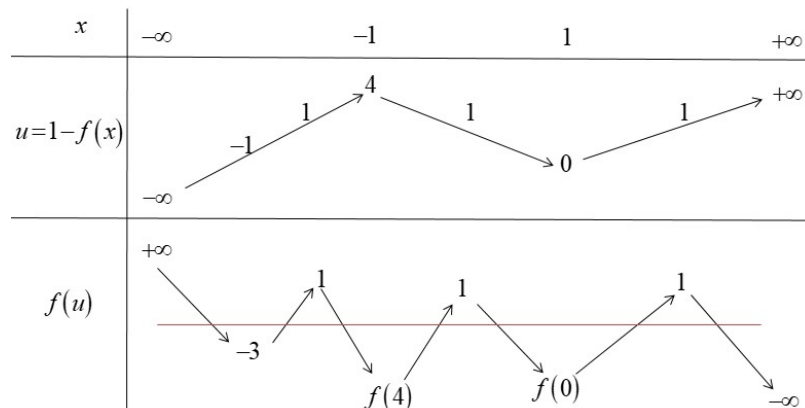
$\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1-p$ có 3 nghiệm x_5, x_6, x_7 .

Để thấy 7 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

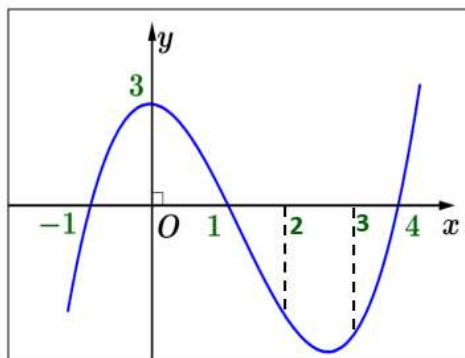
Đặt $u = 1 - f(x)$

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra BBT của hàm $u = 1 - f(x)$ và hàm $f(u)$ như sau (Với $f(4) < -3$ và $-3 < f(0) < 0$)



Từ bảng trên ta thấy phương trình $f(u) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là



A. 2.

B. 8.

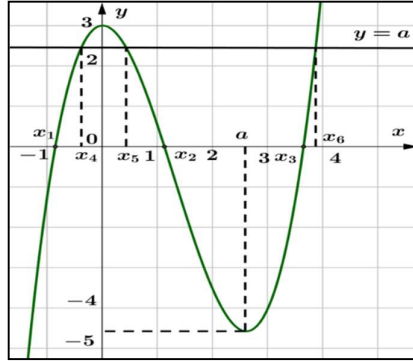
C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Phương pháp tự luận



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, (2 < a < 3).$$

+ $f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

+ Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

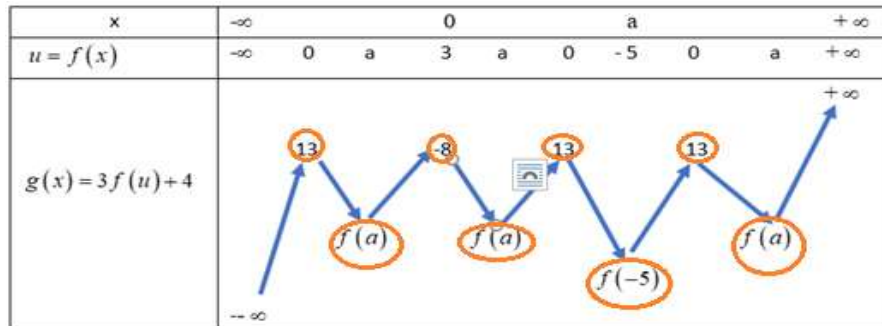
Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

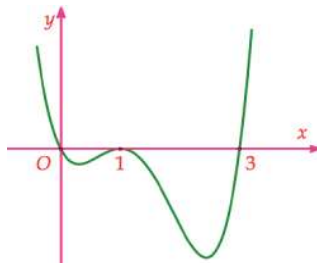
Đặt $u = f(x)$

Từ đồ thị của hàm $y = f(x)$ ta suy ra BBT của hàm $u = f(x)$ và hàm $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ như sau (với $2 < a < 3$; $f(-5) < -5 < f(a) < -4$).



Từ BBT của hàm hợp ta có hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ là

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

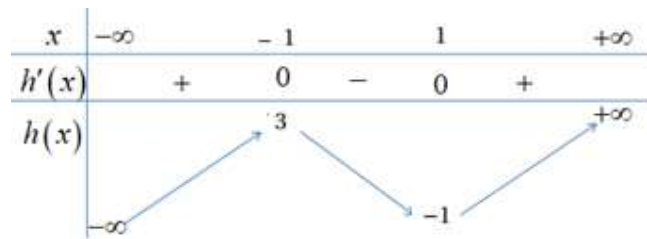
$$\text{Theo đồ thị hàm số ta có được } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (0;1) \\ x = 1 \\ x = x_2 \in (1;3) \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 1) \text{ nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x + 1 = x_1 \\ x^3 - 3x + 1 = 1 \\ x^3 - 3x + 1 = x_2 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = 3x^2 - 3$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$, từ đó ta có BBT của $y = h(x)$ như sau



Từ BBT của hàm số $h(x) = x^3 - 3x + 1$ nên ta có $h(x) = x_1 \in (0;1)$ có ba nghiệm phân biệt, $h(x) = 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt, $h(x) = x_2 \in (1;3)$ có đúng ba nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác nhau đồng thời khác 1 và -1. Vì thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 11 nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 11 cực trị.

Cách 2: PP ghép trực

$$\text{Từ đồ thị hàm số ta có được } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (0;1) \\ x = 1 \\ x = b \in (1;3) \end{cases} \text{ và } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(a) < f(b) < 0 \end{cases}.$$

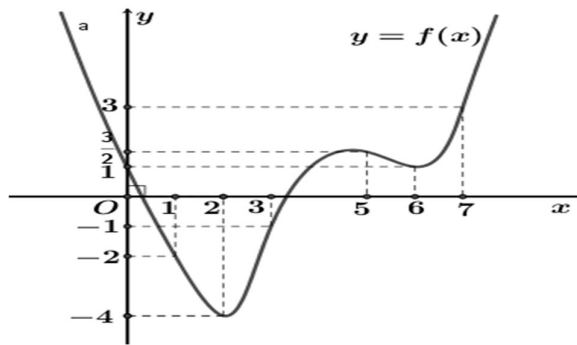
Đặt $t = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Ta sử dụng phương pháp ghép trực để lập bảng biến thiên cho hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t'		0	0	
t	$-\infty$	3	-1	$+\infty$
$g(x) = f(t)$	$+\infty$	$f(a)$	$f(b)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta thấy hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 1)$ có 11 điểm cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = m$ có nghiệm.

