

CHƯƠNG II: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như trong mặt phẳng, ta có khái niệm vectơ trong không gian:

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB ".

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

Các khái niệm có liên quan đến vectơ trong không gian như: giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ-không, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

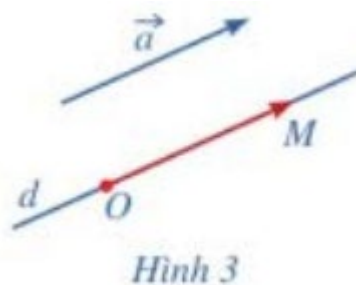
Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;

b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Chú ý: Cho điểm O và vectơ $\vec{a}$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm M trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Để xác định điểm M , ta làm như sau (Hình 3):



Qua O kẻ đường thẳng d song song hoặc trùng với giá của vectơ $\vec{a}$.

Lấy điểm M trên đường thẳng d sao cho hai vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}$ là cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OM bằng độ dài vectơ $\vec{a}$.

II. CÁC PHÉP TOÁN VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Chú ý

- Phép lấy tổng của hai vectơ còn được gọi là phép cộng vectơ.

- Phép cộng vector trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vector trong mặt phẳng, chẳng hạn: Phép cộng vector trong không gian cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với vector-không.

- Khi thực hiện phép cộng vector trong không gian, ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vector trong mặt phẳng.

- Đối với vector trong không gian, ta cũng có các quy tắc sau:

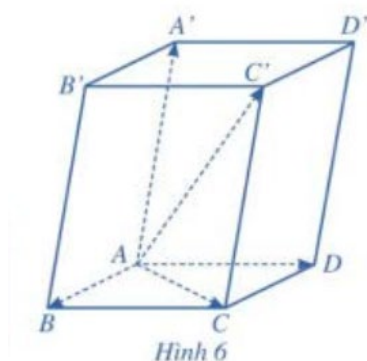
+ Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm);

+ Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

- Nếu $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp)

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 6). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$



Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vector còn được gọi là phép trừ vector.

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 8). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.

Đối với vector trong không gian, ta có quy tắc sau:

- Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (Quy tắc hiệu).

2. Tích của một số với một vector trong không gian

Tương tự như trong mặt phẳng, trong không gian ta cũng có định nghĩa sau:

Cho số thực $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$;

- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$. Do đó, $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Chú ý

- Phép lấy tích của một số với một vector gọi là phép nhân một số với một vector.

- Phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:

- Với hai vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

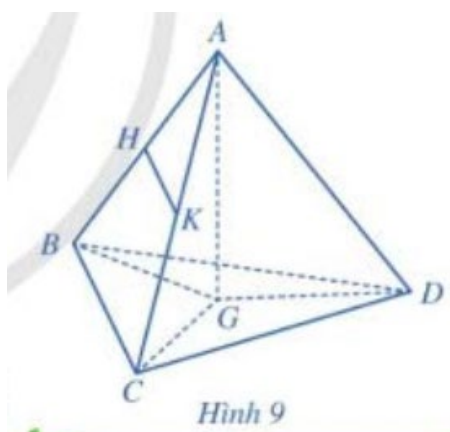
$$1\vec{a} = \vec{a}$$

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC (Hình 9). Chứng minh rằng:

a) $\vec{BC} = 2\vec{HK}$

b) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$.



3. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O tùy ý và vẽ hai vector $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vector $\vec{OA}, \vec{OB}$.

Chú ý: $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\vec{BD}, \vec{B'C}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, ở đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vector bất kì với vector $\vec{0}$ bằng 0.

Chú ý

- Tích vô hướng của hai vector trong không gian có các tính chất sau:

- Với các vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k tùy ý, ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (tính chất giao hoán);}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (tính chất phân phối);}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

$$\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

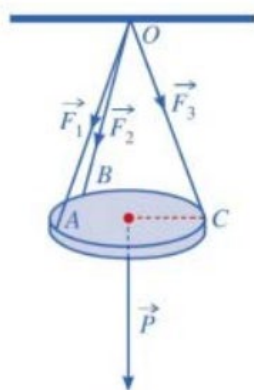
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$.

Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vector $\vec{OM}$ và $\vec{AC}$.

Ví dụ 8. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$ (Hình 14). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



Hình 14

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'}$ bằng vectơ nào dưới đây?

- A. $\vec{A'C}$. B. $\vec{CA'}$. C. $\vec{AC'}$. D. $\vec{C'A}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

- a) $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$; b) $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DB}$.

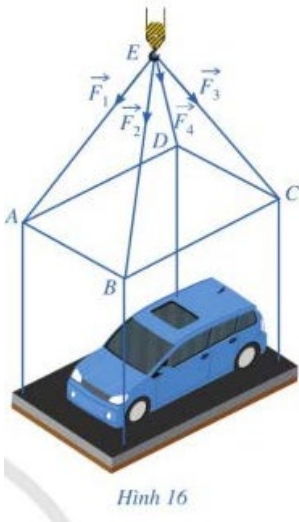
3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính:

- a) $\vec{A'B} \cdot \vec{D'C'}$; $\vec{D'A} \cdot \vec{BC}$; b) Các góc $(\vec{A'D}, \vec{B'C'})$; $(\vec{AD'}, \vec{BD})$

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng $\vec{A'C} = 3\vec{A'G}$.

5. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt có được buộc vào móc E của chiếc cần cầu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng

nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (Hình 16). Chiếc cân cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.



Hình 16

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTOR

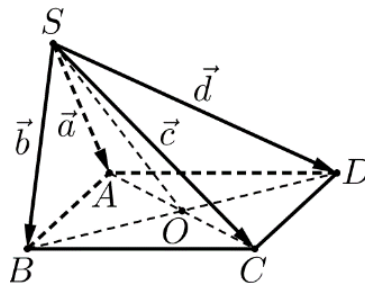
1. Phương pháp

Vận dụng các kiến thức sau.

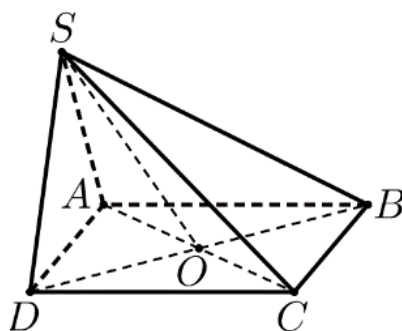
- ☐ Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vector;
- ☐ Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- ☐ Các quy tắc tính toán với vector;
- ☐ Một số hệ thức vector hay dùng;
- ☐ Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đặt $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$, $\vec{SD} = \vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

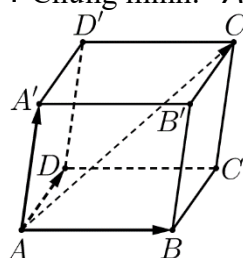


Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\vec{GS} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. Chứng minh: $\vec{GS} = 4\vec{OG}$.



Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian. Chứng minh: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.



Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$.

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTO THEO CÁC VECTO THÀNH PHẦN

1. Phương pháp: Để phân tích một véc tơ theo hệ các véc tơ thành phần thì phải kết hợp hình vẽ với các quy tắc véc tơ, đặc biệt là quy tắc 3 điểm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD .

a) Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 véc tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

a) Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ , chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB \parallel BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTƠ

1. Phương pháp: Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ, công thức tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTƠ GIẢI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.



Hình 2.2

a) Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các lực căng dây?

b) Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Ví dụ 2: Một tòa nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



Hình 2.9

Ví dụ 3: Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vectơ biểu diễn hai lực đó.



Hình 2.15

Ví dụ 4: Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vectơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vectơ đối nhau không? Giải thích vì sao.



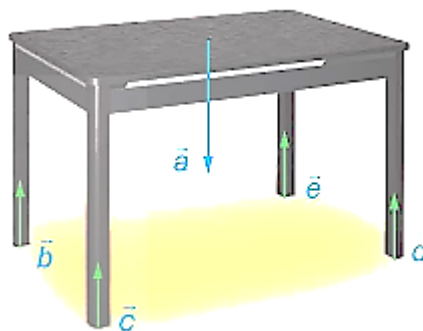
Ví dụ 5: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và cỡ độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h , trong quá trình

tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.20

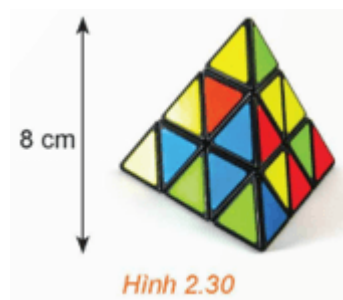
Ví dụ 6: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vector $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).



Hình 2.29

- Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$.
- Giải thích vì sao các vector $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Ví dụ 7. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\vec{AI} = 3\vec{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

Ví dụ 8: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.31

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.

B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_o là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_oG}$.

B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_oG}$.

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$.

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_oG}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.
C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$. D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vector $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD . B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$. D. $N \equiv A$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.

- B.** M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** M là trung điểm BB' . **B.** M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC' . **D.** M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

- A.** Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Câu 17: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. **B.** $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.
C. $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương. **D.** $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 18: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.
B. $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ và $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.
C. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.
D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

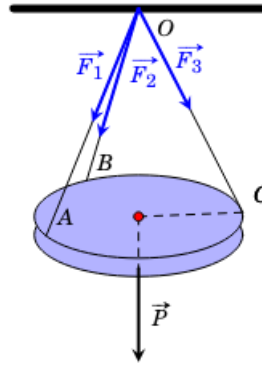
Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.
B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.
C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.
D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'}$ ($k \neq 0$), $\overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}$, $\overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

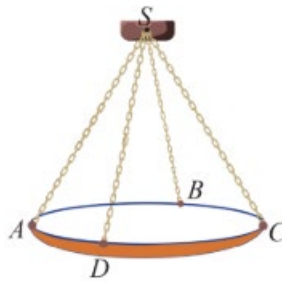
- A.** $x = \frac{2+k}{2-k}, y = -\frac{2}{k}$ **B.** $x = \frac{1+2k}{1-2k}, y = -\frac{1}{2k}$
C. $x = \frac{\frac{1}{2}+k}{2-k}, y = -\frac{1}{2k}$ **D.** $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}$

Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



- A. $14\sqrt{3} \text{ (N)}$. B. $15\sqrt{3} \text{ (N)}$. C. $17\sqrt{3} \text{ (N)}$. D. $16\sqrt{3} \text{ (N)}$.

Câu 22: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- A. $\frac{15\sqrt{3}}{3} \text{ N}$. B. $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$. C. $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$. D. $\frac{30\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

Câu 23: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 24: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 25: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 26: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 27: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** 8. **D.** 124.

Câu 28: Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$. **B.** $\alpha = 30^\circ$. **C.** $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\alpha = 60^\circ$.

Câu 30: $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vector đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u} \cdot \vec{v} (\vec{u} - \vec{v})$.

Câu 31: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $-\frac{119}{169}$. **D.** $\frac{119}{169}$.

Câu 32: Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 75^\circ$. **B.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. **C.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. **D.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Câu 33: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 34: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60° . **B.** 45° . **C.** 120° . **D.** 90° .

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

- A. 120^0 . B. 90^0 . C. 60^0 . D. 45^0 .

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

- A. 45^0 B. 30^0 C. 90^0 D. 60^0

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0^0 . B. 30^0 . C. 90^0 . D. 60^0 .

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

- A. 90^0 . B. 60^0 . C. 30^0 . D. 45^0 .

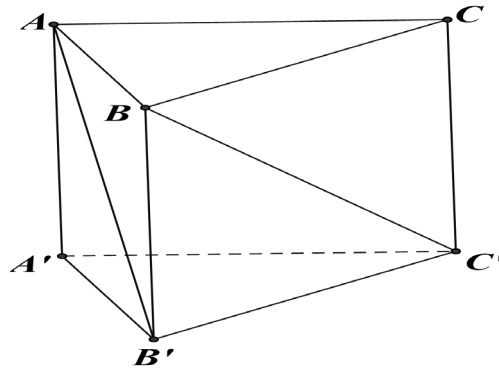
Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

- A. 120^0 . B. 90^0 . C. 60^0 . D. 45^0 .

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

- A. AB và CD chéo nhau B. AB và CD vuông góc với nhau
C. AB và CD đồng phẳng D. AB và CD cắt nhau

Câu 42: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



- A. 60^0 . B. 45^0 . C. 90^0 . D. 30^0 .

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

- A. 90^0 B. 60^0 C. 45^0 D. 120^0

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 46: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

- A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 47: Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

- A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$ B. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$
C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ D. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

- A. $a^2 \sqrt{2}$. B. a^2 . C. $a^2 \sqrt{3}$. D. $\frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2} AD, \widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 50: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$
C. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$
D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'}$.

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 5: Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

D. Chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

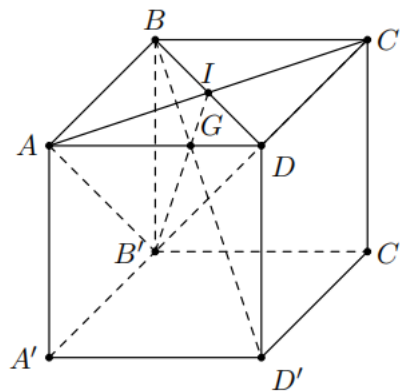
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SO}$

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?



A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.

D. $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

- A.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC . Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

- A.** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$
C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$
D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 10: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là tứ giác ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành ”.		

Câu 11: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
C: “ $k \cdot \vec{a} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng ”.		

Câu 12: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với I là trung điểm đoạn AB và điểm M bất kỳ ”.		
B: “ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm ΔABC và điểm M bất kỳ ”.		
C: “ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và điểm M bất kỳ ”.		
D: “Nếu $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành ”.		

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

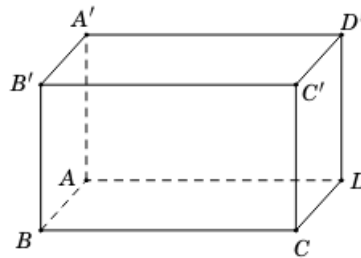
Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BD'}$ ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ ”.		

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$ ”.		
B: “ Góc giữa $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB'})$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$ ”.		
D: “Góc giữa $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'})$ ”.		

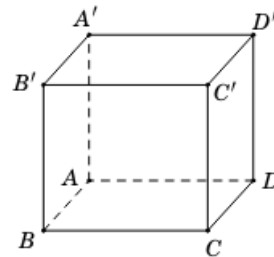
Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$.
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.



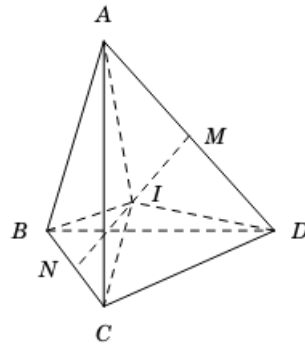
Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.
- $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.
- $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$.
- $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$.



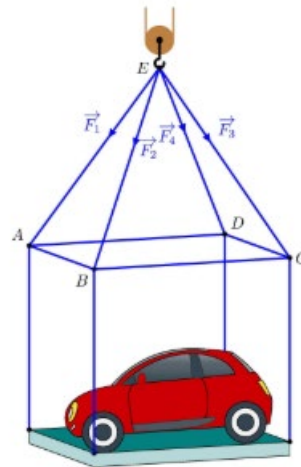
Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.
d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$.
b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.
c) $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 19: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}$.
d) $|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0$.

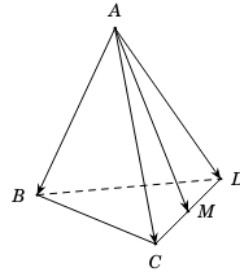
Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$.



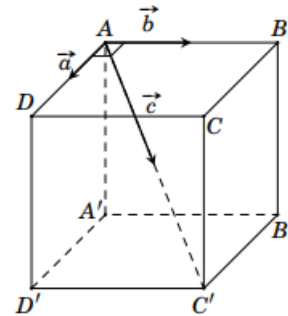
Câu 21: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10N, 10N và 20N.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20(\text{N})$.

c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59(\text{N})$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết ΔABC có cạnh bằng 3. Tìm vector tổng $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'}|$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k.ME^2 + l.a^2$. Tính $k + l$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ \parallel CM$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\frac{m}{n}\vec{a} - \frac{p}{q}\vec{b} + \frac{r}{z}\vec{c}$ (với $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{z}$ là các

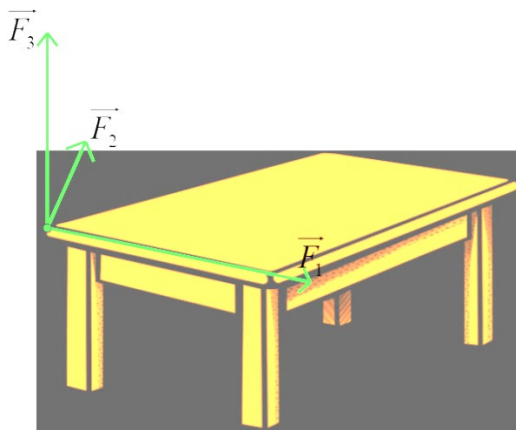
phân số tối giản và $m, n, p, q, r, z \in \mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO .

Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\vec{AC} + \vec{BA'} + k(\vec{DB} + \vec{C'D}) = \vec{0}$?

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\vec{PI} = k(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD})$?

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD' ?

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\vec{AM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ và $\vec{DN} = \vec{DB} + x\vec{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\vec{AB} + \vec{B_1C_1} + \vec{DD_1} = k\vec{AC_1}$?

- Câu 16:** Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + (2k - 1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$?
- Câu 17:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m, n thỏa mãn $\overrightarrow{MA'} = m\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NC'} = n\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m + n$ bằng bao nhiêu?
- Câu 18:** Trong không gian cho các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x - y)\vec{a} + (y - z)\vec{b} = (x + z - 2)\vec{c}$. Tính $x + y + z$?
- Câu 19:** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.
- Câu 20:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.
- Câu 21:** Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

CHƯƠNG II: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN VECTO TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. KHÁI NIỆM VECTO TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như trong mặt phẳng, ta có khái niệm vectơ trong không gian:

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Chú ý

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A , điểm cuối là B thì ta có một vectơ, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB ".

Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ, vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

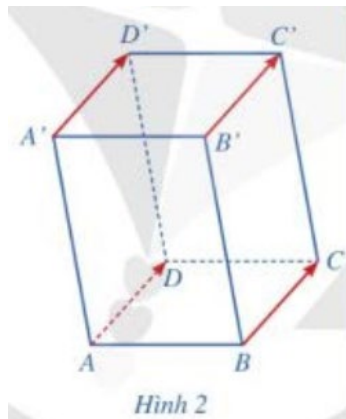
Các khái niệm có liên quan đến vectơ trong không gian như: giá của vectơ, độ dài của vectơ, vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng, vectơ-không, hai vectơ bằng nhau, hai vectơ đối nhau, ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;

b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



Hình 2

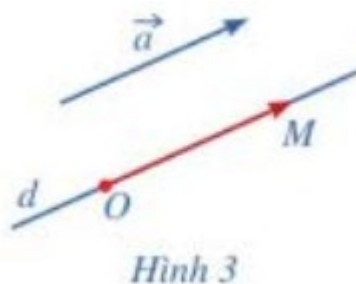
a) Do các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'D'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $AD = BC = B'C' = A'D'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$.

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'D'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$.

b) Do các vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{D'A'}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $AD = CB = C'B' = D'A'$

Chú ý: Cho điểm O và vectơ $\vec{a}$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm M trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

Để xác định điểm M , ta làm như sau (Hình 3):



Hình 3

Qua O kẻ đường thẳng d song song hoặc trùng với giá của vector $\vec{a}$.

Lấy điểm M trên đường thẳng d sao cho hai vector $\overrightarrow{OM}$, $\vec{a}$ là cùng hướng và độ dài đoạn thẳng OM bằng độ dài vector $\vec{a}$.

II. CÁC PHÉP TOÁN VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Tổng và hiệu của hai vector trong không gian

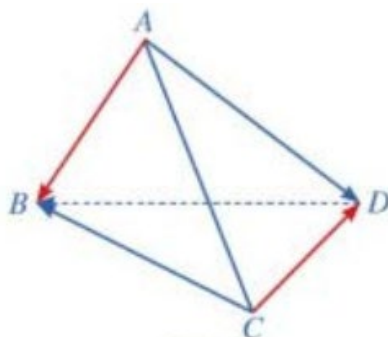
- Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vector $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Chú ý

- Phép lấy tổng của hai vector còn được gọi là phép cộng vector.
- Phép cộng vector trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vector trong mặt phẳng, chẳng hạn: Phép cộng vector trong không gian cũng có các tính chất giao hoán, kết hợp, cộng với vector-không.
- Khi thực hiện phép cộng vector trong không gian, ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vector trong mặt phẳng.
- Đối với vector trong không gian, ta cũng có các quy tắc sau:
 - + Với ba điểm A, B, C trong không gian, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm);
 - + Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành).

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải



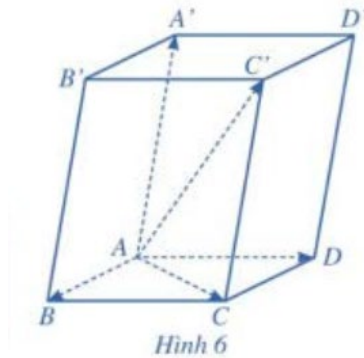
Hình 5

Theo quy tắc ba điểm, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

-Nếu $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp)

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 6). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$



Lời giải

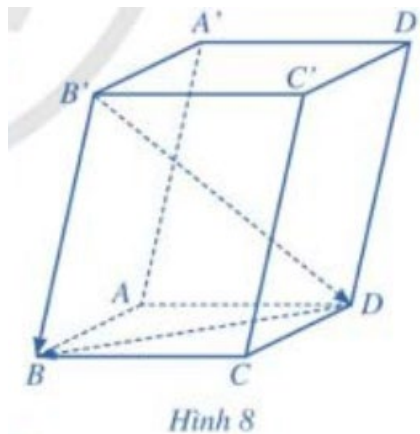
Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$. Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$. Hiệu của vector $\vec{a}$ và vector $\vec{b}$ là tổng của vector $\vec{a}$ và vector đối của vector $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vector còn được gọi là phép trừ vector.

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 8). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'B} + (-\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D}$$

Đối với vector trong không gian, ta có quy tắc sau:

- Với ba điểm O, A, B trong không gian, ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ (Quy tắc hiệu).

2. Tích của một số với một vector trong không gian

Tương tự như trong mặt phẳng, trong không gian ta cũng có định nghĩa sau:

Cho số thực $k \neq 0$ và vector $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vector $\vec{a}$ là một vector, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}, k\vec{0} = \vec{0}$. Do đó, $k\vec{a} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

Chú ý

- Phép lấy tích của một số với một vector gọi là phép nhân một số với một vector.
- Phép nhân một số với một vector trong không gian có các tính chất sau:
- Với hai vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực h, k ta có:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$$

$$(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

$$h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$$

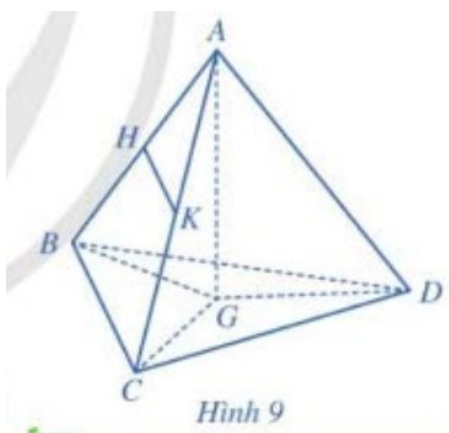
$$1\vec{a} = \vec{a}$$

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC (Hình 9). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Lời giải

a) Do HK là đường trung bình của tam giác ABC nên $BC \parallel HK$ và $BC = 2HK$. Suy ra $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\overrightarrow{HK}$ và $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{HK}|$. Vậy $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Do đó, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

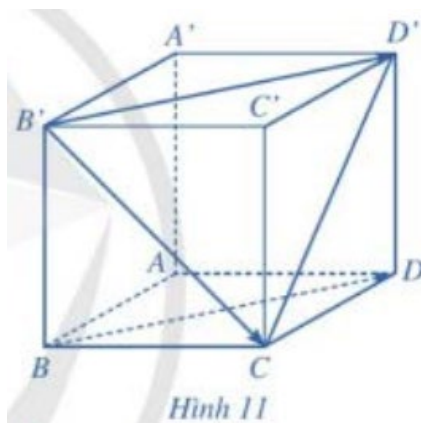
3. Tích vô hướng của hai vector trong không gian

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O tùy ý và vẽ hai vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ trong không gian, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$, là góc giữa hai vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

Chú ý: $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.

Lời giải



Hình 11

Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$. Do đó, $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}) = (\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'C}) = \widehat{D'B'C}$.

Vì $B'C = CD' = D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{D'B'C} = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}) = 60^\circ$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Trong không gian, cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, là một số thực được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, ở đó $(\vec{a}, \vec{b})$ là góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.

Quy ước: Tích vô hướng của một vector bất kì với vector $\vec{0}$ bằng 0.

Chú ý

- Tích vô hướng của hai vector trong không gian có các tính chất sau:

- Với các vector bất kì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k tùy ý, ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (tính chất giao hoán);}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (tính chất phân phối);}$$

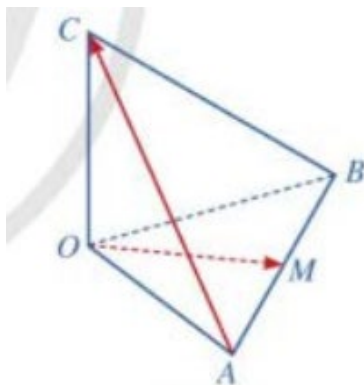
$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

$$\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vector khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



Hình 13

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có: $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$.

Mặt khác, do $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$

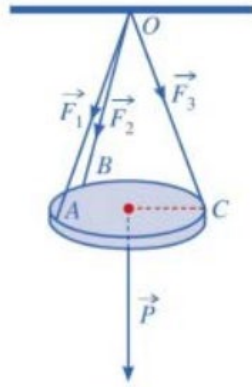
nên $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{a}) = -\frac{1}{2}$.

Ta lại có: $|\overrightarrow{OM}| = OM = \frac{\sqrt{2}}{2}; |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$.

Do đó, $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$.

Vậy $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AC}) = 120^\circ$.

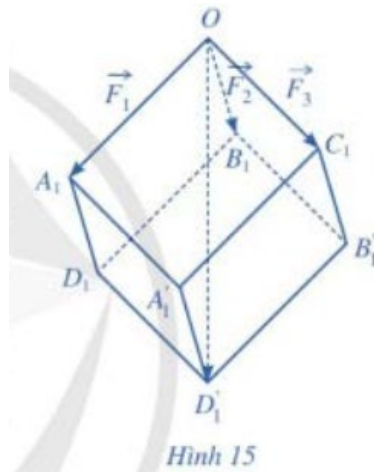
Ví dụ 8. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N) (Hình 14). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



Hình 14

Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}$,
 $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 , sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (Hình 15).
 Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1}$.



Hình 15

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 15 \text{ (N)}$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$. Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD_1}| = 15\sqrt{3} \text{ (N)}$.

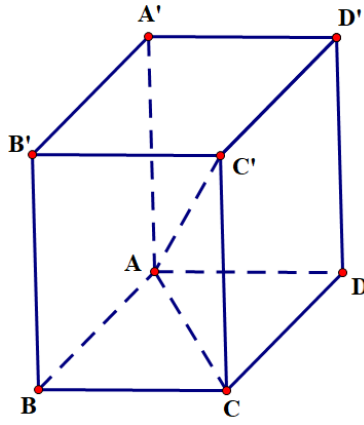
B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vecto $\vec{u} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ bằng vecto nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{A'C}$. B. $\overrightarrow{CA'}$. C. $\overrightarrow{AC'}$. D. $\overrightarrow{C'A}$.

Lời giải

Chọn A

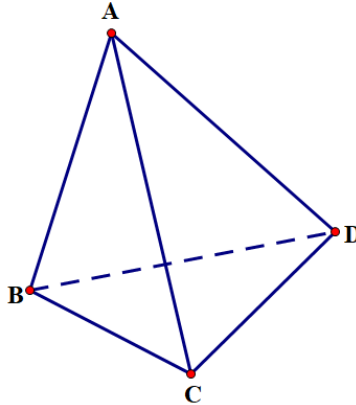


Áp dụng quy tắc hình hộp ta thấy $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'} = \vec{A'C}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

- a) $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$; b) $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DB}$.

Lời giải



- a) Theo quy tắc ba điểm ta có $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$.

$$\text{Do đó } \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{BD} = \vec{AD} + (\vec{BD} + \vec{DC}) = \vec{AD} + \vec{BC}$$

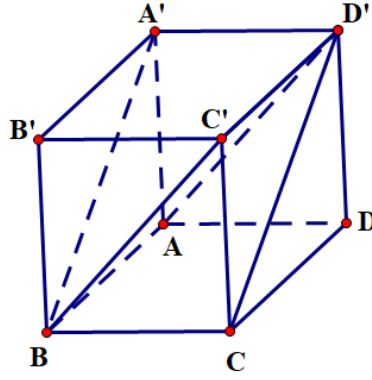
- b) Theo quy tắc ba điểm ta có $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.

$$\text{Do đó } \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + (-\vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{DC} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{DC} = \vec{AC} + (\vec{DC} + \vec{CB}) = \vec{AC} + \vec{DB}$$

3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính:

- a) $\vec{A'B} \cdot \vec{D'C'}$; $\vec{D'A} \cdot \vec{BC}$; b) Các góc $(\vec{A'D}, \vec{B'C'})$; $(\vec{AD'}, \vec{BD})$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{D'C}$. Do đó $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{D'C'}) = (\overrightarrow{D'C}, \overrightarrow{D'C'}) = \widehat{CD'C'}$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $CDD'C'$ là hình vuông. Suy ra $\widehat{C'D'C'} = 45^\circ$. Vậy $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{D'C'}) = 45^\circ$.

Ta có $|\overrightarrow{A'B}| = A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{D'C'}| = D'C' = a$.

Do đó $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C'} = |\overrightarrow{A'B}| \cdot |\overrightarrow{D'C'}| \cdot \cos(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{D'C'}) = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$

Ta có $\overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{C'B}$. Do đó $(\overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBC'}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $CBB'C'$ là hình vuông. Suy ra $\widehat{CBC'} = 45^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$

Ta có $|\overrightarrow{D'A}| = D'A = \sqrt{DD'^2 + DA^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $|\overrightarrow{BC}| = BC = a$.

Do đó $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{D'A}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{D'A}, \overrightarrow{BC}) = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

b) Ta có $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{B'C}$. Do đó $(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{B'C'}) = \widehat{CB'C'}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $CBB'C'$ là hình vuông. Suy ra $\widehat{CB'C'} = 45^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'}) = 45^\circ$.

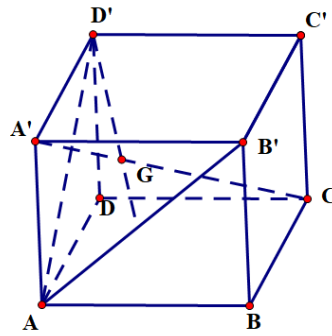
Ta có $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'}$. Do đó $(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{C'BD}$.

Ta tính được $BC' = BD = C'D = a\sqrt{2}$ nên tam giác $C'BD$ là tam giác đều. Suy ra $\widehat{C'BD} = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

Lời giải

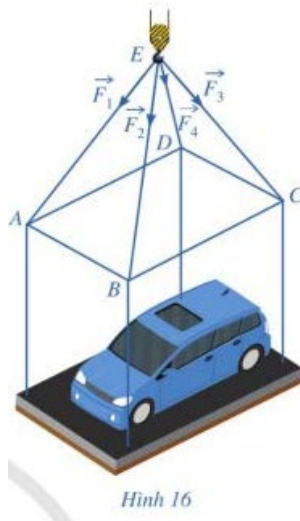


Vì G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$ nên với điểm A' ta luôn có: $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'})$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'C}$ (quy tắc hình hộp).

Từ đó suy ra $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$. Vậy $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$.

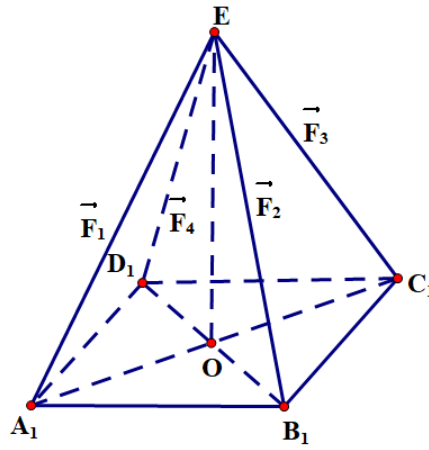
5. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt có được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° (Hình 16). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_3}; \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.



Hình 16

Lời giải

Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{EA_1} = \overrightarrow{F_1}$; $\overrightarrow{EB_1} = \overrightarrow{F_2}$; $\overrightarrow{EC_1} = \overrightarrow{F_3}$; $\overrightarrow{ED_1} = \overrightarrow{F_4}$.



Vì EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° nên EA_1, EB_1, EC_1, ED_1 bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$ một góc bằng 60° .

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $A_1B_1C_1D_1$ cũng là hình chữ nhật.

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $A_1B_1C_1D_1$. Ta suy ra $EO \perp (A_1B_1C_1D_1)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng EA_1 và mặt phẳng $A_1B_1C_1D_1$ bằng góc $\widehat{EA_1O}$. Suy ra $\widehat{EA_1O} = 60^\circ$.

Ta có $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = 4700N$ nên $EA_1 = EB_1 = EC_1 = ED_1 = 4700$.

Tam giác EOA_1 vuông tại O nên $EO = EA_1 \cdot \sin \widehat{EA_1O} = 4700 \cdot \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}$.

