

CHUYÊN ĐỀ:

**CÁC BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT
LIÊN QUAN ĐẾN MŨ-LOGARIT**

Tác giả: Hoàng Xuân Bính

Nhóm giáo viên Toán tiếp sức Chinh phục kì thi THPT năm 2020

Trong các đề thi thử và đề thi minh họa của BGD&ĐT, các em học sinh gặp nhiều bài toán giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức mà liên quan đến khái niệm hàm số mũ và logarit. Bài viết này sẽ giúp các em hiểu rõ cách làm về dạng bài tập này và có hướng giải quyết khi gặp trong các đề thi.

1. Dạng 1 : Đặt ẩn phụ để biến đổi loga

- Hướng 1 : Với các bài toán mà biểu thức có dạng $f(\log_b a, \log_a b)$ thì ta có thể đặt ẩn phụ

$t = \log_a b \Leftrightarrow b = a^t$ để biến đổi biểu thức đã cho về biểu thức hàm một biến theo t .

- Hướng 2 : Với bài toán dạng $a^u = b^v = (ab)^p$ thì có thể đặt $t = \log_a b$

$\Rightarrow u = p(1+t), v = p\left(1+\frac{1}{t}\right)$ từ đó biến đổi biểu thức đã cho về biểu thức hàm một biến theo t .

- Hướng 3 :

Với bài toán có dạng: $a^u = b^v = c^p = (abc)^q$ thì ta đặt $a^u = b^v = c^p = (abc)^q = t \Rightarrow u = \log_a t$

, $v = \log_b t$, $p = \log_c t$, $q = \log_{abc} t$ và rút ra được: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \log_t abc = \frac{1}{q}$

Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Đề khảo sát chất lượng – L2 – Chuyên Vĩnh Phúc – 2018-2019
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log_a b \Rightarrow b = a^t$. Khi đó: $P = \log_{a^{1-t}} a + 4 \cdot \log_{a^t} a^{1-t} = \frac{1}{1-t} + \frac{4(1-t)}{t}$

Vì $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$ nên $\frac{1}{2} \leq t < 1$.

Khi đó: $P = \frac{1}{1-t} + \frac{4(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{1-t} + \frac{4(1-t)}{t} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{t}{1-t} \cdot \frac{4(1-t)}{t}} = 5$

Vậy $P_{\min} = 5$ khi $t = \frac{2}{3}$

Ví dụ 2: Xét các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x-2y} = b^{x+2y} = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 4y - 1$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

Đề khảo sát chất lượng-L2-Sở giáo dục Phú Thọ-2019-2020
Lời giải

Chọn A

Giả thiết: $a^{x-2y} = b^{x+2y} = \sqrt[3]{ab} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = \log_a \sqrt[3]{ab} = \frac{1}{3}(1 + \log_a b) \\ x + 2y = \log_b \sqrt[3]{ab} = \frac{1}{3}(1 + \log_b a) \end{cases}$

Đặt $\log_a b = t$ thì $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ và $y = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{t} - t\right)$

Suy ra: $P = 1 + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} - t\right) - 1 = \frac{1}{6}\left(t + \frac{5}{t}\right) \geq \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{t \cdot \frac{5}{t}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ví dụ 3: Cho $x, y, z > 0; a, b, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z^2 + z$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$.

B. $(3; +\infty)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(2; 4)$.

Đề thi thử TN THPT Chuyên Lê Khiết-Quảng Ngãi-2019-2020
Lời giải

Chọn C

Đặt $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc} = t$ (Đk: $t > 1$). Suy ra $x = \log_a t, y = \log_b t, z = \log_c t$ và $\log_{abc} t = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_t a + \log_t b + \log_t c = \log_t abc = 3$ nên $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 - \frac{1}{z}$.

Khi đó: $P = 3 - \frac{1}{z} - z^2 + z$.

Xét hàm số $f(z) = 3 - \frac{1}{z} - z^2 + z$, với $z > 0$.

Ta có: $f'(z) = \frac{-2z^3 + z^2 + 1}{z^2}$

$\Rightarrow f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$.

Bảng biến thiên

Từ bảng BBT, ta có $\max_{(0; +\infty)} f(z) = f(1) = 2$.

z	0	1	$+\infty$
f'	+	0	-
f	$-\infty$	2	$-\infty$

2. Dạng 2 : Sử dụng bất đẳng thức cổ điển

- **Bất đẳng thức Cauchy:** $a \geq 0, b \geq 0 : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ trong đó tích $a.b$ không đổi.

- **Bất đẳng thức đẳng thức Cauchy Schwarz:** $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$
trong đó $ax + by + cz$ có giá trị không đổi.

- Trong dạng này, từ giả thiết của bài toán ta thường thấy xuất hiện dạng biểu thức dạng hàm đặc trưng :

$$+ \log_a \left(\frac{u}{v} \right) = v - u \Leftrightarrow u + \log_a u = v + \log_a v \Leftrightarrow u = v$$

$$(hoặc \log_a u + u \leq v + \log_a v \Leftrightarrow u \leq v (u \geq v))$$

$$+ a^u + u = a^v + v \Leftrightarrow u = v$$

Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 4: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \left[(x+1)(y+1) \right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y$ là

A. $P_{\min} = 2$.

B. $P_{\min} = 1$.

C. $P_{\min} = 19$.

D. $P_{\min} = 7$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo giả thiết: } \log_3 \left[(x+1)(y+1) \right]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow (y+1) \left[\log_3 (x+1) + \log_3 (y+1) \right] + (x-1)(y+1) = 9.$$

$$\Leftrightarrow (y+1) \left[\log_3 (x+1) + \log_3 (y+1) + x - 1 \right] = 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+1) + x - 1 = \frac{9}{y+1} - \log_3 (y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+1) + x + 1 = \frac{9}{y+1} + \log_3 \frac{9}{y+1} (*)$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$

$$\text{Khi đó: } f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0 \text{ với mọi } t > 0$$

Suy ra: hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Từ (*) suy ra } (1) \Leftrightarrow f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right) \Leftrightarrow x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 = \frac{8-y}{y+1}$$

Vì $x > 0$ nên $y \in (0; 8)$.

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Khi đó:

$$P = x + 4y = \frac{8-y}{y+1} + 4y = 4y - 1 + \frac{9}{y+1} = 4(y+1) + \frac{9}{y+1} - 5 \geq 2\sqrt{4(y+1) \cdot \frac{9}{y+1}} - 5 = 7.$$

Vậy $P_{\min} = 7$ khi $4(y+1) = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng khảo sát hàm số

Xét hàm số $g(y) = 4y - 1 + \frac{9}{y+1}$ với $y \in (0; 8)$. Có $g'(y) = 4 - \frac{9}{(y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số:

y	0	$\frac{1}{2}$	8
g'	-	0	+
g	8	7	$+\infty$

Vậy $P_{\min} = 7$ khi $y = \frac{1}{2}$.