A. $-4 \leq m \leq -2$

B. $m > -4$

C. $2 < m < 4$

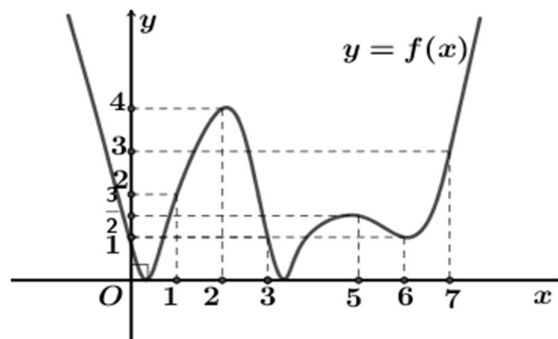
D. $2 \leq m \leq 4$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2 + 4}{(2x^2 + 2)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

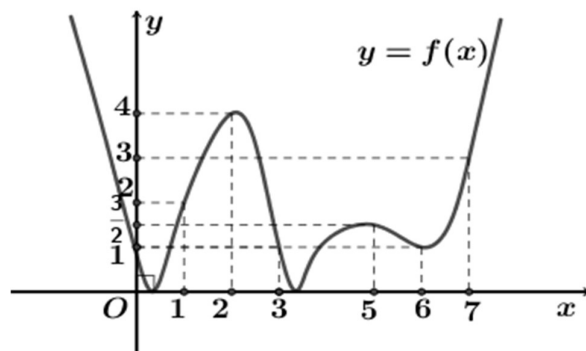
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
t'	$-$	0	$+$	0	$-$
t	$\frac{3}{2}$	1	2	$\frac{3}{2}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [1; 2]$.

Vậy phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|f(t)| = m$ có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2+4}{(2x^2+2)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
t'	$-$	0	$+$	0	$-$
t	$\frac{3}{2}$	1	2	$\frac{3}{2}$	

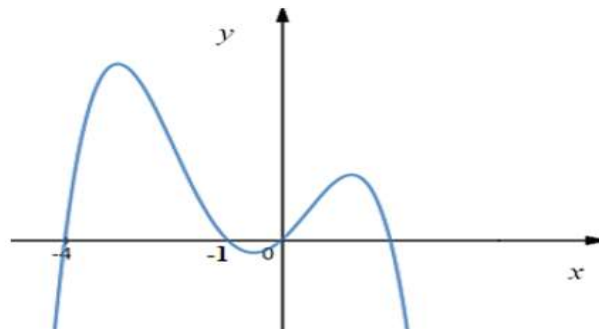
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t	$\frac{3}{2}$	1	2	$\frac{3}{2}$
$ f(t) $	a	2	4	a

Với $2 < a < 4$.

Vậy phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $2 \leq m \leq 4$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị có ba điểm cực trị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$ là

A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

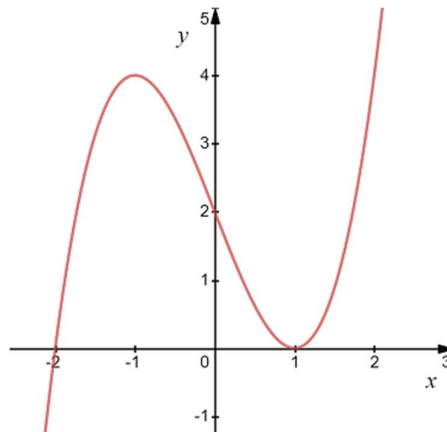
Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có:

$$g'(x) = (3x^2 - 3) \cdot f'(x^3 - 3x + 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ f'(x^3 - 3x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - 3x + 2 = a \quad (1) \\ x^3 - 3x + 2 = b \quad (2) \\ x^3 - 3x + 2 = c \quad (3) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, suy ra:



Phương trình (1) có 1 nghiệm khác ± 1 , vì $-4 < a < -1$

Phương trình (2) có 1 nghiệm khác ± 1 , vì $-1 < b < 0$

Phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt khác ± 1 , vì $0 < c < 4$

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, tức là hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$

có 7 điểm cực trị. Chọn B

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Ta có hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 2)$

Đặt $t = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow t' = 3x^2 - 3; \Leftrightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t'		0	0	
t	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Khi đó hàm số trở thành $g(t) = f(t)$.

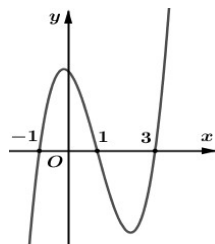
Từ đồ thị hàm số $g(x) = f(x)$ ta có các điểm cực trị $a \in (-\infty; -1), b \in (-1; 0), c \in (0; +\infty)$.

Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$				-1		1		$+\infty$
t	$-\infty$	a	b	c	4	c	0	c	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(4)$	$f(c)$	$f(0)$	$f(c)$	$-\infty$

Vậy có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = -1 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 1 \\ \sqrt{x^2+2x+2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

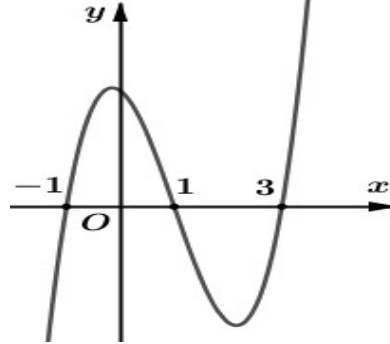
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có 1 điểm cực đại.

Chú ý: Cách xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $(-1; -1+2\sqrt{2})$ ta chọn $x_0 = 0 \rightarrow g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0$ vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'(\sqrt{2}) < 0$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực



Đặt $u(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{(x+1)^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}; u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\text{Xét } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -1(vn) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(u) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ (Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(u)$).