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\vec{EA_1} = \vec{EO} + \vec{OA_1}$; $\vec{EB_1} = \vec{EO} + \vec{OB_1}$; $\vec{EC_1} = \vec{EO} + \vec{OC_1}$; $\vec{ED_1} = \vec{EO} + \vec{OD_1}$.

Vì O là trung điểm của A_1C_1 và B_1D_1 nên $\vec{OA_1} + \vec{OC_1} = \vec{0}$; $\vec{OB_1} + \vec{OD_1} = \vec{0}$.

Từ đó suy ra $\vec{EA_1} + \vec{EB_1} + \vec{EC_1} + \vec{ED_1} = 4\vec{EO}$.

Do đó, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 4\vec{EO}$. Vì chiếc khung sắt chứa xe ô tô ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên khung sắt chứa xe ô tô. Suy ra trọng lượng của khung sắt chứa chiếc xe ô tô là $|\vec{P}| = 4|\vec{EO}| = 4 \cdot 2350\sqrt{3} = 9400\sqrt{3} (N)$.

Vì trọng lượng của khung sắt là 3 000 N nên trọng lượng của chiếc xe ô tô là $9400\sqrt{3} - 3000 \approx 13\,281 (N)$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTOR

1. Phương pháp

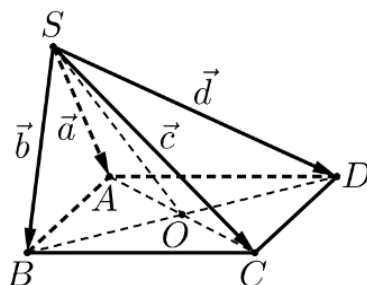
Vận dụng các kiến thức sau.

- ☐ Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vector;
- ☐ Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- ☐ Các quy tắc tính toán với vector;
- ☐ Một số hệ thức vector hay dùng;

□ Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

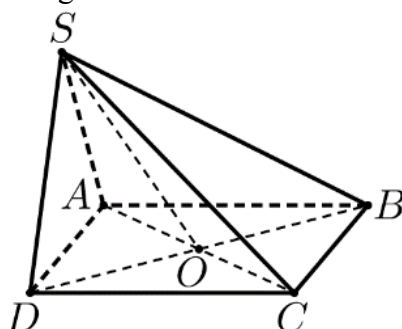


Lời giải

Vì O là trung điểm của AC và BD nên
$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ hay $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})}_{=\vec{0}} = \vec{0} \quad (\text{do } O \text{ là tâm hình bình hành})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}.$$

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian.

Chứng minh: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$

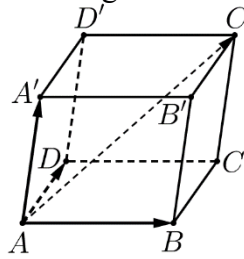
Lời giải

Do G là trọng tâm tứ diện nên ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}, \quad \forall M$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}).$$

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

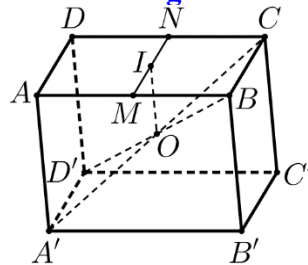


Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}) + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$: luôn đúng

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$.

Lời giải



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD .

Suy ra I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'} \right) = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'})$$

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$$

Cộng các đẳng thức theo vế ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG}$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

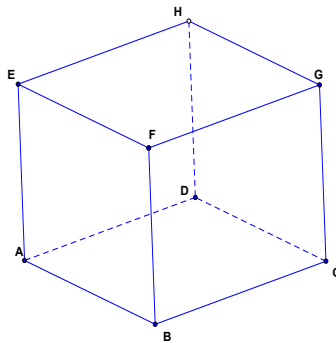
suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) = \overrightarrow{AD}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GB}) = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ THÀNH PHẦN

1. Phương pháp: Để phân tích một véc tơ theo hệ các véc tơ thành phần thì phải kết hợp hình vẽ với các quy tắc véc tơ, đặc biệt là quy tắc 3 điểm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD .

a) Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

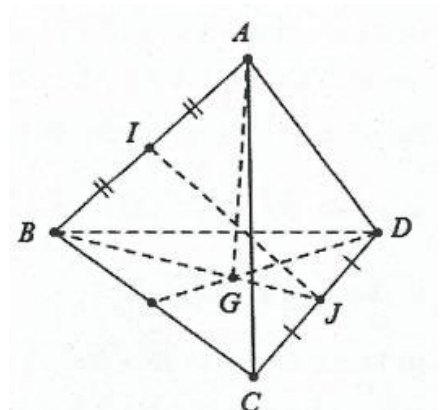
b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Hãy biểu diễn véc tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ})$, mặt khác $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \text{ (tính chất trung điểm)}$$

Do đó: $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.



b) Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} \end{cases}$$
 cộng theo vế ta được:

$$3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$$

Mặt khác $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (do G là trọng tâm tam giác ABC). Do vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{3}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$.

a) Hãy biểu diễn vecto $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ , chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$ (1).

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ (2).

Mặt khác: $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD} = \vec{0}$; $\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

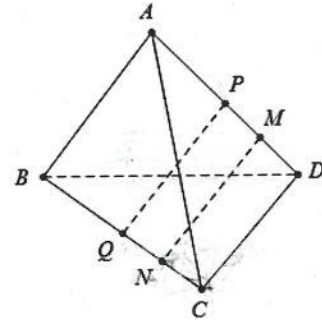
Lấy (2) + 3.(1) ta được $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

b) Theo tính chất trung điểm ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ})$$

Mặt khác $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.



Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB \parallel BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

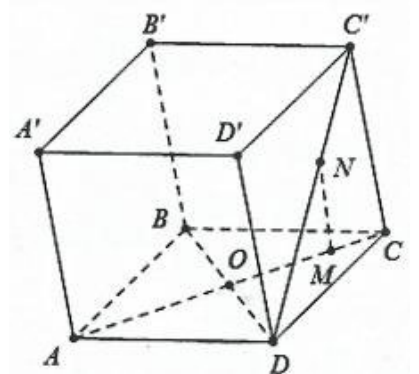
Lời giải

Giả sử: $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D'}$.

Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D'} \\ &= n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \vec{b} + m(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD}) \\ &= n(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} + m(-\vec{b} + \vec{a}) = (m-n)\vec{a} + (1-m)\vec{b} + n\vec{c} \end{aligned}$$

Khi đó $MN \parallel BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'}$



$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{B'D'} = k = \frac{1}{3}.$$

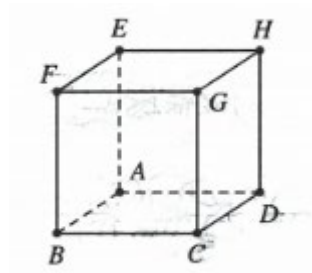
DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Phương pháp: Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ, công thức tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Lời giải

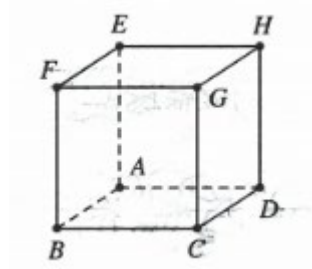


Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông)

Nên $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DH})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE})} = \widehat{BAE} = 90^\circ$ ($ABFE$ là hình vuông).

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Lời giải

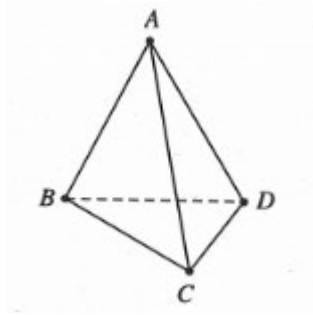


Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình vuông)

Nên $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EG})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} = \widehat{BAC} = 45^\circ$ ($ABCD$ là hình vuông).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Lời giải

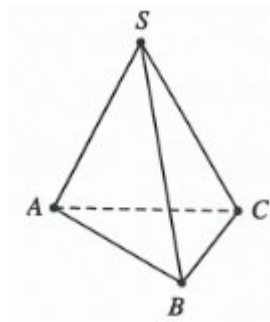


$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ.\end{aligned}$$

$$\text{Mà } AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 90^\circ.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Lời giải



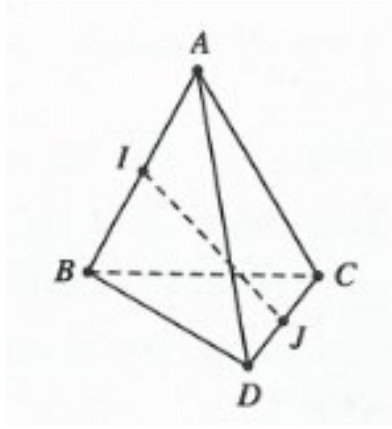
$$\begin{aligned}\text{Ta có } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} \\ &= |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SB}) - |\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{SA}| \cos(\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{SA}) \\ &= SC \cdot SB \cdot \cos \widehat{BSC} - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC}.\end{aligned}$$

$$\text{Mà } SA = SB = SC \text{ và } \widehat{BSC} = \widehat{ASC} \longrightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}) = 90^\circ.$$

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Lời giải



Xét tam giác ICD có J là trung điểm

$$CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

Tam giác ABC có $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAC} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow CI \perp AB$

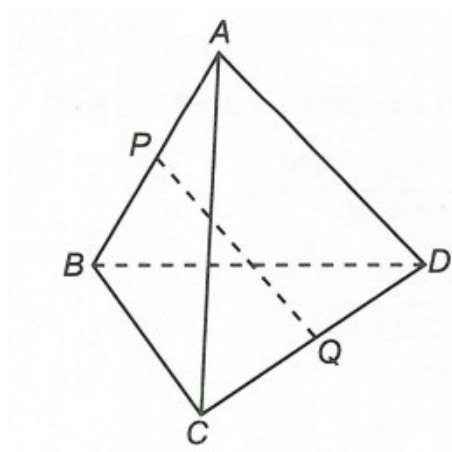
Tương tự ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{IJ}) = 90^\circ$$

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

Lời giải



Vì $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0; \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$

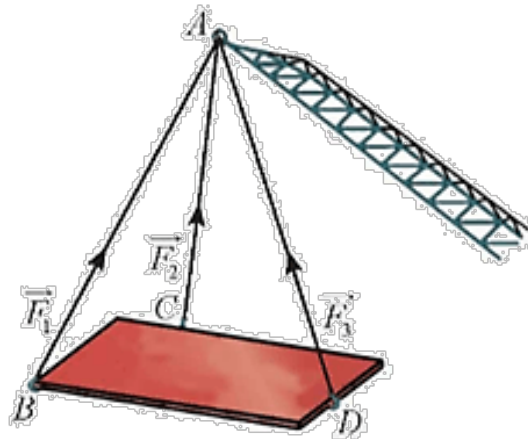
$$\text{Do đó } 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Hay $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vậy $AB \perp PQ$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTƠ GIẢI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong Hình 4, cho biết ba vector $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biểu diễn lực căng của các sợi dây cáp AB, AC, AD tác dụng lên vật nặng. Giá của ba vector này có cùng nằm trên một mặt phẳng không?



Hình 4

Lời giải

Giá của ba vector này lần lượt là ba đường thẳng AB, AC, AD . Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Ví dụ 2: Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

trong đó $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vector lực (N)



Hình 20

Hình 20 tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

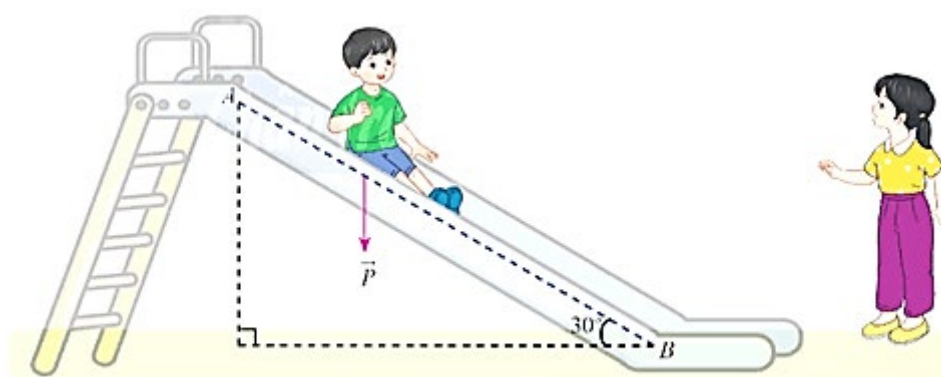
Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5 \cdot 50 = 25 \text{ (N)}$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đã có độ lớn là 25 N.

Ví dụ 3: Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình 27).

a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

b) Cho biết công $A \text{ (J)}$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

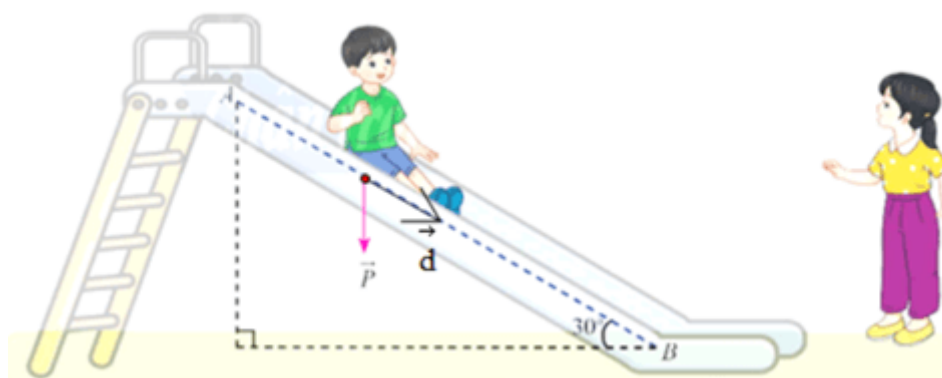


Hình 27

Lời giải

a) Ta có $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 25 \cdot 9,8 = 245 \text{ N}$.

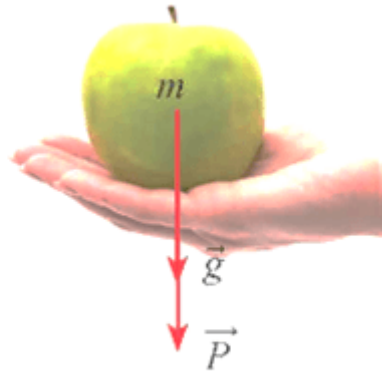
b)



Theo đề ta có $A = \vec{P} \cdot \vec{d}, (\vec{P}, \vec{d}) = 60^\circ$

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 245 \cdot 3,5 \cdot \cos 60^\circ \approx 428,75 \text{ J}$$

Ví dụ 4: Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 28).



Hình 28

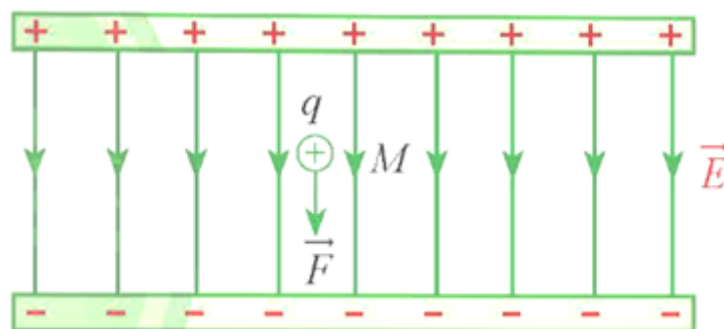
Lời giải

Đổi 102 gam = 0,102 kg.

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo là:

$$|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 0,102 \cdot 9,8 = 0,9996 \text{ N}$$

Ví dụ 5: Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} \text{ C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 \text{ N/C}$ (Hình 29).

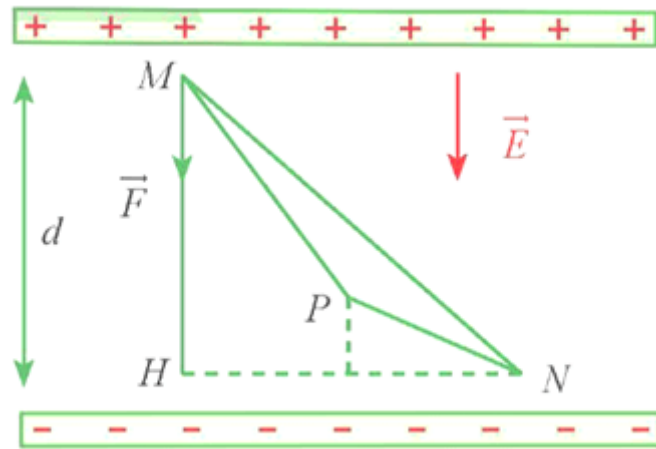


Hình 29

Lời giải

Độ lớn của lực tĩnh điện là $|\vec{F}| = q \cdot |\vec{E}| = 10^{-9} \cdot 10^5 = 10^{-4} \text{ N}$.

Ví dụ 6: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình 30). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$, vector điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ và $d = MH = 5 \text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Hình 30

Lời giải

Đổi $5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

Công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ là $A = qEd = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,8 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 18 \cdot 10^{-10} \text{ (J)}$.

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

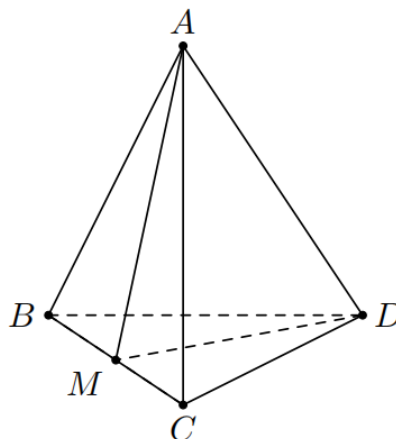
B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi M là trung điểm của $CD \rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

$$\begin{aligned}
+ \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).
\end{aligned}$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.

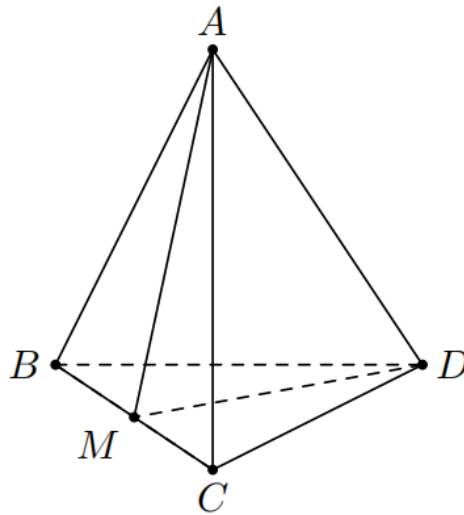
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$.

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì M là trung điểm của $BC \rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}
+ \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})
\end{aligned}$$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.

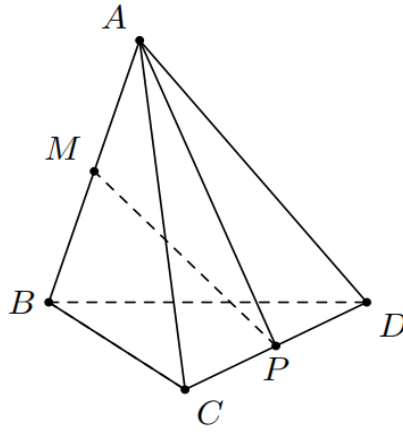
B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$.

Lời giải

Chọn D



+ Vì M, P lần lượt là trung điểm của $AB, CD \rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP} \end{cases}$

+ $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_o là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD) . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_oG}$.

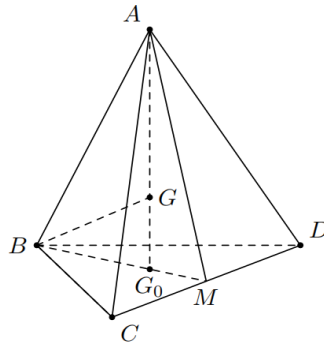
B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_oG}$.

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$.

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_oG}$.

Lời giải

Chọn C



+ Vì G_o là giao điểm của AG và mặt phẳng (BCD)

$\rightarrow G_o$ là trọng tâm tam giác BCD .

$\rightarrow \overrightarrow{G_oB} + \overrightarrow{G_oC} + \overrightarrow{G_oD} = \vec{0}$.

+ Mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_o} + \overrightarrow{G_oB} + \overrightarrow{G_oC} + \overrightarrow{G_oD} = \vec{0}$

$\rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_o} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

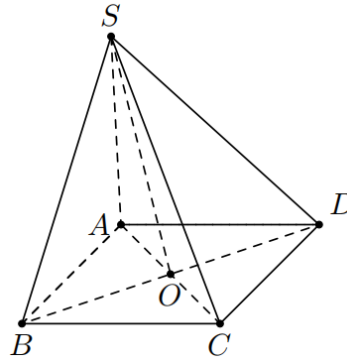
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} = \vec{a} + \vec{c} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} = \vec{b} + \vec{d} \end{cases}$$

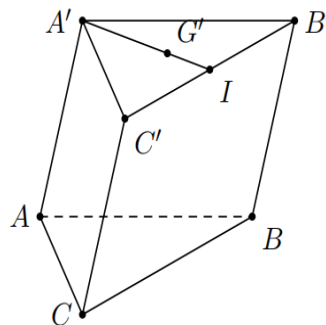
$$\rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

- A.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. **B.** $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **C.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. **D.** $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi I là trung điểm $B'C'$.

$$+ \text{ Vì } G' \text{ là trọng tâm tam giác } A'B'C' \rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A'I}.$$

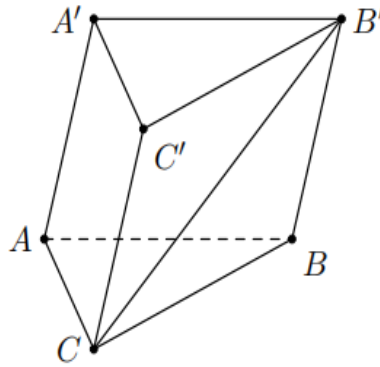
$$\begin{aligned} + \overrightarrow{AG'} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3} \overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}) \\ &= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}). \end{aligned}$$

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

- A.** $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



+ Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên
 $\rightarrow \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$
 $= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
 $= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}.$

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}.$

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}.$

Lời giải

Chọn C

+ Vì M là trung điểm $BB' \rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}.$

$$+ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

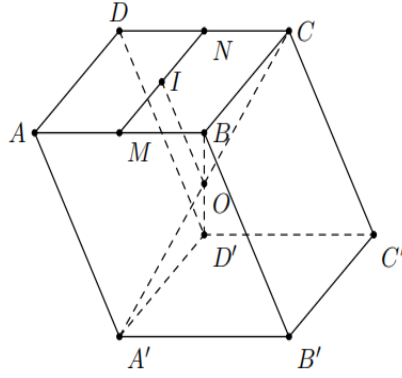
B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}).$

Lời giải

Chọn A



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$$

+ Vì I là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

$$\begin{aligned} \rightarrow 2\overrightarrow{OI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}). \end{aligned}$$

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **C.** $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

Lời giải

Chọn C

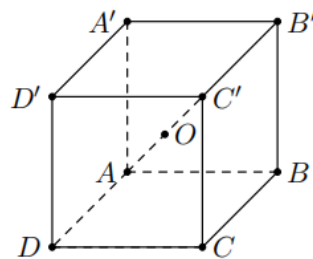
$$+ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \leftrightarrow \vec{d} = \vec{c} - \vec{b} \leftrightarrow \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}.$$

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. **B.** $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. **D.** $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

Lời giải

Chọn B



$$+ \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$

$$+ O \text{ là trung điểm } AC' \rightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}).$$

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

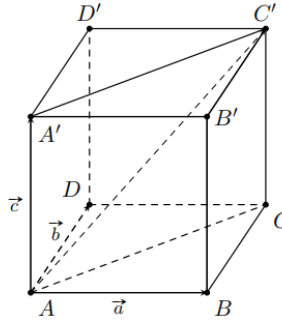
B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD .

B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$.

D. $N \equiv A$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DC}$.

$\rightarrow N$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Chọn C

+ Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D' \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = 4\overrightarrow{MO'} \end{cases}$

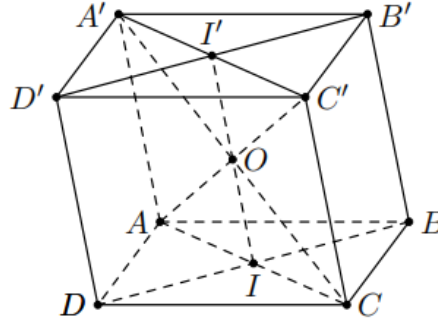
$\rightarrow 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0} \rightarrow M$ là trung điểm của OO' .

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm BB' .
 B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
 C. M là trung điểm CC' .
 D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.
 $\rightarrow O$ là trung điểm II' .
 $+ \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{MB}$.
 $\rightarrow M$ là trung điểm BB' .

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng?

- A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m + n + p \neq 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 D. Giá của $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng qui.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $m = n = p = 0$ ta luôn có $m + n + p = 0$ và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
 + Xét $m + n + p \neq 0$ thì chắc chắn có một trong ba số m, n, p khác 0.

Giả sử $m \neq 0 \rightarrow m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c} \rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 17: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.
 B. $\vec{x}, \vec{a}$ cùng phương.
 C. $\vec{x}, \vec{b}$ cùng phương.
 D. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A

+ Giả sử ba vector $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi đó $\rightarrow x = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} + \vec{b} = m\vec{a} - (m+3n)\vec{b} - (m+2n)\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m+3n = -1 \\ m+2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 18: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ và $\vec{y} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ và $\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ và $\vec{z} = -\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A

+ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m, n : \vec{x} = m\vec{y} + n\vec{z}$.

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \\ \vec{y} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c} \\ \vec{z} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 6\vec{c} \end{cases} \rightarrow \vec{x} = \frac{4}{3}\vec{y} + \frac{5}{3}\vec{z} \rightarrow \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ đồng phẳng.}$$

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vector đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vector đó cùng phương.

C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vector $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Chọn D

+ Giả sử cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$ khi đó:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{AM} \text{ không đồng phẳng với } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}.$$

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB'} (k \neq 0), \overrightarrow{NB} = x\overrightarrow{NC'}, \overrightarrow{PC} = y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x, y theo k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

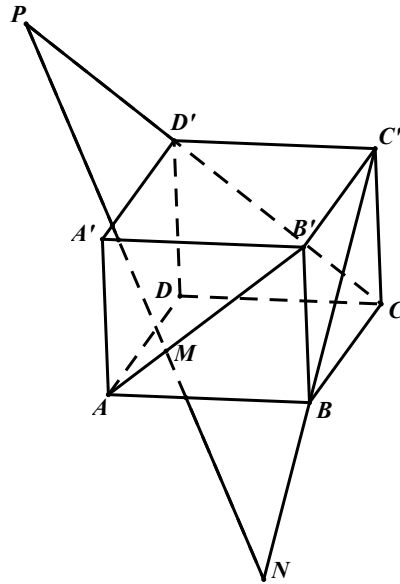
A. $x = \frac{2+k}{2-k}, y = -\frac{2}{k}$

B. $x = \frac{1+2k}{1-2k}, y = -\frac{1}{2k}$

C. $x = \frac{\frac{1}{2}+k}{2-k}, y = -\frac{1}{2k}$

D. $x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}$

Lời giải



Chọn D

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{b} + \vec{c})$ (1), $\overrightarrow{AN} = \vec{b} + \frac{x}{x-1}(\vec{a} + \vec{c})$ (2)

, $\overrightarrow{AP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{y}{y-1}(\vec{c} - \vec{b})$ (3).

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{x}{x-1}\vec{a} - \frac{1}{k-1}\vec{b} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c} + \left(\frac{x}{x-1} - \frac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

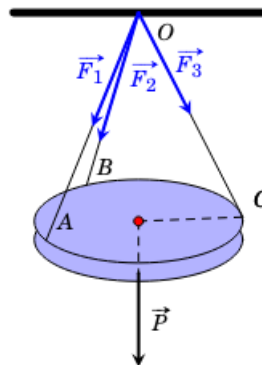
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \left(\frac{y}{y-1} + \frac{1}{k-1}\right)\vec{b} + \left(\frac{y}{y-1} - \frac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{MP}$ (*).

Thay các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ vào (*) và lưu ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được

$$x = \frac{1+k}{1-k}, y = -\frac{1}{k}.$$

Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



A. $14\sqrt{3}(\text{N})$.

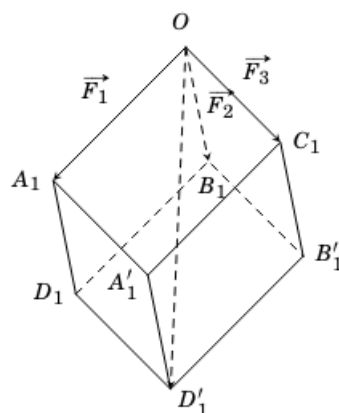
B. $15\sqrt{3}(\text{N})$.

C. $17\sqrt{3}(\text{N})$.

D. $16\sqrt{3}(\text{N})$.

Lời giải

Chọn B



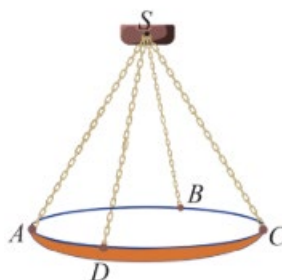
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB_1} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD'_1}.$$

Mặt khác, do các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\text{N})$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thể hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD'_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD'_1}| = 15\sqrt{3}(\text{N})$

Câu 22: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\text{kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



A. $\frac{15\sqrt{3}}{3}\text{N}$.

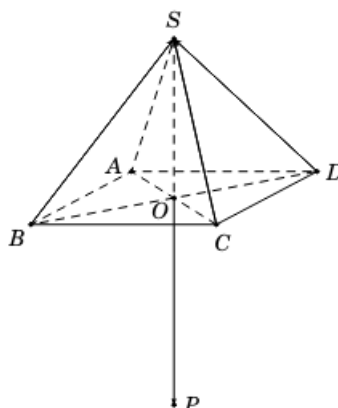
B. $\frac{20\sqrt{3}}{3}\text{N}$.

C. $\frac{25\sqrt{3}}{3}\text{N}$.

D. $\frac{30\sqrt{3}}{3}\text{N}$.

Lời giải

Chọn D



- Ta có $\vec{P} = m\vec{g}$ nên $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 5 \cdot 10 = 50 \text{ N}$.

Vậy độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là 50 N.

- Gọi O là trọng tâm của chiếc đèn chùm cũng là chân đường cao hình chóp đều $S \cdot ABCD$. Vẽ $\overrightarrow{OP}$ biểu diễn trọng lực tác động lên đèn chùm với

$OP \perp (ABCD)$.

Khi đó lực căng mỗi sợi xích sẽ là $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$.

Chiếc đèn chùm đứng yên nên $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Câu 23: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 24: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

Câu 25: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ

$\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

Câu 26: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông

góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 180^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b} \right) (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$$
$$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

Câu 27: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. Độ dài vector $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{24}$.

C. 8.

D. 124.

Lời giải

Chọn B

$$(3\vec{a} + 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 + 90 + 25 = 124.$$

$$\Rightarrow |3\vec{a} + 5\vec{b}| = \sqrt{124}$$

Câu 28: Cho $\vec{a}, \vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+ Vì $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vector $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ nên:

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{a}^2 - 8\vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-5\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2}{6}.$$

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$. Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3a^2}{6}$

$$+ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\frac{3a^2}{6}}{a^2} = \frac{1}{2}.$$

Câu 29: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

B. $\alpha = 30^\circ$.

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

D. $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{8}.$$

Câu 30: $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

B. $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

C. $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$.

D. $4\vec{u} \cdot \vec{v} (\vec{u} - \vec{v})$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = (\vec{u} + 2\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Câu 31: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$.

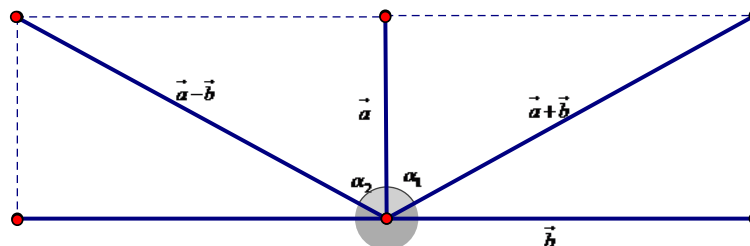
B. $\frac{5}{12}$.

C. $-\frac{119}{169}$.

D. $\frac{119}{169}$.

Lời giải

Chọn C



Nhận thấy $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ suy ra $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\text{Mặt khác: } \cos(\alpha_2) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha_2 = \cos^{-1} \frac{5}{13}.$$

Do đó góc giữa hai vector $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 = 2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}}) = \cos\left(2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}\right) = -\frac{119}{169}.$$

Câu 32: Cho $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ và $\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 75^\circ$. **B.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. **C.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. **D.** $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \\ (\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7|\vec{a}|^2 - 15|\vec{b}|^2 = -16\vec{a} \cdot \vec{b} \\ 7|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2 = 30\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó, ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

Câu 33: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; \vec{a} \cdot \vec{b} = 10$. Xét hai vector $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$, . Gọi α là góc giữa hai vector $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

- A.** $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2(\vec{b})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 4.$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x})^2} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + 4(\vec{b})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{5}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{4}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

Câu 34: Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28; |\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vector $\vec{a} - \vec{b}$ bằng?

- A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.

Lời giải

Chọn B

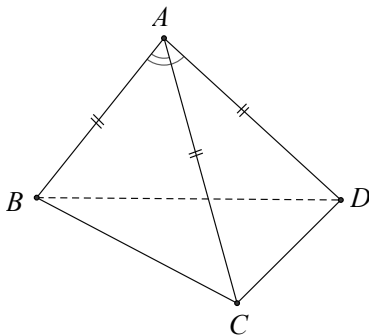
$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - (\vec{a} + \vec{b})^2 \\ &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2(26^2 + 28^2) - 48^2 = 616 \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{616}. \end{aligned}$$

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 90° .