Nhận xét:

+ Với các bài toán mà hàm số được thiết lập như trên, ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để xác định min của biểu thức P bằng cách biến đổi để xuất hiện tích không đổi của hai biểu thức

chứa biến đều dương là: $4(y+1)$ và $\frac{9}{y+1}$.

+ Đối với các em học sinh mà việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy chưa thành thạo thì các em có thể sử dụng phương pháp quen thuộc là khảo sát hàm số thì cũng nhanh chóng thiết lập được đáp số của bài toán.

+ Ngoài ra, các em có thể sử dụng chức năng bảng giá trị: TABLE. Nhập hàm

$g(x) = 4x - 1 + \frac{9}{x+1}$ start $x = 0$ end $x = 1$ step $x = 0,1$. Khi đó từ bảng giá trị của hàm số thu được ta cũng có được $P_{\min} = 7$.

Ví dụ 5: Cho các số thực a, b thỏa mãn $e^{a^2+2b^2} + e^{ab}(a^2 - ab + b^2 - 1) - e^{1+ab+b^2} = 0$. Gọi m, M lần lượt

là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{1+2ab}$. Khi đó $m + M$ bằng

A. $\frac{19}{5}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $e^{a^2+2b^2} + e^{ab}(a^2 - ab + b^2 - 1) - e^{1+ab+b^2} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{a^2+2b^2-ab} + a^2 - ab + b^2 - 1 - e^{1+b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{a^2+2b^2-ab} + a^2 - ab + 2b^2 = e^{1+b^2} + 1 + b^2(1).$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = e^t + t$ với $t \in \mathbb{R}$. Có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Pt: $(1) \Leftrightarrow f(a^2 + 2b^2 - ab) = f(1 + b^2)$.

$$\Leftrightarrow a^2 + 2b^2 - ab = 1 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = 1$$

Khi đó: $1 = (a - b)^2 + ab \geq ab$ và $1 = (a + b)^2 - 3ab \geq -3ab \Rightarrow 1 \geq ab \geq -\frac{1}{3}$

Suy ra: $\frac{1}{1+2\left(-\frac{1}{3}\right)} = 3 \geq P = \frac{1}{1+2ab} \geq \frac{1}{1+2.1} = \frac{1}{3}$ nên $M = 3, m = \frac{1}{3}$.

Vậy $m + M = \frac{10}{3}$.

Ví dụ 6: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + 2^{\log_2(x^2+2y^2+1)} \leq \log_2 8^{xy}$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $P = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2}$

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Đề kiểm tra chuyên đề lần 4, trường THPT Liên Sơn-VP-2019-2020

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: $\log_2(x^2 + y^2) - \log_2(3xy + x^2) + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2) - \log_2(3xy + x^2) - x^2 + \log_2 2 \leq 3xy$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2) - \log_2 \frac{3xy + x^2}{2} - x^2 \leq 3xy$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2) \leq \log_2 \frac{3xy + x^2}{2} + x^2 + 3xy(1)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = \log_2 t + 2t$, có $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 2 > 0, \forall t > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + y^2) \leq f\left(\frac{3xy + x^2}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{3xy + x^2}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 \leq \frac{3}{2}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2$$

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Ta có: $P = \frac{2x^2 - xy + 2y^2}{2xy - y^2} = \frac{2t^2 - t + 2}{2t - 1} = t + \frac{2}{2t - 1} = \frac{1}{2}(2t - 1) + \frac{2}{2t - 1} + \frac{1}{2}$
 $\geq 2\sqrt{\frac{1}{2}(2t - 1) \cdot \frac{2}{2t - 1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Suy ra: $P_{\min} = \frac{5}{2}$ khi $t = \frac{3}{2}$

Ví dụ 7: Cho các số thực $a > 3, b > 1, c > 1$ thỏa mãn: $\log_{a(b+2c)} \frac{bc(a-3)}{ab+2ca} + \log_{bc(a-3)} (ab+2ac) = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $T = a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (16;17).

B. (17;18).

C. (18;19).

D. (19;20).

Thi thử liên trường Thanh Hóa 2019-2020

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: $\log_{a(b+2c)} \frac{bc(a-3)}{ab+2ca} + \log_{bc(a-3)} (ab+2ac) = 1$

$$\Leftrightarrow \log_{a(b+2c)} (bc(a-3)) - 1 + \log_{bc(a-3)} (ab+2ac) = 1 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_{a(b+2c)} (bc(a-3))$ thì (1) trở thành: $t + \frac{1}{t} = 2 \quad (2)$

Nhận xét: $t < 0 \Rightarrow VT(2) < 0 \quad (l)$

$+ t > 0$ thì $VT(2) \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$. Do đó (2) $\Leftrightarrow t = 1$.

Do đó: $a(b+2c) = bc(a-3) \Leftrightarrow \frac{b+2c}{bc} = \frac{a-3}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có:

$$T.1 = (a+b+c) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{3}{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)^2.$$

Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = c \\ a + b + c = (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ b = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} \\ c = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $\min T = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \approx 17,19$.

- **Nhận xét:** Ta có thể giải (2) $\Leftrightarrow t^2 + 1 = 2t \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

* **Lỗi thường gặp:** $(a + b + c) \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} = 9\sqrt[3]{6}$ tuy nhiên khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy ở đây thì dấu bằng không thể xảy ra được.

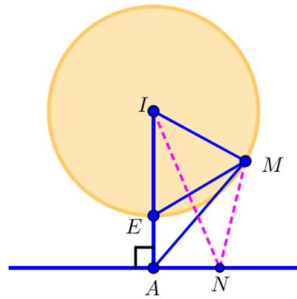
3. Dạng 3 : Cực trị hình học

- **Hướng 1 :** $d : ax + by + c = 0$ và $(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Khi đó $d; (C)$ có điểm chung $\Leftrightarrow d(I; d) \leq R$.

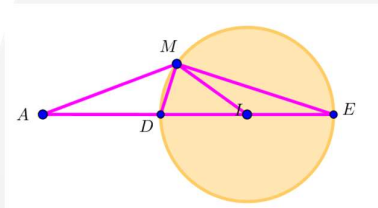
+ **Mở rộng trong không gian :**

$(P) : ax + by + cz + d = 0$ và $(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Khi đó $(P); (S)$ có điểm chung (S) có tâm I bán kính R $\Leftrightarrow d(I; (P)) \leq R$.

- **Hướng 2 :** $d : ax + by + c = 0$ và $(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ sao cho $d(I; d) > R$ với I là tâm đường tròn (C) khi đó với $M \in (C), N \in d$ thì $MN \geq d(I; d) - R$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv E, N \equiv A$.



- **Hướng 3 :** $A(a; b)$ và $(C) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ sao cho $IA > R$ với I là tâm đường tròn (C) khi đó với $M \in (C)$ thì $IA - R \leq AM \leq IA + R$. Dấu bằng xảy ra khi $M \equiv D$ hoặc $M \equiv E$.