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	3	1	3	$+\infty$
$f'(u)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(u)$					

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(u) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có một điểm cực đại.

BÀI TẬP CHO HỌC SINH

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		-8	5	13	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình $f(\cos x) = \frac{13}{3}$ trở thành $f(t) = \frac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t) = \frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t \in (0; 1]$

Với một nghiệm $t \in (0; 1]$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x = t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u(x) = \cos x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow u \in (0; 1]$

Ta có $u'(x) = -\sin x$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ trên nửa khoảng $(0; 1]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$u(x)$	0	1	0
$f(u)$	-8	5	-8

Quan sát bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(u) = \frac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			5		2		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}\right) - 3 = 0$ là

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Phương pháp truyền thống

Điều kiện xác định $x^3 - 6x^2 + 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$$\text{Ta có } f\left(4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}\right) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x} = a_1 \in (-\infty; 2) & (1) \\ 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x} = a_2 \in (2; 4) & (2) \\ 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x} = a_3 \in (4; +\infty) & (3) \end{cases}$$

Đặt $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$ với $x \geq 0$.

$$t' = -\frac{3x^2 - 12x + 9}{2\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}} \text{ với } x > 0; t' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$

x	0	1		3		$+\infty$				
t'		-	0	+	0	-				
t	4			2			4			$-\infty$

Từ bảng biến thiên trên, suy ra

Phương trình (1) có 1 nghiệm

Phương trình (2) có 3 nghiệm

Phương trình (3) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2: PP ghép trực

Đặt $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$ với $x \geq 0$.

$$t' = -\frac{3x^2 - 12x + 9}{2\sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}} \text{ với } x > 0; t' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của $t = 4 - \sqrt{x^3 - 6x^2 + 9x}$

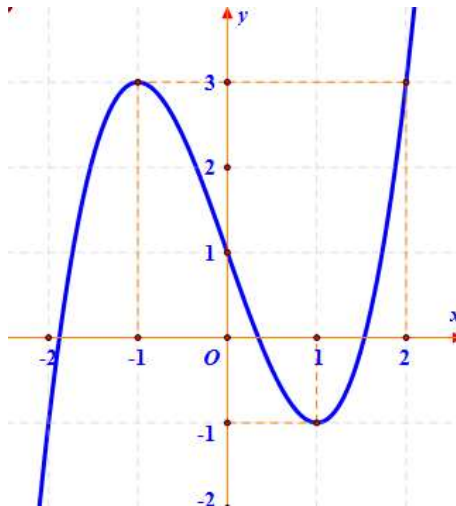
x	0	1	3	$+\infty$			
t'		-	0	+	0	-	
t	4		2		4		$-\infty$

Ta có bảng sau

x	0	1	3	$+\infty$
t	4	2	4	$-\infty$
$f(t)$				

Dựa vào bảng, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Cách tự luận truyền thống

Từ đồ thị, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Xét hàm số $g(x) = f(\sqrt{4-x^2})$

TXĐ $D = [-2; 2]$

Ta có $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} f'(\sqrt{4-x^2})$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(\sqrt{4-x^2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{4-x^2} = -1(l) \\ \sqrt{4-x^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	2
$g'(x)$	-	0	+	-	+
$g(x)$	1	-1	3	-1	1

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $g(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m = -1 \\ m \in (1; 3) \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 2\}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Cách 2: PP ghép trực

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$. TXĐ: $D = [-2; 2]$

Ta có: $t' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $t' = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-2; 2)$

Bảng biến thiên

x	-2	0	2
t'	+		-
t	0	2	0

Phương trình $f(\sqrt{4-x^2}) = m$ trở thành $f(t) = m$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và bảng biến thiên $t(x) = \sqrt{4-x^2}$ ta có bảng sau đây

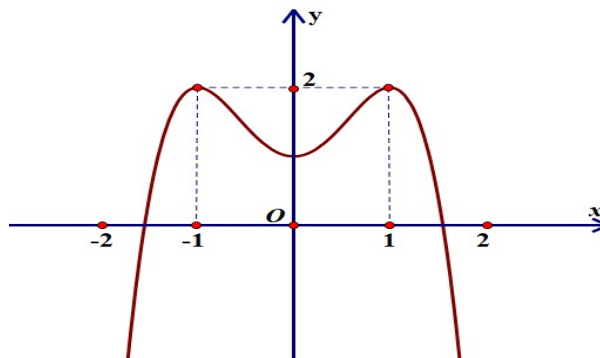
x	-2	0	2
t	0	2	0
$y = f(t)$	1	3	1

Từ bảng trên suy ra phương trình $f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt khi $m \in (1; 3)$ hoặc $m = -1$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 2\}$ thỏa mãn bài toán.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 4]$ của phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2$ là

A. 4.

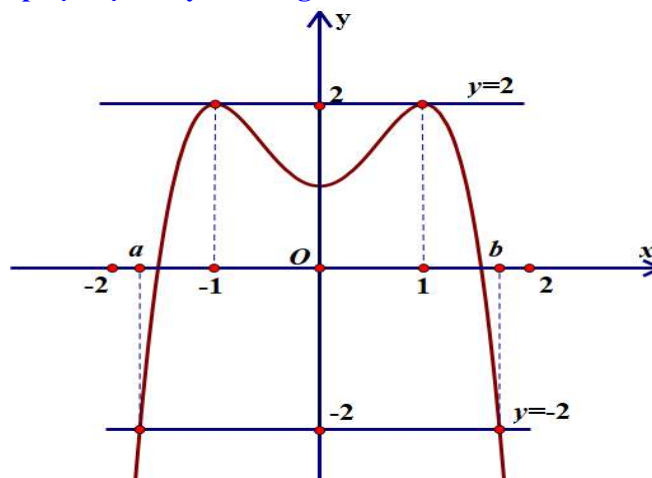
B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp tự luận truyền thống



Chọn B

Ta có phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 - 2x) = 2 \\ f(x^2 - 2x) = -2 \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số đã vẽ của $y = f(x)$ ta có

$$f(x^2 - 2x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Xét trên đoạn } [0; 4] \text{ ta được 2 nghiệm}$$

$$x = 1; x = 1 + \sqrt{2}.$$

$$f(x^2 - 2x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a \\ x^2 - 2x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - a = 0 \\ x^2 - 2x - b = 0 \end{cases} \text{ với } \begin{cases} -2 < a < -1 \\ 1 < b < 2 \end{cases}.$$