Lời giải

Chọn D



Ta có

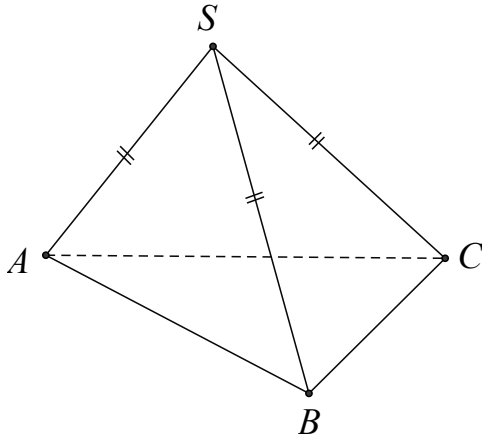
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= 90^\circ \end{aligned}$$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

- A. 120° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \\ &= SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = 0 \\ \Rightarrow (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) &= 90^\circ\end{aligned}$$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45°

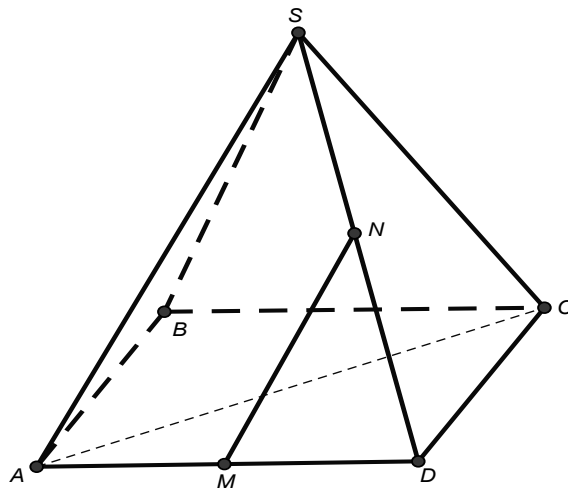
B. 30°

C. 90°

D. 60°

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S .

Khi đó: $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}) = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = 90^\circ$

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0° .

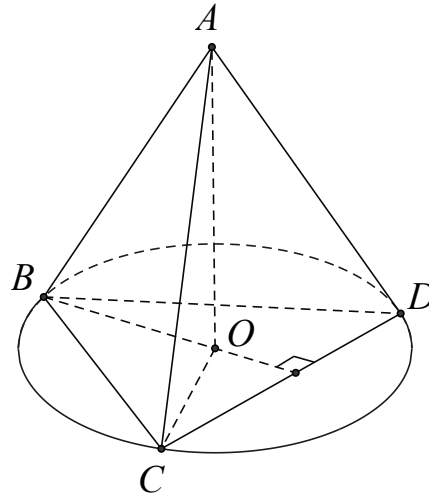
B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD}$

$$= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = CO \cdot CD \cdot \cos 30^\circ - CA \cdot CD \cdot \cos 60^\circ$$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Góc giữa PQ và AB là?

A. 90° .

B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$$

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. 120° .

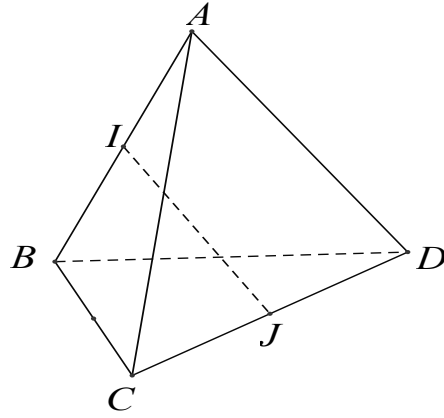
B. 90° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

$$\text{Xét } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90° .

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau

B. AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng

D. AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B

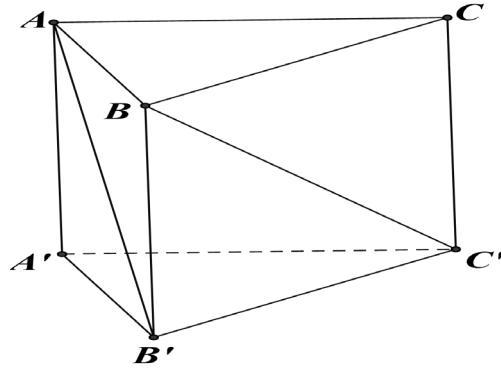
Đặt $AB = AD = AC = a$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ - |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60° .

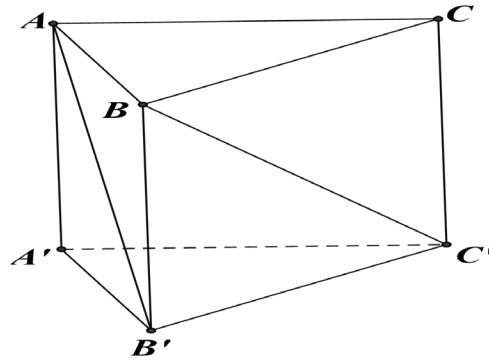
B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{AB', BC'}) = 60^\circ.$$

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a . Gọi M là trung điểm AD . Giá trị $\overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$.

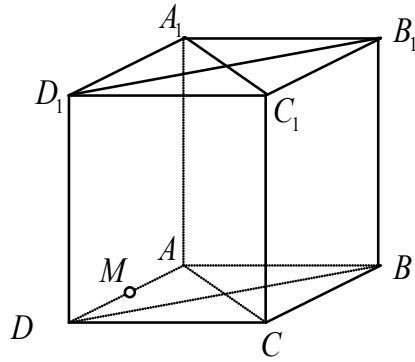
B. a^2 .

C. $\frac{3}{4}a^2$.

D. $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A

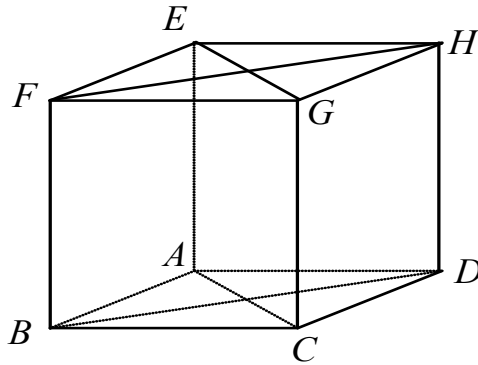


$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } \overrightarrow{B_1M} \cdot \overrightarrow{B_1D_1} &= (\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}) \\
 &= \overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} \\
 &= \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

- Câu 44:** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?
A. 90° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 120°

Lời giải

Chọn C



Ta có: $EG \parallel AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

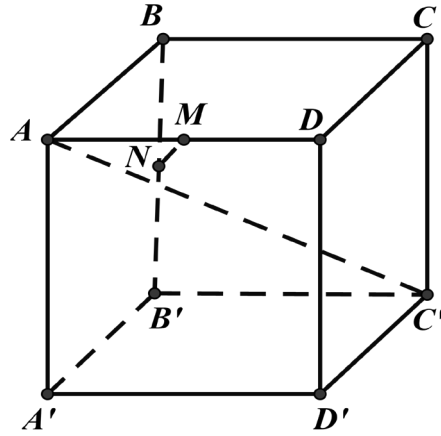
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$$

- Câu 45:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD , BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

- A.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

* Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$ $\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

$$\cos(MN; AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Câu 46: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$.

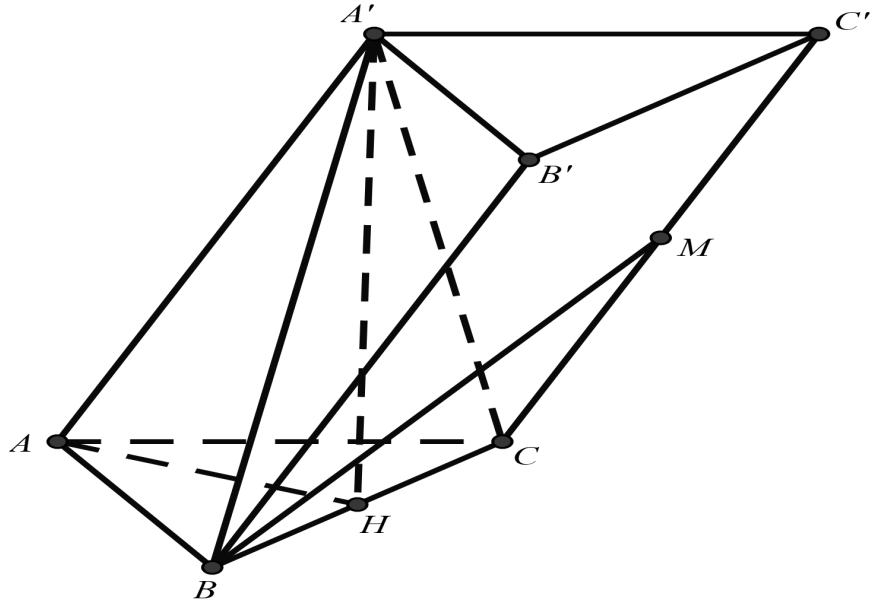
B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay

$BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + AA' \cdot CM = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 47: Cho tam giác ABC , thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

- A.** $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - BC^2}$ **B.** $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$
- C.** $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ **D.** $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Lời giải

Chọn D

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 \sin^2 A} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$.

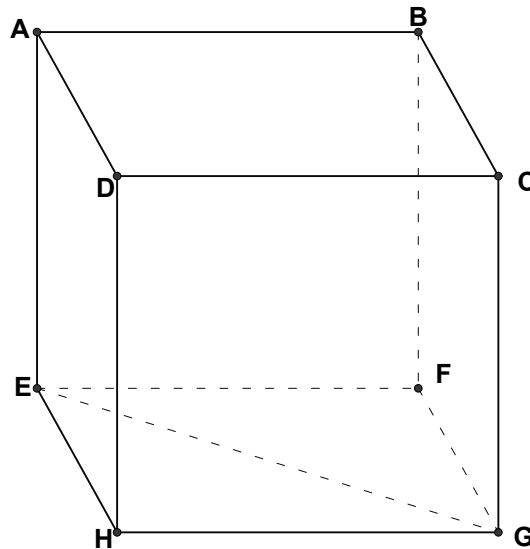
B. a^2 .

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2 \quad (\text{Vì } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD})$$

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

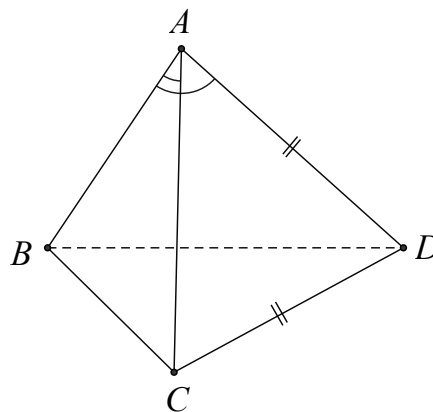
B. $\varphi = 60^\circ$.

C. $\varphi = 30^\circ$.

D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= AB \cdot AD \cdot \frac{1}{2} - AB \cdot \frac{3}{2} AD \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} AB \cdot AD = -\frac{1}{4} AB \cdot CD.\end{aligned}$$

$$\text{Do có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\frac{1}{4} AB \cdot CD}{AB \cdot CD} = -\frac{1}{4}. \text{ Suy ra } \cos \varphi = \frac{1}{4}.$$

Câu 50: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM})$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

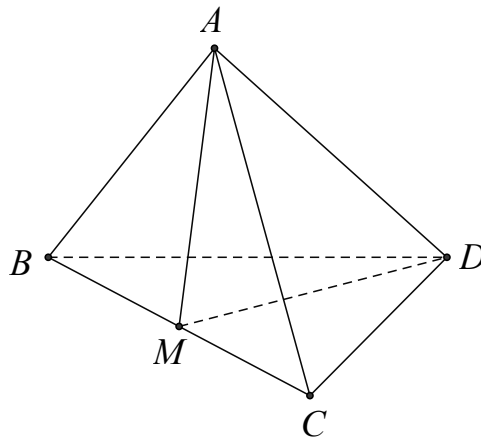
B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử cạnh của tứ diện là a .

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Ta có

Mặt khác

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AM \cdot \cos 30^\circ - AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ \\ &= a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\text{Do có } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \text{ Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

C. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

☐ Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD \rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên A đúng

☐ Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DG}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \text{ nên B đúng}\end{aligned}$$

☐ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BG}$ nên C đúng

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{4}(4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \rightarrow D \text{ sai}\end{aligned}$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

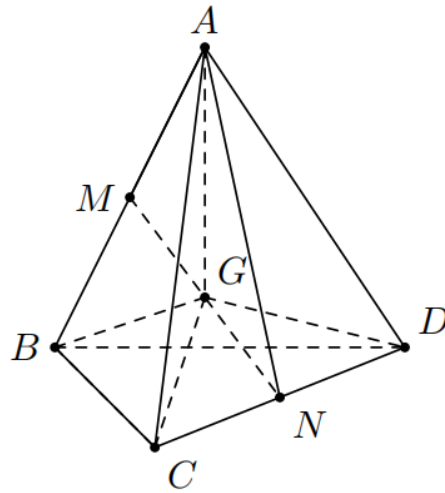
B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

D. $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



- ☐ Vì M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN} \end{cases}$

G là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Vậy A đúng

- ☐ Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}$

Vậy B đúng

- ☐ Để chứng minh được $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ nên C sai

- ☐ Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$$

Do đó: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Vậy D đúng

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$.

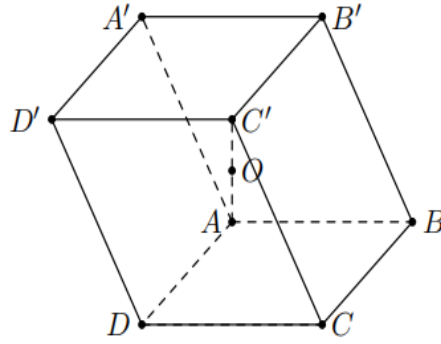
Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

- ☐ Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ đúng. Do đó A đúng

- ☐ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$

Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{D'A} = \vec{0}$. Do đó B đúng



☐ Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} \end{cases}$, mà $\overrightarrow{AB'} \neq \overrightarrow{AD'} \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'}$. Vậy C sai

☐ Ta có

$$\oplus \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$$

$$\oplus \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'O} + \overrightarrow{OC'}$. Do đó D đúng

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'}$.

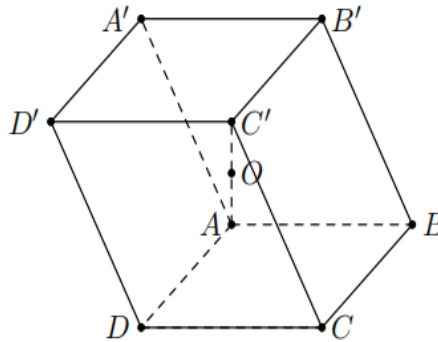
B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



☐ Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D'}$$

Mà $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$ nên A đúng

☐ Ta có

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$$

Vậy B đúng

☐ Ta có:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'} \text{ vậy C đúng}$$

☐ Vì $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BD'} \neq \overrightarrow{BC}$. Vậy D sai

Câu 5: Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

D. Chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

☐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên A sai

☐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ nên B đúng

☐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên C sai

☐ $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow ABCD$ là hình bình hành nên D đúng

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{SO}$

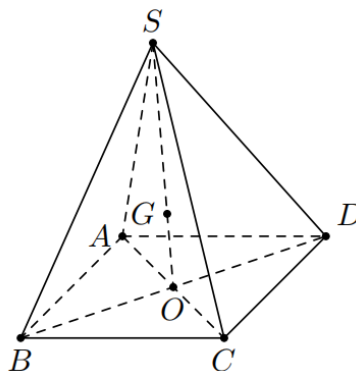
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ nên A sai

☐ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ nên B đúng

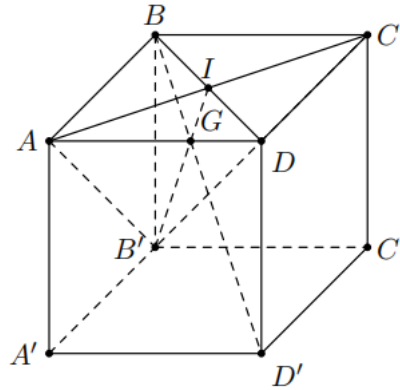
☐ Ta có

$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$
 $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ nên $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Do đó C đúng

☐ Ta có

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} &= \vec{0} \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{GS} &= 4\overrightarrow{OG} \text{ nên D sai}
\end{aligned}$$

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?



- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
- B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'C'}$.
- D. $\overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

A. Đ	B. S	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

- ☐ Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ nên A đúng
- ☐ G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Do đó B sai
- ☐ Ta có
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ nên C đúng
- ☐ Ta có

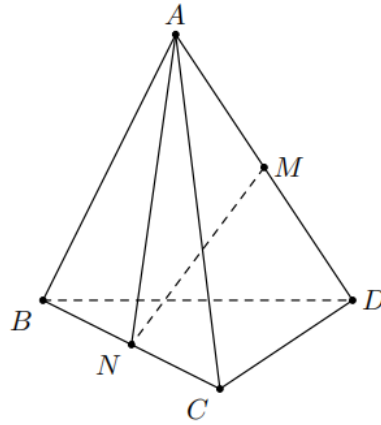
$$\begin{aligned}
\triangle BIG \sim \triangle D'B'G &\rightarrow \frac{BG}{D'G} = \frac{BI}{D'B'} = \frac{1}{2} \\
\rightarrow \frac{BG}{BD'} &= \frac{1}{3} \rightarrow \overrightarrow{BD'} = 3\overrightarrow{BG} \text{ nên D sai}
\end{aligned}$$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

- A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.
- C. $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.
- D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



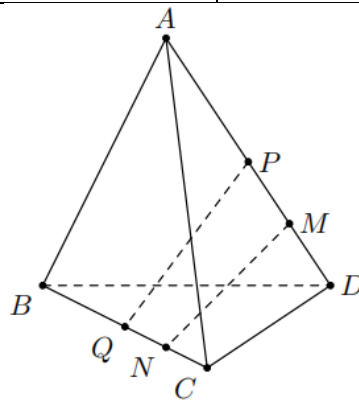
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\rightarrow A$ đúng.
- $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng vì MN không nằm trong $(ABC) \rightarrow B$ đúng.
- $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng sai vì AN không nằm trong (MNC)
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) \rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\rightarrow D$ đúng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 3MD$ và $BN = 3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm AD và BC . Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

- A.** $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$
B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$
C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}$
D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



- ☐ Để chứng minh được $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ nên A sai
☐ Theo giả thuyết ta có M, N là trung điểm của PD, QC

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases} \text{ . Nên B và C đúng}$$

□ Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$$

$\rightarrow 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng. Do đó D đúng

Câu 10: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là tứ giác ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành ”.		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

- + Mệnh đề A đúng: Quy tắc ba điểm.
- + Mệnh đề B đúng: Quy tắc đa giác.
- + Mệnh đề C sai: Vì $ABCD$ là tứ giác.
- + Mệnh đề D đúng: Quy tắc hình bình hành.

Câu 11: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ”.		
B: “ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ ”.		
C: “ $k \cdot \vec{a} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ”.		
D: “ $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng ”.		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

- + Mệnh đề A đúng: Quy tắc trừ vector.
- + Mệnh đề B đúng: Quy tắc trừ vector.
- + Mệnh đề C sai: Vì $\begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} \neq \vec{0} \end{cases} \rightarrow k \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
- + Mệnh đề D sai: Vì $k = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \leftrightarrow A \equiv B$.

Câu 12: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: “ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ với } I \text{ là trung điểm đoạn } AB \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } ”.$		
$B: “ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm } \Delta ABC \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } ”.$		
$C: “ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} \text{ với } G \text{ là trọng tâm tứ diện } ABCD \text{ và điểm } M \text{ bất kỳ } ”.$		
$D: “\text{Nếu } \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \text{ thì chóp } S.ABCD \text{ có } ABCD \text{ là hình bình hành } ”.$		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

+ Mệnh đề A đúng: Vì ta có

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

+ Mệnh đề B đúng: Vì ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

+ Mệnh đề C đúng: Vì ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}. \end{aligned}$$

+ Mệnh đề D đúng: Vì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên

$ABCD$ là

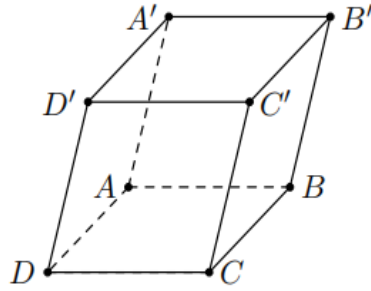
hình bình hành.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
$A: “ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} ”.$		
$B: “ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} ”.$		
$C: “ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BD'} ”.$		
$D: “ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} ”.$		

Lời giải

A. Đ	B. S	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



+ Mệnh đề A đúng: Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$.

+ Mệnh đề B sai: Vì $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$.

+ Mệnh đề C sai: Vì $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD'} \rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{D'B}$.

+ Mệnh đề D đúng: Vì

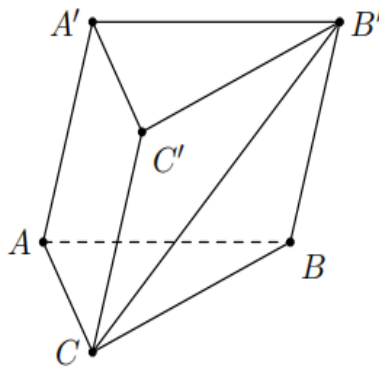
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \text{ (Quy tắc hình hộp).}$$

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: “ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$ ”.		
B: “ Góc giữa $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BB'})$ ”.		
C: “ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$ ”.		
D: “Góc giữa $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'})$ ”.		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------



+ Mệnh đề A đúng: Vì $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

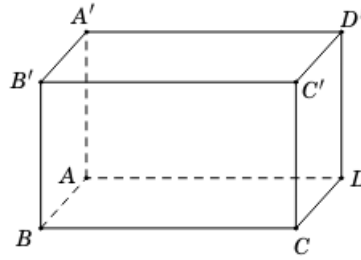
+ Mệnh đề B đúng: Vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

+ Mệnh đề C đúng: Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$.

+ Mệnh đề D sai: Vì nếu $\alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'})$ thì $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AA'}) = 180^\circ - \alpha$.

Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a; AD = a\sqrt{3}; AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.
c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$.
d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.



Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} \neq \vec{0}$ nên A sai

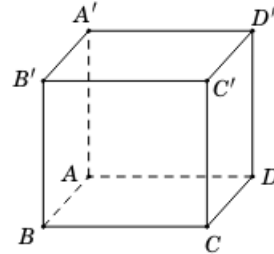
b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$ nên B đúng

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$ nên C sai

d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 2\sqrt{2}a$ nên D đúng

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$.
c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = a\sqrt{2}$.
d) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a$.



Lời giải

A. Đ	B. S	C. S	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

a) Ta có

$\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'B} + (-\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D}$. nên A đúng

b) Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$. Nên B sai

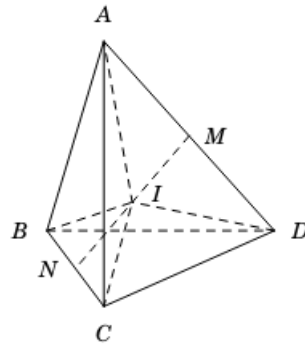
c) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}| = |\overrightarrow{BD'}| = BD' = a\sqrt{3}$ nên C sai

d) Ta có $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{C'C}$.

Do đó $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = C'C = a$ nên D đúng

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
- c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.
- d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$



Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

a) Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}.$$

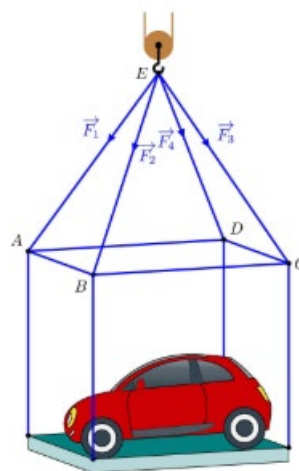
b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$. Do đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

c,d) Dễ chứng minh

Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$.
- b) $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.
- c) $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



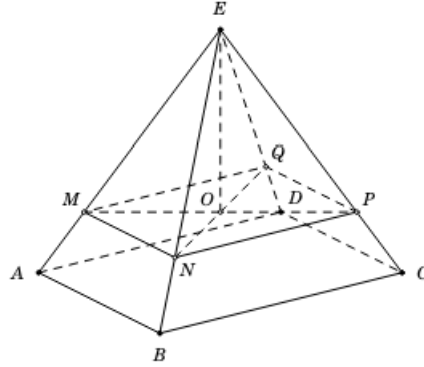
Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{F_4}.$$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là 4700 N nên $EM = EN = EP = EQ = 4700$.



a) Ta có

$$-\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} = 2\overrightarrow{EH}, \text{ với } H \text{ là trung điểm của } MN$$

$$\overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EK}, \text{ với } K \text{ là trung điểm của } PQ.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \neq \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$$

b) Ta có

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EO}, \text{ với } O \text{ là trung điểm của } MP$$

$$\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EO}, \text{ với } O \text{ là trung điểm của } NP.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}.$$

$$\text{c) } |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = |2\overrightarrow{EO}| = 2EO.$$

Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60° , suy ra góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

$$\text{Xét } \triangle EMO \text{ có } EM = 4700, \widehat{SMO} = 60^\circ. \text{ Suy ra } EO = EM \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}.$$

$$\text{Từ đây, ta tính được } |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}| = 2EO = 8141\text{ N}.$$

Câu 19: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) |\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}.$$

$$d) |\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = 0.$$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}. \text{ Suy ra } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$d) (\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 = 1 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2. \text{ Suy ra } |\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}| = \sqrt{2}.$$

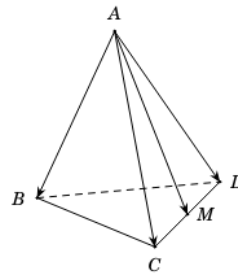
Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

$$a) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}.$$

$$c) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$d) \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}.$$



Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

a) Tam giác ACD đều, suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

$$b) \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$c) \text{ Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Mà AM , BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD , BCD nên $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{CD}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$$

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

d) Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

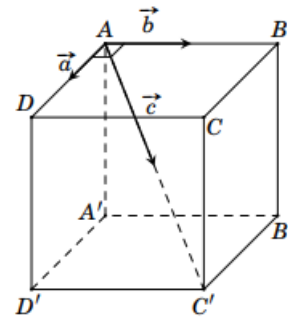
Câu 21: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10N, 10N và 20N.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20(\text{N})$.

c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59(\text{N})$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

A. S	B. S	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

Từ giả thiết, ta có $\vec{a} \perp \vec{b}$; $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \cos \widehat{DAC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \cos \widehat{BAC'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{c}$

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có

$$(\vec{a} + \vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}$.

$$(\vec{b} + \vec{c})^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 20^2 = 500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{500 + \frac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Do đó

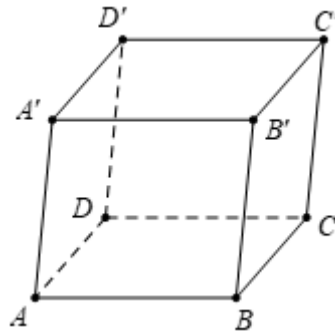
$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 &= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 &= 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow |\vec{m}|^2 &= 10^2 + 10^2 + 20^2 + 0 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow |\vec{m}| &\approx 32,59.\end{aligned}$$

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Trả lời: 3

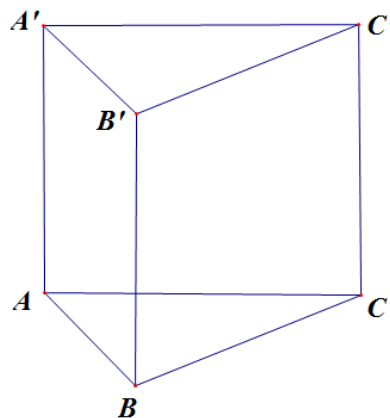


Các vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$ là: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{B'C'}$. Vậy có 3 vector bằng vector $\overrightarrow{BC}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $\triangle ABC$ có cạnh bằng 3. Tìm vector tổng $\left| \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} \right|$

Lời giải

Trả lời: 3

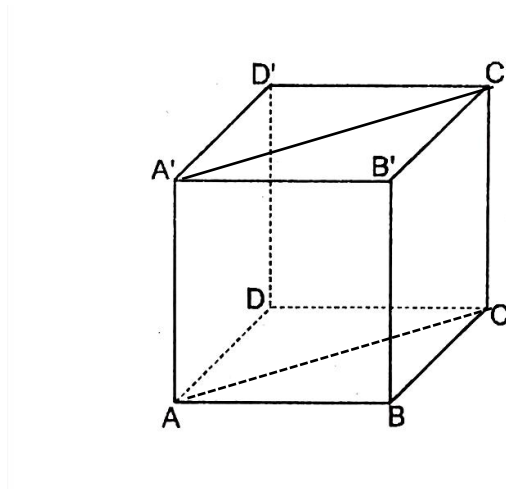


Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left| \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{B'C'} \right| = \left| \overrightarrow{BA} \right| = 3.$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải

Trả lời: 45



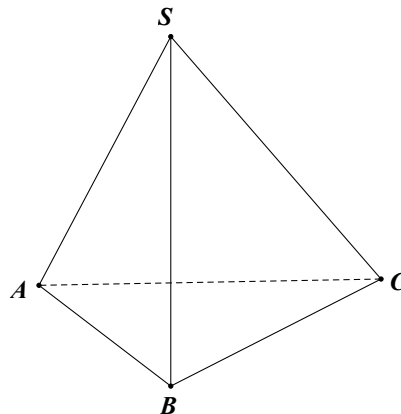
Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Do đó: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Trả lời: -2



Có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 (2.2^2 = 2^2 + 2^2) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S .

Lại có: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.

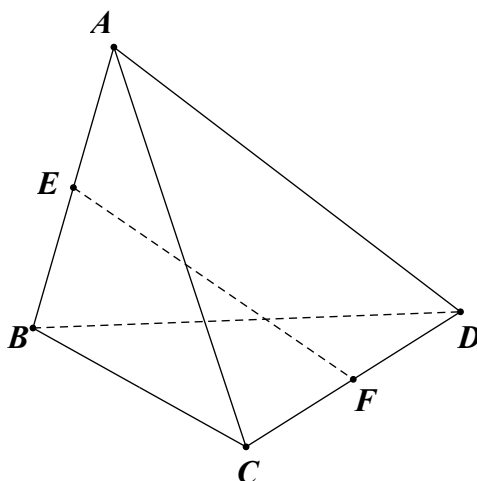
$$\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 - SC \cdot SA \cdot \cos \widehat{ASC} = -2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{2^2}{2} = -2$$

Vậy $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Cho $AB = 2a, CD = 2b, EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k.ME^2 + l.a^2$. Tính $k + l$.

Lời giải

Trả lời: 4



Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

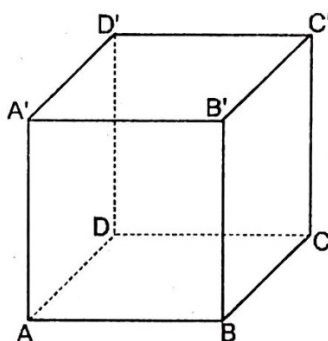
$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = 2ME^2 + 2a^2.$$

Vậy $k + l = 2 + 2 = 4$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -4



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Có: $\overrightarrow{MA'} = k \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{-k(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}}{1-k}$.

Có: $\overrightarrow{NC} = l \cdot \overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - l\vec{b}}{1-l}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(-\frac{k}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{a} + \left(-\frac{k}{1-k} - 1\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{1-k} - \frac{1}{1-l}\right)\vec{c}$.

Mà: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

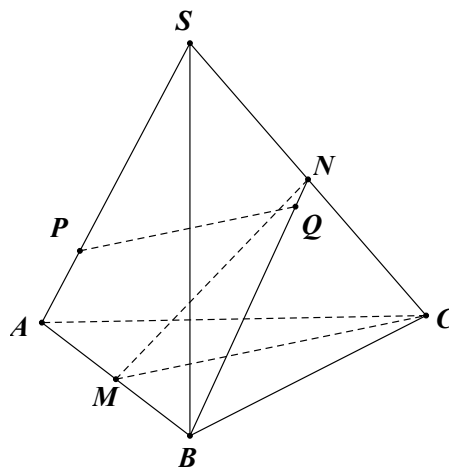
Vì $MN \parallel BD'$ nên $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \frac{3k+1}{1-k} = -2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow l = -1$.

Vậy $k + l = -4$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC . Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ \parallel CM$. Hãy biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi biểu diễn vector $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\frac{m}{n}\vec{a} - \frac{p}{q}\vec{b} + \frac{r}{z}\vec{c}$ (với $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \frac{r}{z}$ là các phân số tối giản và $m, n, p, q, r, z \in \mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{r}{z}$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{4}{3}$



Đặt $\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BN}$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = x\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{BN} = (x-1)\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + y(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SB}) \\ &= (x-1)\vec{a} + (1-y)\vec{b} + \frac{y}{2}\vec{c}.\end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}) - \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

$$PQ // CM \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \frac{x-1}{0,5} = \frac{1-y}{0,5} = \frac{y}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

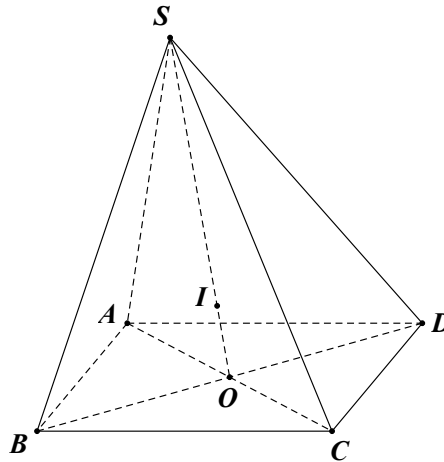
$$\text{Vậy } \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là điểm thay đổi trên SO .

Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P = MS^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $\frac{4}{5}$



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI} = 4\overrightarrow{IO}$.

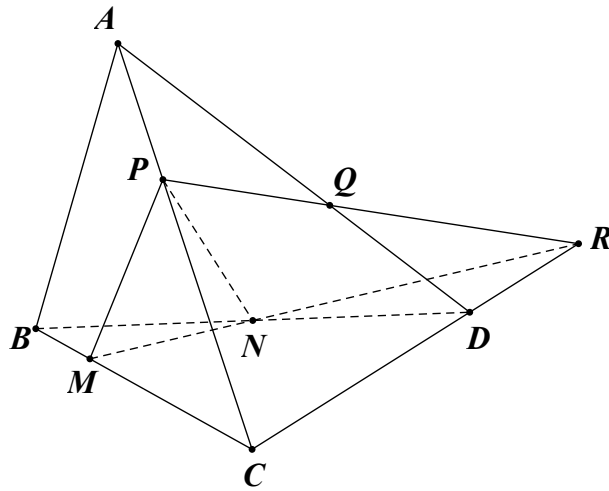
$$\begin{aligned}\text{Suy ra: } P &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IS})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IS} + 4\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= 5MI^2 + IS^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2\end{aligned}$$

Vậy $P_{\min}$ khi $M \equiv I \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{4}{5}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q . Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{3}{5}$



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$.

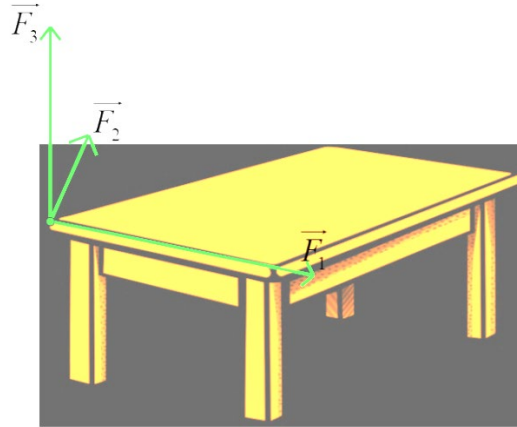
$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$$

Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên

$$x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5}.$$

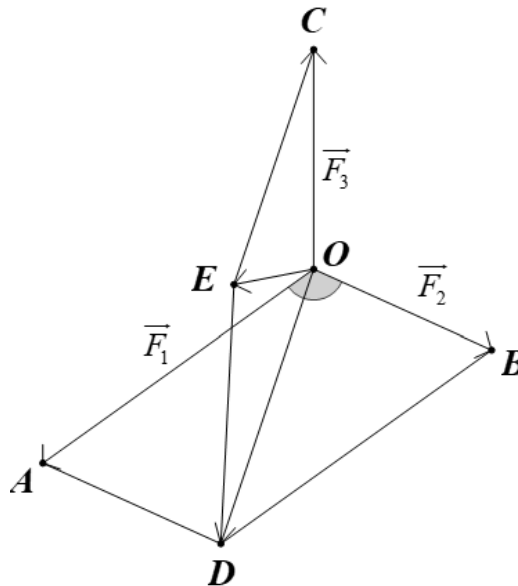
Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a .



Lời giải

Trả lời: 10

Theo đề bài ta có hình vẽ sau:



Hợp lực tác động vào ba vật là $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong $\triangle OAD$, ta có:

$$OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA \cdot AD \cdot \cos \widehat{OAD} = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos 80^\circ = 97 - 72 \cos 80^\circ.$$

Vì $OC \perp (OBDA)$ nên $OC \perp OD \Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó $\triangle OCE$ vuông tại C nên:

$$OE^2 = OC^2 + EC^2 = 4^2 + 97 - 72\cos 80^\circ = 113 - 72\cos 80^\circ$$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{113 - 72\cos 80^\circ} \approx 10$$

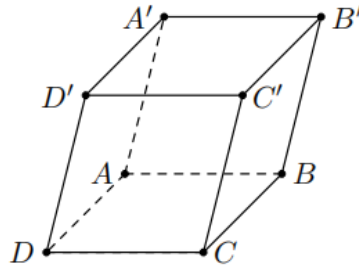
Suy ra độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng $10N$.

Vậy $a=10$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$?

Lời giải

Trả lời: $k=1$



Ta có

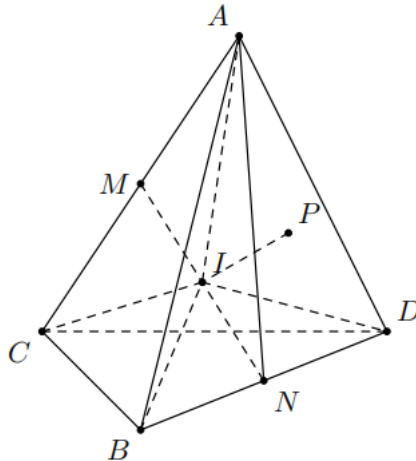
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'} \\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{D'A} \end{cases}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AD'} + k\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow (k-1).\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \Leftrightarrow k=1.$$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$?

Lời giải

Trả lời: $k = \frac{1}{4}$



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \\ \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \end{cases}$$

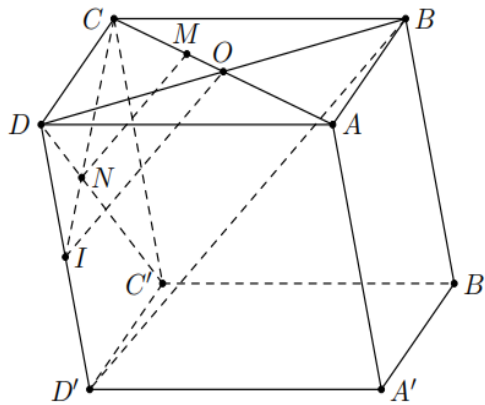
+ Khi đó $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{PI}$.

+ Mà $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = k.4.\overrightarrow{PI} \Leftrightarrow 1 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N = x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD' ?

Lời giải

Trả lời: $\frac{2}{3}$



+ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

+ Gọi I là trung điểm DD' .

+ Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \rightarrow N'$ là trọng tâm $\triangle CDD'$.

+ Ta có OI là đường trung bình của $\triangle BDD' \rightarrow OI \parallel BD'$.

+ Lại có $\frac{CN'}{CI} = \frac{CM}{CO} \rightarrow MN' \parallel OI \rightarrow MN' \parallel BD'$.

+ Theo bài ta có $MN \parallel BD' \Leftrightarrow N' \equiv N \rightarrow C'N = \frac{2}{3}C'D \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x.\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Trả lời: -2

+ bài toán tương đương tìm x để $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

$$+ \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}.$$

+

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} \leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}.$$

$$+ \text{Đề } \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \text{ đồng phẳng} \leftrightarrow 2+x=0 \leftrightarrow x=-2.$$

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$?

A. $k = 4$.

B. $k = 1$.

C. $k = 0$.

D. $k = 2$.

Lời giải

Trả lời: 1

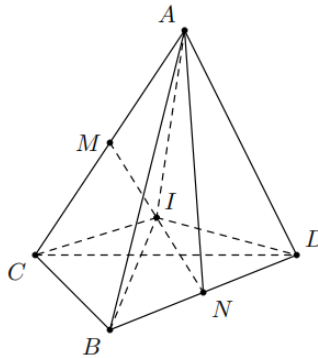
$$+ \text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC_1} \leftrightarrow k = 1.$$

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD . Gọi I là trung điểm đoạn MN . Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$?

Lời giải

Trả lời: 1



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \\ \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

$$+ \text{Ta có } \overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$$

$$= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + (2k-2)\overrightarrow{IB} + (k-1)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

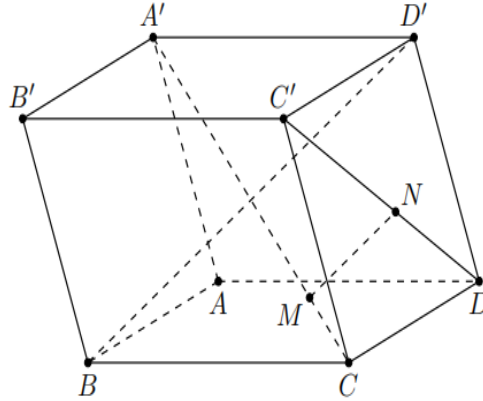
$$\rightarrow (k-1)(2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}.$$

$$+ \text{Mà } 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \neq \vec{0} \leftrightarrow k-1=0 \leftrightarrow k=1.$$

- Câu 17:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m, n thỏa mãn $\overrightarrow{MA'} = m\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NC'} = n\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m + n$ bằng bao nhiêu?
- A. $m - n = -\frac{3}{2}$. B. $m + n = -3$. C. D. $m + n = -2$.

Lời giải

Trả lời: -4



$$\begin{aligned}
 &+ \text{Đặt } \vec{x} = \overrightarrow{BA}, \vec{y} = \overrightarrow{BC}, \vec{z} = \overrightarrow{BB'}. \\
 &+ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{m-1}(\vec{x} - \vec{y} + \vec{z}) + \vec{x} + \frac{1}{1-n}(-\vec{x} + \vec{z}) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1}\right)\vec{x} - \frac{1}{m-1}\vec{y} + \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{1-n}\right)\vec{z} \\
 &+ \overrightarrow{BD'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}. \\
 &+ \text{Vì } MN \parallel BD' \rightarrow 1 + \frac{1}{m-1} + \frac{1}{n-1} = -\frac{1}{m-1} = \frac{1}{m-1} + \frac{1}{1-n} \Leftrightarrow m = -3, n = -1.
 \end{aligned}$$

- Câu 18:** Trong không gian cho các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x - y)\vec{a} + (y - z)\vec{b} = (x + z - 2)\vec{c}$. Tính $x + y + z$?

Lời giải

Trả lời: 3

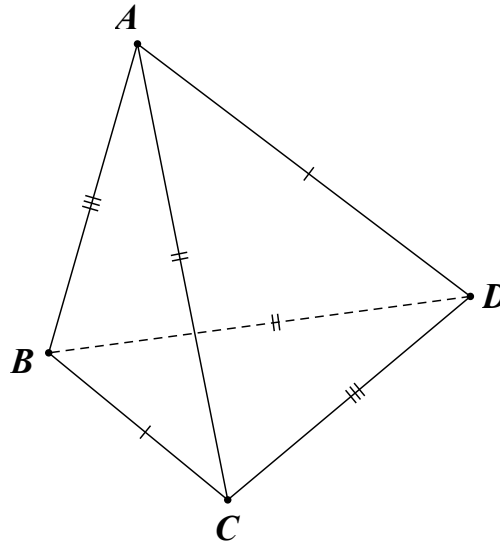
+ Có $(x - y)\vec{a} + (y - z)\vec{b} - (x + z - 2)\vec{c} = \vec{0}$. Do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng nên mỗi vector được phân tích duy nhất qua ba vector nói trên.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \rightarrow x + y + z = 3.$$

- Câu 19:** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{9}{S^2}$



Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\triangle BCD = \triangle ADC = \triangle DAB = \triangle CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \frac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

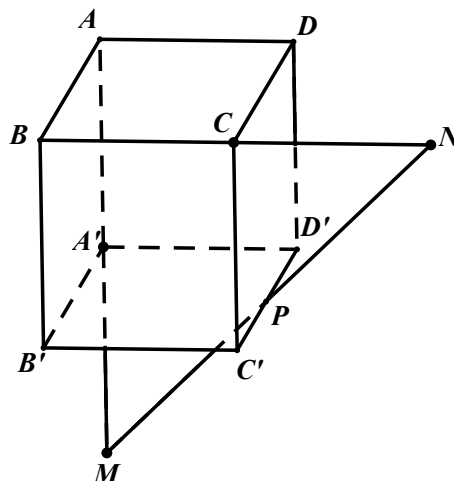
Theo công thức Leibnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2)$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Lời giải

Trả lời: 2



Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Vì $M \in AA'$ nên $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA'} = k\vec{c}$

$N \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN} = l\overrightarrow{BC} = l\vec{a}, P \in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P} = m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'P} = (1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a} - \vec{b} + k\vec{c} = 2[(1-l)\vec{a} + m\vec{b} + \vec{c}]$

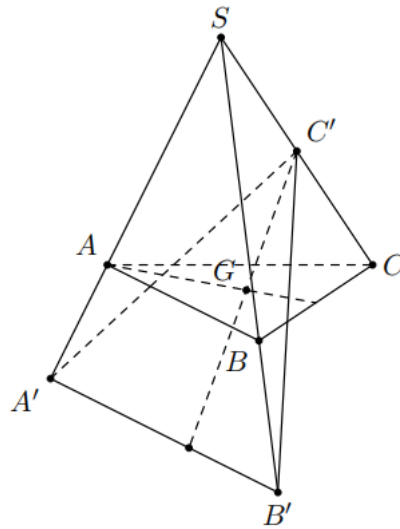
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -l = 2(1-l) \\ -1 = 2m \\ k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, m = -\frac{1}{2}, l = 2.$$

Vậy $\frac{MA}{MA'} = 2$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3



+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\rightarrow 3\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

+ Mà $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'} \\ \overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'} \\ \overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$.

+ Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm ΔABC nên:

$\rightarrow \overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng

$\rightarrow \exists l, m, n$ sao cho $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ và $l\overrightarrow{GA'} + m\overrightarrow{GB'} + n\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow l(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SA'}) + m(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}) + n(\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{SB'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG} = l\overrightarrow{SA'} + m\overrightarrow{SB'} + n\overrightarrow{SC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'} + \frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'} + \frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$$

.

$$\rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{l}{l+m+n} + \frac{m}{l+m+n} + \frac{n}{l+m+n} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = 1 \Leftrightarrow a+b+c = 3.$$

BÀI 2: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

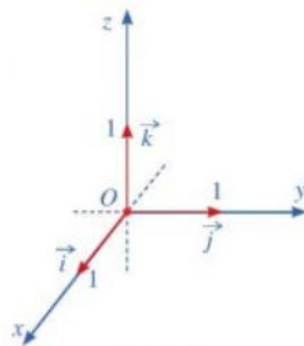
I. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ tọa độ $Oxyz$

Chú ý: Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

- Trong hệ tọa độ $Oxyz$ (Hình 19), ta gọi: điểm O là gốc tọa độ; Ox là trục hoành, Oy là trục tung, Oz là trục cao; các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.



Hình 19

Nhận xét: Các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau.

Ví dụ 1. Một sân tennis với hệ tọa độ $Oxyz$ được chọn như ở Hình 20.

- Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?

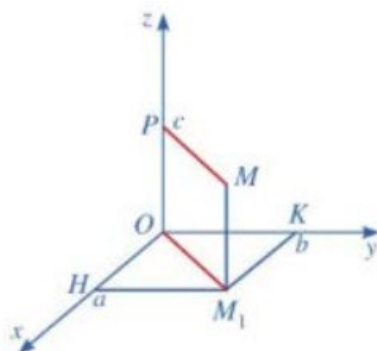


Hình 20

2. Tọa độ của một điểm

Nhận xét: Bộ số $(4;5;3)$ gọi là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Ta có định nghĩa sau (Hình 23):



Hình 23

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M .

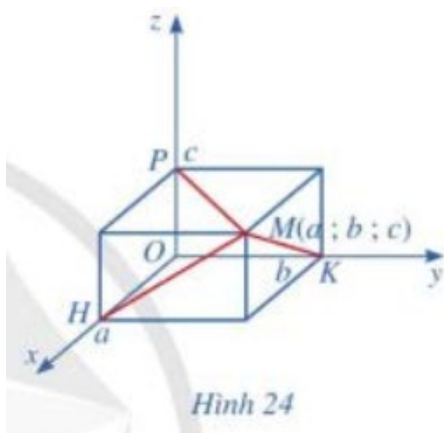
Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .

Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.

Chú ý

- Tọa độ của một điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.
- Người ta còn có thể xác định tọa độ điểm M theo cách sau (Hình 24):



Hình 24

Xác định hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox , điểm H ứng với số a trên trục Ox . Số a là hoành độ của điểm M .

Xác định hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy , điểm K ứng với số b trên trục Oy . Số b là tung độ của điểm M .

Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

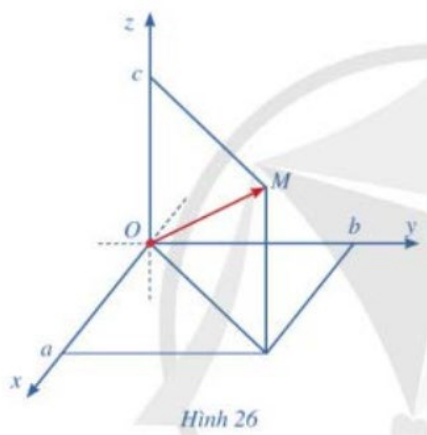
Khi đó, bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4; 5; 3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ (Hình 25). Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

II. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ

Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vector $\overrightarrow{OM}$.

Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a;b;c)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a;b;c)$, trong đó a gọi là hoành độ của vector $\overrightarrow{OM}$, b gọi là tung độ của vector $\overrightarrow{OM}$ và c gọi là cao độ của vector $\overrightarrow{OM}$ (Hình 26).



Hình 26

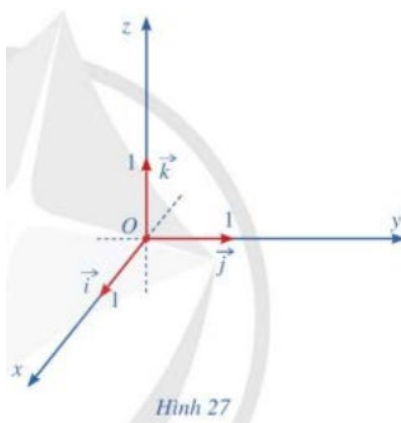
Chú ý: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, ta có:

$$\overrightarrow{OM} = (a;b;c) \Leftrightarrow M(a;b;c);$$

Vector đơn vị $\vec{i}$ trên trục Ox có toạ độ là $\vec{i} = (1;0;0)$;

Vector đơn vị $\vec{j}$ trên trục Oy có toạ độ là $\vec{j} = (0;1;0)$;

Vector đơn vị $\vec{k}$ trên trục Oz có toạ độ là $\vec{k} = (0;0;1)$ (Hình 27).



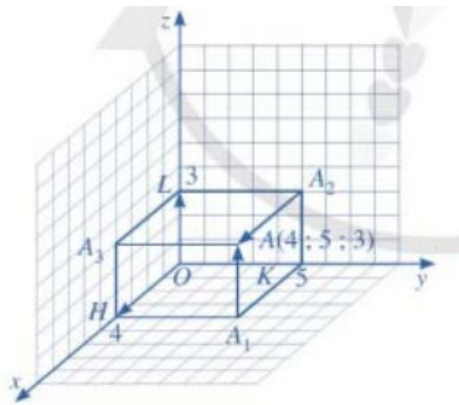
Hình 27

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4;3;-1)$ và $N(2;-1;-3)$. Tìm toạ độ của các vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ của một vector $\vec{u}$ là toạ độ của điểm A , trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có toạ độ $(a;b;c)$ thì ta viết $\vec{u} = (a;b;c)$, trong đó a gọi là hoành độ, b gọi là tung độ và c gọi là cao độ của vector $\vec{u}$.

Ví dụ 4. Tìm toạ độ của các vector $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_2A}$ ở Hình 30.



Hình 30

Ta có định lý sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, nếu $\vec{u} = (a; b; c)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ thì $\vec{u} = (a; b; c)$.

Chú ý: Với $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ta có: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và vectơ $\vec{u} = (3; -4; 2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

a) $\overrightarrow{OA}$;

b) $\vec{u}$.

Ta có định lý sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó, ta có:

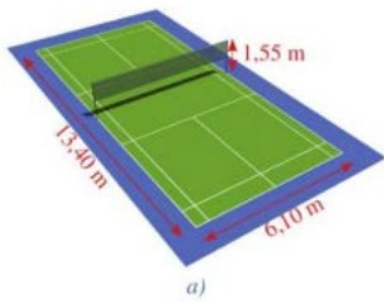
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

Ví dụ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành có ba đỉnh $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ của điểm D .

Ví dụ 7. Hình 33a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở Hình 33b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.



Hình 33

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{OA}$ là:

- A. $(1;2;3)$. B. $(1;0;3)$. C. $(0;2;3)$. D. $(1;2;0)$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vecto $\vec{u} = (-1; 4; 2)$ và điểm A . Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Tọa độ của điểm A là:

- A. $(1;4;2)$. B. $(-1;4;2)$. C. $(1;-4;-2)$. D. $(-1;-4;-2)$.

3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vecto $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ của vecto $\vec{u}$ là:

- A. $(-2;-1;3)$. B. $(2;1;3)$. C. $(-2;0;3)$. D. $(-2;-1;-3)$.

4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(4;-3;1)$. Tọa độ của vecto $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $(-3;2;1)$. B. $(3;-2;-1)$. C. $(5;-4;3)$. D. $(3;-4;-1)$.

5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vecto $\vec{u} = (4;2;3)$ và điểm $A(1;1;1)$. Tọa độ điểm C thỏa mãn

$\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ là:

- A. $(4;2;3)$. B. $(1;1;1)$. C. $(5;3;4)$. D. $(3;1;2)$.

6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;-2;-1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) . Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

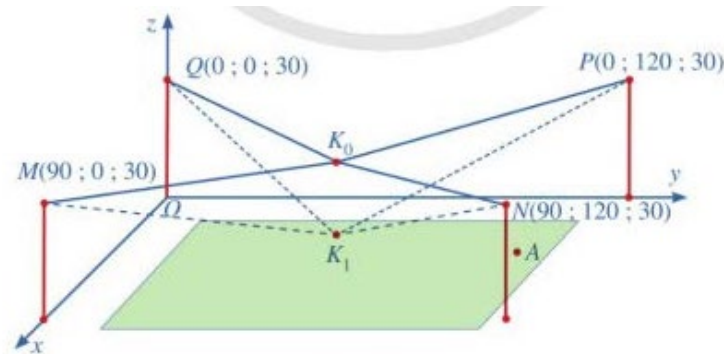
7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2;3;4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có

$A(4;6;-5), B(5;7;-4), C(5;6;-4), D'(2;0;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

9. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài

trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Hình 34

Tìm tọa độ của các điểm K_0 , K_1 và của vector $\overrightarrow{K_0K_1}$.

BÀI 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2);$$

$$m\vec{u} = (mx_1; my_1; mz_1); m \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vector $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có một số

$$\text{thực } m \text{ sao cho } \begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \\ z_1 = mz_2 \end{cases}.$$

Ví dụ 1. Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vector sau:

$$\text{a) } 3\vec{a}; \quad \text{b) } 2\vec{a} - \vec{b}; \quad \text{c) } \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}.$$

II. TỌA ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG. TỌA ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$. Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(-2; 1; 0), B(0; 2; 5), C(5; 0; 2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

c) Với hai vector $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ khác vector $\vec{0}$, ta có:

$\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 0; 0), B(0; 0; 1)$ và $C(2; 1; 1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

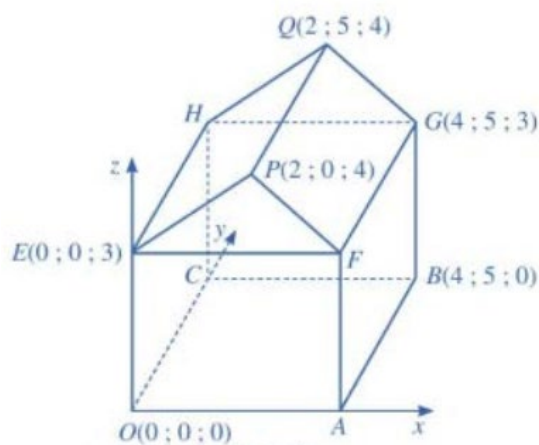
b) Tính chu vi của tam giác ABC .

c) Tính $\cos \widehat{ABC}$.

Ví dụ 4. Hình 37 minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

a) Tìm tọa độ của các điểm A, H và F .

b) Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



Hình 37

Ví dụ 5. Hãy giải bài toán trong phần mở đầu.

IV. CÁCH TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ VUÔNG GÓC VỚI HAI VECTƠ CHO TRƯỚC

Ta có định lí sau:

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương.

Khi đó, vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Nhận xét

Vectơ $\vec{w}$ trong định lí trên còn được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}]$

Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, với a, b, c, d là các số thực.

Khi đó, với hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1).$$

Hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương khi và chỉ khi vectơ $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$.

Ví dụ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (2; 0; -3)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vectơ $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; -2)$; $\vec{b} = (3; 1; -1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ là:

- A. $(1; -2; 1)$. B. $(5; 4; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(-1; 2; -3)$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0; 1; 1)$; $\vec{b} = (-1; 1; 0)$. Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-1; 2; 3)$; $\vec{b} = (3; 1; -2)$; $\vec{c} = (4; 2; -3)$.

a) Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm tọa độ của vector $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -2; 1)$; $\vec{b} = (2; 1; 3)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector $\vec{c}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; 2; -1)$; $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Tính cosin của góc $(\vec{a}, \vec{b})$

6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 0)$, $B(4; 0; 5)$, $C(0; 2; -3)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

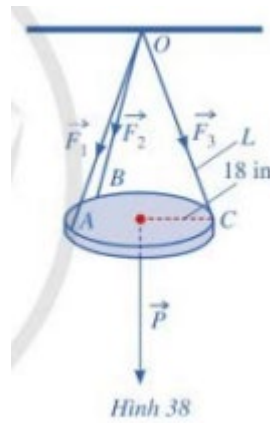
d) Tính $\cos \widehat{BAC}$.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$;

b) $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

8. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình 38). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in ($1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L .



Hình 38

- Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.
- Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO

1. Phương pháp: Sử dụng khái niệm

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

- $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
- $\vec{OM} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{ON} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M , N .

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

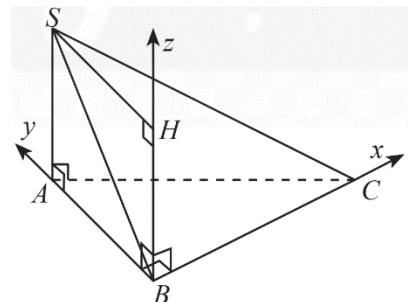
- $\vec{a} = (-3; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 0; 12)$. Tính $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- $A(-5; -2; 1)$, $B(0; 4; -11)$. Tính $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ và có $AB = 5$, $AD = 6$, $AA' = 9$.

Tìm tọa độ các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AC'}$ và $\vec{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

- Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.
- Tìm tọa độ các điểm A , B , C , S .



DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VECTO, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ

$$\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (2; 2; -1); \vec{c} = (4; 0; -4). \text{ Tìm tọa độ của vectơ } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$

Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$; $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Tính giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (3; m+1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Phương pháp:

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác...

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -5; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 3; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A'(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2; 2; 6)$, $B(-3; 1; 8)$, $C(-1; 0; 7)$, $D(1; 2; 3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và công thức ứng dụng của tích có hướng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 2)$ và $\vec{b} = (1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ của điểm D .

Ví dụ 5: Cho ba điểm $A(5; -1; 2)$, $B(1; -3; 7)$ và $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?

Ví dụ 6: Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (m; 3; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Tìm m để ba vector trên đồng phẳng.

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\triangle ABC$ có $A(4; 0; 2)$, $B(1; -4; -2)$ và $C(2; 1; 1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Ví dụ 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$. Tìm giá trị m để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, Tìm giá trị m để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?



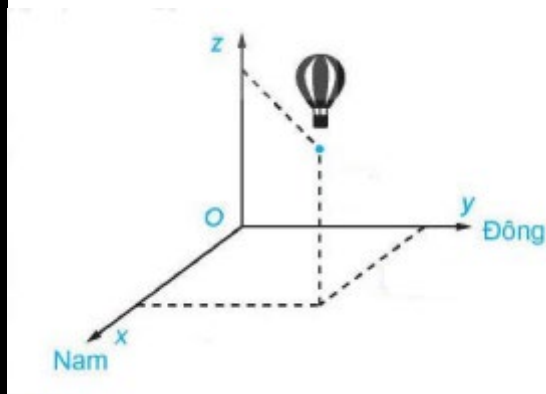
Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

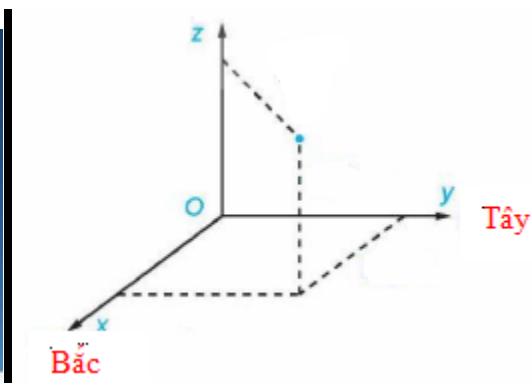
- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc máy bay đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- a) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
- b) Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



- a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.
b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

- Câu 1:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là
A. $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vector $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ điểm C?
A. $(3; 0; 0)$ **B.** $(0; 0; 3)$ **C.** $(0; 3; 3)$ **D.** $(3; 3; 0)$
- Câu 4:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tọa độ của C' là:
A. $(2; 3; 0)$. **B.** $(2; 3; 4)$. **C.** $(0; 3; 4)$. **D.** $(2; 0; 4)$.
- Câu 5:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Gọi M là trung điểm D'C'. Tọa độ điểm M là:
A. $(4; 6; 0)$ **B.** $(0; 6; 4)$ **C.** $(4; 6; 4)$ **D.** $(4; 0; 4)$
- Câu 6:** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2; -1; 1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(-1; -1; -3)$ **B.** $(3; 1; 1)$ **C.** $(1; 1; 3)$ **D.** $(3; 3; -1)$

- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .
- A. $OA = \sqrt{5}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = 9$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tính tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.
- A. $(0;-1;-5)$. B. $(2;-1;1)$. C. $(2;3;1)$. D. $(0;-1;1)$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a} = (1;2;3)$; $\vec{b} = (2;2;-1)$; $\vec{c} = (4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là
- A. $\vec{d} = (-7;0;-4)$. B. $\vec{d} = (-7;0;4)$. C. $\vec{d} = (7;0;-4)$. D. $\vec{d} = (7;0;4)$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vector $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là
- A. $(3;4;1)$. B. $(-1;-2;3)$. C. $(3;5;1)$. D. $(1;2;3)$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2;-3;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.
- A. $(10;-2;13)$. B. $(-2;2;-7)$. C. $(-2;-2;7)$. D. $(-2;2;7)$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (-2;1;3)$. Vector cùng phương với vector $\vec{a}$ là
- A. $\vec{b} = (-4;1;3)$. B. $\vec{c} = (2;-1;-3)$. C. $\vec{d} = (-4;2;3)$. D. $\vec{e} = (-4;-2;3)$.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(0;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- A. $G(0;0;3)$. B. $G(0;0;9)$. C. $G(-1;0;3)$. D. $G(0;0;1)$.
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. 26. B. 22. C. $\sqrt{26}$. D. $\sqrt{22}$.
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 4; n = -3$. C. $m = 1; n = 0$. D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tìm tọa độ của điểm B , biết M là trung điểm của AB .
- A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$. B. $B(-4;9;8)$. C. $B(5;3;-7)$. D. $B(5;-3;-7)$.
- Câu 18:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.
- A. $x = 4; y = 7$ B. $x = -4; y = -7$ C. $x = 4; y = -7$ D. $x = -4; y = 7$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(2; 0; -1)$. Tìm vector $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$

- A. $(4; 0; -2)$ B. $(-8; 0; 4)$ C. $(8; 0; -4)$ D. $(8; 0; 4)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 2$ B. $m = -6$ C. $m = 0$ D. $m = -4$

Câu 23: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3; 0)$, $B(-2; -2; 0)$, $C(3; 1; 0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5; 1; 5)$; $B(4; 3; 2)$; $C(-3; -2; 1)$. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(5; -1; 2)$, $C(3; 2; -4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

- A. $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. B. $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. C. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$. D. $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

- Câu 29:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là
- A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.
- Câu 30:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?
- A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Câu 31:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. C. $m = 4; n = -3$. D. $m = 1; n = 0$.
- Câu 32:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là
- A. $M(4;-5;0)$. B. $M(2;-3;0)$. C. $M(0;0;1)$. D. $M(4;5;0)$.
- Câu 33:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- A. $D(-4;-2;9)$. B. $D(-4;2;9)$. C. $D(4;-2;9)$. D. $D(4;2;-9)$.
- Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\vec{CE} = 2\vec{EB}$ thì tọa độ điểm E là:
- A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$. C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$
- Câu 35:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\vec{AM} = 3\vec{AB}$.
- A. $M(9;-5;7)$. B. $M(9;5;7)$. C. $M(-9;5;-7)$. D. $M(9;-5;-5)$.
- Câu 36:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $\vec{AB} = (1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:
- A. $B(2;5;0)$. B. $B(0;-1;-2)$. C. $B(0;1;2)$. D. $B(-2;-5;0)$
- Câu 37:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A = (1;0;1)$, $B = (2;1;2)$ và $D = (1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là
- A. $(2;0;2)$. B. $(2;2;2)$. C. $(2;-2;2)$. D. $(0;-2;0)$.