Các ví dụ minh họa:

Ví dụ 8: Với các số thực dương x, y thay đổi sao cho $\log_2 \left(\frac{x+2y+2}{x^2+y^2} \right) = x(x-2) + y(y-4) - 5$. Xác

định giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+1}{x+y+4}$.

A. $\frac{15 + \sqrt{473}}{31}$.

B. $\frac{15 + \sqrt{349}}{31}$.

C. $\frac{15 + \sqrt{39}}{31}$.

D. $\frac{15 + 6\sqrt{14}}{31}$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra, ta có: $\log_2 \left(\frac{x+2y+2}{x^2+y^2} \right) = x(x-2) + y(y-4) - 5$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+2y+2) + 1 + 2x + 4y + 4 = \log_2 (x^2+y^2) + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [2(x+2y+2)] + 2(x+2y+2) = \log_2 (x^2+y^2) + x^2 + y^2 \quad (1)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến. Nên $(1) \Leftrightarrow f(2x+4y+4) = f(x^2+y^2)$

$$\Leftrightarrow 2x+4y+4 = x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad (2).$$

Ta có: $P = \frac{x+2y+1}{x+y+4} \Leftrightarrow (P-1)x + (P-2)y + 4P-1 = 0 \quad (3)$

Coi (2) là phương trình của đường tròn (C) với tâm $I(1;2), R=3$ và (3) là phương trình đường thẳng d

Đề tồn tại x, y thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow d, (C)$ có điểm chung $\Leftrightarrow d(I; d) \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{|(P-1) + (P-2)2 + 4P-1|}{\sqrt{(P-1)^2 + (P-2)^2}} \leq 3 \Leftrightarrow (7P-6)^2 \leq 9(2P^2-6P+5)$$

$$\Leftrightarrow 31P^2 - 30P - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{15-6\sqrt{14}}{31} \leq P \leq \frac{15+6\sqrt{14}}{31}.$$

Ví dụ 9: Với các số thực dương x, y, z thay đổi sao cho

$$\log_2 \left(\frac{x + 2y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = x(x - 4) + y(y - 8) + z(z - 8) - 2, \text{ gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ}$$

nhất của biểu thức $T = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 7y - 11z + 8}{6x + 5y - 86}$ thứ tự là M và m . Khi đó $M + m$ bằng:

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Đề thi thử TN trường THPT Hải Hậu A- Nam Định – 2019-2020

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $\log_2 \left(\frac{x + 2y + 2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = x(x - 4) + y(y - 8) + z(z - 8) - 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(x + 2y + 2z) - \log_2 (x^2 + y^2 + z^2) = x^2 + y^2 + z^2 - 4(x + 2y + 2z)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(x + 2y + 2z) + 4(x + 2y + 2z) = \log_2 (x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + y^2 + z^2 \quad (1).$$

+) Xét hàm đặc trưng $f(t) = \log_2 t + t, \forall t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + t > 0, \forall t > 0$.

+) Ta có $(1) \Leftrightarrow f(4(x + 2y + 2z)) = f(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4x + 8y + 8z$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 36.$$

Khi đó, ta được $T = \frac{(4x + 8y + 8z) - 4x - 7y - 11z + 8}{6x + 5y - 86} = \frac{y - 3z + 8}{6x + 5y - 86}$

Ta có: $T(6x + 5y - 86) = y - 3z + 8 \Leftrightarrow 6Tx + (5T - 1)y + 3z = 8 + 86T$

$$\Leftrightarrow 6Tx + (5T - 1)y + 3z - 8 - 86T = 0 \quad (1).$$

Khi đó ta coi (1) là phương trình mặt phẳng $(P): 6Tx + (5T - 1)y + 3z - 8 - 86T = 0$.

Do đó, tồn tại x, y, z để phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc hoặc cắt mặt cầu (S) với tâm

$$I(2; 4; 4), R = 6 \Leftrightarrow d(I; (P)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|6T \cdot 2 + (5T - 1)4 + 3 \cdot 4 - 8 - 86T|}{\sqrt{(6T)^2 + (5T - 1)^2 + 3^2}} \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 720T^2 + 360T - 360 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq T \leq \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 10: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+2}(4a+6b-7) = 1$ và $27^c 81^d = 6c + 8d + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

A. $\frac{8}{5}$.

B. $\frac{49}{25}$.

C. $\frac{64}{25}$.

D. $\frac{7}{5}$.

Đề thi KSCL Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An-L2-2019-2020

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{a^2+b^2+2}(4a+6b-7) = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2 = 4a + 6b - 7 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 4$ (C).

Khi đó: $27^c 81^d = 6c + 8d + 1 \Leftrightarrow 3^{3c+4d} = 6c + 8d + 1 \Leftrightarrow 3^{3c+4d} - 2(3c+4d) - 1 = 0$.

Đặt $t = 3c + 4d$, ta có phương trình: $3^t - 2t - 1 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = 3^t - 2t - 1$ có $f'(t) = 3^t \ln 3 - 2$. Khi đó: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_3 \frac{2}{\ln 3} = t_0$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
f'	-	0	+
t	$+\infty$		$+\infty$

$f(t_0)$

Quan sát bbt, ta có $f(t) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm mà $f(0) = f(1) = 0$

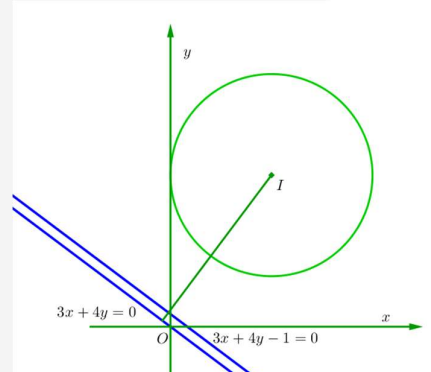
Do đó: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c + 4d = 0 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases}$.

Khi đó: ta coi cặp $(a; b)$ là tập hợp các điểm $A(a; b) \in (C)$ có tâm $I(2; 3)$, $R = 2$; và các cặp $(c; d)$ là tập hợp các điểm $B(c; d) \in d_1 : 3x + 4y = 0$ hoặc $d_2 : 3x + 4y - 1 = 0$.

+ Nếu $B \in d_1$ thì $AB \geq d(I; d_1) - R = \frac{18}{5} - 2 = \frac{8}{5}$.

+ Nếu $B \in d_2$ thì $AB \geq d(I; d_2) - R = \frac{17}{5} - 2 = \frac{7}{5}$.

So sánh hai trường hợp thì $AB_{\min} = \frac{7}{5}$ do đó $P_{\min} = \frac{49}{25}$.



