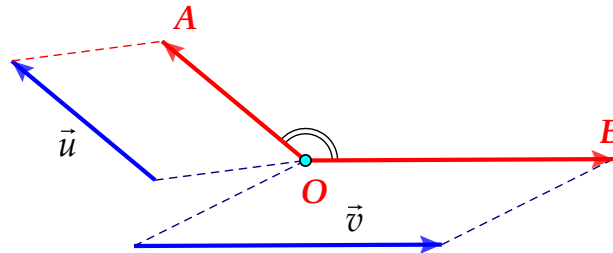


Chủ đề:

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA 2 VECTOR

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa góc giữa hai vector



Cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O tùy ý, vẽ các vector $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Khi đó số đo của góc AOB được gọi là số đo của góc giữa hai vector $\vec{u}, \vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.

Chú ý

- ✓ Quy ước rằng góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ có thể nhận một giá trị tùy ý từ 0° đến 180° .
- ✓ Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$.
- ✓ **Đặc biệt:** Vector $\vec{0}$ vuông góc với mọi vector.

2. Tích vô hướng của hai vector khác vector-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$ được xác định bởi công thức sau: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Chú ý

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Tích $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là **biên phương vô hướng** của $\vec{u}$.
- Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

3. Biểu thức tọa độ và tính chất của tích vô hướng

- ✓ Tích vô hướng của hai vector $\vec{u}(x; y)$ và $\vec{v}(x'; y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$$

✓ Nhận xét

- ✗ Hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x \cdot x' + y \cdot y' = 0$.
- ✗ Biên phương vô hướng của vector $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.

✗ Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

✓ Tính chất

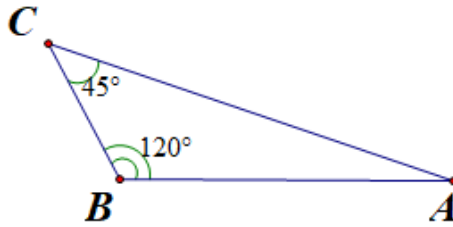
Với ba vector $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

- ✗ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (tính chất giao hoán);
- ✗ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Tính chất phân phối đối với phép cộng);
- ✗ $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: GÓC GIỮA HAI VECTO

Câu 1. Cho tam giác ABC như hình vẽ.



Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- A. 45° . B. 120° . C. 15° . D. 165° .
- Câu 2. Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng
A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .
- Câu 3. Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng
A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .
- Câu 4. Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng
A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .
- Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là
A. BAC . B. ADC . C. BAD . D. ABC .
- Câu 6. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $BAC = 100^\circ$. Số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là
A. 140° . B. 80° . C. 40° . D. 100° .
- Câu 7. Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ bằng
A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .
- Câu 8. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$. Khi đó, cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng
A. $-\frac{1}{18}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{15}$. D. $-\frac{1}{15}$.
- Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Dạng 2: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG

- Câu 10. Trong các công thức sau, công thức nào xác định tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Câu 11. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). & \text{B. } |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2. \\ \text{C. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right). & \text{D. } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2. \end{array}$$

Câu 12. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng
 A. 45° . B. 0° . C. 180° . D. 90° .

Câu 13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right). & \text{B. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right). \\ \text{C. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right). & \text{D. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right). \end{array}$$

Câu 14. Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{15}{\sqrt{2}}. & \text{B. } \frac{15\sqrt{3}}{2}. & \text{C. } -\frac{15}{2}. & \text{D. } -\frac{15}{\sqrt{2}}. \end{array}$$

Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \sqrt{11}. & \text{B. } \sqrt{13}. & \text{C. } \sqrt{12}. & \text{D. } \sqrt{14}. \end{array}$$

Câu 16. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 5$, và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}. & \text{B. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}. & \text{C. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2}. & \text{D. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Câu 17. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \alpha = 60^\circ. & \text{B. } \alpha = 30^\circ. & \text{C. } \cos \alpha = \frac{1}{3}. & \text{D. } \cos \alpha = \frac{3}{8}. \end{array}$$

Câu 18. Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 30^\circ, AB = 5, BC = 8$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 20. & \text{B. } 20\sqrt{3}. & \text{C. } 20\sqrt{2}. & \text{D. } 40\sqrt{3}. \end{array}$$

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } 4a^2. & \text{B. } a^2\sqrt{2}. & \text{C. } \frac{\sqrt{2}}{2}a^2. & \text{D. } a^2. \end{array}$$

Câu 20. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{array}{llll} \text{A. } a^2. & \text{B. } \frac{-a^2}{2}. & \text{C. } 0. & \text{D. } \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \end{array}$$

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = 2a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } -a^2. & \text{B. } \frac{1}{2}a^2. & \text{C. } a^2\sqrt{3}. & \text{D. } a^2. \end{array}$$

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

$$\begin{array}{llll} \text{A. } a^2. & \text{B. } -\frac{a^2}{2}. & \text{C. } \frac{a^2}{2}. & \text{D. } -a^2. \end{array}$$

- Câu 23.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng
A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.
- Câu 24.** Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , cạnh $AB = 5$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ bằng
A. $5\sqrt{2}$. **B.** 25 . **C.** 20 . **D.** -20 .
- Câu 25.** Góc tạo bởi $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là 90° và $|\vec{m}| = 2021$, $|\vec{n}| = 2022$. Khi đó, $\vec{m} \cdot \vec{n}$ bằng
A. 4086462 . **B.** 0 . **C.** -4086462 . **D.** 1 .
- Câu 26.** Cho hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng
A. 6 . **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** 12 . **D.** $4\sqrt{3}$.
- Câu 27.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $BC = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng
A. -1 . **B.** 1 . **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 28.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.
A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2 . **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.
- Câu 29.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng
A. -1 . **B.** 1 . **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 30.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng
A. -1 . **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1 . **D.** $-\frac{1}{2}$.
- Câu 31.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng
A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5 . **D.** $\frac{7}{2}$.
- Câu 32.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng
A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5 . **D.** 3 .
- Câu 33.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3 , gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Giá trị $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng
A. 18 . **B.** $-9\sqrt{3}$. **C.** $9\sqrt{5}$. **D.** -18 .
- Câu 34.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $BAD = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0 . **D.** a^2 .
- Câu 35.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 5 . Khi đó, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng
A. 25 . **B.** $25\sqrt{2}$. **C.** $\frac{25\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{25}{2}$.
- Câu 36.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

- Câu 37.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, M là trung điểm của cạnh CD . Chọn khẳng định đúng.
 A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{a^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$. C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$.
- Câu 38.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 10. Tính giá trị $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
 A. 100. B. 10. C. 0. D. -100.
- Câu 39.** Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 4 và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA}$.
 A. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 4$. B. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = -4$. C. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 4\sqrt{3}$. D. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = -4\sqrt{3}$.
- Câu 40.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
 A. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$.
- Câu 41.** Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G và độ dài cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.
 A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{3a^2}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^2}{2}$.
- Câu 42.** Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Tính $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.
 A. $-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{-a^2}{2}$.
- Câu 43.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và $\angle ABD = 60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI}$.
 A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\vec{u} = (2; -3)$
- Câu 44.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3; AC = 4$. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{41}{3}$. C. 8. D. -23.
- Câu 45.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 5. Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.
 A. $10\sqrt{2}$. B. -50. C. 0. D. -75.
- Câu 46.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.
 A. 21. B. $\sqrt{21}$. C. $\sqrt{41}$. D. 41.