Với phương trình $x^2 - 2x - a = 0$ có $\Delta' = 1 + a < 0$ do vậy phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Với phương trình } x^2 - 2x - b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{b+1} \\ x = 1 - \sqrt{b+1} \end{cases} \text{ ta có nghiệm } x = 1 - \sqrt{b+1} < 0 \text{ còn}$$

$0 < 1 + \sqrt{b+1} < 4$, như vậy ở trường hợp này phương trình có 1 nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có 3 nghiệm trong đoạn $[0; 4]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $t = x^2 - 2x$, ta có $t' = 2x - 2$, từ đồ thị của hàm số $f(x)$ đã cho ta có $f(0) = 1$,

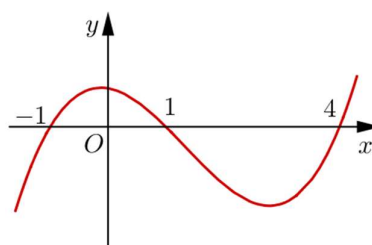
$$f(1) = f(-1) = 2 \text{ và } f(2) = m < -2.$$

Ta có bảng ghép trực như sau:

x	0	1	2	4
$t = x^2 - 2x$	0	-1	0	8
$f(t)$	1	2	1	2
$ f(t) $	1	2	1	2

Qua bảng ta thấy phương trình $|f(t)| = 2 \Leftrightarrow |f(x^2 - 2x)| = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 20: [CHUYÊN KHTN HÀ NỘI LẦN 3-2020] Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 7.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$\text{Ta có } y' = 2xf'(x^2 - 1) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Hay $y' = 0$ có một nghiệm bội ba, bốn nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 1)$ có 5 điểm cực trị.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Đặt $u = x^2 - 1$

Ta có $u'(x) = 2x$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT của hàm số $u(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$		-1		$+\infty$

Hàm số $y = f(x^2 - 1)$ trở thành hàm số: $y = f(u)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và bảng biến thiên của hàm số $u(x) = x^2 - 1$ ta có bảng sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u	$+\infty$	4	-1	1	$+\infty$
$f(u)$					

Từ bảng trên ta thấy hàm số $y = f(x^2 - 1)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 21: [KIM THANH HẢI DƯƠNG 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		$-\frac{1}{5}$		1		$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $5f(1-2x)+1=0$

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Tự luận truyền thống

Ta có $5f(1-2x)+1=0 \Leftrightarrow f(1-2x)=-\frac{1}{5}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		$-\frac{1}{5}$		1		$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

$$5f(1-2x)+1=0 \Leftrightarrow f(1-2x)=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x=-2 \\ 1-2x=a \in (2; +\infty) \end{cases}$$

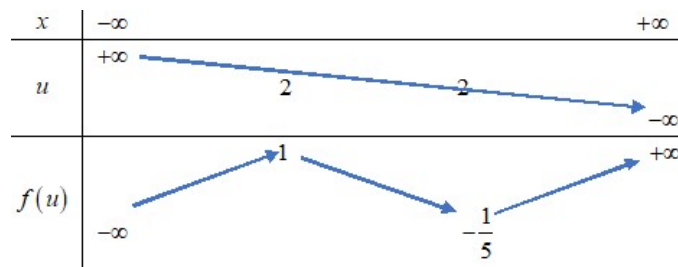
Suy ra phương trình $5f(1-2x)+1=0$ có 2 nghiệm thực.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u=1-2x$. Ta có $u'(x)=-2$.

Phương trình $5f(1-2x)+1=0$ trở thành phương trình: $f(u)=-\frac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng sau



Từ bảng biến thiên ta có $f(u) = -\frac{1}{5}$ có 2 nghiệm thực.

Suy ra phương trình $5f(1-2x)+1=0$ có 2 nghiệm thực.

Câu 22: [CHUYÊN NGŨ HÀ NỘI 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(3x-2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$g'(x) = 3f'(3x-2).$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x-2) > 0 \Leftrightarrow f'(3x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3x-2 < 0 \\ 3x-2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{2}{3} \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}.$$

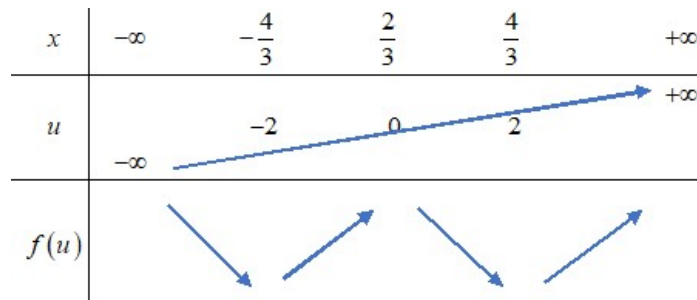
Chọn đáp án A vì $(2;4) \subset \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = 3x-2$. Ta có $u'(x) = 3$.

Hàm số $g(x) = f(3x-2)$ trở thành hàm số: $y = f(u)$.

Từ bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng sau



Từ bảng trên ta thấy $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ chỉ chứa khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f(3x-2)$ đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			0			$+\infty$
			-2		-2		

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$ của phương trình $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0$ là

A. 7.

B. 10.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

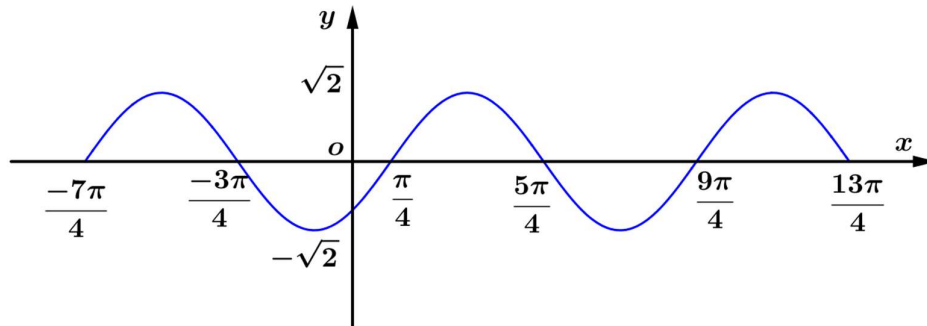
Chọn B

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$\text{Ta có } f(\sin x - \cos x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_1 \in (-\infty; -\sqrt{2}) & (1) \\ \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_2 \in (-\sqrt{2}; 0) & (2) \\ \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_3 \in (0; \sqrt{2}) & (3) \\ \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t_4 \in (\sqrt{2}; +\infty) & (4) \end{cases}$$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 6 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ vì $x \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right]$ nên $t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$$t' = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right\}$$