Ví dụ 11: Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn đẳng thức

$$\log \frac{x^2 + y^2 + 7}{6x + 8y + 2} + x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5 \leq 0. \text{ Giá trị lớn nhất của biểu thức } T = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ là}$$

A. $4\sqrt{5}$.

B. $5 + 2\sqrt{5}$.

C. 10.

D. $10 - 2\sqrt{5}$.

Đề KSNL Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai-Sóc Trăng-2019-2020

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log \frac{x^2 + y^2 + 7}{6x + 8y + 2} + x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 + y^2 + 7) + x^2 + y^2 + 7 \leq \log(6x + 8y + 2) + 6x + 8y + 2 \quad (1).$$

Xét hàm số đặc trưng: $y = f(t) = t + \log t$ với $t > 0$

Khi đó: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 10} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

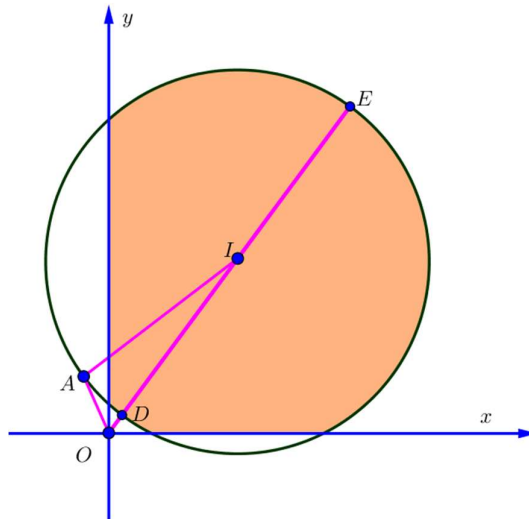
$$(1) \Leftrightarrow f(x^2 + y^2 + 7) \leq f(6x + 8y + 2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 7 \leq 6x + 8y + 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 \leq 20 \quad (2).$$

Ta coi các cặp $(x; y)$ thỏa mãn (2) là các điểm $A(x; y)$ thuộc hình tròn $(C): I(3; 4), R = 2\sqrt{5}$

(kể cả phần nằm bên trong đường tròn đó) mà $x \geq 0, y \geq 0$ nên tập hợp các điểm $A(x; y)$ là phần tô màu như hình vẽ dưới.

Gt: $T = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow T = OA$ với $O(0; 0)$.



Nhận xét: $OI = 5 > R = 2\sqrt{5}$.

Do đó: $T = OA \leq OI + R = 5 + 2\sqrt{5}$. $T_{\max} = 5 + 2\sqrt{5}$ khi $A \equiv E$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 < x, y < 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = \frac{8}{9}(x+1) + y - 2020$.

- A. -2021 . B. -2020 . C. $\frac{-6055}{3}$. D. $\frac{-6052}{3}$.

Câu 2: Cho các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x > 0, y > 1$ và $(xy^2 + x - 2y - 1)\log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{y^2(4x+3)}{4y} + \frac{x}{y}.$$

- A. 4 . B. 5 . C. 3 D. 6 .

Câu 3: Cho các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x, y > 1$ và $10^{(5x^2-4y)\log x} = \frac{4y+2}{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{40x^2 + y^3}{8y} + 5$.

- A. $\frac{21}{2}$. B. 11 . C. $\frac{19}{2}$ D. 8 .

Câu 4: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b} \right)$.

- A. 6 . B. 7 . C. 5 . D. 4 .

Câu 5: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $k \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $k \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $k \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Câu 6: Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y + 6$ thuộc tập nào dưới đây?

- A. $(9; 10)$. B. $(6; 7)$. C. $(7; 8)$. D. $(8; 9)$.

Câu 7: Cho các số thực $a, b, c > 1$ và các số thực dương x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt[6]{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{32}{x+y} - 4z^2 + 1$ thuộc tập nào dưới đây?

- A. $(34; 36)$. B. $(36; 38)$. C. $(38; 40)$. D. $(40; 42)$.

Câu 8: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn: $3^{\frac{a}{a^2-1}} = 5^{\frac{b}{b^2-1}} = 15^{\frac{c}{1-c^2}}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (a+b+c)^2 - 8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 25$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 20)$. B. $(-20; 0)$. C. $(-30; -20)$. D. $(-50; -30)$.

Câu 9: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{x+4y}{x+y} \right) = 2x - 4y + 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^4 - 3x^2y^2 + 4x^2}{(x+2y)^3} + \frac{11x}{4y}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{23}{4}$. B. 3. C. 6. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 10: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $4^{ab} \cdot 2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2ab^2$ bằng

- A. 3. B. 1. C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{3}{17}$.

Câu 11: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a+2b+5}{a+b} \right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + 3a - b - 5$

- A. -15. B. -5. C. 5. D. 35.

Câu 12: Cho các số dương a, b thỏa mãn $3 + \log \sqrt{\frac{a+2b+3}{ab}} = ab - a - 2b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^2 + 4b^2 - 26ab + 2020$.

- A. 1120. B. 1885. C. 2021. D. 1705.

Câu 13: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2 (6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$.

- A. $8 + 6\sqrt{2}$. B. $\frac{59}{3}$. C. 19. D. $\frac{53}{3}$.

Câu 14: Cho số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{69 - \sqrt{249}}{94}$.

B. $\frac{69 + \sqrt{249}}{94}$.

C. $\frac{37 + \sqrt{249}}{94}$.

D. $\frac{43 + 2\sqrt{249}}{94}$.

Câu 15: Với các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn: $\log_2 \left(\frac{6x+2y+5}{x^2+y^2+1} \right) = x(x-12) + y(y-4) - 10$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3x+2y+6}{2x+y+1}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0, 5; 0, 7)$.

B. $(0, 7; 0, 9)$.

C. $(0, 9; 1, 1)$.

D. $(0, 3; 0, 5)$.

Câu 16: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\log_2(x+2y) + x(x+3y-1) + y(2y-1) = 0$. Khi biểu thức $P = \log_{2020} x + 2 \cdot \log_{2020} y$ đạt giá trị lớn nhất, hãy tính giá trị $4x^2 + 5y^2$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{8}{9}$.

Câu 17: Cho x, y là các số thực dương và $y > 1$ thỏa mãn:

$$\left[x(y^2 - 1) + 3y - 5 \right] \cdot \ln(x+1) = \ln \left(\frac{x+5}{xy+3} \right) - \ln y.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 $P = x(y-1) + \frac{32}{25}y + 2$.

A. $\frac{103}{25}$.

B. $\frac{217}{25}$.

C. $\frac{23}{25}$.

D. $\frac{48}{25}$.

Câu 18: Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn đẳng thức

$$\log_2 \frac{x^2 + y^2 + 15}{2x + 3y + 3} \leq (4x - x^2) + (6y - y^2) - 8.$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5$ là

A. $26 - 8\sqrt{34}$.

B. $28 - 4\sqrt{34}$.

C. $26 - 4\sqrt{34}$.

D. $28 - 8\sqrt{34}$.

Hướng dẫn giải bài tập tự luyện

Câu 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn $0 < x, y < 1$ và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = \frac{8}{9}(x+1) + y - 2020$.