Dạng 3: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG BẰNG BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

- Câu 47.** Cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1), \vec{v} = (-3; 4)$. Tích $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng
 A. 11. B. -10. C. 5. D. -2.
- Câu 48.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 4), \vec{b} = (-1; 3)$. Khi đó giá trị tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
 A. 12. B. -11. C. 0. D. 11.
- Câu 49.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.
- Câu 50.** Cho $A(0; 3); B(4; 0); C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. 16. B. 9. C. -10. D. -9.
- Câu 51.** Cho $\vec{u} = (2; -3)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{v} = (-3; m)$ vuông góc với $\vec{u}$?
- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.
- Câu 52.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các vectơ $\vec{a}(1; -3)$, $\vec{b}(2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}, \vec{b}$.
- A. 7. B. 13. C. -17. D. -13.
- Câu 53.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -5)$ và $\vec{b} = (m; m+2)$. Tìm m biết $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.
- A. $m = -\frac{10}{3}$. B. $m = -\frac{10}{3}$. C. $m = -\frac{10}{7}$. D. $m = \frac{10}{7}$.
- Câu 54.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 4)$; $\vec{b} = (4; 0)$. Khi đó, cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là
- A. $\frac{-\sqrt{17}}{17}$. B. $\frac{\sqrt{17}}{17}$. C. 0. D. 2.
- Câu 55.** Trên mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (2; -4)$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 56.** Cho hai vectơ $\vec{a} = (\sqrt{3}; 1)$, $\vec{b} = (3; -\sqrt{3})$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. 15° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .
- Câu 57.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1; 2)$, $B(4; 1)$, $C(5; 4)$. Tính góc BAC .
- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .
- Câu 58.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 2)$, $B(4; 1)$, $C(5; 4)$. Tính góc A của tam giác ABC .
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 120° .
- Câu 59.** Tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 1)$. Góc BAC của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?
- A. 90° . B. $36^\circ 52'$. C. $143^\circ 7'$. D. $53^\circ 7'$.
- Câu 60.** Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-1; -1)$; $B(3; 1)$; $C(6; 0)$. Khẳng định nào sau đây đúng:
- A. $\overrightarrow{AB} = (-4; -2)$; $\overrightarrow{BC} = (-3; 1)$. B. $B = 135^\circ$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = 20$. D. $|\overrightarrow{BC}| = 3$.
- Câu 61.** Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-1; 2)$; $B(5; 8)$. Điểm $M \in Ox$ sao cho tam giác MAB vuông tại A . Diện tích tam giác MAB bằng
- A. 10. B. 18. C. 24. D. 12.
- Câu 62.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; -3)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc trục tung, biết khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng $2\sqrt{5}$ và điểm B có tung độ dương.
- A. $B(0; 1)$. B. $B(0; 7)$. C. $B(2; 0)$. D. $B(7; 0)$.

- Câu 63.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(3; 4)$ và $B(-2; 5)$. Tọa độ điểm M thuộc trục Ox cách đều hai điểm $A; B$ là
A. $\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5}; 0\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.
- Câu 64.** Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -1)$ và $B(-2; -2)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC cân tại A là
A. $C(-2; 0)$. **B.** $C(0; -2)$. **C.** $C(4; 0)$. **D.** $C(2; 0)$.
- Câu 65.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2); B(-1; 1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó, độ dài đoạn OM bằng
A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.
- Câu 66.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(4; 1)$, $C(5; -7)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .
A. $S = 26$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 3\sqrt{13} + \sqrt{65}$. **D.** $S = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.
- Câu 67.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 2)$, $B(-4; 3)$. Điểm M thuộc tia Ox . Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $M = (7; 0)$. **B.** $M = (5; 0)$. **C.** $M = (9; 0)$. **D.** $M = (2; 0)$.
- Câu 68.** Cho hai điểm $A(1; 3), B(8; 2)$. Gọi C là điểm thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C và $OC < 6$. Giá trị của biểu thức $x_C^2 + y_C^2 + 5$ là
A. 9. **B.** 14. **C.** 21. **D.** 30.
- Câu 69.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .
A. $C(6; 0)$. **B.** $C(0; 6)$. **C.** $C(-6; 0)$. **D.** $C(0; -6)$.
- Câu 70.** Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .
A. $(0; 3)$. **B.** $(0; -3)$. **C.** $(3; 0)$. **D.** $(-3; 0)$.
- Câu 71.** Trong mặt phẳng (Oxy), cho tam giác ABC biết $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$ và $C(2; 4)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC
A. $H(1; 1)$. **B.** $H(2; 1)$. **C.** $H(1; 2)$. **D.** $H(2; 2)$.
- Câu 72.** Cho tam giác ABC có $A(1; 3), B(3; -4)$ và $C(6; 2)$. Trực tâm của tam giác ABC là $H(a; b)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b$.
A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.
- Câu 73.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3; -1), B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a; b)$. Tính $a + 3b$.
A. $a + 3b = \frac{2}{3}$. **B.** $a + 3b = -\frac{4}{3}$. **C.** $a + 3b = 1$. **D.** $a + 3b = -2$.

- Câu 74.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ với các đáy là AB và CD . Biết $A(1;2)$, $B(2;-3)$, điểm C nằm trên trục tung, điểm D nằm trên trục hoành. Tính $OC + OD$.
- A. $\frac{4}{3}$. B. 2. C. 6. D. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.
- Câu 75.** Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(-2;3)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$, $D(-1;-1)$. Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng $d: y = 2x - 1$ sao cho $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = -3$?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 76.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-3;-1)$ và $B(5;0)$. Biết có hai điểm C nằm trên parabol $(P): y = x^2 - 2x$ sao cho tam giác ABC vuông tại C là $C_1(x_1; y_1), C_2(x_2; y_2)$. Tính giá trị biểu thức $T = x_1 y_2 + x_2 y_1$.
- A. 4. B. 5. C. 6. D. -5.
- Câu 77.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(2;4), B(1;1), C(7;-1)$. Biết $M(a;b)$ ($a < 0$) là điểm nằm trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn tam giác ABM vuông cân tại B . Tính giá trị $T = 3a + 4b$.
- A. $T = 2$. B. $T = -2$. C. $T = 12$. D. $T = -12$.
- Câu 78.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(4;6); B(5;1); C(n;-3)$. Tìm m, n để $I\left(-\frac{1}{2}; m\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- A. $m = -\frac{5}{2}; n = -1$ B. $m = \frac{5}{2}; n = -1$. C. $m = \frac{5}{2}; \begin{cases} n=1 \\ n=-2 \end{cases}$. D. $m = -\frac{5}{2}; \begin{cases} n=1 \\ n=-2 \end{cases}$.
- Câu 79.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , biết $H(a;b)$ là toạ độ chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC , biết toạ độ $B(3;1), C(4;-4)$ và trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ $G(4;0)$. Tính $a + b$.
- A. $\frac{2}{13}$. B. $\frac{33}{13}$. C. $\frac{35}{13}$. D. $\frac{68}{13}$.

Dạng 4: CÁC BÀI TOÁN KHÁC

- Câu 80.** Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Tính góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .
- Câu 81.** Cho biết $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ; |\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 3$. Độ dài của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng
- A. $3\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 82.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $M(3;4), N(2;1), P(-2;-3)$. Tìm điểm I trên đường thẳng NP sao cho góc $MIN = 135^\circ$.
- A. $I(3;2)$. B. $I(2;3)$. C. $I(5;4)$. D. $I(4;5)$.
- Câu 83.** Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, ($a > 0$). Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$ ($0 < x < 3a$). Tìm x để $AM \perp PN$.

A. $x = \frac{3a}{5}$. B. $x = \frac{2a}{5}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{a}{5}$.

Câu 84. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ và $AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .

A. $\frac{4a}{15}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{2+6\sqrt{3}}{39}a$. D. $\frac{1+3\sqrt{3}}{39}a$.

Câu 85. Cho hình chữ nhật $ABCD$ thỏa $AB = 2a$, $AD = a$. Gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}$, $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để AM và DN vuông góc.

A. $x = \frac{3}{7}$. B. $x = \frac{3}{8}$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = \frac{2}{5}$.

Câu 86. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $BAD = 60^\circ$. Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = a^2$ là đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{2}a$. B. $\frac{\sqrt{7}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D. a .

Câu 87. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C . Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thỏa mãn điều kiện $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là:

A. $\triangle ABC$ đều. B. $\triangle ABC$ cân tại C .
C. $\triangle ABC$ vuông tại C . D. $\triangle ABC$ vuông cân tại C .

Câu 88. Cho hình thang vuông $ABCD$ với đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để BM và CD vuông góc.

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 89. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là

A. đường tròn đường kính BC . B. đường tròn $(B; BC)$.
C. đường tròn $(C; CB)$. D. đường tròn $(C; 2CB)$.

Câu 90. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là

A. đường tròn đường kính AB .
B. đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 91. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Một điểm M thay đổi thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là

A. đường tròn đường kính IJ . B. đường tròn đường kính IK .
C. đường tròn đường kính JK . D. đường trung trực đoạn JK .

Câu 92. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$ là

A. Đường tròn tâm G bán kính bằng GB . B. Đường tròn tâm G bán kính bằng GA .
C. Đường tròn tâm G bán kính bằng GC . D. Đường tròn tâm G bán kính bằng $4GA$.