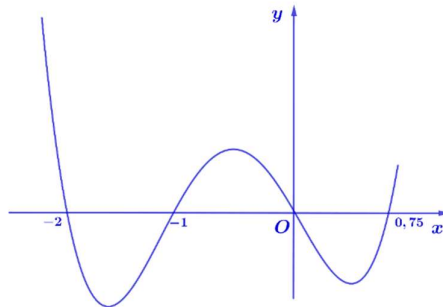
Khi đó phương trình $f(\sin x - \cos x) + 1 = 0$ thành $f(t) = -1$

Ta có

x	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$
t	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0
$f(t)$	0	0	0	0	0	0	0

Dựa vào bảng biến thiên trên thì phương trình đã cho có 10 nghiệm phân biệt.

Câu 24: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x^3 + 3x^2)$ là

A. 5.

B. 3.

C. 7.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận truyền thống

Do $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Theo đồ thị hàm số ta có được } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 0,75) \end{cases}.$$

$$\text{Mặt khác } g'(x) = (6x^2 + 6x)f'(2x^3 + 3x^2) \text{ nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6x = 0 \\ f'(2x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_1 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_2 \\ 2x^3 + 3x^2 = x_3 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = 2x^3 + 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } h'(x) = 6x^2 + 6x, h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ từ đó ta có BBT của } y = h(x) \text{ như sau}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Từ BBT của hàm số $h(x) = 2x^3 + 3x^2$ nên ta có $h(x) = x_1$ có đúng một nghiệm, $h(x) = x_2$ có đúng 1 nghiệm, $h(x) = x_3$ có đúng ba nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều khác 0 và -1 . Vì thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

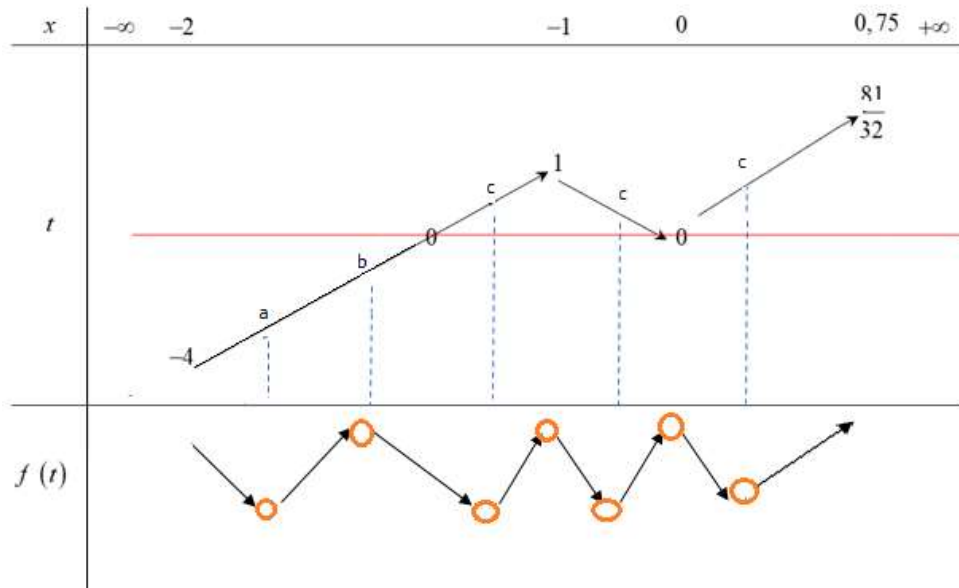
Cách 2: Phương pháp ghép trực

Gọi a, b, c là các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$, trong đó $-2 < a < b < 0 < c < 0,75$.

$$\text{Đặt } t = 2x^3 + 3x^2; \quad t' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình $g(x) = f(2x^3 + 3x^2) = f(t)$

Ta có BBT



Do phương trình $g'(x) = 0$ có đúng bảy nghiệm phân biệt và đều là các nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ của phương trình $2f(\cos x) - 3 = 0$ là

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

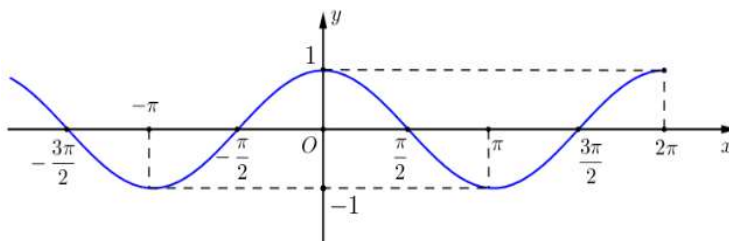
Chọn B

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$\text{Cách 1: Ta có } 2f(\cos x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a \in (-\infty; -1) \\ \cos x = b \in (-1; 0) \\ \cos x = c \in (0; 1) \\ \cos x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên $\cos x = a \in (-\infty; -1)$ và $\cos x = d \in (1; +\infty)$ vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$



Phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\cos x = c \in (0; 1)$ có 3 nghiệm phân biệt, không trùng với nghiệm nào của phương trình $\cos x = b \in (-1; 0)$.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Cách 2: PP ghép trực

Ta có $2f(\cos x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = \frac{3}{2}$ (*)

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]; t' = -\sin x; t' = 0 \Rightarrow x = k\pi; x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	0	π	2π
t'	-	0	+	0	+
t	0	-1	1	-1	1

khi đó (*) trở thành $f(t) = \frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình (*) trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ là số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = f(t), t \in [-1; 1]$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