- A. -2021 . B. -2020 . C. $-\frac{6055}{3}$. D. $-\frac{6052}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0 < x, y < 1$

Khi đó

$$\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) - \log_3 (1-xy) + x+y+xy-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+y) + (x+y) = \log_3 (1-xy) + (1-xy) \quad (1)$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Suy ra

$$(1) \Leftrightarrow f(x+y) = f(1-xy) \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{8}{9}(x+1) + y - 2020 = \frac{8}{9}(x+1) + \frac{1-x}{1+x} - 2020 = \frac{8}{9}(x+1) + \frac{2}{1+x} - 1 - 2020$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{8}{9}(x+1) \cdot \frac{2}{1+x}} - 2021 = 2 \cdot \frac{4}{3} - 2021 = -\frac{6055}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ (thỏa các điều kiện của đề bài).

$$\text{Vậy } P_{\min} = -\frac{6055}{3}.$$

Câu 2: Cho các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x > 0, y > 1$ và
 $(xy^2 + x - 2y - 1)\log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2(4x + 3)}{4y} + \frac{x}{y}.$$

A. 4.

B. 5.

C. 3

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, y > 1 \\ \frac{2y - x + 3}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 1 \\ 2y - x + 3 > 0 \end{cases}$.

Ta có :

$$(xy^2 + x - 2y - 1)\log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}$$

$$\Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 3)\log y + 2\log y = \log(2y - x + 3) - \log x$$

$$\Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 3)\log y = \log(2y - x + 3) - \log(xy^2) \quad (1)$$

+ Nếu $xy^2 > 2y - x + 3$ thì $\begin{cases} VT(1) > 0 \\ VP(1) < 0 \end{cases}$ (do $\log y > 0$).

+ Nếu $xy^2 < 2y - x + 3$ thì $\begin{cases} VT(1) < 0 \\ VP(1) > 0 \end{cases}$ (do $\log y > 0$).

Do đó, từ (1) suy ra: $xy^2 = 2y - x + 3 \Leftrightarrow x(y^2 + 1) = 2y + 3$.

Ta có: $P = xy + \frac{3}{4}y + \frac{x}{y} = \frac{3}{4}y + \frac{x(y^2 + 1)}{y} = \frac{3}{4}y + 2 + \frac{3}{y} = \frac{3}{4}y + \frac{3}{y} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{3}{4}y \cdot \frac{3}{y}} + 2 = 5$

Vậy $P_{\min} = 5$ khi $y = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$.

Câu 3: Cho các số thực x, y thỏa mãn đồng thời $x, y > 1$ và $10^{(5x^2-4y)\log x} = \frac{4y+2}{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = \frac{40x^2 + y^3}{8y} + 5$.

A. $\frac{21}{2}$.

B. 11.

C. $\frac{19}{2}$

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gt : } 10^{(5x^2-4y)\log x} = \frac{4y+2}{5} \Leftrightarrow (5x^2-4y)\log x = \log\left(\frac{4y+2}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow (5x^2-4y-2)\log x + 2\log x - \log(4y+2) + \log 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow [5x^2 - (4y+2)]\log x + [\log(5x^2) - \log(4y+2)] = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } x > 1 \Rightarrow \log x > 0.$$

$$+ \text{ Nếu } 5x^2 - (4y+2) > 0 \Leftrightarrow 5x^2 > 4y+2 \Rightarrow VT(1) > 0 \text{ (loại).}$$

$$+ \text{ Nếu } 5x^2 - (4y+2) < 0 \Leftrightarrow 5x^2 < 4y+2 \Rightarrow VT(1) < 0 \text{ (loại).}$$

$$+ \text{ Nếu } 5x^2 - (4y+2) = 0 \Leftrightarrow VT(1) = 0 \quad (t / m)$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow 5x^2 = 4y+2.$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{40x^2 + y^3}{8y} + 5 = \frac{8(4y+2) + y^3}{8y} + 5 = \frac{2}{y} + \frac{y^2}{8} + 9 = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{y^2}{8} + 9$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{y^2}{8}} + 9 = \frac{21}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = 2, y = \sqrt{2}.$$

Câu 4: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \leq b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}} \left(\frac{a}{b}\right)$.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Đề khảo sát chất lượng – L2 – Chuyên Vĩnh Phúc – 2018-2019

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \log_a b \Rightarrow b = a^t. \text{ Khi đó: } P = \log_{a^{1-t}} a + 4 \cdot \log_{a^t} a^{1-t} = \frac{1}{1-t} + \frac{4(1-t)}{t}$$

$$\text{Vì } b > 1 \text{ và } \sqrt{a} \leq b < a \text{ nên } \frac{1}{2} \leq t < 1.$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{1}{1-t} + \frac{4(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{1-t} + \frac{4(1-t)}{t} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{t}{1-t} \cdot \frac{4(1-t)}{t}} = 5$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 5 \text{ khi } t = \frac{2}{3}$$

Câu 5: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị

lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $k \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $k \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $k \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

D. $k \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_a b \Rightarrow b = a^t$ (đk: $0 < t \leq 1$).

Khi đó: $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{1 - \log_a b} = 1 + t + \sqrt{1 - t}$

Xét hàm số: $f(t) = 1 + t + \sqrt{1 - t}$ với $0 < t \leq 1$,

Có $f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-t}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$

Bảng biến thiên:

Vậy $P_{\max} = \frac{9}{4}$ khi $t = \frac{3}{4} \Rightarrow b = a^{\frac{3}{4}}$ do đó: $k = \frac{3}{4}$

t	0	$\frac{3}{4}$	1
f'	+	0	-
f	2	$\frac{9}{4}$	2

Câu 6: Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y + 6$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $(9; 10)$.

B. $(6; 7)$.

C. $(7; 8)$.

D. $(8; 9)$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết: $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_a \sqrt[4]{ab} \\ y = \log_b \sqrt[4]{ab} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}(1 + \log_a b) \\ y = \frac{1}{4}(1 + \log_b a) \end{cases}$

Đặt $t = \log_a b$ (đk: $t > 0$) thì $x = \frac{1}{4}(1 + t)$ và $y = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$.

Ta có: $P = \frac{1}{4}(1 + t) + 1 + \frac{1}{t} + 6 = \frac{29}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{t} \geq \frac{29}{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}t \cdot \frac{1}{t}} = \frac{33}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $t = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{8}$.

Câu 7: Cho các số thực $a, b, c > 1$ và các số thực dương x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt[6]{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{32}{x+y} - 4z^2 + 1$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $(34; 36)$.