Câu 93. Cho ΔABC đều, cạnh bằng $a > 0$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{7a^2}{4}.$$

A. Quỹ tích điểm M là đường trung trực của AB .

B. Quỹ tích điểm M là đường thẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với BC .

C. Quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

D. Quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 94. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Điểm M là một điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{a^2}{6}$. Biết tập hợp điểm M là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó là

A. $R = 2$.

B. $R = \frac{a}{3}$.

C. $R = \frac{a}{4}$.

D. $R = \frac{a}{2}$.

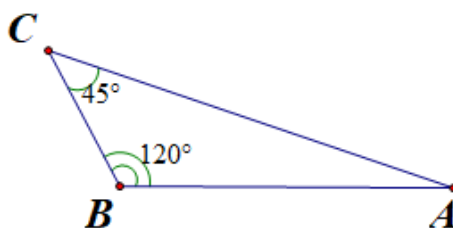
HẾT

Huế, 10h00' Ngày 02 tháng 12 năm 2022

III. LỜI GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: GÓC GIỮA HAI VECTOR

Câu 1. Cho tam giác ABC như hình vẽ.



Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

A. 45° .

B. 120° .

C. 15° .

D. 165° .

Lời giải:

Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$.

Câu 2. Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng

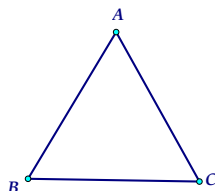
A. 60° .

B. 120° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải:



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ$.

Câu 3. Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng

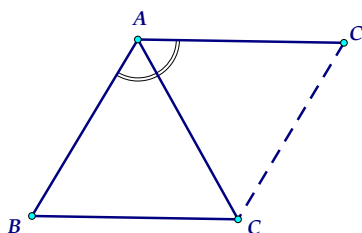
A. 60° .

B. 120° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải:



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180 - BAC = 120^\circ$.

Câu 4. Cho tam giác ABC đều. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

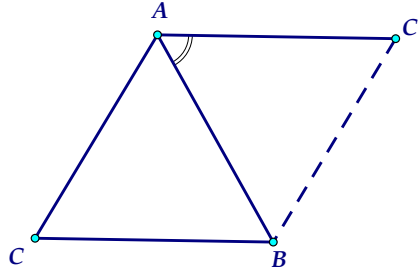
A. 60° .

B. 120° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải:



Ta có $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$.

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Góc giữa 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

A. $\angle BAC$.

B. $\angle ADC$.

C. $\angle BAD$.

D. $\angle ABC$.

Lời giải:



Theo tính chất hình bình hành ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \angle BAD$.

Câu 6. Cho tam giác ABC cân tại A , góc $\angle BAC = 100^\circ$. Số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

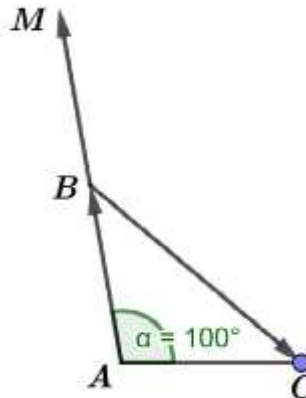
A. 140° .

B. 80° .

C. 40° .

D. 100° .

Lời giải:



Xét tam giác ABC cân tại A , góc $\angle BAC = 100^\circ$ suy ra $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$.

Dựng $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$, khi đó, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = \angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = 140^\circ$.

Câu 7. Cho hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ bằng

A. 60° .

B. 120° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải:

Ta có $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Câu 8. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$. Khi đó, cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

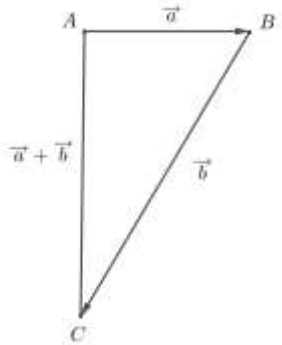
A. $-\frac{1}{18}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{15}$.

D. $-\frac{1}{15}$.

Lời giải:



Dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Ta được tam giác ABC có $AB = 6$, $BC = 12$, $AC = 10$ và $(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} = \frac{10^2 + 6^2 - 12^2}{2} = -4.$$

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-4}{6 \cdot 10} = -\frac{1}{15}$.

Câu 9. Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải:

Vì hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Dạng 2: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 10. Trong các công thức sau, công thức nào xác định tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng khác 0?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 11. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

B. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

D. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Lời giải:

Câu A, C, D: Đúng.

Câu B sai vì $|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 12. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng

A. 45° .

B. 0° .

C. 180° .

D. 90° .

Lời giải:

Ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ.$$

Câu 13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Lời giải:

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

• D đúng, Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

• A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

• B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Câu 14. Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{15}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. $-\frac{15}{\sqrt{2}}$.

Lời giải:

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ = \frac{15}{\sqrt{2}}$.

Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. $\sqrt{11}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{12}$.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải:

Ta có: $(|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$,

$\Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}$.

Câu 16. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 5$. và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Tính $\cos(\vec{a}; \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = -\frac{1}{2}$. **D. $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1}{2}$.**

Lời giải:

Ta có $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2}$.

Câu 17. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. **D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.**

Lời giải:

Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 30^\circ$, $AB = 5$, $BC = 8$. Tính $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

A. 20. **B. $20\sqrt{3}$.** C. $20\sqrt{2}$. D. $40\sqrt{3}$.

Lời giải:

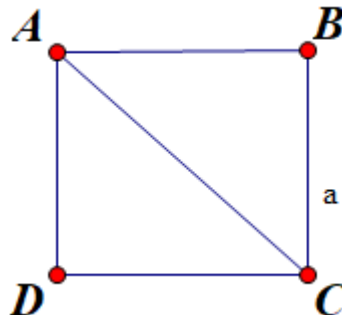
Ta có $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 5 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}$.

Vậy $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 20\sqrt{3}$.

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Khi đó $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

A. $4a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. D. a^2 .

Lời giải:



Ta có $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 4a^2$.

Câu 20. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

A. a^2 . B. $\frac{-a^2}{2}$. **C. 0.** D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Tam giác ABC vuông cân tại A .

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

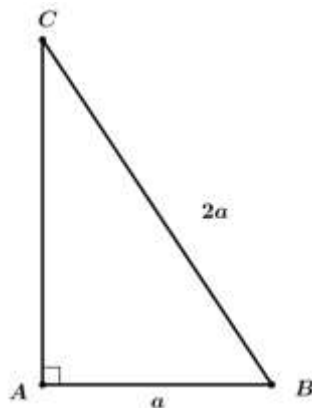
A. $-a^2$.

B. $\frac{1}{2}a^2$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. a^2 .

Lời giải:



$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos B = a \cdot 2a \cdot \frac{a}{2a} = a^2.$$

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

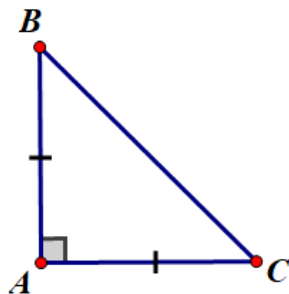
A. a^2 .

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $-a^2$.

Lời giải:



Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

Câu 23. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

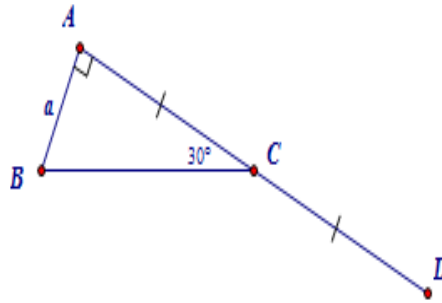
A. $-2a^2$.

B. $2a^2$.

C. $3a^2$.

D. $-3a^2$.

Lời giải:

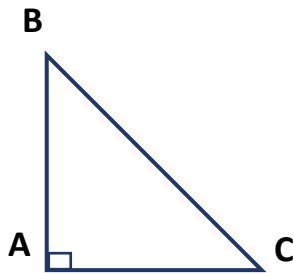


Gọi D là điểm đối xứng với A qua C .

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \cdot CB \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

- Câu 24.** Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , cạnh $AB = 5$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ bằng
A. $5\sqrt{2}$. **B.** 25. **C.** 20. **D.** -20.

Lời giải:



Xét $\triangle ABC$ vuông cân tại A , cạnh $AB = 5$ suy ra $BC = 5\sqrt{2}$ và $ABC = 45^\circ$.
 Ta có $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = BC \cdot BA \cdot \cos ABC = 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 25$.