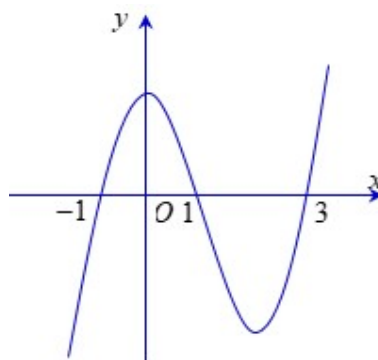
Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$t = \cos x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$f(t)$	1	2	1	2	1	2	1	2

Từ bảng biến thiên ta được kết quả đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 7 điểm

hay phương trình (*) có 7 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Câu 26: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau



Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Tự luận truyền thống

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Ta có $y' = \left[f(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) \right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3)$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(x+1)^2(x^2 + 2x - 7)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 3)} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-1 - 2\sqrt{2}$		-1		$-1 + 2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y									

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

$$u'(x) = (\sqrt{x^2 + 2x + 2})' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Ta có BBT của hàm số $u = u(x)$, $y = f(x)$, $y = f(u)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$u'(x)$		- 0 +	
$u(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

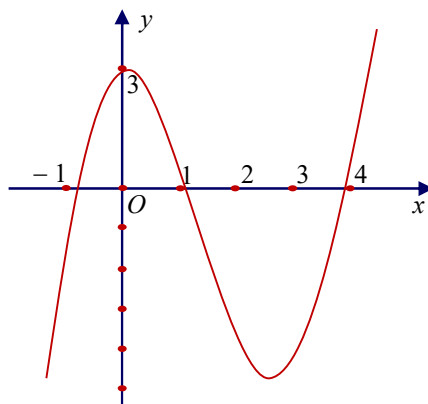
x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$								

⊕

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	1		3	$+\infty$
$f(u)$					

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có một điểm cực đại.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là

A. 2.

B. 8.

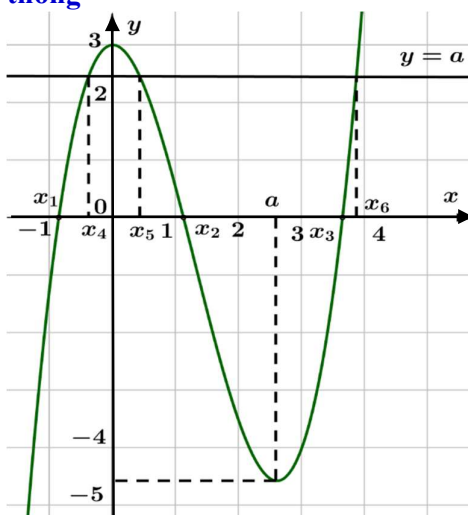
C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1. PP tự luận truyền thống



$$g'(x) = 3f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, (2 < a < 3).$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ có 8 điểm cực trị.

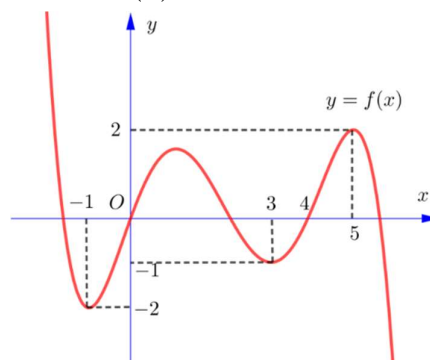
Cách 2. Phương pháp ghép trực

Đặt $u = f(x)$, ta có bảng biến thiên hàm $f(u)$:

x	$-\infty$	0	a	3	a	0	$f(a)$	0	a	$+\infty$
$u = f(x)$	$-\infty$	0	a	3	a	0	$f(a)$	0	a	$+\infty$
$f(u)$	$-\infty$	3	$f(a)$	$f(3)$	$f(a)$	3	$f(f(a))$	3	$f(a)$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 3f(f(x)) + 4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $f(f(x))$ tức hàm số $f(u)$ trên. Từ bảng biến thiên của $f(u)$, ta được $g(x)$ có 8 cực trị.

Câu 28: [TÂN TÂY ĐÔ L8] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10; 10)$ để phương trình $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) - 3 = m$ có nghiệm?

A. 8.

B. 6.

C. 9.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận truyền thống

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow t = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \Rightarrow t \geq 3$$

Để phương trình $f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) - 3 = m \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2 + 2x + 10}) = m + 3$ có nghiệm thì đường thẳng $y = m + 3$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x \geq 3$.

Từ đồ thị ta được $m + 3 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -1$

Mà $m \in (-10; 10) \Rightarrow$ có 9 giá trị m thỏa mãn $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Cách 2: Phương pháp ghép trực

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow u = \sqrt{(x+1)^2 + 9} \Rightarrow u \geq 3$$

Khi đó $u'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+10}} \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow x = -1$

BBT của hàm số $u(x)$:

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

Phương trình $f(\sqrt{x^2+2x+10}) - 3 = m \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2+2x+10}) = m+3 \Leftrightarrow f(u) = m+3$

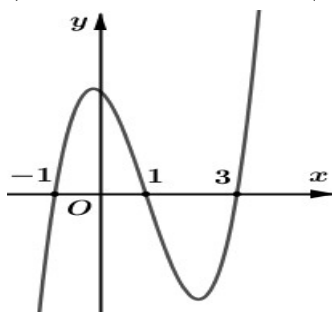
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và từ bảng biến thiên của hàm số $u = \sqrt{x^2+2x+10}$ ta có bảng sau biến thiên của hàm hợp $f(\sqrt{x^2+2x+10}) = f(u)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
u(x)	$+\infty$	3	$+\infty$
f(u)	$-\infty$	-1	$-\infty$

Từ BBT: phương trình $f(u) = m+3$ với $u \geq 3$ có nghiệm khi $m+3 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -1$

Mà $m \in (-10; 10) \Rightarrow$ có 9 giá trị m thỏa mãn.

Câu 29: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận truyền thống

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=-1-\sqrt{2} \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$			
g'		-	0	+	0	-	0	+

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có 1 điểm cực đại. **Chọn A.**

Chú ý: Cách xét dấu - hay + của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $(-1; -1+\sqrt{2})$ ta chọn $x_0 = 0 \rightarrow g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0$ vì dựa vào đồ thị ta thấy $f'(\sqrt{2}) < 0$.