B. $(36; 38)$.

C. $(38; 40)$.

D. $(40; 42)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $a^x = b^y = c^z = \sqrt[6]{abc} = t$ (đk: $t > 1$).

Ta có: $x = \log_a t, y = \log_b t, z = \log_c t, \log_{abc} t = \frac{1}{6}$

Suy ra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_t a + \log_t b + \log_t c = \log_t abc = 6$

Nhận xét: với $x, y > 0$, ta có: $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Dấu bằng xảy ra khi: $x = y$

Do đó: $P = \frac{32}{x+y} - 4z^2 + 1 \leq 8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - 4z^2 + 1 = 8 \left(6 - \frac{1}{z} \right) - 4z^2 + 1$
 $= 49 - 4 \left(z^2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right)$

Mà $z^2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{z^2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z}} = 3$ nên $P \leq 49 - 4 \cdot 3 = 37$.

Dấu bằng xảy ra khi $z = 1, x = y = \frac{2}{5}$.

Câu 8: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1 thỏa mãn: $3^{\frac{a}{a^2-1}} = 5^{\frac{b}{b^2-1}} = 15^{\frac{c}{1-c^2}}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (a+b+c)^2 - 8 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 25$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0; 20)$.

B. $(-20; 0)$.

C. $(-30; -20)$.

D. $(-50; -30)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $3^{\frac{a}{a^2-1}} = 5^{\frac{b}{b^2-1}} = 15^{\frac{c}{1-c^2}} = t$. Khi đó: $t > 0$.

+ Nếu $t = 1 \Rightarrow a = b = c = 0$ (l).

+ Nếu $t \neq 1$, ta có:

Khi đó: $\frac{a}{a^2-1} = \log_3 t, \frac{b}{b^2-1} = \log_5 t, \frac{-c}{c^2-1} = \log_{15} t.$

Suy ra: $\frac{a^2-1}{a} + \frac{b^2-1}{b} + \frac{c^2-1}{c} = \log_t 3 + \log_t 5 - \log_t 15 = 0$

$\Leftrightarrow a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$

Khi đó: $P = (a + b + c)^2 - 8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 25 = (a + b + c)^2 - 8(a + b + c) - 25$

$= (a + b + c - 4)^2 - 41 \geq -41.$

Suy ra: $P \geq -41$. Dấu bằng xảy ra khi: $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Ta có thể chọn $a = \frac{3}{2}$ thì

$$\begin{cases} b + c = \frac{5}{2} \\ b.c = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{5 + \sqrt{13}}{4}, c = \frac{5 - \sqrt{13}}{4}$$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là -41 .

Câu 9: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \left(\frac{x+4y}{x+y} \right) = 2x - 4y + 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{x^4 - 3x^2y^2 + 4x^2}{(x+2y)^3} + \frac{11x}{4y}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{23}{4}$.

B. 3.

C. 6.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x, y > 0$.

Theo giả thiết: $\log_2 \left(\frac{x+4y}{x+y} \right) = 2x - 4y + 1 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x+4y}{x+y} \right) - 1 = 2x - 4y$

$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x+4y}{2x+2y} \right) = 2x - 4y \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x+4y}{2x+2y} \right) = 2(2x+2y) - 2(x+4y)$

$\Leftrightarrow \log_2 (x+4y) + 2(x+4y) = \log_2 (2x+2y) + 2(2x+2y) \quad (1)$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = \log_2 t + 2t$ với $t \in (0; +\infty)$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2 > 0$ với $t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $t \in (0; +\infty)$

Nên $(1) \Leftrightarrow f(x+4y) = f(2x+2y) \Leftrightarrow x+4y = 2x+2y \Leftrightarrow x = 2y$.

$$P = \frac{x^4 - 3x^2y^2 + 4x^2}{(x+2y)^3} + \frac{11x}{4y} = \frac{16y^4 - 12y^4 + 16y^2}{64y^3} + \frac{11 \cdot 2y}{4y} = \frac{y}{16} + \frac{1}{4y} + \frac{11}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{y}{16} \cdot \frac{1}{4y}} + \frac{11}{2} = \frac{23}{4}.$$

Vậy $P_{\min} = \frac{23}{4}$ khi $y = 2$.

Nhận xét:

- Đối với bài toán số này, sau khi chúng ta thực hiện việc biểu diễn được $x = 2y$ chỉ cần rút gọn biểu thức P thì việc xác định giá trị $P_{\min}$ tương đối đã rõ ràng đối với các em học sinh.

Câu 10: Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $4^{ab} \cdot 2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab + 2ab^2 \text{ bằng}$$

A. 3.

B. 1.

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

D. $\frac{3}{17}$.

Đề thi thử chuyên Hùng Vương – Gia Lai – lần 1 năm học 2018-2019

Lời giải

Chọn B

Đk: $a > 0, b > 0, 1 > ab$.

$$\text{Theo giả thiết: } 4^{ab} \cdot 2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{a+b} \Leftrightarrow (a+b) \cdot 2^{a+b} = \frac{8(1-ab)}{2^{2ab}}$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \cdot 2^{a+b} = (2-2ab) \cdot 2^{2-2ab} (1)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = t \cdot 2^t$ với $t \in (0; +\infty)$.

Khi đó: $f'(t) = 2^t + t \cdot 2^t \cdot \ln 2 > 0, \forall t \in D$ nên hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(a+b) = f(2-2ab) \Leftrightarrow a+b = 2-2ab \Leftrightarrow a(1+2b) = 2-b.$$

$$\text{Vì } a, b > 0 \Rightarrow 2-b > 0 \Leftrightarrow b < 2.$$

$$\text{Khi đó: } P = ab + 2ab^2 = ba(1+2b) = b(2-b) = 1 - (b-1)^2 \leq 1.$$

Vậy $P_{\max} = 1$ khi $a = \frac{1}{3}, b = 1$.

Câu 11: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5 \left(\frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = a^2 + b^2 - 3a + b - 5$

A. -15.

B. -5.

C. 5.

D. 35.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: $\log_5 \left(\frac{4a + 2b + 5}{a + b} \right) = a + 3b - 4$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a + 2b + 5) - \log_5 (a + b) = 5(a + b) - (4a + 2b + 5)$$

$$\Leftrightarrow \log_5 (4a + 2b + 5) + (4a + 2b + 5) = \log_5 (a + b) + 5(a + b) \quad (1)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = \log_5 t + t (t > 0)$. Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 5} + 1 > 0$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến nên $(1) \Leftrightarrow f(4a + 2b + 5) = f(5(a + b))$

$$\Leftrightarrow 4a + 2b + 5 = 5(a + b) \Leftrightarrow a = 5 - 3b.$$

$$\begin{aligned} P &= a^2 + b^2 - 3a + b - 5 = (5 - 3b)^2 + b^2 - 3(5 - 3b) + b - 5 = 10b^2 - 20b + 5 \\ &= 10(b - 1)^2 - 5 \geq -5. \end{aligned}$$

Vậy GTNN $P = -5$. Dấu bằng xảy ra khi $a = 2, b = 1$.

Câu 12: Cho các số dương a, b thỏa mãn $3 + \log \sqrt{\frac{a + 2b + 3}{ab}} = ab - a - 2b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = a^2 + 4b^2 - 26ab + 2020$.