- Câu 25.** Góc tạo bởi $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là 90° và $|\vec{m}| = 2021$, $|\vec{n}| = 2022$. Khi đó, $\vec{m} \cdot \vec{n}$ bằng
A. 4086462. **B.** 0. **C.** -4086462. **D.** 1.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\vec{m}; \vec{n}) = 2021 \cdot 2022 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

$$\text{Vậy } \vec{m} \cdot \vec{n} = 0.$$

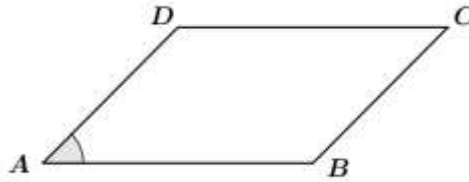
- Câu 26.** Cho hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng
A. 6. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** 12. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 6.$$

- Câu 27.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $BC = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng
A. -1. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos BAD = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

Câu 28. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

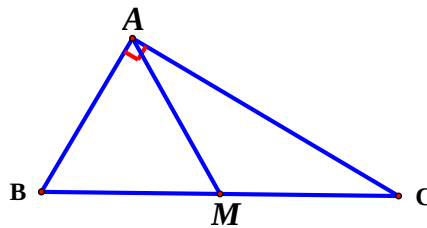
A. $\frac{a^2}{2}$.

B. a^2 .

C. $-a^2$.

D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải:



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên

$$AM = \frac{BC}{2}. AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a.$$

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $MAB = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

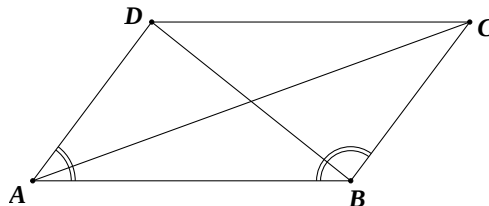
A. -1 .

B. 1 .

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos BAD = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1.$$

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

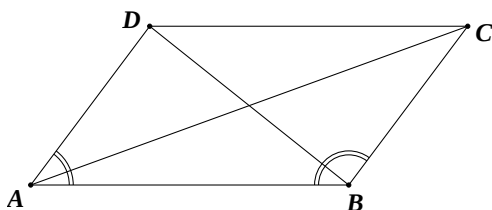
A. -1 .

B. $\frac{1}{2}$.

C. -1 .

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:



Theo giả thiết: $BAD = 60^\circ \Rightarrow ABC = 120^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos ABC = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1.$$

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

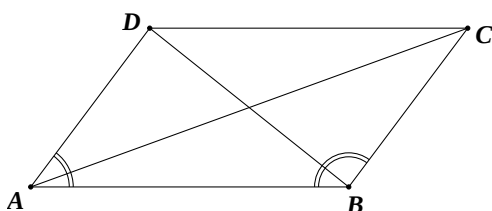
A. $\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{7}$.

C. 5.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải:



Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow AC^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow AC = \sqrt{7}.$$

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $BAD = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

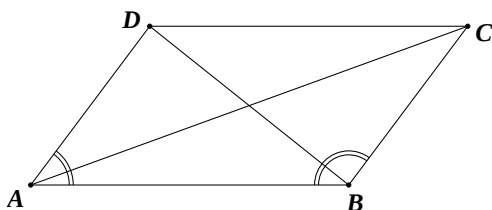
A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. 5.

D. 3.

Lời giải:



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow BD^2 = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{3}.$$

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3, gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Giá trị $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

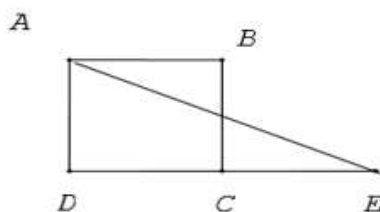
A. 18.

B. $-9\sqrt{3}$.

C. $9\sqrt{5}$.

D. -18.

Lời giải:



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2.3 = 6$.

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$= 0 + DE \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = 6 \cdot 3 \cdot (-1) = -18.$$

Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \angle BAD = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn

$$\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}. \text{ Tính tích vô hướng } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$$

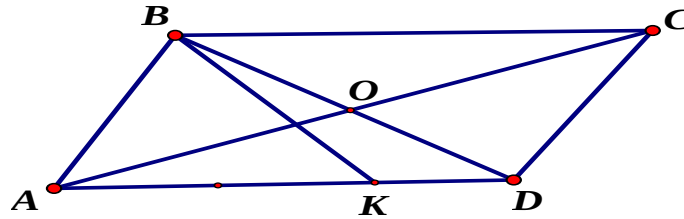
A. $3a^2$.

B. $6a^2$.

C. 0 .

D. a^2 .

Lời giải:



$$\text{Ta có } \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Câu 35. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 5. Khi đó, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

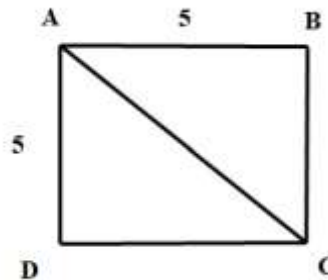
A. 25.

B. $25\sqrt{2}$.

C. $\frac{25\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{25}{2}$.

Lời giải:



Ta có $ABCD$ là hình vuông nên $AC = 5\sqrt{2}$; góc $BAC = 45^\circ$;

$$\text{Tích vô hướng } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 25.$$

Câu 36. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải:

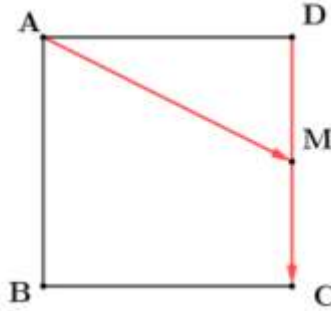
Tam giác $AB = AC = a$ và $\angle BAC = 60^\circ$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$, M là trung điểm của cạnh CD . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{a^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$. C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = a^2$. **D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$.**

Lời giải:



Ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DC}$

Mà $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = AD \cdot DC \cdot \cos 90^\circ = 0$

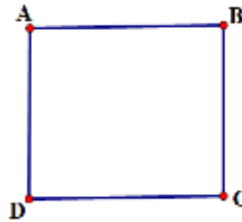
Và $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DC} = DM \cdot DC \cdot \cos 0^\circ = a \cdot 2a \cdot 1 = 2a^2$

Vậy $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$.

Câu 38. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 10. Tính giá trị $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

- A. 100. B. 10. C. 0. **D. -100.**

Lời giải:



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = 10 \cdot 10 \cdot (-1) = -100$.

Câu 39. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 4 và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Tính

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA}$.

- A. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 4$. **B. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = -4$.** C. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 4\sqrt{3}$. D. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = -4\sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC = 2$.

Khi đó $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = BM \cdot BA \cdot \cos(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BA}) = 2 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -4$.

Câu 40. Cho hình vuông ABCD có độ dài các cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

- A. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$. **B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.** C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$.

Lời giải:

Vì ABCD là hình vuông nên hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau.

Hay $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Câu 41. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G và độ dài cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{3a^2}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D. $\frac{a^2}{2}$.**

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AG}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$; với $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$; $|\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 42. Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Tính $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

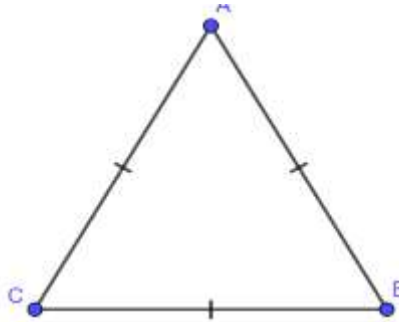
A. $-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $\frac{-a^2}{2}$.

Lời giải:



Ta có $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos C = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Câu 43. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ và $ABD = 60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI}$.

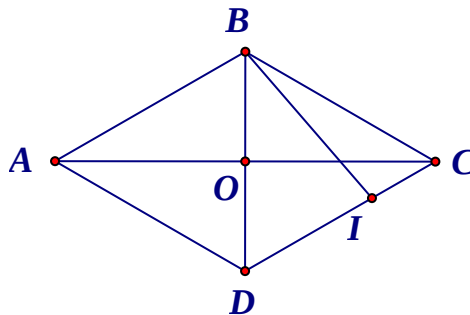
A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^2}{2}$.