- Câu 38:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là
A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.
- Câu 39:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.
A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.
- Câu 40:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.
- Câu 41:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .
A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.
- Câu 42:** Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1;1;-2)$, $\vec{v} = (1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .
A. $m = 2$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C.** $m = 2 - \sqrt{6}$. **D.** $m = 2 + \sqrt{6}$.
- Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(2;0;-3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ có tọa độ là:
A. $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -2\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2\right)$.
- Câu 44:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vector $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$.
A. $(4;0;-2)$. **B.** $(-8;0;4)$. **C.** $(8;0;-4)$. **D.** $(8;0;4)$.
- Câu 45:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.
- Câu 46:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Tọa độ điểm G là trung điểm MN là:

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$ là

- A. một mặt phẳng. B. một điểm.
C. tập hợp rỗng. D. một đường thẳng.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

A. $D(8; 7; -1)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. D. $D(-12; -1; 3)$

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), C'(4; 5; -5), D(1; -1; 1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- A. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$
B. $C(2; 0; 4)$
C. $B'(4; 6; -5)$
D. $D'(4; 4; 6)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, điểm $M(2; 0; 1), N(3; 2; 4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- A. $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
B. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$
C. $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$
D. $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{27}$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}; \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $\vec{u} = (2; 0; -1)$
B. $\vec{a} = (-1; 2; -3)$
C. $\vec{u} + \vec{v} = (1; 2; 3)$
D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $A(0; 0; 0)$

- B. $B(0;3;0)$
- C. $C(3;0;0)$
- D. $S(4;0;0)$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , các điểm $B; D; A'$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $\overrightarrow{AA'} = -4\vec{k}$
- B. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$
- C. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}$
- D. $C'(2;3;4)$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3; SA vuông góc với đáy và $SA = 4$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O trùng với A ; các điểm $B; D; S$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$
- B. $\overrightarrow{AS} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$
- C. $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$
- D. $\overrightarrow{SC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$
- B. $\overrightarrow{AA'} = (0;0;a)$
- C. $\overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a)$
- D. $\overrightarrow{AD} = (a;2a;0)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(-1;3;0)$.

- A. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $(0;1;1)$.
- B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$.
- C. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.
- D. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2;4;-2)$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$.

- A. Tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b} = (1;2;3)$.
- B. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.
- C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.
- D. Cosin góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{\sqrt{51}}{51}$

- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.
- A. Tọa độ vectơ $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$.
 - B. Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
 - C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.
 - D. Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.
- A. Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.
 - B. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.
 - C. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.
 - D. Tọa độ vectơ $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?
- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.
 - B. $\vec{b} \perp \vec{a}$.
 - C. $\vec{b} \perp \vec{c}$.
 - D. $2|\vec{c}| = 6$.
- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$.
- A. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.
 - B. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.
 - C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.
 - D. Ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$, $C(9; 2; y)$.
- A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.
 - B. Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.
 - C. Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13, y = -1$.
 - D. Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.
- Câu 15:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.
- A. $3\vec{a} = (1; 6; 9)$.
 - B. $\vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.
 - C. $\vec{a} - \vec{c} = (3; -2; -7)$.
 - D. $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7; 0; -4)$.
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

- A. Tọa độ vectơ $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.
- B. Cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.
- C. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 14.
- D. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2), \vec{b} = (1; 2; -4), \vec{c} = (-1; -3; 3)$.

- A. $\vec{a} = 2\vec{b}$.
- B. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.
- C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$
- D. $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vectơ $\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (-1; 5; 2), \vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
- B. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
- C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.
- D. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

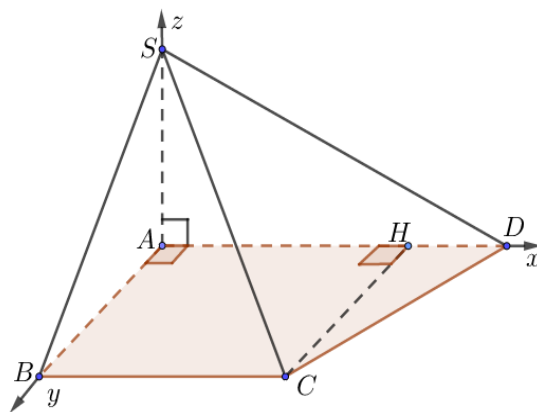
Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2), B(1; 0; 3), C(0; 2; -2)$.

- A. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$.
- B. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
- C. Tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$.
- D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2; 1; 0), C(0; 3; 0), C'(-1; 2; 1), D'(0; -2; 0)$.

- A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$.
- B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$.
- C. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.
- D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



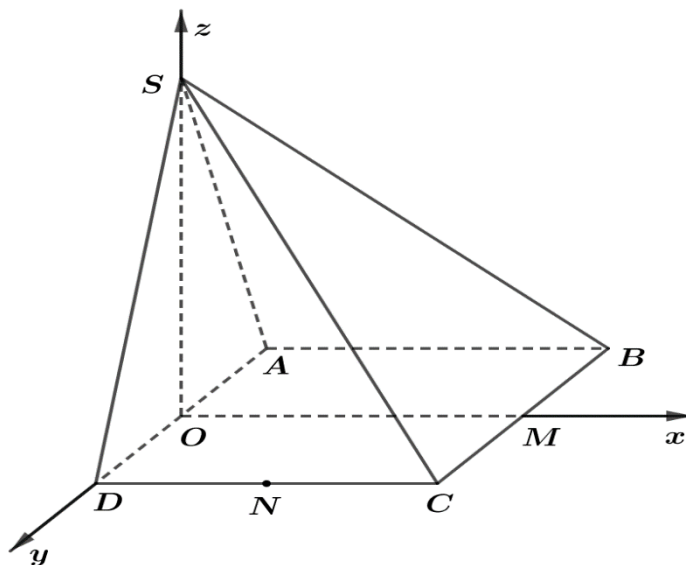
A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M, N là $M(1; 0; 0), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4), \vec{b} = (1; -1; 1)$.

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$.

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

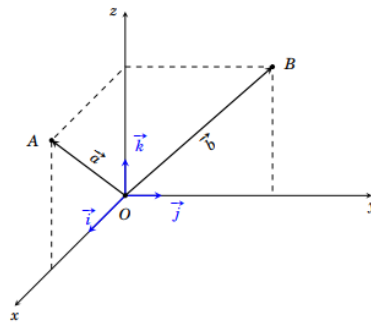
Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.

c) Tọa độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$

d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.



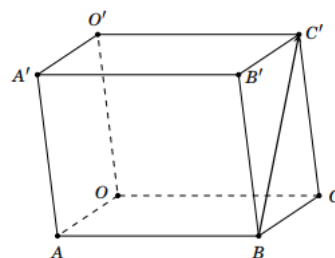
Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1; 1; -1)$, $B(0; 3; 0)$, $\vec{BC'} = (2; -6; 6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

a) Tọa độ điểm C' là $(2; -3; 6)$

b) Tọa độ điểm O' là $(3; -5; 5)$.

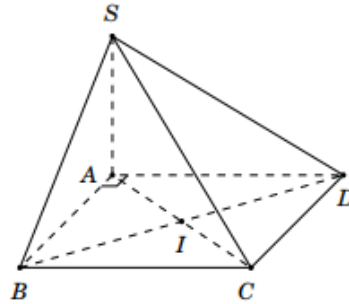
c) Tọa độ véc tơ $\vec{AB'} = (-2; 3; -6)$.

d) Tọa độ véc tơ $\vec{HK} = (-1; 2; -1)$.



Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = 2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Tọa độ $D(0;2;0)$.
- b) Tọa độ $C(1;2;3)$.
- c) Tọa độ $S(2;0;0)$
- d) Tọa độ $I(1;1;0)$.

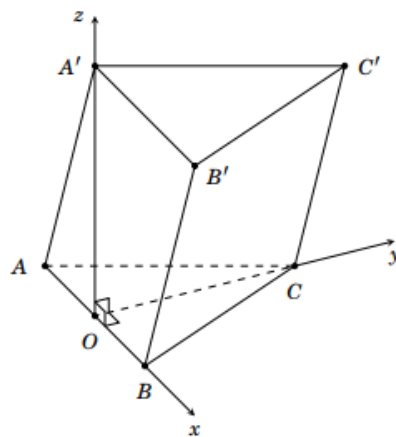


Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.
- b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.
- c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$.
- d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$.
- b) Tọa độ điểm $C(0;\sqrt{3};0)$.
- c) Tọa độ điểm $A'(0;-1;\sqrt{3})$.
- d) Tọa độ điểm $C'(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$.



Câu 32: Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

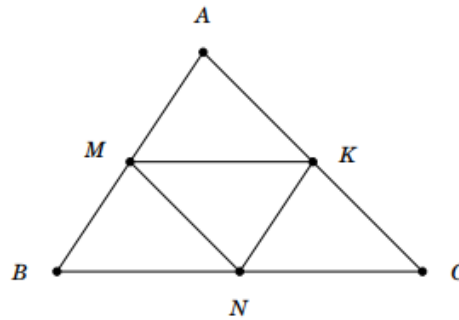
Câu 33: Cho ba điểm $A(3; 3; -6), B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.

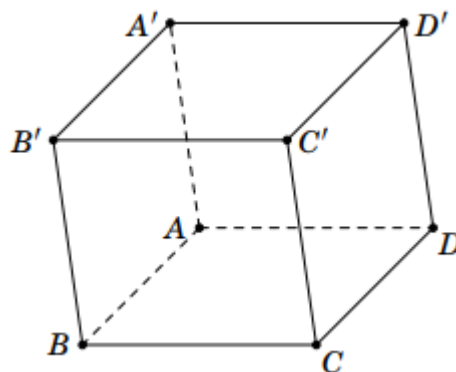
d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Câu 34: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 2; 0), D'(-1; 3; 5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A', ADD'A'$.

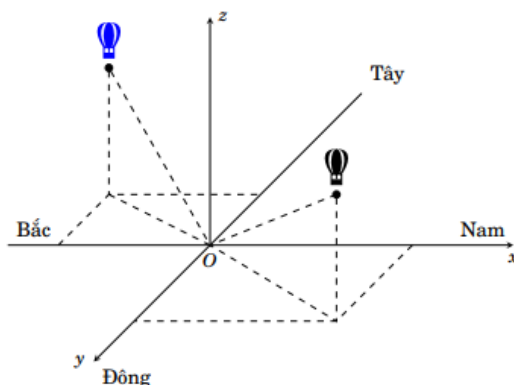
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$. b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.



Câu 35: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.
- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1; 1,5; -1; 0,8)$.
- Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.
- Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 36: Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- $|\vec{a}| = 2$.
- $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.
- $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
- $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 37: Cho hai véctơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m-1; 2m; 3)$.

- $|\vec{u}| = \sqrt{13}$.
- $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.

c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0), B(0;1;1), C(2;1;0)$.

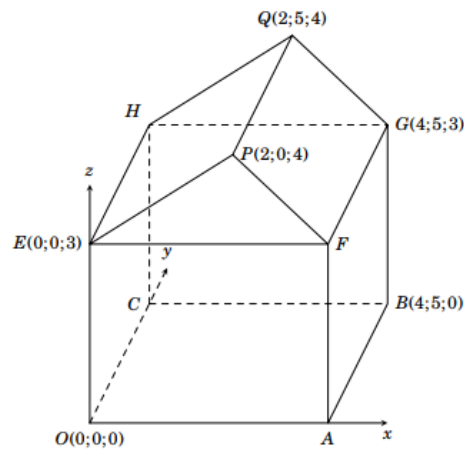
a) Tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 39: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (3;2;5)$ và $\vec{b} = (3m+2;3;6-n)$. Tính giá trị biểu thức $6m+2n$ để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.

- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1;2;3)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;2;-3)$ và $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:
- Câu 4:** Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;1;1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.
- Câu 5:** Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1;-1;1)$, $B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .
- Câu 6:** Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC , biết $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài AM .
- Câu 7:** Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$.
- Câu 8:** Trong không gian Oxy , cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3;4;8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.
- Câu 9:** Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (2;5;-3)$, $\vec{b} = (0;-4;0)$. Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.
- Câu 10:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\vec{OA} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{OC} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Điểm $D(x;y;z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P = 2x + y - z$.
- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ vec tơ $\vec{a} = (x;0;3)$; $\vec{b} = (3;y;0)$. Tính $P = x^2 + y^2$.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{ON} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2;-3;a)$; $N(-1;b;-1)$. Tính $T = 2a - 3b$.
- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3;-5;2)$; $\vec{b} = (2;1;-1)$. Vector $\vec{a} = 3\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$. Tính $P = y^2 - z^2$.
- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1;0;-2)$, $N(5;1;-6)$. Tính $\vec{OM} = \vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{ON} = x\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$. Tính $P = x^3 + y^3$.
- Câu 15:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x;y;z)$. Tính $P = x^3 + y^3 + z^3$.

- Câu 16:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , các điểm $B; D; A'$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tìm tọa độ của $C'(x; 3; z)$. Tính $P = x - z$.
- Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A ; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Gọi M là trung điểm SC . Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Tính $T = x + y - \frac{3}{2}z$.
- Câu 18:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $|\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}|$.
- Câu 19:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , các điểm $B; D; A'$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tọa độ điểm $C'(x; y; z)$. Tính $P = x - 2y + z$.
- Câu 20:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng
- Câu 21:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-2; 2; 0); \vec{b} = (2; 2; 0)$ và $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng
- Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng
- Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 4), B(1; y; -1), C(x; 4; 3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $5x + y$ là:
- Câu 24:** Trong không gian Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; m; 2), \vec{b} = (m + 1; 2; 1), \vec{c} = (0; m - 2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.
- Câu 25:** Trong không gian Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (2; 2t - 1; 0)$. Xác định giá trị t để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.
- Câu 26:** Trong không gian Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; -2), \vec{b} = (-1; -1; 0)$. Số đo độ của góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$?
- Câu 27:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; -2), B(2; 2; -4)$. Giả sử $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- Câu 28:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1), B(2; 1; 0), C(-3; -1; 1)$. Giả sử điểm $D(a, b, c)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$. Tính $a + b + c$

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Câu 30: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a+b+c$.

BÀI 2: TOẠ ĐỘ CỦA VECTO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

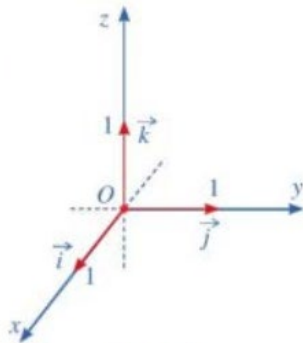
I. TOẠ ĐỘ CỦA MỘT ĐIỂM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ trong không gian, hay đơn giản gọi là hệ tọa độ $Oxyz$

Chú ý: Ta gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz .

- Trong hệ tọa độ $Oxyz$ (Hình 19), ta gọi: điểm O là gốc tọa độ; Ox là trục hoành, Oy là trục tung, Oz là trục cao; các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.



Hình 19

Nhận xét: Các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau.

Ví dụ 1. Một sân tennis với hệ tọa độ $Oxyz$ được chọn như ở Hình 20.

- Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?



Hình 20

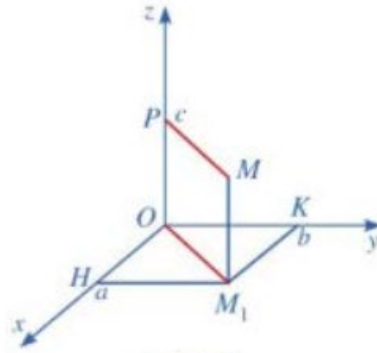
Lời giải

- Mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) .
- Trục Oz vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên trục Oz vuông góc với mặt sân.

2. Tọa độ của một điểm

Nhận xét: Bộ số $(4;5;3)$ gọi là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Ta có định nghĩa sau (Hình 23):



Hình 23

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M .

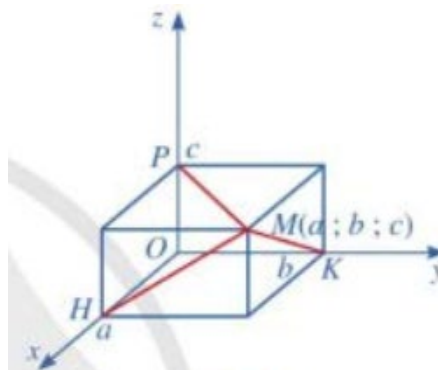
Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .

Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a;b;c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a;b;c)$.

Chú ý

- Tọa độ của một điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ luôn tồn tại và duy nhất.
- Người ta còn có thể xác định tọa độ điểm M theo cách sau (Hình 24):



Hình 24

Xác định hình chiếu H của điểm M trên trục hoành Ox , điểm H ứng với số a trên trục Ox . Số a là hoành độ của điểm M .

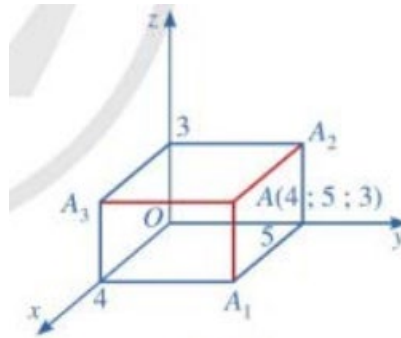
Xác định hình chiếu K của điểm M trên trục tung Oy , điểm K ứng với số b trên trục Oy . Số b là tung độ của điểm M .

Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Khi đó, bộ số $(a;b;c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;5;3)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng toạ độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ (Hình 25). Tìm toạ độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Lời giải



Hình 25

Gọi $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$.

Với $A(4; 5; 3)$, đặt $x_A = 4, y_A = 5, z_A = 3$. Ta có:

$x_1 = x_A = 4; y_1 = y_A = 5$ và $z_1 = 0$ (vì A_1 nằm trên mặt phẳng (Oxy)). Do đó $A_1(4; 5; 0)$.

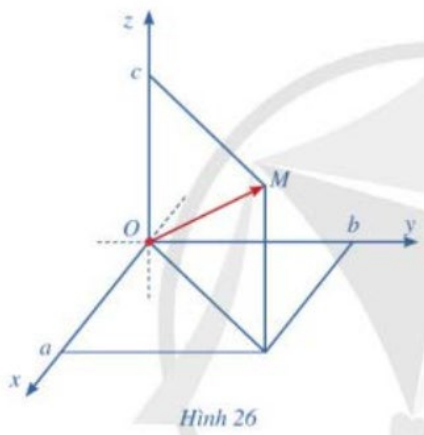
$y_2 = y_A = 5; z_2 = z_A = 3$ và $x_2 = 0$ (vì A_2 nằm trên mặt phẳng (Oyz)). Do đó $A_2(0; 5; 3)$.

$x_3 = x_A = 4; z_3 = z_A = 3$ và $y_3 = 0$ (vì A_3 nằm trên mặt phẳng (Ozx)). Do đó $A_3(4; 0; 3)$.

II. TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTOR

Toạ độ của điểm M được gọi là toạ độ của vector $\overrightarrow{OM}$.

Nếu $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(a; b; c)$ thì ta viết $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$, trong đó a gọi là hoành độ của vector $\overrightarrow{OM}$, b gọi là tung độ của vector $\overrightarrow{OM}$ và c gọi là cao độ của vector $\overrightarrow{OM}$ (Hình 26).



Hình 26

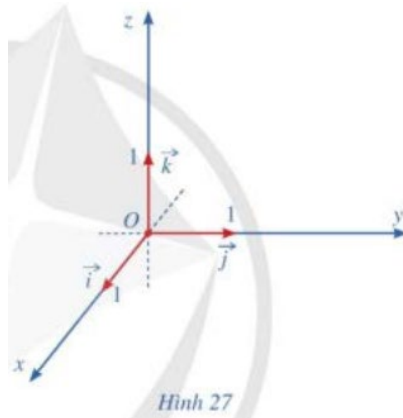
Chú ý: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, ta có:

$$\overrightarrow{OM} = (a; b; c) \Leftrightarrow M(a; b; c);$$

Vector đơn vị $\vec{i}$ trên trục Ox có toạ độ là $\vec{i} = (1; 0; 0)$;

Vector đơn vị $\vec{j}$ trên trục Oy có tọa độ là $\vec{j} = (0;1;0)$;

Vector đơn vị $\vec{k}$ trên trục Oz có tọa độ là $\vec{k} = (0;0;1)$ (Hình 27).



Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-4;3;-1)$ và $N(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.

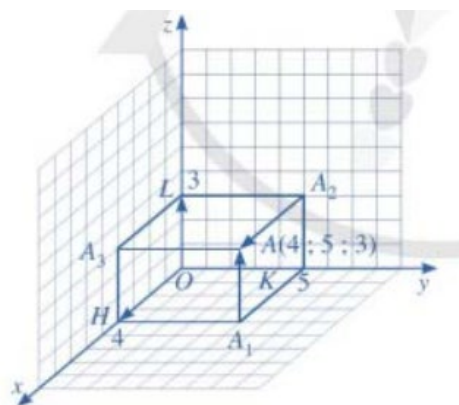
Lời giải

Ta có: $M(-4;3;-1)$ và $N(2;-1;-3)$. Do đó, $\overrightarrow{OM} = (-4;3;-1), \overrightarrow{ON} = (2;-1;-3)$.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ của một vector $\vec{u}$ là tọa độ của điểm A , trong đó A là điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.

Nếu $\vec{u}$ có tọa độ $(a;b;c)$ thì ta viết $\vec{u} = (a;b;c)$, trong đó a gọi là hoành độ, b gọi là tung độ và c gọi là cao độ của vector $\vec{u}$.

Ví dụ 4. Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_2A}$ ở Hình 30.



Hình 30

Lời giải

Trong Hình 30, ta có: $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{OH}$ mà $L(0;0;3)$ và $H(4;0;0)$, Do đó, $\overrightarrow{A_1A} = (0;0;3)$ và $\overrightarrow{A_2A} = (4;0;0)$

Ta có định lý sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, nếu $\vec{u} = (a; b; c)$ thì $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Ngược lại, nếu $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ thì $\vec{u} = (a; b; c)$.

Chú ý: Với $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ta có: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

Như vậy, mỗi vectơ hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ của nó.

Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và vectơ $\vec{u} = (3; -4; 2)$. Hãy biểu diễn theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$ mỗi vectơ sau:

a) $\overrightarrow{OA}$;

b) $\vec{u}$.

Lời giải

a) Vì điểm A có tọa độ là $(1; 2; -3)$ nên $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -3)$.

Do đó, $\overrightarrow{OA} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + (-3)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

b) Vì $\vec{u} = (3; -4; 2)$ nên $\vec{u} = 3\vec{i} + (-4)\vec{j} + 2\vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ta có định lý sau:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Ví dụ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành có ba đỉnh $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm tọa độ của điểm D .

Lời giải

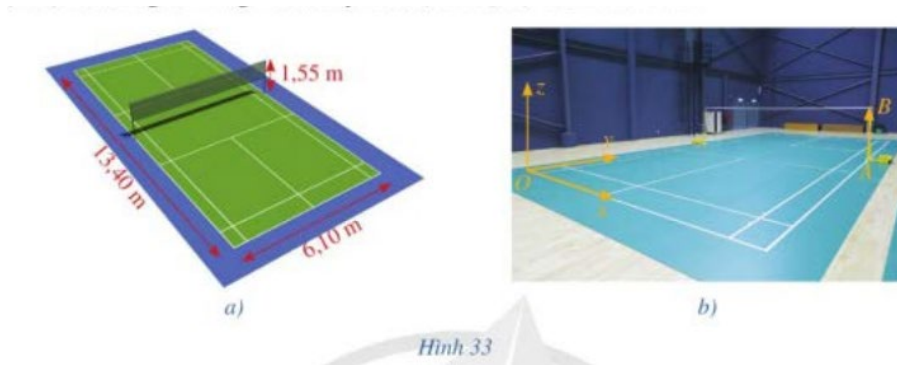
a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 3 - 1; 1 - (-2)) = (3; 2; 3)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; -2 - y_D; 2 - z_D)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 3 \\ -2 - y_D = 2 \\ 2 - z_D = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \\ z_D = -1 \end{cases}$.

Vậy $D(-4; -4; -1)$.

Ví dụ 7. Hình 33a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó như ở Hình 33b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$.



Lời giải

Gọi tọa độ điểm A là $(x_A; y_A; z_A)$. Vì chiều rộng của sân là 6,1 m nên $x_A = 6,1$. Do một nửa chiều dài của sân là 6,7 m nên $y_A = 6,7$. Điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $z_A = 0$. Vì vậy, điểm A có tọa độ là $(6,1; 6,7; 0)$.

Độ dài đoạn thẳng AB là 1,55 m nên điểm B có tọa độ là $(6,1; 6,7; 1,55)$.

Vậy ta có: $\overrightarrow{AB} = (6,1 - 6,1; 6,7 - 6,7; 1,55 - 0)$, tức là $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 1,55)$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{OA}$ là:

- A. $(1; 2; 3)$. B. $(1; 0; 3)$. C. $(0; 2; 3)$. D. $(1; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A(1; 2; 3)$. Do đó $\overrightarrow{OA} = (1; 2; 3)$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (-1; 4; 2)$ và điểm A . Biết $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$. Tọa độ của điểm A là:

- A. $(1; 4; 2)$. B. $(-1; 4; 2)$. C. $(1; -4; -2)$. D. $(-1; -4; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ mà $\vec{u} = (-1; 4; 2)$. Do đó $\overrightarrow{OA} = (-1; 4; 2)$. Từ đó suy ra $A(-1; 4; 2)$.

3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là:

- A. $(-2; -1; 3)$. B. $(2; 1; 3)$. C. $(-2; 0; 3)$. D. $(-2; -1; -3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (-2)\vec{i} + (-1)\vec{j} + 3\vec{k}$. Do đó $\vec{u} = (-2; -1; 3)$.

4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(4; -3; 1)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $(-3; 2; 1)$. B. $(3; -2; -1)$. C. $(5; -4; 3)$. D. $(3; -4; -1)$.

Lời giải**Chọn B**

Với $A(1; -1; 2)$ và $B(4; -3; 1)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (4 - 1; -3 - (-1); 1 - 2) = (3; -2; -1)$.

5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (4; 2; 3)$ và điểm $A(1; 1; 1)$. Tọa độ điểm C thỏa mãn

$\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ là:

- A. $(4; 2; 3)$. B. $(1; 1; 1)$. C. $(5; 3; 4)$. D. $(3; 1; 2)$.

Lời giải**Chọn C**

Gọi tọa độ điểm C là $(x_C; y_C; z_C)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (x_C - 1; y_C - 1; z_C - 1)$.

Với $\vec{u} = (4; 2; 3)$ thì ta có $\overrightarrow{AC} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 4 \\ y_C - 1 = 2 \\ z_C - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = 3 \\ z_C = 4 \end{cases}$. Vậy $C(5; 3; 4)$.

6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) . Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Lời giải

Gọi $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ và $A_3(x_3; y_3; z_3)$. Với $A(3; -2; -1)$, đặt $x_A = 3, y_A = -2, z_A = -1$.

Ta có $x_1 = x_A = 3; y_1 = y_A = -2; z_1 = 0$ (vì A_1 nằm trong mặt phẳng (Oxy)). Do đó $A_1(3; -2; 0)$.

$y_2 = y_A = -2; z_2 = z_A = -1; x_2 = 0$ (vì A_2 nằm trên mặt phẳng (Oyz)). Do đó $A_2(0; -2; -1)$.

$x_3 = x_A = 3; z_3 = z_A = -1; y_3 = 0$ (vì A_3 nằm trên mặt phẳng (Ozx)). Do đó $A_3(3; 0; -1)$.

7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Lời giải

Gọi $H(x_1; y_1; z_1)$, $K(x_2; y_2; z_2)$ và $P(x_3; y_3; z_3)$. Với $A(-2; 3; 4)$, đặt $x_A = -2, y_A = 3, z_A = 4$.

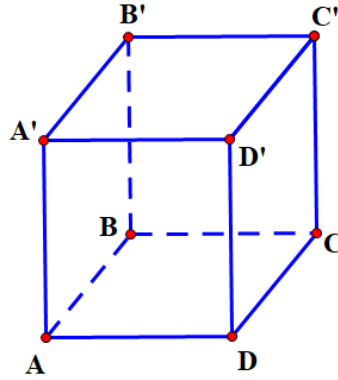
Ta có $x_1 = x_A = -2; y_1 = 0; z_1 = 0$ (vì H nằm trên trục Ox). Do đó $H(-2; 0; 0)$.

$y_2 = y_A = 3; x_2 = 0; z_2 = 0$ (vì K nằm trên trục Oy). Do đó $K(0; 3; 0)$.

$z_3 = z_A = 4; x_3 = 0; y_3 = 0$ (vì P nằm trên trục Oz). Do đó $P(0; 0; 4)$.

8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(4; 6; -5)$, $B(5; 7; -4)$, $C(5; 6; -4)$, $D'(2; 0; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (5 - 4; 7 - 6; -4 - (-5)) = (1; 1; 1)$.

Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$, ta có $\overrightarrow{DC} = (5 - x_D; 6 - y_D; -4 - z_D)$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $ABCD$ là hình bình hành.

Do đó, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Suy ra
$$\begin{cases} 1 = 5 - x_D \\ 1 = 6 - y_D \\ 1 = -4 - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \\ z_D = -5 \end{cases} \text{ . Khi đó } D(4; 5; -5).$$

Ta có $\overrightarrow{DD'} = (2 - 4; 0 - 5; 2 - (-5)) = (-2; -5; 7)$.

Gọi tọa độ của điểm A' là $(x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$, ta có $\overrightarrow{AA'} = (x_{A'} - 4; y_{A'} - 6; z_{A'} - (-5))$.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 4 = -2 \\ y_{A'} - 6 = -5 \\ z_{A'} - (-5) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 1 \\ z_{A'} = 2 \end{cases} \text{ . Do đó } A'(2; 1; 2).$

Gọi tọa độ của điểm B' là $(x_{B'}; y_{B'}; z_{B'})$, ta có $\overrightarrow{BB'} = (x_{B'} - 5; y_{B'} - 7; z_{B'} - (-4))$.

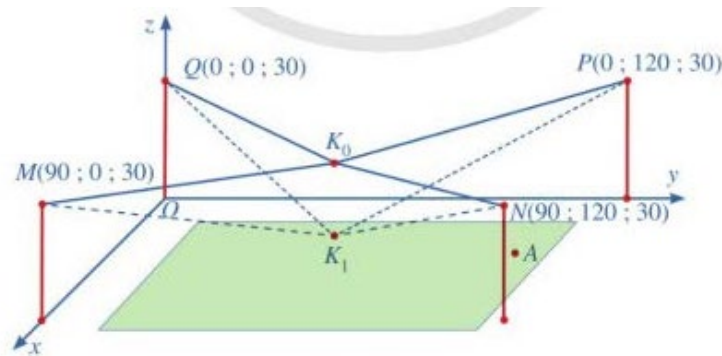
Ta có: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} - 5 = -2 \\ y_{B'} - 7 = -5 \\ z_{B'} - (-4) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = 3 \\ y_{B'} = 2 \\ z_{B'} = 3 \end{cases} \text{ . Suy ra } B'(3; 2; 3).$

Gọi tọa độ của điểm C' là $(x_{C'}; y_{C'}; z_{C'})$, ta có $\overrightarrow{CC'} = (x_{C'} - 5; y_{C'} - 6; z_{C'} - (-4))$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} - 5 = -2 \\ y_{C'} - 6 = -5 \\ z_{C'} - (-4) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = 3 \\ y_{C'} = 1 \\ z_{C'} = 3 \end{cases}. \text{ Suy ra } C'(3;1;3).$$

Vậy $D(4;5;-5)$, $A'(2;1;2)$, $B'(3;2;3)$, $C'(3;1;3)$.

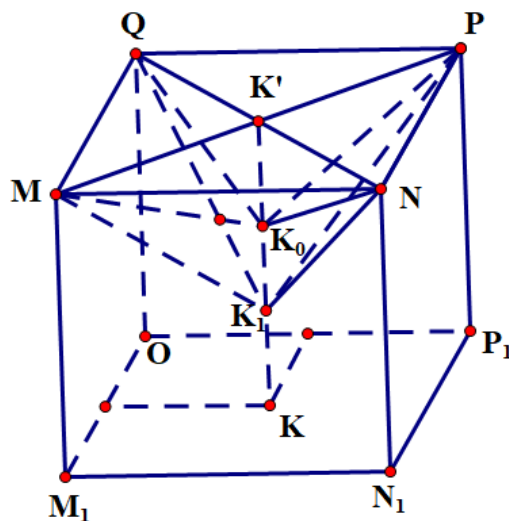
9. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90;0;30)$, $N(90;120;30)$, $P(0;120;30)$, $Q(0;0;30)$ (Hình 34). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 (Nguồn: <https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie VI).



Hình 34

Tìm tọa độ của các điểm K_0 , K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

Lời giải



Gọi M_1 , N_1 , P_1 , K lần lượt là hình chiếu của M , N , P , K_0 lên mặt phẳng (Oxy) .

Ta thấy $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật. Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ .

Khi đó $K'Q = K'P = K'N = K'M$. Vì $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng.

Khi đó, các điểm K', K_0, K_1, K có hoành độ và tung độ bằng nhau.

Theo bài ra, cao độ của K_0 và K_1 lần lượt là 25 và 19. Giả sử $K_0(x; y; 25)$ và $K_1(x; y; 19)$.

Ta có $MNPQ.M_1N_1P_1O$ là hình hộp chữ nhật nên $K'K = OQ$, suy ra cao độ của K' bằng 30.