A. 1120.

B. 1885.

C. 2021.

D. 1705.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 3 + \log \sqrt{\frac{a + 2b + 3}{ab}} = ab - a - 2b \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{2} \log \left(\frac{a + 2b + 3}{ab} \right) = ab - a - 2b$$

$$\Leftrightarrow 6 + \log \left(\frac{a + 2b + 3}{ab} \right) = 2ab - 2a - 4b \Leftrightarrow \log \left(\frac{a + 2b + 3}{ab} \right) = 2ab - 2a - 4b - 6$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{a + 2b + 3}{ab} \right) = 2ab - 2(a + 2b + 3)$$

$$\Leftrightarrow \log(a + 2b + 3) + 2(a + 2b + 3) = \log(ab) + 2ab \quad (*)$$

Xét hàm số đặc trưng $y = f(t) = \log t + 2t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 2 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(a + 2b + 3) = f(ab) \Leftrightarrow a + 2b + 3 = ab$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, ta có: } P &= a^2 + 4b^2 - 26ab + 2020 = (a + 2b)^2 - 30ab + 2020 \\ &= (a + 2b)^2 - 30(a + 2b + 3) + 2020 = (a + 2b - 15)^2 + 1705. \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = 1705$ khi $\begin{cases} a + 2b = 15 \\ a \cdot b = 18 \end{cases}$ nên $a = 3, b = 6$.

Câu 13: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 x + x(x + y) = \log_2(6 - y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$.

A. $8 + 6\sqrt{2}$.

B. $\frac{59}{3}$.

C. 19.

D. $\frac{53}{3}$.

Đề kiểm tra học kì I, THPT Minh Khai – Hà Nội, năm học 2019-2020

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 6 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Giả thiết, ta có: } \log_2 x + x(x + y) &= \log_2(6 - y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x + x^2 = \log_2(6 - y) + x(6 - y) \\ &\Leftrightarrow 2\log_2 x + x^2 = \log_2 x(6 - y) + x(6 - y) \Leftrightarrow \log_2 x^2 + x^2 = \log_2 x(6 - y) + x(6 - y)(1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \cdot \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: (1)} \Leftrightarrow f(x^2) = f(x(6 - y)) \Leftrightarrow x^2 = x(6 - y) \Leftrightarrow x = 6 - y.$$

Với $x = 6 - y$ thay vào P ta được:

$$\begin{aligned} P &= 3(6 - y) + 2y + \frac{6}{6 - y} + \frac{8}{y} = 18 - y + \frac{6}{6 - y} + \frac{8}{y} = \left(\frac{8}{y} + \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{6}{6 - y} + \frac{3}{2}(6 - y)\right) + 9. \\ &\geq 2\sqrt{\frac{8}{y} \cdot \frac{y}{2}} + 2\sqrt{\frac{6}{6 - y} \cdot \frac{3}{2}(6 - y)} + 9 \Leftrightarrow P \geq 19. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{y} = \frac{y}{2} \\ \frac{6}{6 - y} = \frac{3}{2}(6 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ (6 - y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 4 \\ 6 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 19 khi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Câu 14: Cho số thực x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\frac{69 - \sqrt{249}}{94}$.

B. $\frac{69 + \sqrt{249}}{94}$.

C. $\frac{37 + \sqrt{249}}{94}$.

D. $\frac{43 + 2\sqrt{249}}{94}$.

Đề thi thử TN THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-2019-2020

Lời giải

Chọn B

Đk: $x + y > 0$.

Giả thiết: $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) - 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) = x^2-3x+y^2-3y+xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x+y) + 2 + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(3x+3y) + (3x+3y) = 2\log_3(x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2) \quad (1)$$

Xét hàm số đặc trưng: $f(t) = 2\log_3 t + t (t > 0)$ ta có: $f'(t) = \frac{2}{t \cdot \ln 3} + 1 > 0 \forall t > 0$

Suy ra: hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(1) \Leftrightarrow f(3x+3y) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3x+3y = x^2+y^2+xy+2$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2+xy+\frac{x^2}{4}\right) - 3\left(y+\frac{x}{2}\right) + \frac{9}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(y+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Đặt: $a = y + \frac{x}{2}, b = \frac{\sqrt{3}x}{2}$ thì $\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \quad (2)$

Khi đó: $P = \frac{x+2y+3}{x+y+6} = \frac{2\left(y+\frac{x}{2}\right)+3}{y+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+6} = \frac{2a+3}{a+\frac{b}{\sqrt{3}}+6} \Rightarrow a(P-2) + \frac{Pb}{\sqrt{3}} + 6P-3 = 0 \quad (3)$

Ta coi (2) là phương trình đường tròn (C) với $I\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), R=1$ và (3) là đường thẳng

$$d: (P-2)x + \frac{P}{\sqrt{3}}y + 6P-3 = 0.$$

$$\text{Để tồn tại } a, b \text{ khi } d, (C) \text{ có điểm chung} \Leftrightarrow d(I; (d)) \leq R \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{3}{2}(P-2) + \frac{P}{2} + 6P - 3 \right|}{\sqrt{(P-2)^2 + \frac{1}{3}P^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{188}{3}P^2 - 92P + 32 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{69 - \sqrt{249}}{94} \leq P \leq \frac{69 + \sqrt{249}}{94}. \text{ Vậy } P_{\max} = \frac{69 + \sqrt{249}}{94}.$$

Câu 15: Với các số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn: $\log_2 \left(\frac{6x + 2y + 5}{x^2 + y^2 + 1} \right) = x(x - 12) + y(y - 4) - 10$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3x + 2y + 6}{2x + y + 1}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0, 5; 0, 7)$.

B. $(0, 7; 0, 9)$.

C. $(0, 9; 1, 1)$.

D. $(0, 3; 0, 5)$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra, ta có: $\log_2 \left(\frac{6x + 2y + 5}{x^2 + y^2 + 1} \right) = x(x - 12) + y(y - 4) - 10$

$$\Leftrightarrow \log_2 (6x + 2y + 5) + 12x + 4y + 10 = \log_2 (x^2 + y^2 + 1) + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [2(6x + 2y + 5)] + 2(6x + 2y + 5) = \log_2 (x^2 + y^2 + 1) + (x^2 + y^2 + 1)(1)$$

Xét hàm số đặc trưng cho phương trình: $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow f(2(6x + 2y + 5)) = f(x^2 + y^2 + 1) \Leftrightarrow 2(6x + 2y + 5) = x^2 + y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 49(2).$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{x + y + 6}{2x + y + 8} \Leftrightarrow (2P - 1)x + (P - 1)y + 8P - 6 = 0(3).$$

Khi đó, ta coi (2) là phương trình của đường tròn $(C): I(6; 2), R = 7$ và (3) là phương trình của đường thẳng d

Để tồn tại (x, y) thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow d, (C)$ có điểm chung $\Leftrightarrow d(I; d) \leq R$

$$\Leftrightarrow \frac{|22P - 14|}{\sqrt{(2P - 1)^2 + (P - 1)^2}} \leq 7 \Leftrightarrow (22P - 14)^2 \leq 49[(2P - 1)^2 + (P - 1)^2]$$

$$\Leftrightarrow 239P^2 - 322P + 98 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{161 - 7\sqrt{51}}{239} \leq P \leq \frac{161 + 7\sqrt{51}}{239}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{161 - 7\sqrt{51}}{239} \approx 0,46$$

Câu 16: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\log_2(x + 2y) + x(x + 3y - 1) + y(2y - 1) = 0$. Khi biểu thức $P = \log_{2020} x + 2 \cdot \log_{2020} y$ đạt giá trị lớn nhất, hãy tính giá trị $4x^2 + 5y^2$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{8}{9}$.