D. $\vec{u} = (2; -3)$

Lời giải:



Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a và $ABD = 60^\circ$ nên ABD và BCD là các tam giác đều cạnh a .

Ta có: $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DI}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DI}$

$$= \overrightarrow{AO} \cdot \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{DC} \right) = \frac{2}{3} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy, } \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$; $AC = 4$. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{41}{3}$.

C. 8.

D. -23.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$, do đó $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{3}(2.AC^2 - AB^2) = \frac{23}{3}$.

Câu 45. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 5. Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

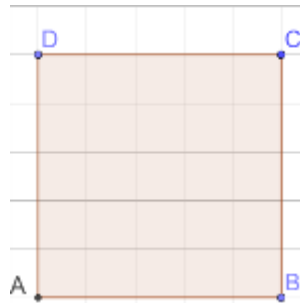
A. $10\sqrt{2}$.

B. -50.

C. 0.

D. -75.

Lời giải:



Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot 2\overrightarrow{BD}$ (Vì $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$)
 $= 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}) = 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD})$ (Vì $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$)
 $= 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA})$ (Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$)
 $= 2.AB^2 \cdot \cos 180^\circ = -50$.

Câu 46. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. 21.

B. $\sqrt{21}$.

C. $\sqrt{41}$.

D. 41.

Lời giải:

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}$.

Dạng 3: TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG BẰNG BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Câu 47. Cho hai vectơ $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (-3; 4)$. Tích $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

A. 11.

B. -10.

C. 5.

D. -2.

Lời giải:

Với $\begin{cases} \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = (-3; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10$.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 4)$, $\vec{b} = (-1; 3)$. Khi đó giá trị tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. 12.

B. -11.

C. 0.

D. 11.

Lời giải:

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 11$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = 2\vec{j} - 2\vec{i}$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có $\vec{u} = (1; 3)$ và $\vec{v} = (-2; 2)$.

Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4$.

Câu 50. Cho $A(0; 3); B(4; 0); C(-2; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. 16. B. 9. C. -10. D. -9.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -3); \overrightarrow{BC} = (-6; -5)$

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-6) + (-3) \cdot (-5) = -9$.

Câu 51. Cho $\vec{u} = (2; -3)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{v} = (-3; m)$ vuông góc với $\vec{u}$?

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.

Lời giải:

Ta có: $\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các vectơ $\vec{a}(1; -3), \vec{b}(2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A. 7. B. 13. C. -17. D. -13.

Lời giải:

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = -13$.

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -5)$ và $\vec{b} = (m; m+2)$. Tìm m biết $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

- A. $m = -\frac{10}{3}$. B. $m = -\frac{10}{3}$. C. $m = -\frac{10}{7}$. D. $m = \frac{10}{7}$.

Lời giải:

Để $\vec{a} \perp \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2m - 5(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{10}{3}$.

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 4); \vec{b} = (4; 0)$. Khi đó, cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- A. $\frac{-\sqrt{17}}{17}$. B. $\frac{\sqrt{17}}{17}$. C. 0. D. 2.

Lời giải:

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{16}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Câu 55. Trên mặt phẳng Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (2; -4)$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a} = (\sqrt{3}; 1)$, $\vec{b} = (3; -\sqrt{3})$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. 15° . B. 30° . C. 45° . **D. 60° .**

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

Câu 57. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(1; 2)$, $B(4; 1)$, $C(5; 4)$. Tính góc BAC.

- A. 45° .** B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (3; -1), \overrightarrow{AC} = (4; 2).$$

$$\text{Khi đó: } \cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $BAC = 45^\circ$.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1; 2)$, $B(4; 1)$, $C(5; 4)$. Tính góc A của tam giác ABC.

- A. 60° . **B. 45° .** C. 90° . D. 120° .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (3; -1), \overrightarrow{AC} = (4; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 10, AB = \sqrt{10}, AC = 2\sqrt{5}.$$

$$\cos(A) = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45^\circ.$$

Câu 59. Tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 1)$. Góc BAC của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

- A. 90° . B. $36^\circ 52'$. **C. $143^\circ 7'$.** D. $53^\circ 7'$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; 2); \overrightarrow{AC} = (2; -1).$$

$$\cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow BAC = 143^\circ 7'.$$

Câu 60. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-1; -1)$; $B(3; 1)$; $C(6; 0)$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $\overrightarrow{AB} = (-4; -2)$; $\overrightarrow{BC} = (-3; 1)$. **B. $B = 135^\circ$.**

C. $|\overrightarrow{AB}| = 20$. D. $|\overrightarrow{BC}| = 3$.

Lời giải:

$$\overrightarrow{BA} = (-4; -2); \overrightarrow{BC} = (3; -1)$$

$$\cos B = \cos(\vec{BA}; \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{4^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B = 135^\circ.$$

- Câu 61.** Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-1; 2); B(5; 8)$. Điểm $M \in Ox$ sao cho tam giác MAB vuông tại A. Diện tích tam giác MAB bằng
- A. 10. B. 18. C. 24. **D. 12.**

Lời giải:

Vì $M \in Ox$ nên có tọa độ $M(a; 0)$, ta có $\vec{AM} = (a+1; -2); \vec{AB} = (6; 6)$.

Tam giác MAB vuông tại A $\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow 6(a+1) - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow M(1; 0)$.

Ta có $AM = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}; AB = \sqrt{(5+1)^2 + (8-2)^2} = 6\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12$.

- Câu 62.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(2; -3)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc trục tung, biết khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng $2\sqrt{5}$ và điểm B có tung độ dương.
- A. $B(0; 1)$.** B. $B(0; 7)$. C. $B(2; 0)$. D. $B(7; 0)$.

Lời giải:

Ta có B thuộc trục tung nên gọi $B(0, b), b > 0$.

Ta có $\vec{AB} = (-2; b+3)$.

Theo giả thiết $AB^2 = (2\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow (-2)^2 + (b+3)^2 = 20 \Leftrightarrow b^2 + 6b - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1(TM) \\ b = -7(L) \end{cases}$.

Vậy $B(0; 1)$.

- Câu 63.** Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(3; 4)$ và $B(-2; 5)$. Tọa độ điểm M thuộc trục Ox cách đều hai điểm A; B là
- A. $\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$.** B. $\left(\frac{2}{5}; 0\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải:

Vì $M \in Ox$ nên $M(x; 0)$.

Ta có: $\vec{AM} = (x-3; -4); \vec{BM} = (x+2; -5)$.

Để M cách đều A; B thì $AM = BM$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (-5)^2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$$

Vậy $M\left(-\frac{2}{5}; 0\right)$.

- Câu 64.** Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1; -1)$ và $B(-2; -2)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC cân tại A là
- A. $C(-2; 0)$.** B. $C(0; -2)$. C. $C(4; 0)$. D. $C(2; 0)$.

Lời giải:

Ta có $AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$

Do điểm $C(a;b)$ thuộc trục Ox nên $C(a;0)$ suy ra $AC = \sqrt{(a-1)^2 + (0+1)^2}$

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AB = AC$

$\Leftrightarrow \sqrt{10} = \sqrt{(a-1)^2 + (0+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-2 \end{cases}$ Với $C(4;0)$, ta có $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$, $\overrightarrow{AC}(3;1)$ suy ra 3 điểm

A, B, C thẳng hàng, loại trường hợp này.

Với $C(-2;0)$, kiểm tra tương tự thấy thỏa mãn. Vậy $C(-2;0)$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2); B(-1;1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M . Khi đó, độ dài đoạn OM bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải:

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0;y)$.

Ta có tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1-y)^2} \Leftrightarrow 4-4y = 1-2y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Vậy $OM = \frac{3}{2}$.

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(4;1)$, $C(5;-7)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 26$. B. $S = 13$. C. $S = 3\sqrt{13} + \sqrt{65}$. D. $S = \frac{3\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB}(3;2)$, $\overrightarrow{AC}(4;-6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow AB \perp AC$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{9+4} \cdot \sqrt{16+36} = \frac{1}{2} 2 \cdot 13 = 13$.

Câu 67. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;2)$, $B(-4;3)$. Điểm M thuộc tia Ox . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $M = (7;0)$. B. $M = (5;0)$. C. $M = (9;0)$. D. $M = (2;0)$.

Lời giải:

$M \in Ox \Leftrightarrow M(x;0)$ (theo giả thiết thì $x > 0$).