Do đó, $K'(x; y; 30)$. Ta có $\overrightarrow{K'Q} = (-x; -y; 0)$, $\overrightarrow{NK'} = (x - 90; y - 120; 0)$. Vì K' là giao hai đường chéo của hình chữ nhật $MNPQ$ nên K' là trung điểm của NQ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{K'Q} = \overrightarrow{NK'} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 90 \\ -y = y - 120 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 60 \end{cases}.$$

Do vậy, $K_0(45; 60; 25); K_1(45; 60; 19); \overrightarrow{K_0K_1} = (0; 0; -6)$

BÀI 3: BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ thì

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2);$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2);$$

$$m\vec{u} = (mx_1; my_1; mz_1); m \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét: Hai vector $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1), \vec{v} = (x_2; y_2; z_2) (\vec{v} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số

$$\text{thực } m \text{ sao cho } \begin{cases} x_1 = mx_2 \\ y_1 = my_2 \\ z_1 = mz_2 \end{cases}.$$

Ví dụ 1. Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2), \vec{b} = (2; 1; -1), \vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vector sau:

$$\text{a) } 3\vec{a}; \quad \text{b) } 2\vec{a} - \vec{b}; \quad \text{c) } \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\text{a) } 3\vec{a} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3; 3 \cdot 2). \text{ Vậy } 3\vec{a} = (-6; 9; 6).$$

$$\text{b) Ta có } 2\vec{a} = (-4; 6; 4) \text{ và } \vec{b} = (2; 1; -1). \text{ Do đó, } 2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2; 6 - 1; 4 - (-1)). \text{ Vậy } 2\vec{a} - \vec{b} = (-6; 5; 5).$$

$$\text{c) Do } \vec{a} = (-2; 3; 2) \text{ và } 2\vec{b} = (4; 2; -2) \text{ nên } \vec{a} + 2\vec{b} = (2; 5; 0). \text{ Ngoài ra, vì } -\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}\right) \text{ nên } \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{9}{2}\right).$$

II. TỌA ĐỘ TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG. TỌA ĐỘ TRỌNG TÂM TAM GIÁC

Cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Nếu $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$. Nếu $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(-2;1;0), B(0;2;5), C(5;0;2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

Do $M(x_M; y_M; z_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+0}{2} = -1; y_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; z_M = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Vậy $M\left(-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Do $G(x_G; y_G; z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên

$$x_G = \frac{-2+0+5}{3} = 1; y_G = \frac{1+2+0}{3} = 1; z_G = \frac{0+5+2}{3} = \frac{7}{3}$$

Vậy $G\left(1; 1; \frac{7}{3}\right)$.

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Nếu $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nhận xét

a) Nếu $\vec{a} = (x; y; z)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b) Nếu $A(x_1; y_1; z_1)$ và $B(x_2; y_2; z_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

c) Với hai vector $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ khác vector $\vec{0}$, ta có:

$\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0), B(0;0;1)$ và $C(2;1;1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi của tam giác ABC .

c) Tính $\cos \widehat{ABC}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1;0;-1), \overrightarrow{BC} = (2;1;0)$. Suy ra $\overrightarrow{BA} = (1;0;-1) \neq k\overrightarrow{BC} = (2k;k;0)$ với mọi $k \in \mathbb{R}$.

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Ta thấy: $BA = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}, AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

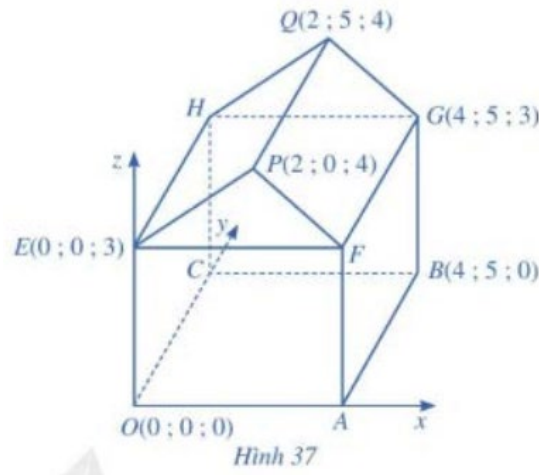
Vậy chu vi của tam giác ABC bằng $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

c) Ta có: $\cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 4. Hình 37 minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

a) Tìm tọa độ của các điểm A, H và F .

b) Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



Lời giải

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$; $z_F = z_E = 3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên tọa độ điểm F là $(4;0;3)$.

b) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có:

$$\overrightarrow{FP} = (-2; 0; 1), \overrightarrow{FE} = (-4; 0; 0).$$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

Ví dụ 5. Hãy giải bài toán trong phần mở đầu.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $P(0;0;4), Q_1(0;-1;0), Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right), Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{PQ_1} = (0-0; -1-0; 0-4)$ hay $\overrightarrow{PQ_1} = (0; -1; -4)$;

$\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0; \frac{1}{2}-0; 0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -4\right)$;

$\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-0; \frac{1}{2}-0; 0-4\right)$ hay $\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -4\right)$

Suy ra $|\overrightarrow{PQ_1}| = |\overrightarrow{PQ_2}| = |\overrightarrow{PQ_3}| = \sqrt{17}$. Do đó $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$.

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho:

$$\vec{F}_1 = c\overrightarrow{PQ_1} = (0; -c; -4c); \vec{F}_2 = c\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c; \frac{1}{2}c; -4c\right); \vec{F}_3 = c\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c; \frac{1}{2}c; -4c\right)$$

Suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -12c)$.

Mặt khác, ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$, trong đó $\vec{F} = (0; 0; -360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay.

Suy ra $-12c = -360$, tức là $c = 30$.

Vậy $\vec{F}_1 = (0; -30; -120); \vec{F}_2 = (15\sqrt{3}; 15; -120); \vec{F}_3 = (-15\sqrt{3}; 15; -120)$.

IV. CÁCH TÌM TỌA ĐỘ CỦA MỘT VECTƠ VUÔNG GÓC VỚI HAI VECTƠ CHO TRƯỚC

Ta có định lí sau:

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ không cùng phương.

Khi đó, vectơ $\vec{w} = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1)$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Nhận xét

Vectơ $\vec{w}$ trong định lí trên còn được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}]$

Để thuận tiện trong cách viết, ta quy ước: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, với a, b, c, d là các số thực.

Khi đó, với hai vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (y_1z_2 - y_2z_1; z_1x_2 - z_2x_1; x_1y_2 - x_2y_1).$$

Hai vector $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương khi và chỉ khi vector $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$.

Ví dụ 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (2; 0; -3)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 9; 4).$$

Chọn $\vec{w} = (6; 9; 4)$. Theo định lí trên, vector $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; -2)$; $\vec{b} = (3; 1; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{a} - \vec{b}$ là:

- A. $(1; -2; 1)$. B. $(5; 4; -3)$. C. $(-1; 2; -1)$. D. $(-1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{a} - \vec{b} = (2 - 3; 3 - 1; -2 - (-1)). \text{ Do đó } \vec{a} - \vec{b} = (-1; 2; -1).$$

2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0; 1; 1)$; $\vec{b} = (-1; 1; 0)$. Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-1; 2; 3)$; $\vec{b} = (3; 1; -2)$; $\vec{c} = (4; 2; -3)$.

a) Tìm tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm tọa độ của vector $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } 2\vec{a} = (-2; 4; 6), \text{ do đó } 2\vec{a} + \vec{b} = (-2 + 3; 4 + 1; 6 + (-2)) = (1; 5; 4).$$

$$\text{Lại có } 3\vec{c} = (12; 6; -9), \text{ do đó } \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (1 - 12; 5 - 6; 4 - (-9)). \text{ Vậy } \vec{u} = (-11; -1; 13).$$

b) Ta có $\vec{v} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$, suy ra $\vec{v} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$. Ta có $\vec{a} + \vec{c} = (-1+4; 2+2; 3+(-3)) = (3; 4; 0)$.

Mà $2\vec{b} = (6; 2; -4)$, do đó $\vec{v} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b} = (3-6; 4-2; 0-(-4)) = (-3; 2; 4)$.

4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -2; 1)$; $\vec{b} = (2; 1; 3)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vectơ $\vec{c}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Ta có $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (-7; -4; 6)$. Chọn $\vec{c} = (-7; -4; 6)$ ta có vectơ $\vec{c}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; 2; -1)$; $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Tính cosin của góc $(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-6}{3\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}$.

6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 0)$, $B(4; 0; 5)$, $C(0; 2; -3)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

b) Tính chu vi tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d) Tính $\cos \widehat{BAC}$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; -3; 5)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -1; -3)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (6; -3; 5) \neq k\overrightarrow{AC} = (2k; -k; -3k)$ với mọi $k \in \mathbb{R}$, do đó hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy ba điểm A , B , C không thẳng hàng.

b) Ta có $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{70}$; $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-4; 2; -8)$. Suy ra $BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{21}$.

Chu vi tam giác ABC là $C = AB + BC + AC = \sqrt{70} + \sqrt{14} + 2\sqrt{21}$.

c) Gọi tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(x_G; y_G; z_G)$.

Ta có $x_G = \frac{-2+4+0}{3} = \frac{2}{3}; y_G = \frac{3+0+2}{3} = \frac{5}{3}; z_G = \frac{0+5+(-3)}{3} = \frac{2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

d) Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{70} \cdot \sqrt{14}} = 0$.

Do đó hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ vuông góc với nhau hay hai đường thẳng AB và AC vuông góc với nhau nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Vậy $\cos \widehat{BAC} = 0$.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$;

b) $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1); \overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $ABCD$ là hình bình hành, do đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (1+0; 1+(-1); 1+0) = (1; 0; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-1; -2; -1)$. Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} = (-1; -2; -1)$.

Ta có $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (2; 0; -2)$.

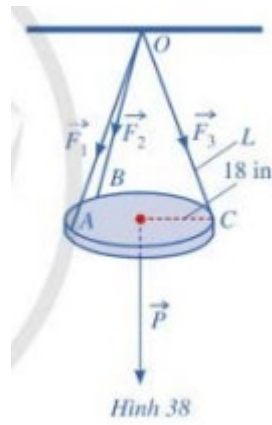
Chọn $\vec{a} = (2; 0; -2)$, vector $\vec{a}$ vuông góc với cả hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$.

b) Ta có $\overrightarrow{AC'} = (3; 5; -6); \overrightarrow{BD} = (-1; -2; -1)$.

Mà $[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD}] = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = (-17; 9; -1)$.

Chọn $\vec{b} = (-17; 9; -1)$, vector $\vec{b}$ vuông góc với cả hai vector $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

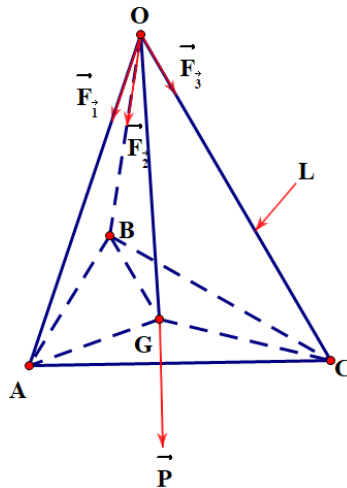
8. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình 38). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in (1 inch = 2,54 cm). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L .



Hình 38

- Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.
- Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N.

Lời giải



- Ta có $18 \text{ in} = 45,72 \text{ cm} = 0,4572 \text{ m}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

Vì tam giác ABC đều nên G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do đó, $GA = GB = GC = 0,4572 \text{ m}$.

Theo bài ra ta có $OA = OB = OC = L$ nên $OG \perp (ABC)$ và $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = L$. Do đó, $|\overrightarrow{F}_1| = |\overrightarrow{F}_2| = |\overrightarrow{F}_3|$. Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho: $\overrightarrow{F}_1 = c\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{F}_2 = c\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{F}_3 = c\overrightarrow{OC}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = c(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{OG} \quad (G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}).$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = 3c\overrightarrow{OG}.$$

Mặt khác ta lại có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$ với $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Mà trọng lượng tác dụng lên chiếc đèn là 24 N nên $\vec{P} = 24N$.

Từ đó suy ra $3c|\vec{OG}| = 24$, tức là $c = \frac{8}{|\vec{OG}|}$.

Tam giác OAG vuông tại G do $OG \perp (ABC)$ nên ta suy ra $OG = \sqrt{OA^2 - GA^2} = \sqrt{L^2 - 0,4572^2}$ (với $L > 0,4572$). Do đó $|\vec{OG}| = \sqrt{L^2 - 0,4572^2}$, suy ra $c = \frac{8}{\sqrt{L^2 - 0,4572^2}}$.

Khi đó $F = |\vec{F}_1| = c|\vec{OA}| = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 0,4572^2}}$. Vậy $F = F(L) = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 0,4572^2}}$ với $L > 0,4572$.

b) Xét hàm số $F = F(L) = \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 0,4572^2}} (L \in (0,4572; +\infty))$.

Tập xác định: $D = (0,4572; +\infty)$.

Sự biến thiên

- Giới hạn tại vô cực giới hạn vô cực và các đường tiệm cận:

$\lim_{L \rightarrow +\infty} F(L) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{8L}{\sqrt{L^2 - 0,4572^2}} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{1 - \frac{0,4572^2}{L^2}}} = 8$. Do đó, đường thẳng $F = 8$ là tiệm cận

ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{L \rightarrow 0,4572^+} F(L) = +\infty$. Do đó, đường thẳng $L = 0,4572$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

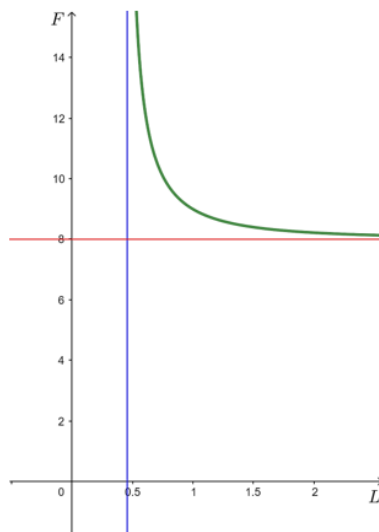
Đạo hàm $F'(L) = \frac{-8 \cdot 0,4572^2}{(L^2 - 0,4572^2)\sqrt{L^2 - 0,4572^2}}$ với $\forall L \in (0,4572; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

L	0,4572 $+\infty$	
F'(L)		-
F(L)	$+\infty$	8

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0,4572; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

Đồ thị hàm số được vẽ như hình dưới đây:



c) Ta có lực căng tối đa của mỗi sợi dây là 10 N. Với $F(L) = 10$ ta có $\frac{8L}{\sqrt{L^2 - 0,4572^2}} = 10$.

Từ đó suy ra $5\sqrt{L^2 - 0,4572^2} = 4L \Leftrightarrow 25L^2 - 5,255796 = 16L^2 \Leftrightarrow L = 0,762 \in (0,4572; +\infty)$.

Vậy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây là $L = 0,762 \text{ m} = 76,2 \text{ cm} = 30 \text{ in}$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTO

1. Phương pháp: Sử dụng khái niệm

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) $\overrightarrow{OM} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{ON} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M , N .

Lời giải

a) $\vec{a} = (2; 3; -5)$, $\vec{b} = (0; -3; 4)$, $\vec{c} = (-1; -2; 0)$.

b) $M(5; -1; 2)$, $N(1; 0; -3)$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 0; 12)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

b) $A(-5; -2; 1)$, $B(0; 4; -11)$. Tính $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Lời giải

a) $\vec{a} = (-3; 2; -1) \Leftrightarrow \vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}$

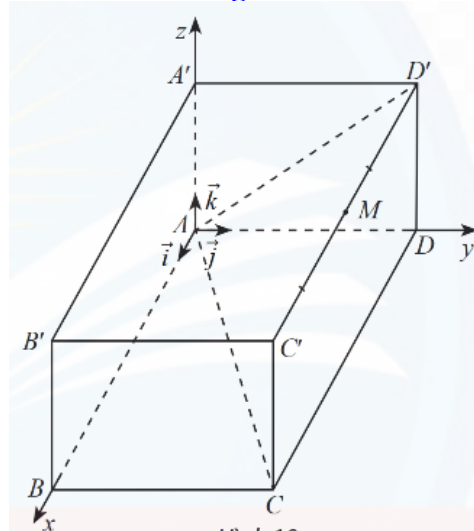
$\vec{b} = (3; 0; 12) \Leftrightarrow \vec{b} = 3\vec{i} + 12\vec{k}$.

b) $\overrightarrow{OA} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}$

$$\overrightarrow{OB} = 4\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 5, AD = 6, AA' = 9$. Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}| = AB = 5 = 5|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}, \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 9\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$.

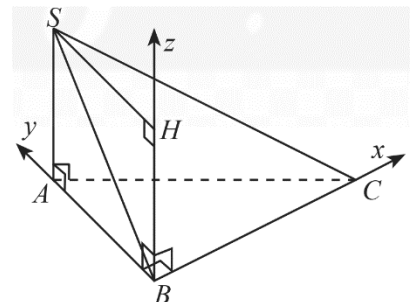
Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (5; 0; 0); \overrightarrow{AC} = (5; 6; 0); \overrightarrow{AC'} = (5; 6; 9)$.

$$\begin{aligned} \text{Vì } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) \\ &= \frac{1}{2}(5\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k} + 6\vec{j} + 9\vec{k}) = \frac{5}{2}\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM} &= \left(\frac{5}{2}; 6; 9\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3, BA = 2, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

- Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.
- Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



Lời giải

a) Quan sát hình ảnh xét đây là *hệ trục tọa độ Oxyz* với điểm $B \equiv O$.

b) Vì $B \equiv O \Rightarrow B(0; 0; 0)$

Do $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{BC}| = BC = 3 = 3|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i}$ hay

$$\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow C(3; 0; 0).$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{BA} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \Leftrightarrow A(0; 2; 0)$$

$$\overrightarrow{BH'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow H(0; 0; 2)$$

Trong hình bình hành $BASH$, ta có:

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Leftrightarrow S(0; 2; 2).$$

Vậy $A(0; 2; 0)$, $B(0; 0; 0)$, $C(3; 0; 0)$, $S(0; 2; 2)$.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ

$$\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (2; 2; -1); \vec{c} = (4; 0; -4). \text{ Tìm tọa độ của vectơ } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1; 2; 3) - (2; 2; -1) + 2 \cdot (4; 0; -4) = (1 - 2 + 8; 2 - 2 + 0; 3 + 1 - 8) = (7; 0; -4)$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$

Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\vec{a} = (4; -6; 6); 3\vec{b} = (0; 6; -3); -2\vec{c} = (-6; 2; -10).$$

$$\text{Khi đó: } \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7).$$

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

Lời giải

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(1-1)^2 + (4+2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{13}.$$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$; $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Tính giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2; 2; 0) + (2; 2; 0) + (2; 2; 2) = (2; 6; 2).$$

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{11}$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (3; m+1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k \\ m+1 = -3k \\ 3 = k.2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = -10 \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } m = -10; n = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ (tích có hướng của hai vector $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vector $\vec{p}$.

Lời giải

Ta có : $[\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0)$

Do $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k[\vec{m}, \vec{n}]$, $k > 0$

Mặt khác: $|\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow k.|\vec{m}, \vec{n}| = 15 \Leftrightarrow k.5 = 15 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Phương pháp:

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác...

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB , ta có tọa độ điểm I là
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

Vậy $I(2; -1; 5)$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

Gọi $G(x, y, z)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + (-2) + 0}{3} = 1 \\ y = \frac{-2 + 3 + 2}{3} = 1 \\ z = \frac{0 + 0 + 3}{3} = 1 \end{cases} \text{ . Vậy } G(1; 1; 1) \text{ .}$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3 - x; 1 - y; 2 - z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy $D(-4; -2; 9)$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -5; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 3; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

Lời giải

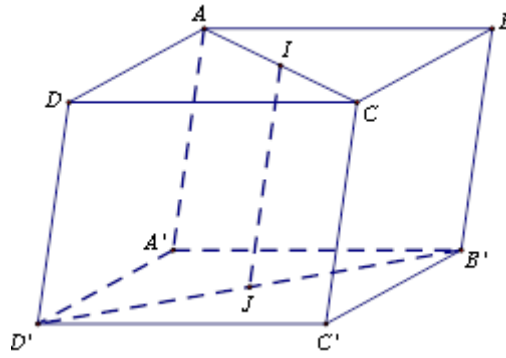
Vì $D \in Ox$ nên $D(x; 0; 0)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } AD = BC &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2 + (0-3)^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{29} \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $D(0; 0; 0)$, $D(4; 0; 0)$

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A'(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$.

Gọi J là trung điểm của $B'D' \Rightarrow J\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IJ} = (0; 1; 2)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + 3 = 0 \\ y_{A'} - 2 = 1 \\ z_{A'} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 3 \\ z_{A'} = 3 \end{cases}.$$

Vậy $A'(-3; 3; 3)$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2; 2; 6), B(-3; 1; 8), C(-1; 0; 7), D(1; 2; 3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{DC} = (-2; -2; 4), \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang và}$$

$$S_{ABCD} = 3S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Lại có } H \text{ là trung điểm của } CD \Rightarrow H(0; 1; 5)$$

$$\text{Gọi } S(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-a; 1-b; 5-c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = k[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = k(3; 3; 3) = (3k; 3k; 3k)$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{3} = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 9k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

$$+) \text{ Với } k=1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (3; 3; 3) \Rightarrow S(-3; -2; 2)$$

$$+) \text{ Với } k=-1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-3; -3; -3) \Rightarrow S(3; 4; 8)$$

$$\text{Suy ra } I(0; 1; 3)$$

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và công thức ứng dụng của tích có hướng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6.$$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 2)$ và $\vec{b} = (1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 10 - 12 - m = 0 \Leftrightarrow -2 - m = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ của điểm D .

Lời giải

Vì $D \in Oy$ nên $D(0; y; 0)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (0; -2; 4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0; -4; -2), \overrightarrow{AD} = (-2; y-1; 1)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |2 - 4y|. \text{ Vậy } V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow |2 - 4y| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -7 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Vậy $D(0; -7; 0); D(0; 8; 0)$

Ví dụ 5: Cho ba điểm $A(5; -1; 2)$, $B(1; -3; 7)$ và $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì ba điểm A, B, M thẳng hàng?

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-4; -2; 5), \overrightarrow{AM} = (x-5; y+1; -1).$$

$$\text{Để ba điểm } A, B, M \text{ thẳng hàng thì } \frac{x-5}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{-1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{29}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (m; 3; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Tìm m để ba vector trên đồng phẳng.

Lời giải

$$\text{Ta có: } [\vec{u}, \vec{v}] = (-2; m+2; m+6), \quad [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 3m+8$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}$$

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $\triangle ABC$ có $A(4; 0; 2)$, $B(1; -4; -2)$ và $C(2; 1; 1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

Lời giải

$$\text{Cách 1: Ta có } \overrightarrow{AB} = (-3; -4; -4);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; 1; -1); \overrightarrow{BC} = (1; 5; 3).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 5 - 3 = 0 \text{ nên tam giác } ABC \text{ vuông tại } C.$$

$$\text{Vậy diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot \sqrt{35} = \frac{\sqrt{210}}{2}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (8; 5; -11).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 5^2 + (-11)^2} = \frac{\sqrt{210}}{2}.$$

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; -3; 8) \text{ và } \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 6) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3).$$

$$\text{Vậy diện tích hình bình hành là } S_{ABCD} = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}.$$

Ví dụ 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$. Tìm giá trị m để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$\overrightarrow{AC} = (-1; -3; -2), \overrightarrow{MB} = (-2-m; -6-m; 2-m)$$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24} \geq \sqrt{24}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 = 0$

Vậy $m = 2$ thì $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ nhỏ nhất.

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1), B(-2; -6; 2), C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, Tìm giá trị m để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = (2 - m; 5 - m; 1 - m), \overrightarrow{MB} = (-2 - m; -6 - m; 2 - m), \overrightarrow{MC} = (1 - m; 2 - m; -1 - m)$$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m + 4)^2 \leq 28$$

Vậy $m = -4$ thì $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?



Lời giải

Gọi $Q(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (x - 800; y - 300; z - 10)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $MN = 4NQ$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(x - 800) \\ 100 = 4(y - 300) \\ 2 = 4(z - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 875 \\ y = 325 \\ z = 10,5 \end{cases} \Rightarrow Q(875; 325; 10,5)$$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875; 325; 10,5)$

Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000; 600; 14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400; 800; 16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N .



Lời giải

Gọi $N(x; y; z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$$\overrightarrow{MQ} = (400; 200; 2)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (1400 - x; 800 - y; 16 - z)$$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M \rightarrow Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N \rightarrow Q$ nên $\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ}$

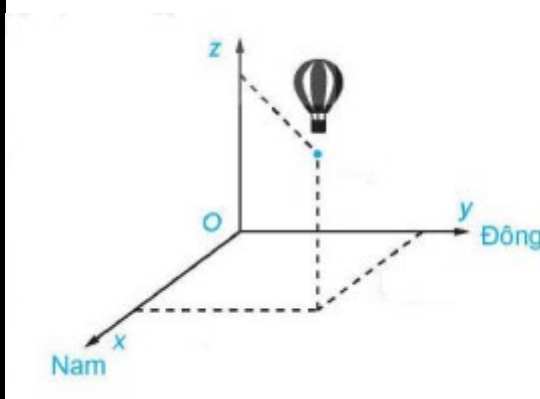
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{NQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 400 = 4(1400 - x) \\ 200 = 4(800 - y) \\ 2 = 4(16 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1300 \\ y = 750 \\ z = 15,5 \end{cases} \Rightarrow N(1300; 750; 15,5)$$

Tọa độ vị trí điểm N là $(1300; 750; 15,5)$

Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

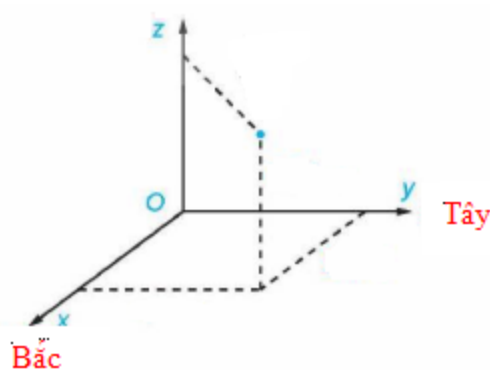
- Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5;10;0,4)$.
- Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là:

$$\sqrt{5^2 + 10^2 + (0,4)^2} \approx 11,2(km)$$

Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

- Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc máy bay có tọa độ $(50; 20; 1)$.

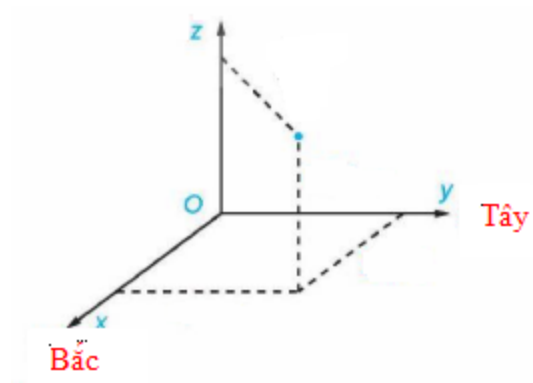
b) Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{50^2 + 20^2 + 1^2} \approx 53,9(km)$

Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20; 10; 0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30; -25; 1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$

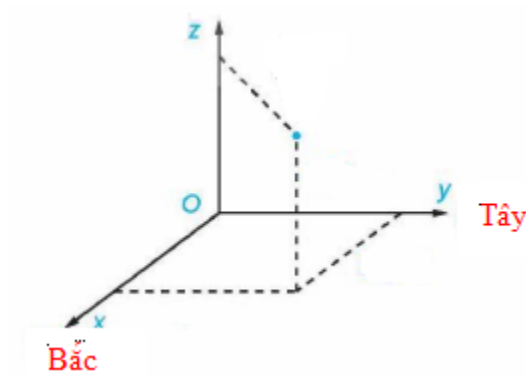
Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.



- Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.
- Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-100; -80; 1)$.

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ $(70; 60; 0,8)$.

a) khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{(-100)^2 + (-80)^2 + 1^2} \approx 128(km)$$

b) khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-100 - 70)^2 + (-80 - 60)^2 + (1 - 0,8)^2} \approx 220(km)$$

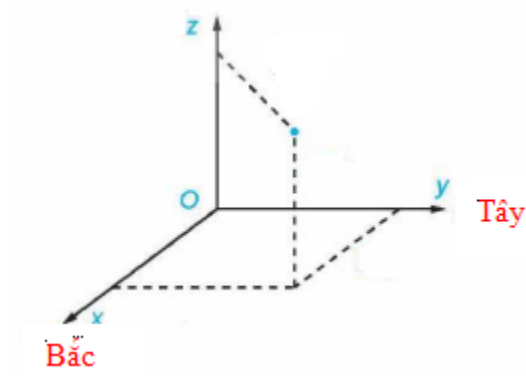
Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.



- a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.
b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60; -40; 2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80; 50; 4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $\left(\frac{-60+80}{2}; \frac{-40+50}{2}; \frac{2+4}{2}\right) = (10; 5; 3)$.

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2 + (-40-50)^2 + (2-4)^2} \approx 166,4(km)$$

b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2 + 5^2 + 3^2} \approx 11,6(km)$$

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(-1; 2; -3)$.

B. $(2; -3; -1)$.

C. $(2; -1; -3)$.

D. $(-3; 2; -1)$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (-1; 2; -3).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$.

B. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.

C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.

D. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (1; 1; -1).$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ điểm C?

A. $(3; 0; 0)$

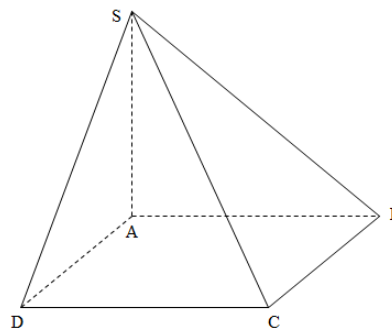
B. $(0; 0; 3)$

C. $(0; 3; 3)$

D. $(3; 3; 0)$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$. Suy ra: $C(3; 3; 0)$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Tọa độ của C' là:

A. $(2; 3; 0)$.

B. $(2; 3; 4)$.

C. $(0; 3; 4)$.

D. $(2; 0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\vec{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \vec{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \vec{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC'} = \vec{AA'} + \vec{AC} + \vec{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2; 3; 4)$$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 8$; $AD = 6$; $AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Gọi M là trung điểm D'C'. Tọa độ điểm M là:

- A. (4;6;0) B. (0;6;4) C. (4;6;4) D. (4;0;4)

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}; \quad \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành ABCD: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành ACC'A': } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

Vì M là trung điểm của D'C' nên:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

Vậy $M(4;6;4)$.

Câu 6: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2; -1; 1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ } \vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3; -2).$$

$$\text{Do đó, } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1.2 + 3.(-1) + (-2).1 = -3.$$

Câu 7: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -1; -3)$ B. $(3; 1; 1)$ C. $(1; 1; 3)$ D. $(3; 3; -1)$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1; 1; 3).$$

Câu 8: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

- A. $OA = \sqrt{5}$. B. $OA = 5$. C. $OA = 3$. D. $OA = 9$.

Lời giải

Chọn C

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Tính tọa độ vector $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

- A. $(0; -1; -5)$. B. $(2; -1; 1)$. C. $(2; 3; 1)$. D. $(0; -1; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (1; 1; -2).$$

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (2; 3; 1)$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (2; 2; -1); \vec{c} = (4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A.** $\vec{d} = (-7; 0; -4)$. **B.** $\vec{d} = (-7; 0; 4)$. **C.** $\vec{d} = (7; 0; -4)$. **D.** $\vec{d} = (7; 0; 4)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1 - 2 + 2 \cdot 4; 2 - 2 + 2 \cdot 0; 3 + 1 + 2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4).$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A.** $(3; 4; 1)$. **B.** $(-1; -2; 3)$. **C.** $(3; 5; 1)$. **D.** $(1; 2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \vec{a} - \vec{b} = (2 - 1; 3 - 1; 2 + 1) = (1; 2; 3).$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A.** $(10; -2; 13)$. **B.** $(-2; 2; -7)$. **C.** $(-2; -2; 7)$. **D.** $(-2; 2; 7)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 2\vec{a} = (4; -6; 6), 3\vec{b} = (0; 6; -3), -2\vec{c} = (-6; 2; -10)$$

$$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7).$$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-2; 1; 3)$. Vectơ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ là

- A.** $\vec{b} = (-4; 1; 3)$. **B.** $\vec{c} = (2; -1; -3)$.
C. $\vec{d} = (-4; 2; 3)$. **D.** $\vec{e} = (-4; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \vec{c} = (2; -1; -3) = -\vec{a} \Rightarrow \vec{a}, \vec{c} \text{ cùng phương.}$$

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 2; 5), C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G(0; 0; 3)$. **B.** $G(0; 0; 9)$. **C.** $G(-1; 0; 3)$. **D.** $G(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2+2+0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3+5+1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0;0;3)$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. 26.

B. 22.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} = (2;3;-3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}.$$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$.

B. $m = 4; n = -3$.

C. $m = 1; n = 0$.

D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tìm tọa độ của điểm B , biết M là trung điểm của AB .

A. $B\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2}\right)$.

B. $B(-4;9;8)$.

C. $B(5;3;-7)$.

D. $B(5;-3;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B; y_B; z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ 1 = \frac{5 + y_B}{2} \\ -2 = \frac{3 + z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}. \text{ Vậy } B(5;-3;-7).$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5), B(5; -5; 7), M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A.** $x = 4; y = 7$ **B.** $x = -4; y = -7$ **C.** $x = 4; y = -7$ **D.** $x = -4; y = 7$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2), \overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}.$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m + 1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

$$\text{Khi đó } |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ và } |\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}(2; 0; -1)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$

- A.** $(4; 0; -2)$ **B.** $(-8; 0; 4)$ **C.** $(8; 0; -4)$ **D.** $(8; 0; 4)$

Lời giải

Chọn C

Vì $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{v} = k\vec{u} = (2k; 0; -k)$, với $k > 0$.