Cách 2: Phương pháp ghép trục:

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x+2} \Rightarrow t' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow t = 1$

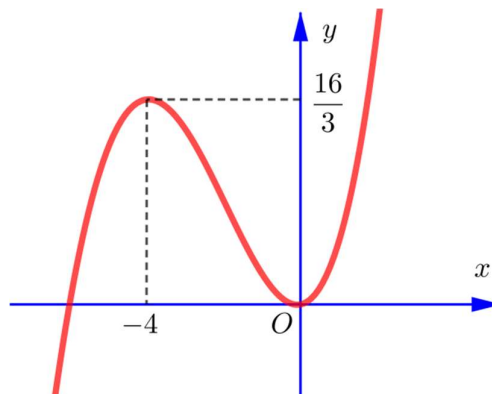
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1	$+\infty$
t'	-		+	
t	$+\infty$		1	$+\infty$
		CÓ 1 ĐIỂM CỰC TIỂU		CÓ 1 ĐIỂM CỰC TIỂU

Giải thích:

Dựa vào đồ thị trên khoảng $(1; +\infty)$, $f(t)$ có 1 điểm cực tiểu tại $t = 2$ do đạo hàm đổi dấu từ (-) sang (+). Tại điểm $t = 1$ là điểm cực đại vì dựa vào đồ thị hàm số $f'(t)$ đổi dấu từ (+) sang (-). Do đó hàm số đã cho có 1 cực đại. Chọn A

Câu 30: [SỞ BN L1] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4) \quad (1)$ có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: PP tự luận truyền thống

$$\text{Đặt } t = \frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -1-4t \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow -\frac{9}{11} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq |t| \leq 1.$$

Từ đồ thị $y = f(x)$ ta có

$$* y = f(x) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty)$$

$$* m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \in [0; +\infty).$$

$$* |t| \in [0; +\infty)$$

$$\text{Nên } f\left(\left|\frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$$

$$\Leftrightarrow f(|t|) = f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow |t| = m^2 + 4m + 4$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1.$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\} \Rightarrow \text{Chọn A.}$$

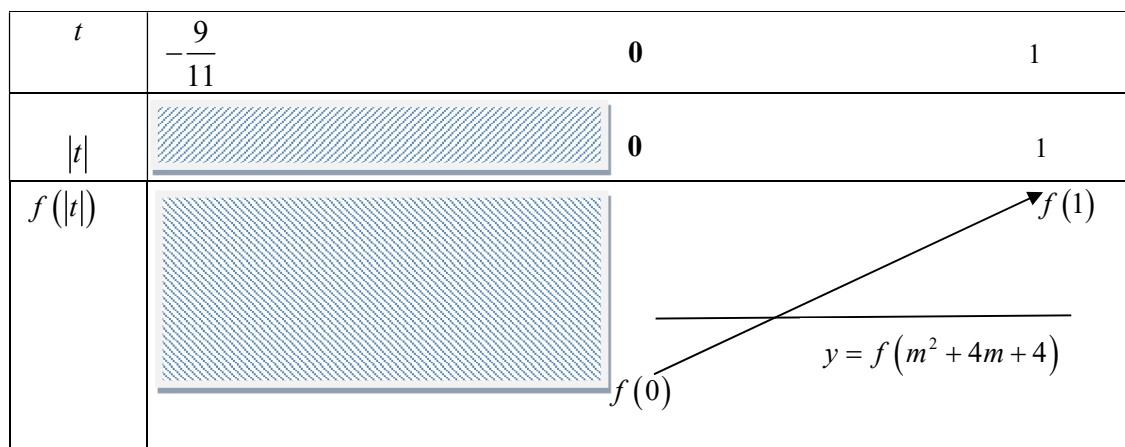
Cách 2: pp ghép trực:

$$\text{Đặt } t = \frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4} \Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -1-4t \quad (*)$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 11t^2 - 2t - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{11} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq |t| \leq 1.$$



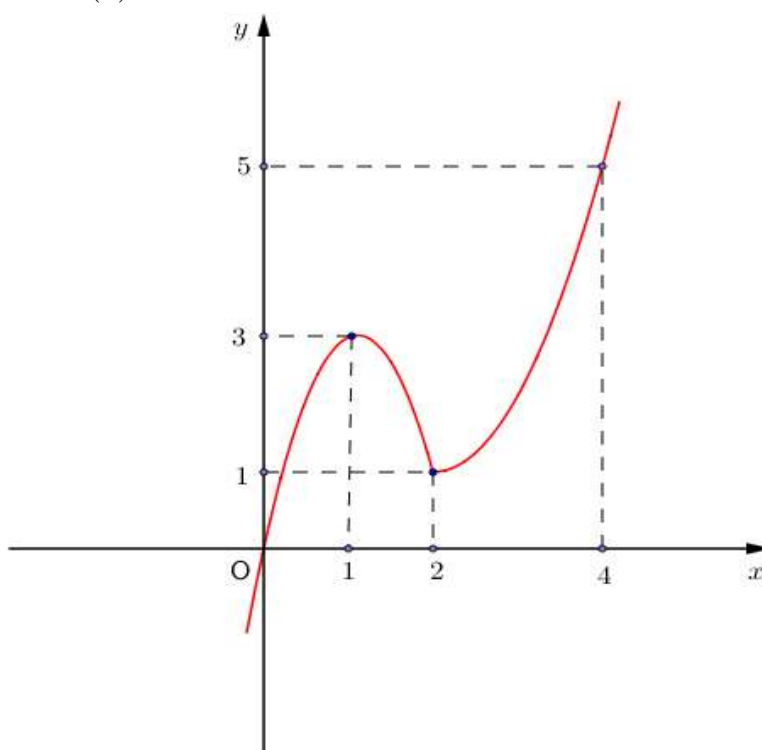
Dựa vào đồ thị trên $[0;1]$ hàm số $f(|t|)$ luôn đồng biến.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = f(m^2 + 4m + 4)$ có điểm chung với đồ thị $y = f(|t|)$

$$\Leftrightarrow f(0) \leq f(m^2 + 4m + 4) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(\frac{6x^2}{x^4+x^2+1}+2\right)+1=m$ có nghiệm?