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-3;-2)$, $\overrightarrow{BM} = (x+4;-3)$

Tam giác ABM vuông tại $M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4) + (-2)(-3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (TM)} \\ x=-3 \text{ (L)} \end{cases}$

Vậy $x = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 68. Cho hai điểm $A(1;3), B(8;2)$. Gọi C là điểm thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C và $OC < 6$. Giá trị của biểu thức $x_C^2 + y_C^2 + 5$ là

A. 9.

B. 14.

C. 21.

D. 30.

Lời giải:

Gọi $C(x;0)$ là điểm thuộc trục hoành. Ta có: $\overrightarrow{AC} = (x-1; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (x-8; -2)$.

Do tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot (x-8) + (-3) \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vì $OC < 6$ nên ta chọn $x = 2$. Suy ra $C(2;0)$. Vậy $x_C^2 + y_C^2 + 5 = 9$.

Câu 69. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .

A. $C(6;0)$.

B. $C(0;6)$.

C. $C(-6;0)$.

D. $C(0;-6)$.

Lời giải:

$C \in Oy \Leftrightarrow C(0;y)$

$\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; y-2)$.

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ tạo thành một tam giác vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow y = 6.$$

Vậy $C(0;6)$.

Câu 70. Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC .

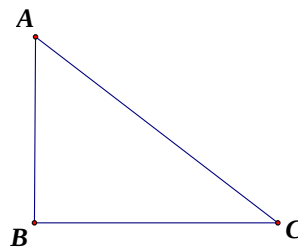
A. $(0;3)$.

B. $(0;-3)$.

C. $(3;0)$.

D. $(-3;0)$.

Lời giải:



Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;1)$; $\overrightarrow{AC} = (6;-4)$; $\overrightarrow{BC} = (5;-5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) = 0$ nên tam giác ABC vuông tại B .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0;3)$.

Câu 71. Trong mặt phẳng (Oxy) , cho tam giác ABC biết $A(-1;1)$, $B(3;1)$ và $C(2;4)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC

A. $H(1;1)$.

B. $H(2;1)$.

C. $H(1;2)$.

D. $H(2;2)$.

Lời giải:

Gọi $H(x;y)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Mà $\overrightarrow{AH} = (x+1; y-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 3)$, $\overrightarrow{BH} = (x-3; y-1)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 3)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot (x+1) + 3(y-1) = 0 \\ 3(x-3) + 3(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $H(2; 2)$.

Câu 72. Cho tam giác ABC có $A(1; 3)$, $B(3; -4)$ và $C(6; 2)$. Trực tâm của tam giác ABC là $H(a; b)$.
Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b$.

A. 10.

B. 6.

C. 8.

D. 7.

Lời giải:

Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a-1; b-3) \\ \overrightarrow{BC} = (3; 6) \\ \overrightarrow{BH} = (a-3; b+4) \\ \overrightarrow{AC} = (5; -1) \end{cases}$$

Theo giả thiết H là trực tâm tam giác ABC nên ta có
$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a-1) + 6(b-3) = 0 \\ 5(a-3) - 1(b+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 5a - b = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{45}{11} \\ b = \frac{16}{11} \end{cases}$

Suy ra $H\left(\frac{45}{11}; \frac{16}{11}\right)$ và $T = \frac{45}{11} + 2\left(\frac{16}{11}\right) = 7$.

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC . Biết $A(3; -1)$, $B(-1; 2)$ và $I(1; -1)$ là trọng tâm tam giác ABC . Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a; b)$. Tính $a + 3b$.

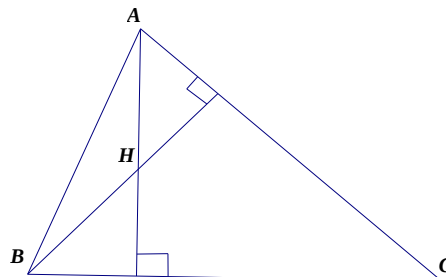
A. $a + 3b = \frac{2}{3}$.

B. $a + 3b = -\frac{4}{3}$.

C. $a + 3b = 1$.

D. $a + 3b = -2$.

Lời giải:



Giả sử $C(x_C; y_C)$ và $H(x_H; y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6); \overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ với các đáy là AB và CD . Biết $A(1; 2)$, $B(2; -3)$, điểm C nằm trên trục tung, điểm D nằm trên trục hoành. Tính $OC + OD$.

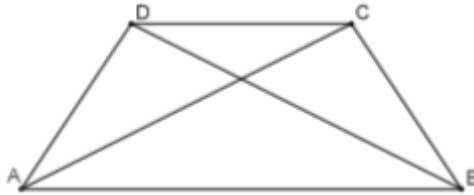
A. $\frac{4}{3}$.

B. 2.

C. 6.

D. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

Lời giải:



Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân có các đáy là AB và $CD \Rightarrow \overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB}$ với $t < 0$.
 Vì $C \in Oy$ nên $C(0; c)$, $D \in Ox$ nên $D(d; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -5); \overrightarrow{CD} = (d; -c)$.

$$\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} d = t \\ -c = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = t \\ c = 5t \end{cases}.$$

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AC = BD \Leftrightarrow AC^2 = BD^2$
 $\Leftrightarrow (0-1)^2 + (c-2)^2 = (d-2)^2 + (0+3)^2$ (*).

Thay $\begin{cases} c = 5t \\ d = t \end{cases}$ vào (*) ta được: $1 + (5t-2)^2 = (t-2)^2 + 9$

$$\Leftrightarrow 24t^2 - 16t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (ktm) \\ t = -\frac{1}{3} & (tm) \end{cases}. \text{ Với } t = -\frac{1}{3} \Rightarrow C\left(0; -\frac{5}{3}\right) \text{ và } D\left(-\frac{1}{3}; 0\right).$$

$$\text{Vậy } OC + OD = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2.$$

Câu 75. Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(-2; 3)$, $B(2; 4)$, $C(3; 0)$, $D(-1; -1)$. Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng $d: y = 2x - 1$ sao cho $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = -3$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

Gọi $M(a; b)$ là tọa độ điểm cần tìm.

Ta có: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MD} = -3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) \cdot \overrightarrow{DM} = -3.$

Lại có: $M(a; b)$ thuộc đường thẳng $d: y = 2x - 1 \Rightarrow b = 2a - 1 \Rightarrow M(a; 2a - 1).$

Khi đó:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a + 2; 2a - 4) \\ \overrightarrow{BM} = (a - 2; 2a - 5) \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = (3a - 3; 6a - 10) \\ \overrightarrow{CM} = (a - 3; 2a - 1) \end{cases}$$

$\overrightarrow{DM} = (a + 1; 2a)$

Mà $(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}) \cdot \overrightarrow{DM} = -3$

$$\Leftrightarrow (3a - 3) \cdot (a + 1) + (6a - 10) \cdot 2a = -3 \Leftrightarrow 15a^2 - 20a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $M(0; 1)$ hay $M(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}).$

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-3; -1)$ và $B(5; 0)$. Biết có hai điểm C nằm trên parabol $(P): y = x^2 - 2x$ sao cho tam giác ABC vuông tại C là $C_1(x_1; y_1), C_2(x_2; y_2)$. Tính giá trị biểu thức $T = x_1 y_2 + x_2 y_1$.

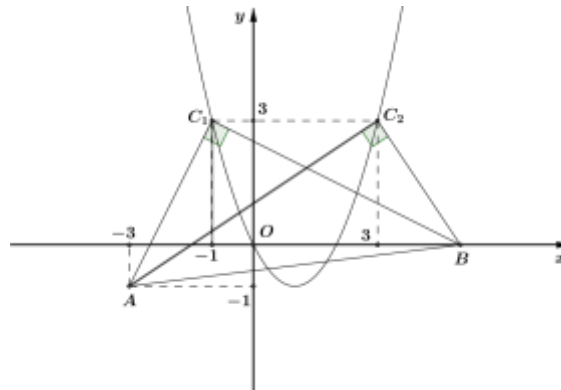
A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. -5.

Lời giải:



Gọi $C(x; x^2 - 2x) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-3 - x; -1 - x^2 + 2x) \\ \overrightarrow{CB} = (5 - x; -x^2 + 2x) \end{cases}.$

Do tam giác ABC vuông tại C nên ta có $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$\Leftrightarrow (-3 - x)(5 - x) + (-1 - x^2 + 2x)(-x^2 + 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x + 5 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Giải (1) được $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow C_1(-1; 3) \\ x = 3 \Rightarrow C_2(3; 3) \end{cases}.$

Giải (2): Vô nghiệm.