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = 4k + k = 5k = 20 \Leftrightarrow k = 4$$

Vậy $\vec{v} = (8; 0; -4)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}.$$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = 2$

B. $m = -6$

C. $m = 0$

D. $m = -4$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MN}(-3;-2;2); \overrightarrow{NP}(2;m-2;1).$$

Tam giác MNP vuông tại

$$N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 23: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1;3;0)$, $B(-2;-2;0)$, $C(3;1;0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$

B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$

C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-3; -5; 0), \overrightarrow{AC} = (2; -2; 0).$$

$$\text{Khi đó: } \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

A. 120° .

B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$.

B. $\frac{5}{6}$.

C. $-\frac{5}{6}$.

D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5); B(4;3;2); C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+2b+c$?

A. 1.

B. 3.

C. 6.

D. -9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right). \text{ Vậy } a+2b+c=3.$$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là

A. $M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

B. $M\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.

C. $M\left(4; \frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

D. $M\left(-4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y; z)$, ta có :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x = \frac{1}{2}(3-1) \\ -1-y = \frac{1}{2}(2-1) \\ 2-z = \frac{1}{2}(-4-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{3}{2} \\ z=\frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M\left(4; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{u} = (2; -2; 1)$$

$$\text{Khi đó } |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \text{ và } |\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$$

$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

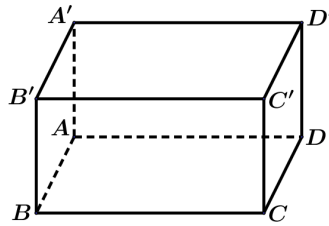
Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$; $\overrightarrow{AD} = (0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\vec{x} = m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3;22;5) = m.(2;3;1) + n.(-1;5;2) + p.(4;-1;3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \quad (I).$$

$$\text{Giải hệ phương trình (I) ta được: } \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. **C.** $m = 4; n = -3$. **D.** $m = 1; n = 0$.

Lời giải

Chọn A

Các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4; -5; 0)$. **B.** $M(2; -3; 0)$. **C.** $M(0; 0; 1)$. **D.** $M(4; 5; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy $M(4; -5; 0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 3)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-3; 1; 2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4; -2; 9)$. **B.** $D(-4; 2; 9)$. **C.** $D(4; -2; 9)$. **D.** $D(4; 2; -9)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3-x; 1-y; 2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1; 2; -3)$, $C(7; 4; -2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

B. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$

D. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2); 2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-2y \\ z+2 = -6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$.

B. $M(9;5;7)$.

C. $M(-9;5;-7)$.

D. $M(9;-5;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y-1; z+2); \overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y-1 = -6 \\ z+2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}. \text{ Vậy } M(9; -5; 7).$$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), \overrightarrow{AB} = (1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$.

B. $B(0;-1;-2)$.

C. $B(0;1;2)$.

D. $B(-2;-5;0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x; y; z)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (x-1; y-2; z+1)$

$$\text{mà } \overrightarrow{AB} = (1; 3; 1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-2 = 3 \\ z+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A = (1;0;1)$, $B = (2;1;2)$ và $D = (1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

A. $(2;0;2)$.

B. $(2;2;2)$.

C. $(2;-2;2)$.

D. $(0;-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm C là $(x; y; z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC} = (x-1; y+1; z-1)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$

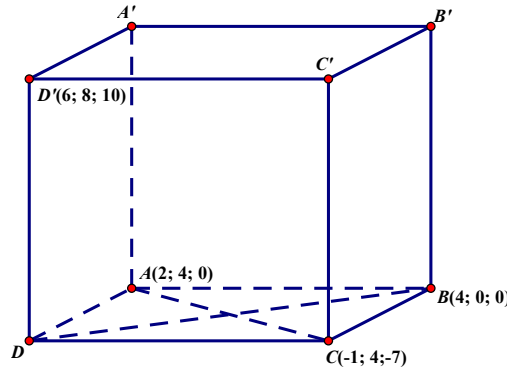
$$\text{Suy ra } \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $(2; 0; 2)$.

- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2; 4; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 4; -7)$ và $D'(6; 8; 10)$. Tọa độ điểm B' là
- A.** $B'(8; 4; 10)$. **B.** $B'(6; 12; 0)$. **C.** $B'(10; 8; 6)$. **D.** $B'(13; 0; 17)$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $D(a; b; c)$, $B'(a'; b'; c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$$\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(13; 0; 17).$$

- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.
- A.** $A'(4; 6; -5)$. **B.** $A'(2; 0; 2)$. **C.** $A'(3; 5; -6)$. **D.** $A'(3; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'} = (3; 5; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'} = (2; 5; -7)$.

Suy ra $A'(3; 5; -6)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

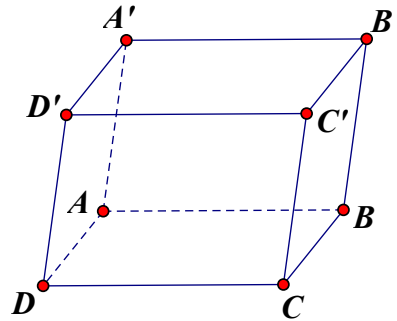
Suy ra: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 1)$, $A'(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm C' .

- A.** $C'(10; 4; 4)$. **B.** $C'(-13; 4; 4)$. **C.** $C'(13; 4; 4)$. **D.** $C'(7; 4; 4)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (3; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C.** $m = 2 - \sqrt{6}$. **D.** $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
+ (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = 1-2m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ 3m^2+3 = 1-4m+4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2-4m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2-\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0), B(2;0;-3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ có tọa độ là:

- A.** $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -2\right)$.
C. $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 1\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Vì M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ nên ta có: $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(2-x) \\ 1-y = -\frac{1}{2}(0-y) \\ -z = -\frac{1}{2}(-3-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -1 \end{cases}.$$

Vậy $M\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -1\right)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vector $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$.

- A.** $(4;0;-2)$. **B.** $(-8;0;4)$. **C.** $(8;0;-4)$. **D.** $(8;0;4)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{v} = k\vec{u} = (2k; 0; -k)$, với $k > 0$.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4k + k = 5k = 20 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy $\vec{v} = (8; 0; -4)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 4; n = -3$. C. $m = 1; n = 0$. D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m-1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}.$$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Tọa độ điểm G là trung điểm MN là:

- A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì M là trung điểm của AB nên $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

N là trung điểm của CD nên $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$. Do đó $G\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$ là

- A. một mặt phẳng. B. một điểm.
C. tập hợp rỗng. D. một đường thẳng.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của OB

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow MC \perp AI. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp những điểm M là mặt phẳng qua C và vuông góc với AI .

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$.
 Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$

- A.** $D(8;7;-1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12;-1;3)$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } D(-12; -1; 3).$$

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;1), B(2;1;2), C'(4;5;-5), D(1;-1;1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

B. $C(2;0;4)$

C. $B'(4;6;-5)$

D. $D'(4;4;6)$

Lời giải

A. Đúng

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A} \text{ và } \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{CA}$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0} \text{ (đpcm)}$$

B. Sai

$$C(2;0;2)$$

C. Đúng

D. Sai

$$D'(3;4;-6)$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, điểm $M(2;0;1), N(3;2;4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- A. $\overrightarrow{MN} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
- B. $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$
- C. $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$
- D. $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{27}$

Lời giải

- A. $\overrightarrow{MN} = 1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ nên A Sai
- B. Đúng
- C. Đúng
- D. $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ nên D Sai

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $\vec{u} = (2; 0; -1)$
- B. $\vec{a} = (-1; 2; -3)$
- C. $\vec{u} + \vec{v} = (1; 2; 3)$
- D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

Lời giải

- A. Đúng
- B. Đúng
- C. $\vec{u} + \vec{v} = (1; 5; -4)$ nên C sai
- D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) = 1$ nên D Sai

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

- A. $A(0; 0; 0)$
- B. $B(0; 3; 0)$
- C. $C(3; 0; 0)$
- D. $S(4; 0; 0)$

Lời giải

- A. Đúng
- B. Đúng
- C. Sai

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$. Suy ra: $C(3; 3; 0)$

- D. Sai
- $S(0; 0; 4)$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , các điểm $B; D; A'$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AA'} = -4\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$

C. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}$

D. $C'(2;3;4)$

Lời giải

A. Sai

$\overrightarrow{AA'} = 4\vec{k}$

B. Đúng

C. Sai

$\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$

D. Đúng

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2;3;4)$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3; SA vuông góc với đáy và $SA = 4$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc O trùng với A ; các điểm $B; D; S$ lần lượt thuộc $Ox; Oy; Oz$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AS} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$

C. $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$

D. $\overrightarrow{SC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Lời giải

A. Sai

$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$

B. Đúng

C. Đúng

D. Sai

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$

- B. $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; a)$
 C. $\overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$
 D. $\overrightarrow{AD} = (a; 2a; 0)$

Lời giải

A. Đúng

B. Sai

$$\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2a)$$

C. Đúng

D. Sai

$$\overrightarrow{AD} = (0; 2a; 0)$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(-1; 3; 0)$.

A. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $(0; 1; 1)$.

B. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 2)$.

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2; 4; -2)$

Lời giải

$$\text{A. Đúng. Vì } \begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ z_0 = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases} \text{ . Vậy tọa độ trung điểm là } (0; 1; 1).$$

B. Sai. Vì $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; -2)$.

C. Sai. Vì $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\text{D. Đúng. Vì } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1; -1; 2) \\ \overrightarrow{OB} = (-1; 3; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2; 4; -2)$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$.

A. Tọa độ vector $\vec{a} - \vec{b} = (1; 2; 3)$.

B. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.

C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

D. Cosin góc giữa vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{\sqrt{51}}{51}$

Lời giải

A. Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} = (2-1; 3-1; 2-(-1)) = (1; 2; 3)$.

B. Sai. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3$

C. Đúng. Vì $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$.

D. Sai. Vì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{2.1 + 3.1 - 2.1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{51}}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-1; -3; 2)$ và điểm $A(4; 6; -3)$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 1; -1)$.

B. Tọa độ điểm $B(2; 7; -6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

D. Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° .

Lời giải

A. Sai. Vì $\vec{a} - 2\vec{b} = (0; 7; -7)$.

B. Đúng. Vì $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_B - 4 \\ 1 = y_B - 6 \\ -3 = z_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 7 \\ z_B = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2; 7; -6)$.

C. Sai. Vì $\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{2}$.

D. Đúng. Vì $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-2.(-1) + (-3).1 + (-3).2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

A. Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

B. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

D. Tọa độ vectơ $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ bằng $(-2; 4; -1)$.

Lời giải

A. Đúng. Vì $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2}$.

B. Đúng. Vì $\vec{a}\vec{b} = (-1).1 + 1.1 + 0 = 0$

C. Sai. Vì $\vec{b}\vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2$.

D. Sai. Vì $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-2; 4; -1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

B. $\vec{b} \perp \vec{a}$.

C. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

D. $2|\vec{c}| = 6$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D.S
-------------	-------------	-------------	------------

- ☐ Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ nên A đúng
- ☐ $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$ nên $\vec{b} \perp \vec{a}$. Suy ra B đúng
- ☐ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2 \Rightarrow \vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$.
- ☐ $2|\vec{c}| = 2\sqrt{3}$ nên D sai

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;3;-2)$.

- A.** Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.
- B.** Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$
- C.** Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D = (1; 4; -4)$.
- D.** Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

A. Đúng. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

B. Đúng. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB $\left(\frac{4+2}{2}; \frac{2+1}{2}; \frac{1+3}{2}\right) = \left(3; \frac{3}{2}; 2\right)$.

C. Đúng. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4 = -1-x_D \\ 1-2 = 3-y_D \\ 3-1 = -2-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 4 \\ z_D = -4 \end{cases} \Rightarrow D(1; 4; -4).$$

D. Sai. Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-5; 1; -3) \end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$.

- A.** Ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $x + y = 5$.
- B.** Điểm $G\left(\frac{19}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x = 1; y = 3$.
- C.** Tam giác ABC vuông tại A thì $x = 13, y = -1$.
- D.** Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3x + 2y + 41$.

Lời giải

A. Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\text{Để ba điểm } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = k \cdot 6 \\ x-5 = k(-3) \\ 2 = k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $x + y = 5$.

B. Đúng. Ta có :
$$\begin{cases} \frac{3+7+9}{3} = \frac{19}{3} \\ \frac{5+x+2}{3} = \frac{8}{3} \\ \frac{-1+1+y}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

C. Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; x-5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (6; -3; y+1)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1)$$

Với $\begin{cases} x=13 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

D. Đúng. Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24 + (x-5)(-3) + 2(y+1) = -3x + 2y + 41$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.

A. $3\vec{a} = (1; 6; 9)$.

B. $\vec{a} + \vec{b} = (3; 4; 2)$.

C. $\vec{a} - \vec{c} = (3; -2; -7)$.

D. $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (7; 0; -4)$.

Lời giải

A. Sai. Vì $3\vec{a} = 3(1; 2; 3) = (3; 6; 9)$

B. Đúng. Vì $\vec{a} + \vec{b} = (1+2; 2+2; 3-1) = (3; 4; 2)$.

C. Sai. Vì $\vec{a} - \vec{c} = (1-4; 2-0; 3+4) = (-3; 2; 7)$.

D. Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1-2+2 \cdot 4; 2-2+2 \cdot 0; 3-(-1)+2 \cdot (-4)) = (7; 0; -4)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

A. Tọa độ vector $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.

B. Cosin góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.

C. Tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng 14.

D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

A. Đúng. Dựa theo định nghĩa suy ra $\vec{a} = (-1; 3; 4)$.

B. Sai. Vì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{546}}{39}$.

C. Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 14$.

D. Sai. Vì tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ khác 0.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -4)$, $\vec{c} = (-1; -3; 3)$.

- A. $\vec{a} = 2\vec{b}$.
- B. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$.
- C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$
- D. $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Lời giải

- A. Sai. Vì $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng hướng.
- B. Sai. Vì
$$\begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3 \\ |\vec{b}| = \sqrt{1 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{3\sqrt{21}}{21} |\vec{b}|$$
- C. Đúng. Vì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) = 12$.
- D. Đúng.
Ta có $2\vec{a} = (4; 2; -4), -3\vec{b} = (-3; -6; 12), 5\vec{c} = (-5; -15; 15)$
Vậy $2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = (-4; -19; 23)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vector $\vec{a} = (2; 3; 1), \vec{b} = (-1; 5; 2), \vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$.

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.
- B. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.
- C. Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.
- D. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

- A. Đúng.
Đặt $\vec{x} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} + p \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

- B. Sai. Vì $\frac{2}{-1} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.
- C. Sai. Vì $\frac{2}{-1} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.
- D. Sai. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 15$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1; 1; 2), B(1; 0; 3), C(0; 2; -2)$.

- A. Tọa độ vector $\vec{BC} = (-1; 2; -5)$.
- B. Tọa độ vector $\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
- C. Tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$.
- D. Tọa độ vector $\vec{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
------	------	------	------

☐ $\overrightarrow{BC} = (-1; 2; -5)$ nên A đúng

☐ $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$ nên B đúng

☐ Gọi tọa độ điểm D là $(x; y; z)$

$$\overrightarrow{AB} = (2; -1; 1)$$

$$\overrightarrow{DC} = (-x; 2 - y; -2 - z)$$

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -x = 2 \\ 2 - y = -1 \\ -2 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $D(-2; 3; -3)$ vậy C đúng

☐ $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ nên D sai

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2; 1; 0), C(0; 3; 0), C'(-1; 2; 1), D'(0; -2; 0)$.

A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1; 0; -1), B'(0; 4; 2)$.

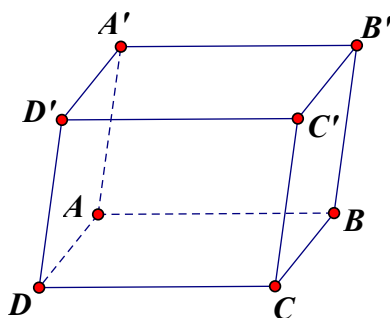
B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1; 5; 1), D(1; -1; -1)$.

C. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

D. Tọa độ vector $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
------	------	------	------



☐ Gọi tọa độ điểm A' là $(x; y; z)$

$$\overrightarrow{A'C'} = (-1 - x; 2 - y; 1 - z)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; 2; 0)$$

Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -1-x = -2 \\ 2-y = 2 \\ 1-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 0; 1) \text{ nên A sai}$$

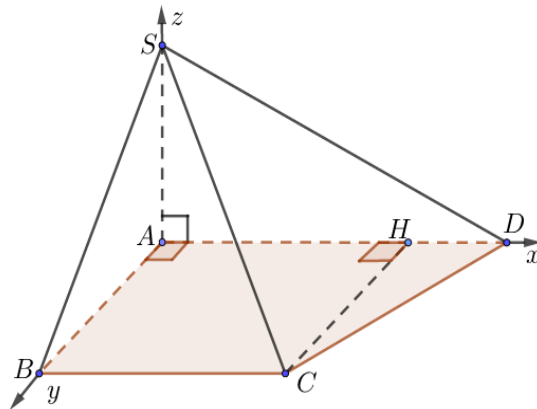
Làm tương tự ta có: $B'(0; 4; 2)$

☐ $B(1; 5; 1); D(1; -1; -1)$ nên B đúng

☐ $\overrightarrow{AB} = (1; 4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ nên C đúng

☐ $\overrightarrow{B'D} = (1; -5; -3) \Rightarrow \overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ nên D đúng

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD .



A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0; 0; 0), B(a; a; 0)$.

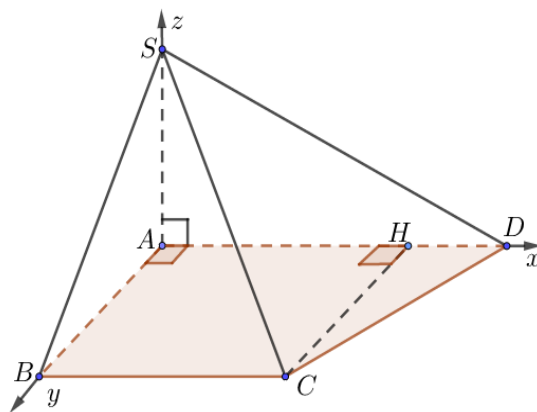
B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a; a; 0), D(2a; 0; 0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0; 0; 2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a; 0; 0)$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

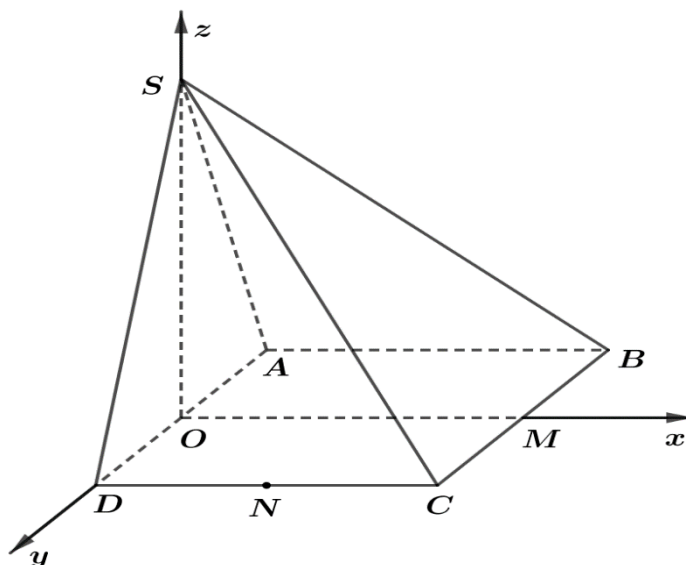


Để tính được $AB = BC = AH = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AH} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AS} = 2\vec{k}$

Khi đó ta có $A(0;0;0)$, $B(a;a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(2a;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $H(a;0;0)$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD . Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right)$.

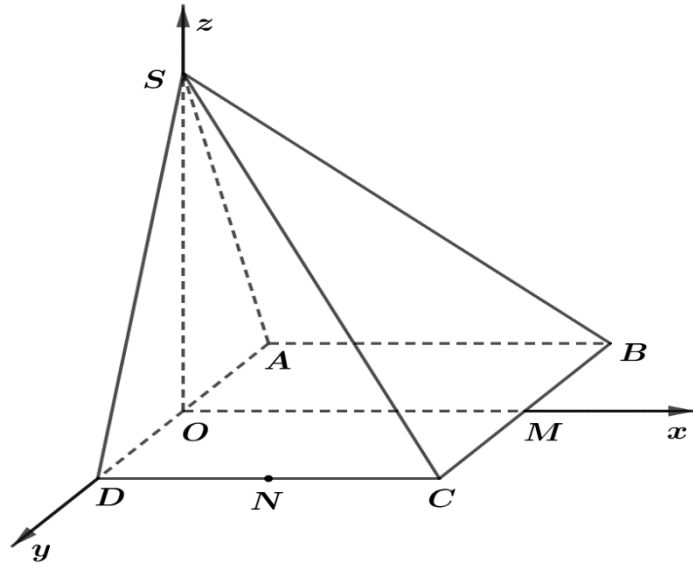
B. Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M, N là $M\left(1; 0; 0\right)$, $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

SAD là tam giác đều có cạnh bằng 1 nên $SO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(1; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M\left(1; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$.

A. $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $|\vec{b}| = \sqrt{3}$

D. $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Lời giải

A. Đ	B. S	C. Đ	D. Đ
-------------	-------------	-------------	-------------

• Xét đáp án A: $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$ đúng.

• Xét đáp án B: $\vec{a} = 2(1; -1; -2) \neq \vec{b} = (1; -1; 1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Đáp án B sai.

• $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ đúng.

• $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ đúng.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$.

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$.

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S
-------------	-------------	-------------	-------------

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$ với $\vec{u} = (11; 22; 18)$. **ĐÚNG**

+ Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} 3\vec{a} = (6; -15; 9) \\ \vec{b} = (0; -2; 1) \\ 5\vec{c} = (5; 35; 10) \end{array} \right\} \Rightarrow 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (11; 22; 18) = \vec{u}$

B. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c}$ với $\vec{x} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right)$. **ĐÚNG**

+ Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec{a} = \left(1; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ \frac{4}{3}\vec{b} = \left(0; \frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right) \\ 2\vec{c} = (2; 14; 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \left(-1; -\frac{115}{6}; -\frac{7}{6}\right) = \vec{x}$

C. $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ với $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. **ĐÚNG**

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{v} = (2; -3; 2) \Rightarrow \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$

D. $\vec{y} = \vec{b} - \vec{c}$ với $\vec{y} = -\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$. **SAI**

$\vec{y} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow \vec{y} = (-1; -5; -3) \Rightarrow \vec{y} = -\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

Lời giải

Đáp án: a sai; b đúng; c sai; d đúng

a) Tọa độ $\vec{a} = (1; -4; 3)$.

b) Khi $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì tọa độ $\vec{a}$ cũng là tọa độ điểm A . Suy ra $A(1; -4; 3)$.

$$c) \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 0 \\ 4m - 6n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \\ n^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \quad . \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy, không tồn tại m, n để $\vec{b} = \vec{0}$.

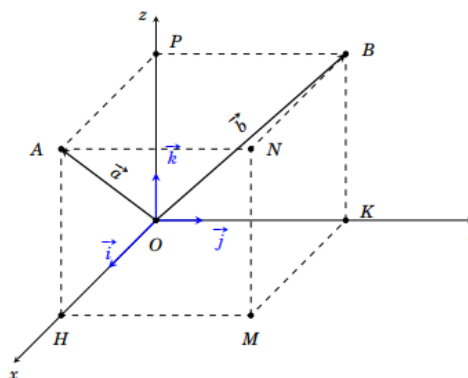
$$d) \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ 4m - 6n = -4 \\ n^2 - 3m + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $m + n = 9$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$. b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$. c) Tọa độ $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$ d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.	
--	--

Lời giải



Đáp án: a sai, b đúng, c đúng, d sai

a) Ta có $\vec{a} = (2; 0; 2) \Rightarrow \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.

b) Ta có $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (0; 2; 2)$.

c) Ta có $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ thì toạ độ véc tơ $\vec{a}$ cũng chính là toạ độ A . Suy ra $A(2;0;2)$. Tương tự $B(0;2;2)$. Từ đây, ta tính được $\overrightarrow{AB} = (-2;2;0)$

d) Nhận xét $OHMK$. $PANB$ là hình lập phương. Suy ra $\triangle OAB$ đều. Vậy $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0), \overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$ b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$. c) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;3;-6)$. d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$.	
---	--

Lời giải

Đáp án: a đúng; b đúng; c sai; d sai

a) Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{BC'} = (2; -6; 6) \Rightarrow \begin{cases} x-0=2 \\ y-3=-6 \\ z-0=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases}$

Vậy $C(2;-3;6)$.

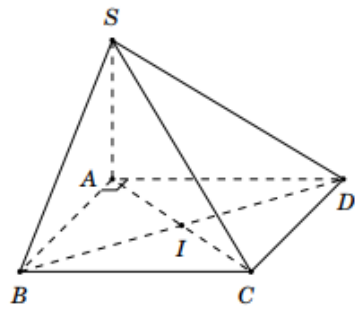
b) Gọi $O'(x; y; z)$. Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AO'} = \overrightarrow{BC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-6 \\ z+1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases}$

Vậy $O'(3;-5;5)$.

c) Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC'} = (2; -3; 6)$.

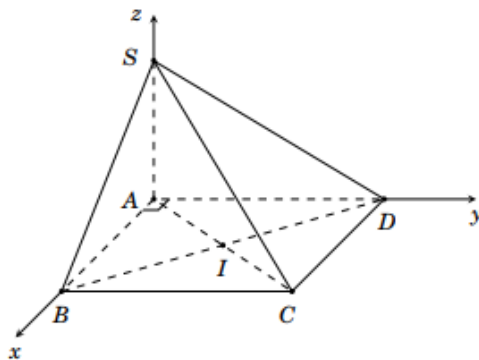
d) Ta có $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB} = (-1; 2; 1)$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1, AD=2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc toạ độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Tọa độ $D(0;2;0)$. b) Tọa độ $C(1;2;3)$. c) Tọa độ $S(2;0;0)$ d) Tọa độ $I(1;1;0)$.	
--	--

Lời giải

Đáp án: a đúng; b sai; c đúng; d sai



Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

- a) Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0;2;0)$.
- b) Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D . Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(2;2;0)$.
- c) Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0;0;3)$.
- d) Điểm $I \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(1;1;0)$.

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

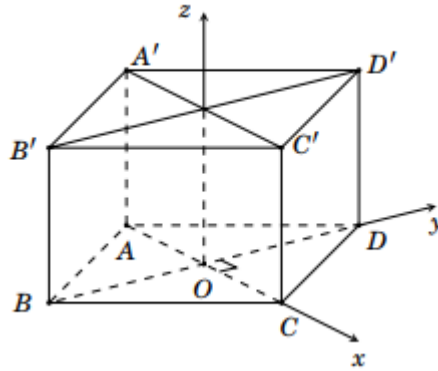
- a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.
- b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.
- c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0; 0; 2)$.

Lời giải

Đáp án: a sai; b đúng; c đúng; d sai

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì



a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2}; 0; 0)$.

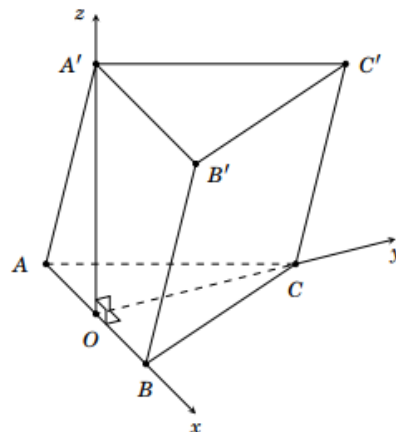
b) Tọa độ $C'(\sqrt{2}; 0; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2}; 0; 2)$.

c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0; \sqrt{2}; 0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0; \sqrt{2}; 2)$.

d) Tọa độ $B(0; -\sqrt{2}; 0), D'(0; \sqrt{2}; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'} = (0; 2\sqrt{2}; 2)$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB , góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.
- b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.
- c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.
- d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.



Lời giải

Đáp án: a **đúng** | b **đúng** | c **sai** | d **đúng**

Độ dài $OC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot OA' = OA \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A(-1; 0; 0)$.

b) Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C(0; \sqrt{3}; 0)$.

c) $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'(0; 0; \sqrt{3})$.

d) Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 1 \\ y - 0 = \sqrt{3} \\ z - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$.

Câu 32: Cho các điểm $A(1; -2; 3), B(-2; 1; 2), C(3; -1; 2)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải

Đáp án: a đúng; b sai; c sai ; d đúng

a) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; 3; -1)$.

b) $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (2; 1; -1)$

c) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1), \overrightarrow{AC} = (2; 1; -1)$. Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực k để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

d) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

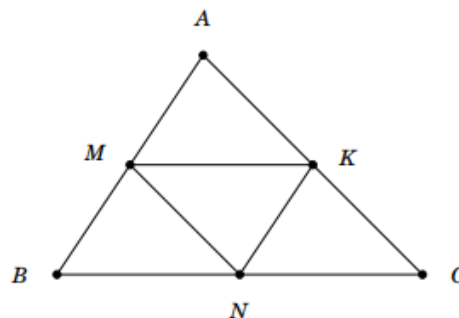
Câu 33: Cho ba điểm $A(3; 3; -6), B(1; 3; 2)$ và $C(-1; -3; 1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

a) Tọa độ $M(2; 3; 2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1; 1; -1)$.

d) Với $D(-3; -3; 9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Lời giải

Đáp án: a sai; b sai; c đúng; d đúng

a) M là trung điểm của AB , suy ra $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ hay $M(2; 3; -2)$.

b) Ta có $G(1; 1; -1)$. Suy ra $GC = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{6}$.

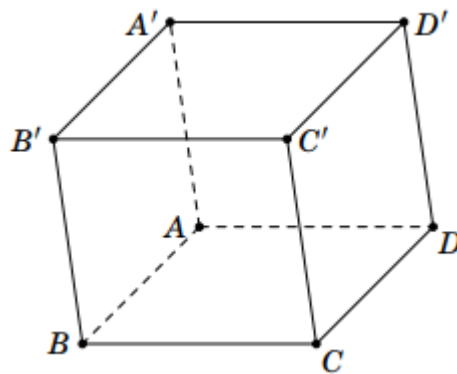
c) Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1; 1; -1)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC} = (-4; -6; 7)$, $\overrightarrow{BD} = (-4; -6; 7)$, suy ra $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 34: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 2; 0)$, $D'(-1; 3; 5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

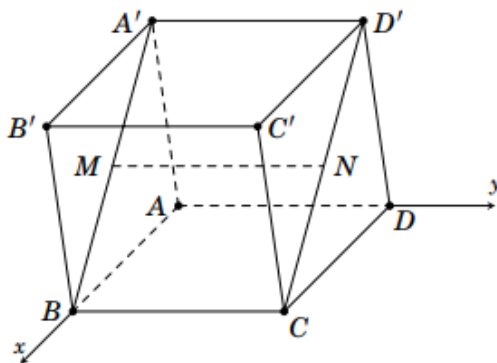
a) Tọa độ $D(0; 2; 0)$. b) Tọa độ $A'(-1; 1; 5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 0)$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.



Lời giải

Đáp án: a đúng; b đúng ; c sai; d sai



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (0; 2; 0) \Rightarrow D(0; 2; 0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = (-1; 1; 5) \Rightarrow A'(-1; 1; 5)$.

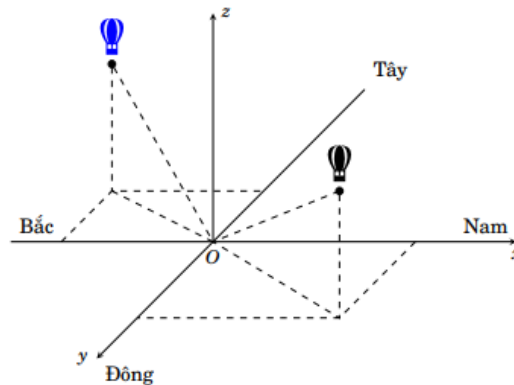
c) Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} = (0; 2; 0)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = (0; 3; 5)$. Xét

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}| = |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

Câu 35: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.

b) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1; -1,5; 0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(2; 1; 0,5)$.

b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(-1; -1,5; 0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ (km)}$$

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}.$$

Câu 36: Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

a) $|\vec{a}| = 2$.

b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Lời giải

Đáp án: a sai | b đúng | c sai | d sai

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. b) $|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} = 0$ d) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$, suy ra $\vec{b}$ không vuông $\vec{c}$.

Câu 37: Cho hai véctơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m-1; 2m; 3)$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.

c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Lời giải

Đáp án: a đúng | b . sai | c đúng | d sai

a) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{13} = \sqrt{(m-1)^2 + 4m^2 + 9} \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = -\frac{3}{5}$.

c) khi $m = 1$ thì $\vec{v} = (0; 2; 3)$. Suy ra $\vec{u} = \vec{v}$.

d) $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 4m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0), B(0;1;1), C(2;1;0)$.

a) Tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Đáp án: a đúng | b sai | c sai | d đúng

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{3}, \overrightarrow{AC} = (1; -1; 0) \Rightarrow AC = \sqrt{2},$
 $\overrightarrow{BC} = (2; 0; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}.$

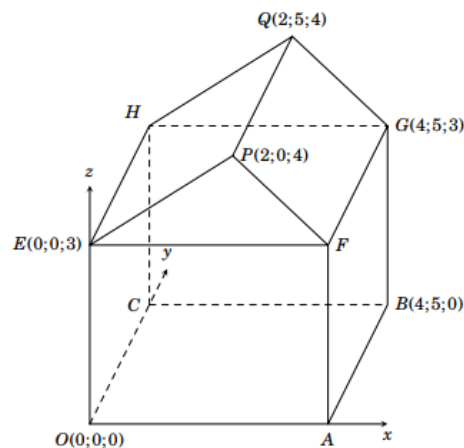
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ do đó $AB \perp AC$, tam giác ABC vuông tại A .

b) Chu vi của tam giác là $AB + AC + BC = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}.$

c) Diện tích là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1;1;\frac{1}{2}\right).$

Câu 39: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

Lời giải

Đáp án: a sai ; b sai ; c sai ; d sai

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4, y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.

b) Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5, z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

c) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1), \overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|} = \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

d) Chiều cao bằng cao độ của điểm P . Suy ra $h = 4$.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (3;2;5)$ và $\vec{b} = (3m+2;3;6-n)$. Tính giá trị biểu thức $6m+2n$ để hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

$$\text{Ta có } \vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3m+2}{3} = \frac{3}{2} = \frac{6-n}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{6} \\ n = \frac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow 6m + 2n = 2.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(3; 2; -3)$ và $G(a; b; c)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} a = \frac{1 + (-1) + 3}{3} = 1 \\ b = \frac{2 + 2 + 2}{3} = 2 \\ c = \frac{3 + 0 + (-3)}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 2; 0)$$

Vậy $P = a + b + c = 1 + 2 + 0 = 3$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

Lời giải

Trả lời: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

Nên diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Trong không gian Oxy , cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(2; 1; 1)$. Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0 + y_0 + z_0$.