A. 4.

B. 2

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: PP tự luận

Đặt $u = \frac{6x^2}{x^4+x^2+1} + 2$. Ta có $\Rightarrow u' = \frac{-12x^5+12x}{(x^4+x^2+1)^2}$.

Cho $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	$+$	0	$-$
u			

Bài toán trở thành tìm m nguyên để phương trình $f(u) = m - 1$ có nghiệm $u \in [2; 4]$.

Dựa đồ thị bài ra suy ra $f(u) = m - 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m - 1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6$.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

Bước 1: Ghi nhớ $f(x)$ có cực trị hoành độ $x = 1$; $x = 2$.

Bước 2: Đặt $u = \frac{6x^2}{x^4 + x^2 + 1} + 2 \Rightarrow u' = \frac{-12x^5 + 12x}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$

Cho $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
u'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
u							
$f(u)$							

Suy ra $f(u) = m - 1$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \leq m - 1 \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 6$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	$-1/4$	0	$1/4$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$	
		-1		2		

Hỏi phương trình $2f(x^2 - |x|) = 5$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Phương pháp ghép trực

Ta có $2f(x^2 - |x|) = 5 \Leftrightarrow f(x^2 - |x|) = \frac{5}{2}$

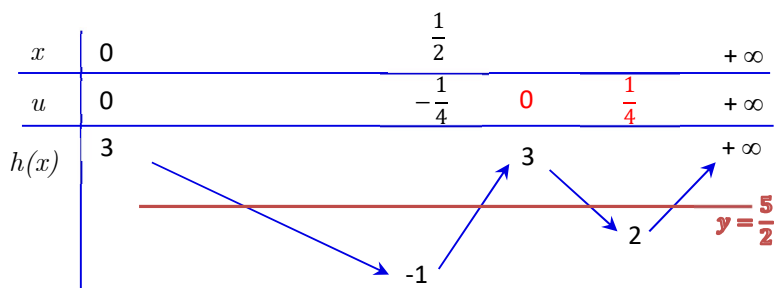
Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$.

Đây là hàm số chẵn nên nếu phương trình $g(x) = \frac{5}{2}$ có nghiệm x_0 thì cũng có nghiệm là $-x_0$ nên ta chỉ cần xét với trường hợp $x \geq 0$.

Với $x \geq 0$ ta được $h(x) = f(x^2 - x)$.

Đặt $u = x^2 - x$, $u' = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

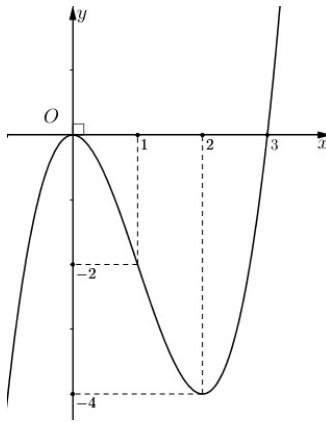
Ta có bảng biến thiên tổng hợp:



Từ đó suy ra phương trình $h(x) = \frac{5}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt dương.

Suy ra phương trình $g(x) = \frac{5}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $7.f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-10$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là

A. 4.

B. 8.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương pháp tự luận:

$$7f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-10, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]. (*)$$

$$\text{Đặt } t=5-2\sqrt{1+3\cos x}. (1)$$

$$t'=\frac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}; t'=0 \Rightarrow x=0.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
t'	-	0	+
t	3	1	3

Nhận xét:

+) Với $\begin{cases} t > 3 \\ t < 1 \end{cases}$, suy ra phương trình (1) không có nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

+) Với $t=1$, suy ra phương trình (1) có một nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

+) Với $1 < t \leq 3$, suy ra phương trình (1) có hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lúc đó, phương trình (*) trở thành $f(t) = \frac{3m-10}{7}$.

Để phương trình (*) có đúng 2 nghiệm thì $\begin{cases} \frac{3m-10}{7} = -4 \\ -2 < \frac{3m-10}{7} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ -\frac{4}{3} < m \leq \frac{10}{3} \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-6; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên thỏa điều kiện bài toán.

Cách 2: Phương pháp ghép trực

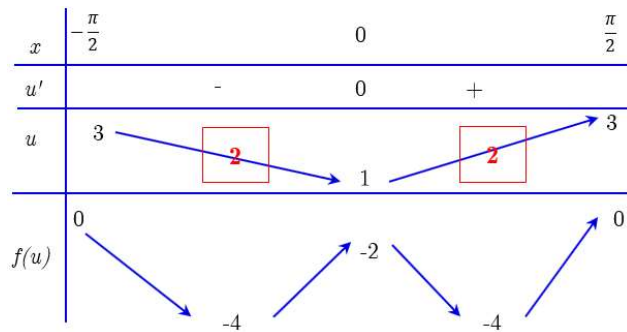
$$\text{có } 7.f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=3m-10 \Leftrightarrow f\left(5-2\sqrt{1+3\cos x}\right)=\frac{3m-10}{7} \quad (1)$$

Đặt $u = 5 - 2\sqrt{1+3\cos x}$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$$u' = -2 \cdot \frac{-3\sin x}{2\sqrt{1+3\cos x}} = \frac{3\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right])$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(u)$



Từ bảng biến thiên suy ra: Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt thì:

$$\begin{cases} \frac{3m-10}{7} = -4 \\ -2 < \frac{3m-10}{7} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ -\frac{4}{3} < m \leq \frac{10}{3} \end{cases}$$

Với m là số nguyên ta được $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; -6\}$.

Vậy có tất cả 6 giá trị của m .

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	2	$+\infty$				
y'		—	0	+	0	—	0	+	
y	$+\infty$		-2		2		-4		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1$ là

A. 12.

B. 11.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Phương pháp ghép trực

Đặt $u = \cos^2 x - \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$$u' = -2 \sin x \cos x + \sin x.$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \pi; 2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \end{cases}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$				
u'		—	0	+	0	—	0	+	0	—	0	+	
u	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
f(u)	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Khi đó, phương trình $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1 \Leftrightarrow f(u) = \frac{1}{5}$ có 10 nghiệm phân biệt.