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán và $T = (-1).3 + 3.3 = 6$.

Câu 77. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;4), B(1;1), C(7;-1)$. Biết $M(a;b)$ ($a < 0$) là điểm nằm trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn tam giác ABM vuông cân tại B. Tính giá trị $T = 3a + 4b$.

A. $T = 2$.

B. $T = -2$.

C. $T = 12$.

D. $T = -12$.

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{BA} = (1;3); \overrightarrow{BM} = (a-1;b-1)$

Vì tam giác ABM vuông cân tại B, suy ra:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \\ AB = MB \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1(a-1) + 3(b-1) = 0 \\ \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b - 4 = 0 \\ a^2 + b^2 - 2a - 2b - 8 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 - 3b \\ (4 - 3b)^2 + b^2 - 2(4 - 3b) - 2b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 - 3b \\ b = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \\ b = 0 \\ a = 4 \end{cases} (l) \end{aligned}$$

Vậy tọa độ điểm $M(-2;2)$, suy ra $T = 3a + 4b = 2$.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(4;6); B(5;1); C(n;-3)$. Tìm m, n để $I\left(-\frac{1}{2}; m\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $m = -\frac{5}{2}; n = -1$

B. $m = \frac{5}{2}; n = -1$.

C. $m = \frac{5}{2}; \begin{cases} n = 1 \\ n = -2 \end{cases}$

D. $m = -\frac{5}{2}; \begin{cases} n = 1 \\ n = -2 \end{cases}$.

Lời giải:

$\overrightarrow{AB} = (1;-5), \overrightarrow{AC} = (n-4;-9)$. A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow n - 4 \neq \frac{9}{5} \Leftrightarrow n \neq -\frac{11}{5}$.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = \left(\frac{9}{2}; 6-m\right); \overrightarrow{IB} = \left(\frac{11}{2}; 1-m\right); \overrightarrow{IC} = \left(n+\frac{1}{2}; -3-m\right)$.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (6-m)^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + (1-m)^2 \\ \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (6-m)^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + (-3-m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25-10m=0 \\ \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (6-m)^2 = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + (-3-m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{5}{2} \\ n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ n+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{5}{2} \\ n=1 \\ n=-2 \end{cases} \begin{pmatrix} t/m \end{pmatrix}.$$

Vậy $m=\frac{5}{2}; \begin{cases} n=1 \\ n=-2 \end{cases}$.

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , biết $H(a;b)$ là tọa độ chân đường cao đỉnh A của tam giác ABC , biết tọa độ $B(3;1), C(4;-4)$ và trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ $G(4;0)$. Tính $a+b$.

- A. $\frac{2}{13}$, B. $\frac{33}{13}$, C. $\frac{35}{13}$, D. $\frac{68}{13}$.

Lời giải:

$G(4;0)$ là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 3 \end{cases}$

Gọi $H(x;y)$ là chân đường cao đỉnh A , suy ra

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 1(x-5) - 5(y-3) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 10 = 0 \quad (1)$$

Vì $H \in BC$ nên $\overrightarrow{BH}; \overrightarrow{BC}$ cùng phương, suy ra $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-5} \Leftrightarrow 5x + y - 16 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} x - 5y = -10 \\ 5x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{13} \\ y = \frac{33}{13} \end{cases}$.

Tọa độ điểm $H\left(\frac{35}{13}; \frac{33}{13}\right)$, suy ra $a+b = \frac{68}{13}$.

Dạng 4: CÁC BÀI TOÁN KHÁC

Câu 80. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Tính góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. 30° , B. 45° , C. 90° , D. 60° .

Lời giải:

+ Vì $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ nên $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.

$$\Leftrightarrow 5\vec{a}^2 - 8\vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-5\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-5|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2}{6} \quad (1)$$

+ Theo đề $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$.

+ Từ (1) ta được $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}|^2}{2}$

+ Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{|\vec{a}|^2}{2}}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

+ Kết luận: Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° .

Câu 81. Cho biết $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$; $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 3$. Độ dài của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng

- A.** $3\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải:

Ta có $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = 27$.

Suy ra: $|\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{3}$.

Câu 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $M(3;4), N(2;1), P(-2;-3)$. Tìm điểm I trên đường thẳng NP sao cho góc $MIN = 135^\circ$.

- A.** $I(3;2)$. **B.** $I(2;3)$. **C.** $I(5;4)$. **D.** $I(4;5)$.

Lời giải:

+) Ta có $\vec{NP} = (-4; -4)$;

Gọi $I(x; y) \Rightarrow \vec{IN} = (2-x; 1-y)$.

Vì $I \in NP \Rightarrow \vec{IN}, \vec{NP}$ là hai vectơ cùng phương $\Rightarrow \frac{2-x}{-4} = \frac{1-y}{-4} \Leftrightarrow y = x-1 \Rightarrow I(x; x-1)$.

+) Ta có $|\cos MIN| = \left| \cos(\vec{IM}, \vec{NP}) \right| = \frac{|\vec{IM} \cdot \vec{NP}|}{|\vec{IM}| \cdot |\vec{NP}|} \quad (1)$.

Vì $MIN = 135^\circ$ và $\vec{IM} = (3-x; 5-x); \vec{NP} = (-4; -4)$ nên từ (1) ta có:

$$\frac{|-2x+8|}{\sqrt{2x^2-16x+34} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |-2x+8| = \sqrt{2x^2-16x+34} \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \Rightarrow I(5;4) \\ x=3 \Rightarrow I(3;2) \end{cases}$$

+) **Trường hợp 1:** $I(5;4) \Rightarrow \vec{IM}(-2;0); \vec{IN}(-3;-3) \Rightarrow \cos MIN = \cos(\vec{IM}, \vec{IN}) = \frac{\vec{IM} \cdot \vec{IN}}{|\vec{IM}| \cdot |\vec{IN}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow MIN = 45^\circ$ (loại).

+) **Trường hợp 2:** $I(3;2) \Rightarrow \vec{IM}(0;2); \vec{IN}(-1;-1) \Rightarrow \cos MIN = \cos(\vec{IM}, \vec{IN}) = \frac{\vec{IM} \cdot \vec{IN}}{|\vec{IM}| \cdot |\vec{IN}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow MIN = 135^\circ$ (TM).

Vậy điểm cần tìm là $I(3;2)$.

Câu 83. Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, ($a > 0$). Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$ ($0 < x < 3a$). Tìm x để $AM \perp PN$.

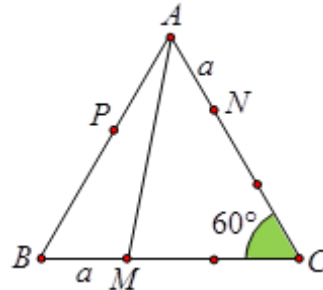
A. $x = \frac{3a}{5}$.

B. $x = \frac{2a}{5}$.

C. $x = \frac{4a}{5}$.

D. $x = \frac{a}{5}$.

Lời giải:



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Để } AM \perp PN \text{ thì } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2x}{9a}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{x}{9a}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ - \frac{2x}{9a}(3a)^2 + \frac{1}{9}(3a)^2 - \frac{x}{9a}AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} - \frac{2x}{9a} \cdot 9a^2 + \frac{1}{9}9a^2 - \frac{x}{9a} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - \frac{5}{2}ax = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}.$$

Vậy $x = \frac{4a}{5}$ thì $AM \perp PN$.

Câu 84. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ và $AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .

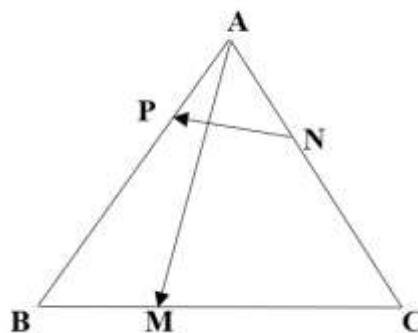
A. $\frac{4a}{15}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{2+6\sqrt{3}}{39}a$.