Đề thi thử TN THPT Chuyên Hà Tĩnh-2019-2020

Lời giải

Chọn C

Với $x, y > 0$. Ta có: $\log_2(x + 2y) + x(x + 3y - 1) + y(2y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + 2y) + (x + y)(x + 2y - 1) = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $x + 2y > 1$ thì VT(1) > 0 (loại)

+ Nếu $x + 2y < 1$ thì VT(1) < 0 (loại).

+ Nếu $x + 2y = 1$ thì VT(1) $= 0$ (t/m). Suy ra (1) $\Leftrightarrow x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - 2y$ (đk: $0 < y < \frac{1}{2}$).

Khi đó: $P = \log_{2020} x + 2 \cdot \log_{2020} y = \log_{2020}(x \cdot y^2)$. Mà: $x \cdot y^2 = (1 - 2y)y^2 = (1 - 2y) \cdot y \cdot y$.

Áp dụng bất Cauchy cho ba số dương, ta có: $\frac{y + y + (1 - 2y)}{3} \geq \sqrt[3]{y \cdot y \cdot (1 - 2y)}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq y \cdot y \cdot (1 - 2y) \Rightarrow P \leq \log_{2020} \frac{1}{27}.$$

Vậy $P_{\max} = \log_{2020} \frac{1}{27}$ khi $y = \frac{1}{3}, x = \frac{1}{3} \Rightarrow 4x^2 + 5y^2 = 1$.

Câu 17: Cho x, y là các số thực dương và $y > 1$ thỏa mãn:

$\left[x(y^2 - 1) + 3y - 5 \right] \cdot \ln(x + 1) = \ln\left(\frac{x + 5}{xy + 3}\right) - \ln y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x(y - 1) + \frac{32}{25}y + 2.$$

A. $\frac{103}{25}$.

B. $\frac{217}{25}$.

C. $\frac{23}{25}$.

D. $\frac{48}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ta, ta có: $\left[x(y^2 - 1) + 3y - 5 \right] \cdot \ln(x + 1) = \ln\left(\frac{x + 5}{xy + 3}\right) - \ln y$

$$\Leftrightarrow \left[(xy^2 + 3y) - (x + 5) \right] \cdot \ln(x + 1) = \ln(x + 5) - \ln(xy^2 + 3y) \quad (1)$$

Nhận xét: $x > 0 \Rightarrow \ln(x+1) > 0$.

+ Nếu: $xy^2 + 3y > x + 5$ thì $VT(1) > 0, VP(1) < 0$ (loại).

+ Nếu: $xy^2 + 3y < x + 5$ thì $VT(1) < 0, VP(1) > 0$ (loại).

+ Nếu $xy^2 + 3y = x + 5$ thì $VT(1) = VP(1) = 0$ (thỏa mãn).

Do đó: $(1) \Leftrightarrow xy^2 + 3y = x + 5 \Leftrightarrow x(y^2 - 1) = 5 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{5 - 3y}{y^2 - 1}$ (đk: $1 < y < \frac{5}{3}$).

Khi đó: $P = x(y - 1) + \frac{32}{25}y + 2 = \frac{5 - 3y}{y + 1} + \frac{32}{25}y + 2 = \frac{8}{y + 1} + \frac{32}{25}(y + 1) - \frac{57}{25}$

$\geq 2\sqrt{\frac{8}{y + 1} \cdot \frac{32}{25}(y + 1)} - \frac{57}{25} = \frac{103}{25}$.

Vậy $P_{\min} = \frac{103}{25}$ khi $\frac{8}{y + 1} = \frac{32}{25}(y + 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Câu 18: Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn đẳng thức $\log_2 \frac{x^2 + y^2 + 15}{2x + 3y + 3} \leq (4x - x^2) + (6y - y^2) - 8$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5$ là?

A. $26 - 8\sqrt{34}$.

B. $28 - 4\sqrt{34}$.

C. $26 - 4\sqrt{34}$.

D. $28 - 8\sqrt{34}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2 \frac{x^2 + y^2 + 15}{2x + 3y + 3} \leq (4x - x^2) + (6y - y^2) - 8$

$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + y^2 + 15) + x^2 + y^2 + 15 \leq \log_2 (2x + 3y + 3) + 4x + 6y + 7$

$\Leftrightarrow \log (x^2 + y^2 + 15) + x^2 + y^2 + 15 \leq \log (4x + 6y + 6) + 4x + 6y + 6$ (1).

Xét hàm số đặc trưng: $y = f(t) = t + \log_2 t$ với $t > 0$

Khi đó: $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow y = f(t)$ đồng biến trên

khoảng $(0; +\infty)$.

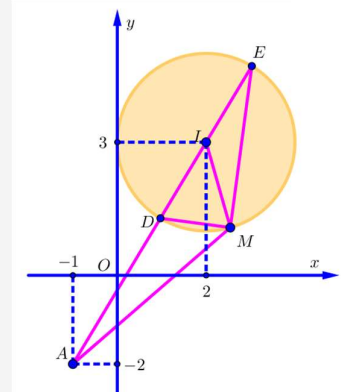
(1) $\Leftrightarrow f(x^2 + y^2 + 15) \leq f(4x + 6y + 6)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 15 \leq 4x + 6y + 6 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$ (2).

Ta coi các cặp $(x; y)$ thỏa mãn (2) là các điểm $M(x; y)$ thuộc hình tròn $(C): I(2; 3), R = 2$ (kể cả phần nằm bên trong đường tròn đó)

Gt: $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 - 10 = AM^2 - 10$ với $A(-1; -2)$ và

$IA = \sqrt{34} > R = 2$



Khi đó: nên điểm A nằm ngoài đường tròn $(C) \Rightarrow AM \geq IA - R = \sqrt{34} - 2$
 $\Rightarrow P \geq (\sqrt{34} - 2)^2 - 10 = 28 - 4\sqrt{34} \Rightarrow P_{\min} = 28 - 4\sqrt{34}$ khi $M \equiv D$.