D. $\frac{1+3\sqrt{3}}{39}a$.

Lời giải:



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{a}\vec{b}$

Để $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{a}\vec{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{c} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{c} - 3x\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a\vec{c}^2 - 3xb\vec{c} + 2a\vec{b}\vec{c} - 6x\vec{b}^2 = 0$

$\Leftrightarrow a\vec{c}^2 + (2a - 3x)b\vec{c} - 6x\vec{b}^2 = 0 \Leftrightarrow a.a^2 + (2a - 3x).a.a.\cos 60^\circ - 6x.a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 \left(a + a - \frac{3x}{2} - 6x\right) = 0 \Leftrightarrow 2a - \frac{15}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{15}$.

Câu 85. Cho hình chữ nhật $ABCD$ thỏa $AB = 2a, AD = a$. Gọi M, N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB}, x \in \mathbb{R}$. Tìm x để AM và DN vuông góc.

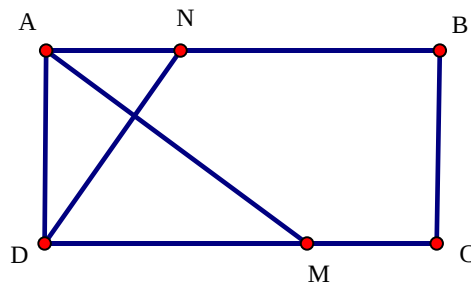
A. $x = \frac{3}{7}$.

B. $x = \frac{3}{8}$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x = \frac{2}{5}$.

Lời giải:



Cách 1. Xét tam giác vuông DAN có $\tan ADN = \frac{AN}{AD}$

Xét tam giác vuông ADM có $\cot MAD = \frac{AD}{DM}$

Vì $AM \perp DN$ nên $ADN + MAD = 90^\circ$.

Do đó $\tan ADN = \cot MAD \Leftrightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AD}{DM} = \frac{AD}{\frac{2}{3}DC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{2a} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AN = \frac{3}{4}a$.

Suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{3}{8} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$. Vậy $x = \frac{3}{8}$.

Cách 2.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \cdot (x\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x\overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x.4a^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}.$$

Cách 3. Chọn hệ trục tọa độ Oxy với $D(0;0)$, $C(2a;0)$; $A(0;a)$; $B(2a;a)$.

Ta suy ra $M\left(\frac{4a}{3};0\right)$, $N(t;a)$, $(0 < t < 2a)$; $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{4a}{3}; -a\right)$; $\overrightarrow{DN} = (t;a)$.

Ta có $AM \perp DN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow \frac{4a}{3}t - a^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3a}{4}$.

Do đó $N\left(\frac{3a}{4};a\right)$; $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{3a}{4};0\right)$; $\overrightarrow{AB} = (2a;0)$. Ta có $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$. Vậy $x = \frac{3}{8}$.

Câu 86. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $BAD = 60^\circ$. Quỹ tích các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = a^2$ là đường tròn có bán kính bằng

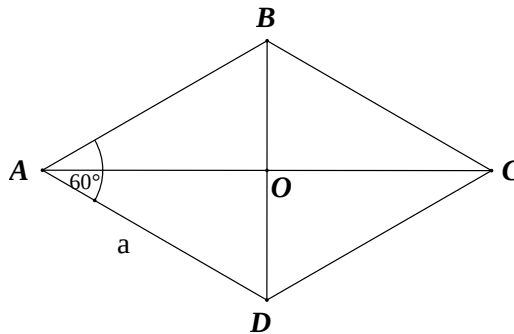
A. $\sqrt{2}a$.

B. $\frac{\sqrt{7}a}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

D. a .

Lời giải:



Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD .

Ta có: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$

$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = MO^2 - \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = a^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{7a^2}{4} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{7}a}{2}.$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm O bán kính bằng $\frac{\sqrt{7}a}{2}$.

Câu 87. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C . Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thỏa mãn điều kiện $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).\overrightarrow{AB} = 0$ là:

A. $\triangle ABC$ đều.

B. $\triangle ABC$ cân tại C .

C. $\triangle ABC$ vuông tại C .

D. $\triangle ABC$ vuông cân tại C .

Lời giải:

Gọi M là trung điểm của AB

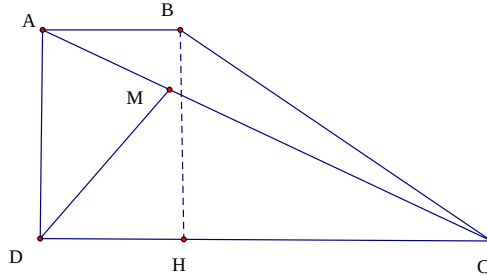
Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CM}$. Nên $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow CM \perp AB$.

Vậy $\triangle ABC$ cân tại C .

Câu 88. Cho hình thang vuông $ABCD$ với đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AC}$. Tìm k để BM và CD vuông góc.

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. **D. $\frac{2}{5}$.**

Lời giải:



Hạ $DH \perp BC$ để thấy $ABHD$ là hình chữ nhật và $BH = a$.

Từ giả thiết $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = k \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = (k-1) \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC}$.

Theo chứng minh trên ta có $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{HC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$.

$BM \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ (*).

Do giả thiết ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên (*) $\Leftrightarrow ((k-1) \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}) = 0$

$\Leftrightarrow (k-1) \cdot AB^2 + \frac{2}{3} \cdot k \cdot BC^2 = 0 \Leftrightarrow 4(k-1) \cdot a^2 + \frac{2k}{3} \cdot 9a^2 = 0 \Leftrightarrow 4k - 4 + 6k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$.

Câu 89. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là

- A. đường tròn đường kính BC .** B. đường tròn $(B; BC)$.
C. đường tròn $(C; CB)$. D. đường tròn $(C; 2CB)$.

Lời giải:

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 90. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là

- A. đường tròn đường kính AB .**
B. đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải:

$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 91. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Một điểm M thay đổi thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là

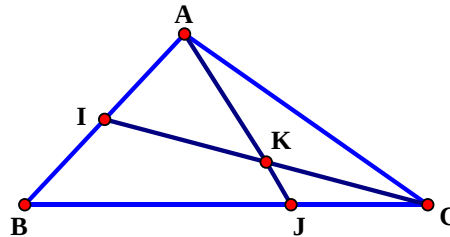
A. đường tròn đường kính IJ .

B. đường tròn đường kính IK .

C. đường tròn đường kính JK .

D. đường trung trực đoạn JK .

Lời giải:



Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

$$\text{Như vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính.

Vì I, J là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính là đường tròn cố định.

Câu 92. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$ là

A. Đường tròn tâm G bán kính bằng GB .

B. Đường tròn tâm G bán kính bằng GA .

C. Đường tròn tâm G bán kính bằng GC .

D. Đường tròn tâm G bán kính bằng $4GA$.

Lời giải:

Ta có G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 4GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = 3GA^2 \Leftrightarrow MG = GA$$

Do điểm G cố định và độ dài GA không đổi nên điểm M thuộc đường tròn tâm G bán kính bằng GA .

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm G bán kính bằng GA .

Câu 93. Cho ΔABC đều, cạnh bằng $a > 0$. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{7a^2}{4}.$$

A. Quỹ tích điểm M là đường trung trực của AB .

B. Quỹ tích điểm M là đường thẳng đi qua trọng tâm của ΔABC và song song với BC .

C. Quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{6}a}{2}$.

D. Quỹ tích điểm M là đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải:

Gọi O là trọng tâm của ΔABC , ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9(\overrightarrow{MO})^2$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MO^2$$

$$\begin{aligned} \text{Mà: } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{MO} = 3MO^2 + a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{9MO^2 - (MA^2 + MB^2 + MC^2)}{2} = \frac{6MO^2 - a^2}{2} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MO^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow MO = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm O , bán kính bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 94. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Điểm M là một điểm thỏa mãn đẳng

thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{a^2}{6}$. Biết tập hợp điểm M là một đường tròn. Bán kính đường tròn đó là

A. $R = 2$.

B. $R = \frac{a}{3}$.

C. $R = \frac{a}{4}$.

D. $R = \frac{a}{2}$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , I là trung điểm BC . Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9\overrightarrow{MG}^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MG^2$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 - \frac{a^2}{3} = 9MG^2$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 - \frac{a^2}{3} = 9MG^2$$

$$\Rightarrow 6MG^2 = 3GA^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow 6MG^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} AI^2 - \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow 6MG^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow MG = \frac{a}{3}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{a}{3}$.

HẾT

Huế, 10h00' Ngày 02 tháng 12 năm 2022