Lời giải

Trả lời: 8

Điểm $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-1; y-2; z-3)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow M(0; 3; 5)$$

Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = 8$.

Câu 5: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; -1; 1)$, $B(3; 1; 2)$ và $C(-1; 0; 3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng 45° .

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $D(x; y; z)$

$$\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1), \overrightarrow{DC} = (-1 - x; -y; 3 - z)$$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 7 \\ y = 2z - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-1; y+1; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (x+1; y; z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (2z-8; 2z-5; z-1) \\ \overrightarrow{CD} = (2z-6; 2z-6; z-3) \end{cases}$$

$$\cos(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}) = \frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)} \cdot \sqrt{9(z-3)^2}} = \frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow 2(z^2 - 6z + 9) = z^2 - 6z + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{cases}$$

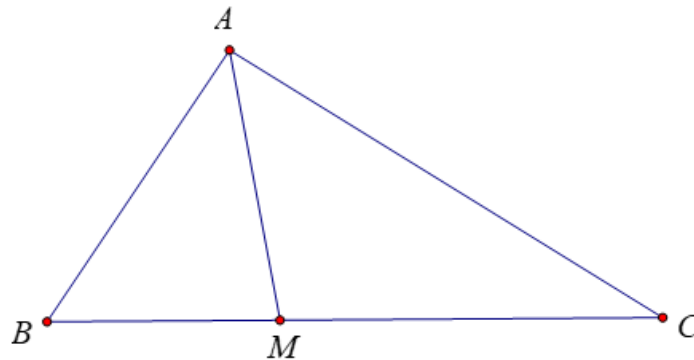
Vậy $D(1; 2; 4)$ hoặc $D(-3; -2; 2)$.

Có 2 điểm D thỏa điều kiện.

Câu 6: Trong không gian Oxy , cho tam giác ABC , biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài AM .

Lời giải

Trả lời: 5,39



Gọi $M(x; y; z)$

$$\overrightarrow{CM} = (-3 - x; 6 - y; 4 - z)$$

$$\overrightarrow{MB} = (x; y - 3; z - 1)$$

$$\text{Theo đề ta có, } \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = 2x \\ 6 - y = 2(y - 3) \\ 4 - z = 2(z - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-1; 4; 2)$$

$$AM = \sqrt{(-1-2)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

Câu 7: Trong không gian Oxy , cho ba điểm $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-2; 3; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 - c^2$.

Lời giải

Trả lời: 44

$$\overrightarrow{MC} = (-2 - a; 3 - b; 3 - c)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; 4)$$

Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - a = 1 \\ 3 - b = -3 \\ 3 - c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow P = 44.$$

Câu 8: Trong không gian Oxy , cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3; 4; 8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.

Lời giải

Trả lời: -6

$$N(x; 0; 0)$$

$$MN = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + 4^2 + 8^2} = 12 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -11 \end{cases}$$

Tổng hoành độ của chúng bằng -6

Câu 9: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (2; 5; -3), \vec{b} = (0; -4; 0)$. Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$.

Lời giải

Trả lời: -20

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = -20$$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Điểm $D(x; y; z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P = 2x + y - z$.

Lời giải

Trả lời: -19

Gọi D để $ABCD$ là hình bình hành.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9)$$

$$P = 2x + y - z = 2 \cdot (-4) - 2 - 9 = -19$$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$. Tọa độ vec to $\vec{a} = (x; 0; 3)$; $\vec{b} = (3; y; 0)$. Tính $P = x^2 + y^2$.

Lời giải

Trả lời: 13

$$\vec{a} = (2; 0; 3); \vec{b} = (3; 3; 0). P = x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{ON} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2; -3; a); N(-1; b; -1)$. Tính $T = 2a - 3b$.

Lời giải

Trả lời: -1

$$M(2; -3; 4), N(-1; 3; -1). T = 2a - 3b = 2.4 - 3.3 = -1$$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -5; 2)$; $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Vector $\vec{a} = 3\vec{i} - y\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$. Tính $P = y^2 - z^2$

Lời giải

Trả lời: 26

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}; \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}. P = y^2 - z^2 = (-5)^2 + (-1)^2 = 26$$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1; 0; -2), N(5; 1; -6)$. Tính $\vec{OM} = \vec{i} + y\vec{j} - 2\vec{k}; \vec{ON} = x\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$. Tính $P = x^3 + y^3$.

Lời giải

Trả lời: 125

$$\vec{OM} = \vec{i} - 2\vec{k}; \vec{ON} = 5\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}. P = x^3 + y^3 = 0^3 + 5^3 = 125$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA = 2$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục $Oxyz$ có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x; y; z)$. Tính $P = x^3 + y^3 + z^3$.

Lời giải

Trả lời: 250

$$\text{Ta có: } \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}. \text{ Suy ra: } C(5; 5; 0).$$

$$P = x^3 + y^3 + z^3 = 5^3 + 5^3 + 0^3 = 250$$

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tìm tọa độ của $C'(x; 3; z)$. Tính $P = x - z$.

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có:

$$\vec{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \vec{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}; \vec{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \text{ suy ra } C'(2;3;4). P = x - z = 2 - 4 = -2.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc tọa độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Gọi M là trung điểm SC. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$. Tính $T = x + y - \frac{3}{2}z$.

Lời giải

Trả lời: 0

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Vì M là trung điểm SC nên:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} + 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}) = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 2\right). T = x + y - \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2 = 0$$

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $|\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}|$.

Lời giải

Trả lời: 0

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A} \text{ và } \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA}$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{CC'}| = 0$$

Câu 19: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ điểm $C'(x; y; z)$. Tính $P = x - 2y + z$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}; \overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành ABCD: } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\text{Trong hình bình hành ACC'A': } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\Rightarrow C'(8;6;4). P = x - 2y + z = 8 - 2 \cdot 6 + 4 = 0$$

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCM, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 44

$M(x; y; z)$, $ABCM$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2-2 \\ y-2 = 3+1 \\ z+1 = 3-3 \end{cases} \Rightarrow M(-3; 6; -1) \Rightarrow P = 44.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-2; 2; 0)$; $\vec{b} = (2; 2; 0)$ và $\vec{c} = (2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

Lời giải

Trả lời: $2\sqrt{11}$

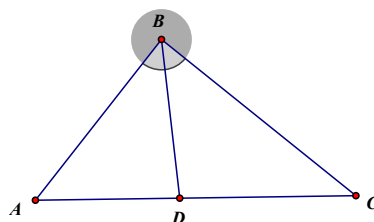
Ta có: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2)$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2\sqrt{11}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5



Ta có $AB = \sqrt{26}$, $BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x; y; z)$, theo tính chất phân giác ta có $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*).

Ta có $\overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z)$ và $\overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z)$.

$$\text{Do đó (*)} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a + b + 2c = 5.$$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -3; 4)$, $B(1; y; -1)$, $C(x; 4; 3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $5x + y$ là:

Lời giải

Trả lời: 41

Có $\overrightarrow{AB} = (-1; y+3; -5); \overrightarrow{AC} = (x-2; 7; -1)$.

Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} = \frac{y+3}{7} = \frac{-5}{-1}$.

$$\Rightarrow x = \frac{9}{5}; y = 32$$

$$\Rightarrow 5x + y = 41$$

Vậy $5x + y = 41$.

Câu 24: Trong không gian Oxy , cho ba vectơ $\vec{a} = (1; m; 2), \vec{b} = (m+1; 2; 1), \vec{c} = (0; m-2; 2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$.

Lời giải

Trả lời: -12

$$\vec{a} + \vec{b} = (m+2; m+2; 3)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + (m+2)^2 + 9 = (m-2)^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 12m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \pm \sqrt{3}.$$

Tổng các giá trị của m bằng -12.

Câu 25: Trong không gian Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (2; 2t-1; 0)$. Xác định giá trị t để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Trả lời: -0,5

Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì

$$\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \\ 0 = 0k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -1 = (2t-1)k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = (2t-1)k \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ -1 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm.)}$$

$$\text{Với } t \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{-1}{2t-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2t-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $t = -0,5$.

Câu 26: Trong không gian Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1; 0)$. Số đo độ của góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$?

Lời giải

Trả lời: 130

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$$

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; -2)$, $B(2; 2; -4)$. Giả sử $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

Lời giải

Trả lời : 8

Ta có $\vec{OA} = (0; 2; -2)$, $\vec{OB} = (2; 2; -4)$. (OAB) có phương trình: $x + y + z = 0$

$$I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0.$$

$$\vec{AI} = (a; b - 2; c + 2), \vec{BI} = (a - 2; b - 2; c + 4), \vec{OI} = (a; b; c).$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c + 2)^2 = (a - 2)^2 + (c + 4)^2 \\ (b - 2)^2 + (c + 2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I(2; 0; -2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Giả sử điểm $D(a; b; c)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$. Tính $a + b + c$

Lời giải

Trả lời: -10

$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\vec{AD} = 2\vec{BC}$ (1).

$$\vec{BC} = (-5; -2; 1), \vec{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$. Tính $a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD + BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD + 3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

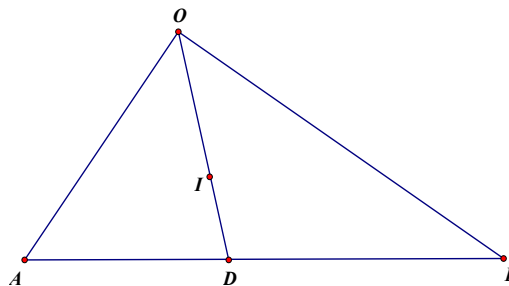
Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a; b; c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a - 1 = \frac{4}{3} \\ b - 2 = \frac{1}{3} \\ c - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6.$$

Câu 30: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a + b + c$.

Lời giải

Trả lời: 2



Ta có: $\overrightarrow{OA} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

Lại có: $OA = 3$, $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{AOB} \Rightarrow D$ thuộc đoạn AB .

Theo tính chất của phân giác trong ta có:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \Rightarrow D = \left(0; \frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right).$$

Tam giác OAB có diện tích $S = \frac{1}{2}.OA.OB = 6$, nửa chu vi $p = \frac{OA+OB+AB}{2} = 6$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} = 1 \text{ là bán kính đường tròn nội tiếp; chiều cao } OH = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{12}{5}.$$

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $OAB \Rightarrow I$ thuộc đoạn OD .

$$\text{Ta có: } \frac{DI}{DO} = \frac{r}{OH} = \frac{5}{12} \Rightarrow \overrightarrow{DI} = \frac{5}{12}\overrightarrow{DO} \Rightarrow I = (0; 1; 1) \text{ hay } \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy $S = a + b + c = 2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Tọa độ của điểm M là:

- A. $(2; 3; 4)$. B. $(3; 4; 2)$. C. $(4; 2; 3)$. D. $(3; 2; 4)$.

2. Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 4; -5)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{NM}$ là:

- A. $(-2; 6; 8)$. B. $(2; 6; -8)$. C. $(-2; 6; -8)$. D. $(-2; -6; 8)$.

3. Cho hai vector $\vec{u} = (3; -4; 5)$, $\vec{v} = (5; 7; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là:

- A. $(8; 3; 4)$. B. $(-2; -11; 6)$. C. $(2; 11; -6)$. D. $(-8; -3; -4)$.

4. Cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$, $\vec{v} = (5; 4; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(4; 6; 4)$. B. $(-4; -6; 4)$. C. $(4; 6; -4)$. D. $(-4; -6; -4)$.

5. Cho vector $\vec{u} = (1; -1; 3)$. Tọa độ của vector $-3\vec{u}$ là:

- A. $(3; -3; 9)$. B. $(3; -3; -9)$. C. $(-3; 3; -9)$. D. $(3; 3; 9)$.

6. Độ dài của vector $\vec{u} = (2; -2; 1)$ là:

- A. 9. B. 3. C. 2. D. 4.

7. Tích vô hướng của hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (3; 4; -5)$ là:

- A. $\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}$. B. $-\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}$. C. 20. D. -20.

8. Khoảng cách giữa hai điểm $I(1; 4; -7)$ và $K(6; 4; 5)$ là:

- A. 169. B. 13. C. 26. D. 6,5.

9. Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 4; -5)$. Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là:

- A. $(-2; 1; 1)$. B. $(2; 1; 1)$. C. $(-2; 1; -1)$. D. $(2; 1; -1)$.

10. Cho tam giác MNP có $M(0; 2; 1)$, $N(-1; -2; 3)$ và $P(1; 3; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có tọa độ là:

- A. $(0; 1; 2)$. B. $(0; 3; 6)$. C. $(0; -3; -6)$. D. $(0; -1; -2)$.

11. Cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (3; 4; -5)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

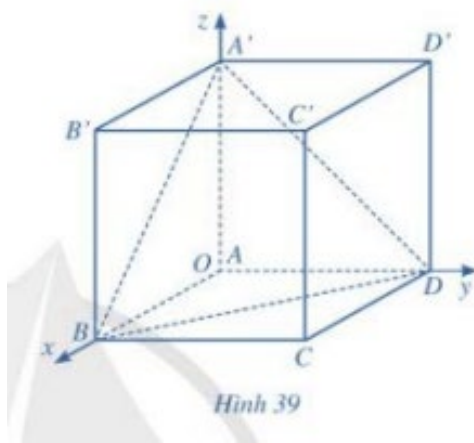
12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và CC' . Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

13. Xét hệ tọa độ $Oxyz$ gắn với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như Hình 39, đơn vị của mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương. Biết $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$.

a) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

c) Xác định tọa độ các vector $\overrightarrow{OG}$ và $\overrightarrow{OC'}$. Chứng minh rằng ba điểm O, G, C' thẳng hàng và $OG = \frac{1}{3}OC'$



14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(20; -3)$, $B(0; -4; 5)$ và $C(-1; 2; 0)$.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

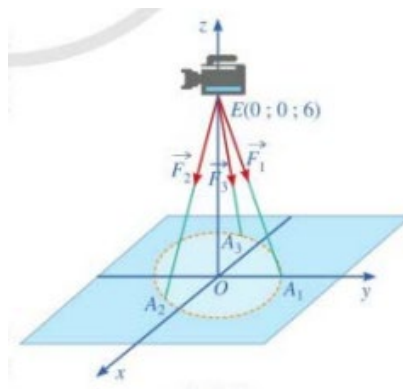
b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d) Tính chu vi của tam giác ABC .

e) Tính $\cos \widehat{BAC}$.

15. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0; 1; 0)$; $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$; $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ (Hình 40). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$.



Hình 40

PHẦN 2. ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG 2

PHẦN 1. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (-1; 3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng
A. 10. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?
A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. D. $\vec{b} \perp \vec{a}$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ biểu diễn của các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là
A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(1; -3; 2)$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .
A. $A_1(1; 0; 0)$. B. $A_1(0; 2; 3)$. C. $A_1(1; 0; 3)$. D. $A_1(1; 2; 0)$.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$ và $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn AB là:
A. $2\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. 3.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(1; -4; 0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là
A. $(1; -1; 2)$. B. $(-1; -1; 2)$. C. $(1; 1; 2)$. D. $(1; -1; -2)$.
- Câu 7:** Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là
A. $D(1; 8; -2)$. B. $D(11; 2; 2)$. C. $D(1; 8; 2)$. D. $D(11; 2; -2)$.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -2; -1)$ và $A(1; -1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ là
A. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
C. $M(2; 0; 5)$. D. $M(-1; -3; -4)$.
- Câu 9:** Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1; 2; -1)$ và điểm $B(2; 1; 2)$.
A. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. C. $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. D. $M\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.
- Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (0; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Tính

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{100}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{100}$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{10}$.

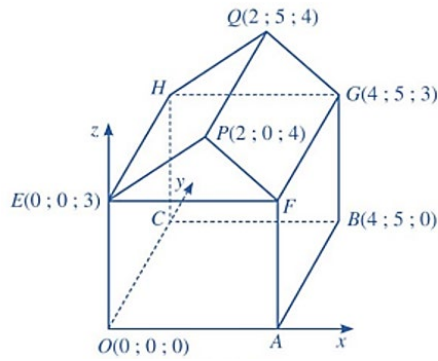
.

- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là
- A.** $(1; 1; -2)$. **B.** $(2; 1; -2)$. **C.** $(1; 2; -1)$. **D.** $(2; 1; -1)$.

- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
- A.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 1; 1)$.

PHẦN 2 : TRẮC NGHIỆM ĐÚNG- SAI

- Câu 1:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .
- Tứ giác $ABCD$ là hình vuông
 - Tam giác SBD vuông cân tại S .
 - $(\vec{SB}, \vec{BD}) = 45^\circ$.
 - $\vec{SB} \cdot \vec{BD} = -a^2$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.
- $\vec{AB} = (-3; 3; -1)$.
 - $\vec{AC} = (-2; -1; 1)$.
 - $\vec{AB} = 3\vec{AC}$.
 - Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.
- $\vec{AB} = (1; 2; 4)$.
 - $\vec{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$.
 - $\vec{DC} = \vec{AB}$.
 - Tọa độ điểm D là $(0; 3; 3)$.
- Câu 4:** Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm F là $(4; 0; 3)$.

b) Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

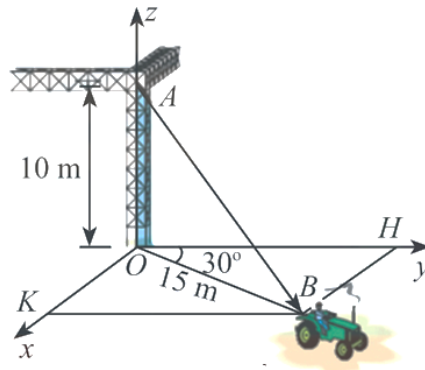
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 3; 5), B(1; 1; 3), C(4; -2; 3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 2; 8), N(0; 1; 3)$ và $P(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Câu 5: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía bắc và 240m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60m. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$, khi đó $a + c = ?$



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Cho điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Tọa độ của điểm M là:

- A. $(2; 3; 4)$. B. $(3; 4; 2)$. C. $(4; 2; 3)$. D. $(3; 2; 4)$.

Lời giải

Chọn B

2. Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 4; -5)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{NM}$ là:

- A. $(-2; 6; 8)$. B. $(2; 6; -8)$. C. $(-2; 6; -8)$. D. $(-2; -6; 8)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{NM} = (1-3; -2-4; 3-(-5)) = (-2; -6; 8)$.

3. Cho hai vector $\vec{u} = (3; -4; 5)$, $\vec{v} = (5; 7; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là:

- A. $(8; 3; 4)$. B. $(-2; -11; 6)$. C. $(2; 11; -6)$. D. $(-8; -3; -4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (3+5; -4+7; 5+(-1))$. Do đó $\vec{u} + \vec{v} = (8; 3; 4)$.

4. Cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$, $\vec{v} = (5; 4; -1)$. Tọa độ của vector $\vec{u} - \vec{v}$ là:

- A. $(4; 6; 4)$. B. $(-4; -6; 4)$. C. $(4; 6; -4)$. D. $(-4; -6; -4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} - \vec{v} = (1-5; -2-4; 3-(-1)) = (-4; -6; 4)$.

5. Cho vector $\vec{u} = (1; -1; 3)$. Tọa độ của vector $-3\vec{u}$ là:

- A. $(3; -3; 9)$. B. $(3; -3; -9)$. C. $(-3; 3; -9)$. D. $(3; 3; 9)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-3\vec{u} = (-3.1; -3.(-1); -3.3) = (-3; 3; -9)$.

6. Độ dài của vector $\vec{u} = (2; -2; 1)$ là:

- A. 9. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$.

7. Tích vô hướng của hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (3; 4; -5)$ là:

- A. $\sqrt{14}.\sqrt{50}$. B. $-\sqrt{14}.\sqrt{50}$. C. 20. D. -20.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{u}.\vec{v} = 1.3 + (-2).4 + 3.(-5) = -20$.

8. Khoảng cách giữa hai điểm $I(1; 4; -7)$ và $K(6; 4; 5)$ là:

- A. 169. B. 13. C. 26. D. 6,5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $IK = |\vec{IK}| = \sqrt{(6-1)^2 + (4-4)^2 + (5-(-7))^2} = 13$.

9. Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 4; -5)$. Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là:

- A. $(-2; 1; 1)$. B. $(2; 1; 1)$. C. $(-2; 1; -1)$. D. $(2; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là $(x; y; z)$.

Ta có $x = \frac{1+3}{2} = 2; y = \frac{-2+4}{2} = 1; z = \frac{3+(-5)}{2} = -1$.

Vậy tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là $(2; 1; -1)$.

10. Cho tam giác MNP có $M(0; 2; 1)$, $N(-1; -2; 3)$ và $P(1; 3; 2)$. Trọng tâm của tam giác MNP có tọa độ là:

- A. $(0; 1; 2)$. B. $(0; 3; 6)$. C. $(0; -3; -6)$. D. $(0; -1; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ trọng tâm của tam giác MNP là $(x; y; z)$.

$$\text{Ta có } x = \frac{0+(-1)+1}{3} = 0; y = \frac{2+(-2)+3}{3} = 1; z = \frac{1+3+2}{3} = 2.$$

Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác MNP là $(0; 1; 2)$.

11. Cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (3; 4; -5)$. Hãy chỉ ra tọa độ của một vector $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

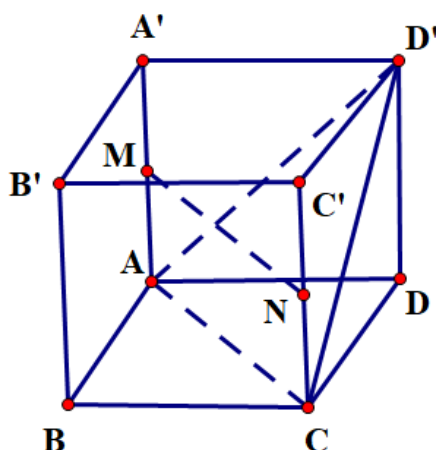
Lời giải

$$\text{Ta có } [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-2; 14; 10).$$

Chọn $\vec{w} = (-2; 14; 10)$, ta có vector $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và CC' . Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

Lời giải



Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và CC' nên $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$. Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Do đó, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD'}) = \widehat{CAD'}$.

Ta tính được $AD' = AC = CD' = a\sqrt{2}$ nên tam giác ACD' là tam giác đều. Suy ra $\widehat{CAD'} = 60^\circ$.

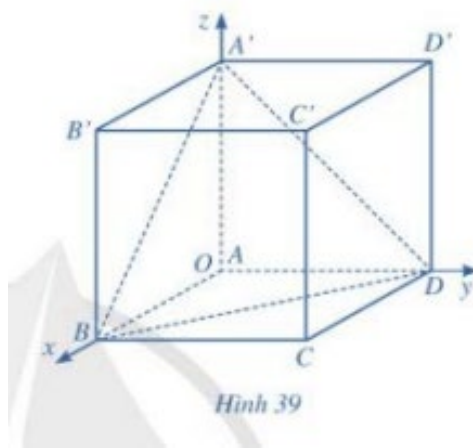
Vậy $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD'}) = 60^\circ$.

13. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ gắn với hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như Hình 39, đơn vị của mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương. Biết $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$.

a) Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

b) Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

c) Xác định toạ độ các vector $\overrightarrow{OG}$ và $\overrightarrow{OC'}$. Chứng minh rằng ba điểm O , G , C' thẳng hàng và $OG = \frac{1}{3}OC'$



Lời giải

a) Ta có điểm C thuộc mặt phẳng (Oxy) nên cao độ của điểm C bằng 0.

Lại có $CB \perp Ox$ tại B nên hoành độ của điểm C là 1, $CD \perp Oy$ tại D nên tung độ của điểm C là 1.

Vậy $C(1; 1; 0)$. Tương tự như vậy, ta xác định được $B'(1; 0; 1)$ và $D'(0; 1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0; 1; 0)$.

Áp dụng quy tắc hình hộp trong hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (0+1+0; 0+0+1; 1+0+0) = (1; 1; 1)$.

Do đó, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC'} = (1; 1; 1)$, suy ra $C'(1; 1; 1)$.

b) Gọi toạ độ trọng tâm G của tam giác $A'BD$ là $(x_G; y_G; z_G)$.

Ta có $x_G = \frac{0+1+0}{3} = \frac{1}{3}$; $y_G = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}$; $z_G = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$. Vậy $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c) Vì $G\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ nên $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Ta có $\overrightarrow{OC'} = (1; 1; 1)$, do đó $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC'}$.

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{OG}$ và $\overrightarrow{OC'}$ cùng phương nên hai đường OG và OC' song song hoặc trùng nhau, mà $OG \cap OC' = O$ nên hai đường thẳng này trùng nhau, tức là ba điểm O, G, C' thẳng hàng.

Từ $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC'}$ suy ra $|\overrightarrow{OG}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OC'}|$. Do đó $OG = \frac{1}{3}OC'$.

14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(20; -3)$, $B(0; -4; 5)$ và $C(-1; 2; 0)$.

- Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
- Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tính chu vi của tam giác ABC .
- Tính $\cos \widehat{BAC}$.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -4; 8)$; $\overrightarrow{AC} = (-3; 2; 3)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (-2; -4; 8) \neq k\overrightarrow{AC} = (-3k; 2k; 3k)$ với mọi $k \in \mathbb{R}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Gọi tọa độ điểm D là $(x_D; y_D; z_D)$. Ta có $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; 2 - y_D; -z_D)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = -2 \\ 2 - y_D = -4 \\ -z_D = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 6 \\ z_D = -8 \end{cases}$.

Vậy $D(1; 6; -8)$.

c) Gọi tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là $(x_G; y_G; z_G)$.

Ta có $x_G = \frac{2+0+(-1)}{3} = \frac{1}{3}$; $y_G = \frac{0+(-4)+2}{3} = \frac{-2}{3}$; $z_G = \frac{-3+5+0}{3} = \frac{2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{1}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

d) Ta có $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 8^2} = 2\sqrt{21}$; $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{22}$;

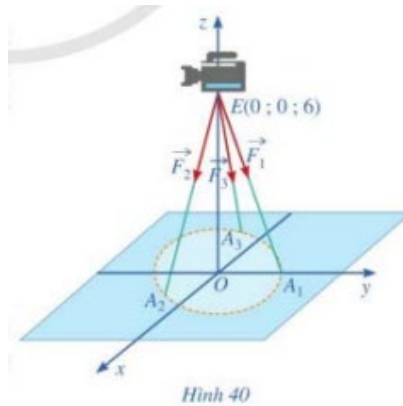
$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-(-4))^2 + (0-5)^2} = \sqrt{62}$

Chu vi của tam giác ABC là: $C = AB + BC + CA = 2\sqrt{21} + \sqrt{62} + \sqrt{22}$.

e) Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2) \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) + 8 \cdot 3}{2\sqrt{21} \cdot \sqrt{22}} = \frac{\sqrt{462}}{42}$.

Lại có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC}$. Do đó $\cos \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{462}}{42}$.

15. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0; 1; 0)$; $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$; $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ (Hình 40). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N. Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, \overrightarrow{F}_3$.



Lời giải

Theo giả thiết, ta có các điểm $E(0; 0; 6)$, $A_1(0; 1; 0)$; $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$; $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$. Suy ra $\overrightarrow{F}_1 = k\overrightarrow{EA_1} = (0; k; -6k)$.

Ta có: $\overrightarrow{EA_1} = (0; 1; -6)$; $\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6\right)$; $\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -6\right) \Rightarrow EA_1 = EA_2 = EA_3 = \sqrt{37}$.

Do đó $|\overrightarrow{F}_1| = |\overrightarrow{F}_2| = |\overrightarrow{F}_3|$ vì đèn cân bằng và trọng lực của đèn tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ.

Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho:

$$\overrightarrow{F}_1 = c\overrightarrow{EA_1} = (0; c; -6c); \overrightarrow{F}_2 = c\overrightarrow{EA_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c; -\frac{1}{2}c; -6c\right); \overrightarrow{F}_3 = c\overrightarrow{EA_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c; -\frac{1}{2}c; -6c\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = (0; 0; -18c)$.

Mặt khác $\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{F}_3 = \overrightarrow{F}$ trong đó $\overrightarrow{F} = (0; 0; -300)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay.

Suy ra $-18c = -300 \Leftrightarrow c = \frac{50}{3}$.

Vậy $\vec{F}_1 = \left(0; \frac{50}{3}; -100\right); \vec{F}_2 = \left(\frac{25\sqrt{3}}{3}; -\frac{25}{3}; -100\right); \vec{F}_3 = \left(\frac{-25\sqrt{3}}{3}; \frac{-25}{3}; -100\right)$

PHẦN 2. ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG 2

PHẦN 1. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (-1; 3; 2)$, $\vec{v} = (-3; -1; 2)$ khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

- A. 10. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 3 + 4 = 4.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. D. $\vec{b} \perp \vec{a}$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \neq 0 \Rightarrow \vec{b} \text{ và } \vec{c} \text{ không vuông góc với nhau.}$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ biểu diễn của các vectơ đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$.

Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A. $(1; 2; -3)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(1; -3; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \text{ nên } \vec{a} = (2; -3; 1).$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .

- A. $A_1(1; 0; 0)$. B. $A_1(0; 2; 3)$. C. $A_1(1; 0; 3)$. D. $A_1(1; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tọa độ điểm } A_1 \text{ là hình chiếu vuông góc của } A \text{ lên mặt phẳng } (Oyz) \text{ là: } A_1(0; 2; 3).$$

- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$ và $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn AB là:
- A. $2\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 6; 4)$ nên $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.

- Câu 6:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 4)$, $C(1; -4; 0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là
- A. $(1; -1; 2)$. B. $(-1; -1; 2)$. C. $(1; 1; 2)$. D. $(1; -1; -2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } G(x_G; y_G; z_G) \text{ ta có } \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = 1 \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = -1 \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = 2 \end{cases} \Rightarrow G(1; -1; 2).$$

- Câu 7:** Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2; 3; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(6; 5; 0)$. Tọa độ đỉnh D là
- A. $D(1; 8; -2)$. B. $D(11; 2; 2)$. C. $D(1; 8; 2)$. D. $D(11; 2; -2)$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; -2; -1)$ và $A(1; -1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$ là
- A. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $M(2; 0; 5)$. D. $M(-1; -3; -4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_A = 2(x_B - x_M) \\ y_M - y_A = 2(y_B - y_M) \\ z_M - z_A = 2(z_B - z_M) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 2x_B + x_A \\ 3y_M = 2y_B + y_A \\ 3z_M = 2z_B + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2}{3} \\ y_M = -\frac{4}{3} \\ z_M = 1 \end{cases}.$$

Câu 9: Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1; 2; -1)$ và điểm $B(2; 1; 2)$.

- A.** $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. **C.** $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; 0; 0) \in Ox$.

Ta

có:

$$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + 4 + 1 = (2-x)^2 + 1 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right).$$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (0; 3; 1)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{100}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{100}$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn C

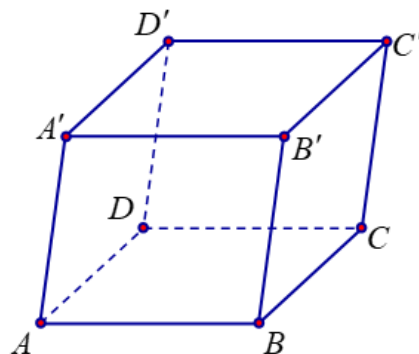
$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{10}.$$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

- A.** $(1; 1; -2)$. **B.** $(2; 1; -2)$. **C.** $(1; 2; -1)$. **D.** $(2; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y-3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2).$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD' . Ta có $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IG} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{DI} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{IG} = \left(a - \frac{3}{2}; b - \frac{3}{2}; c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \text{ Do đó: } \begin{cases} \frac{3}{2} = 3\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(b - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy $G(2; 1; -2)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$.

Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

$$\text{Suy ra: } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

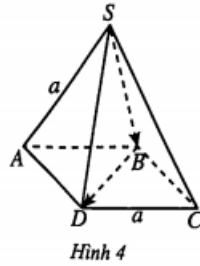
PHẦN 2 : TRẮC NGHIỆM ĐÚNG- SAI

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a .

- Tứ giác $ABCD$ là hình vuông
- Tam giác SBD vuông cân tại S .
- $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$.
- $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$.

Lời giải

Đáp án : a) Đ ; b) Đ ; c) S ; d) Đ



Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng a nên độ dài đường chéo BD bằng $a\sqrt{2}$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$ và $BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông cân tại S , suy ra $\widehat{SBD} = 45^\circ$.

Do đó $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BD}) = 180^\circ - \widehat{SBD} = 135^\circ$. Suy ra

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(3; -1; 2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-3; 3; -1)$.
- b) $\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 1)$.
- c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
- d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Lời giải

Đáp án : a) Đ ; b) S ; c) S ; d) Đ

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -1; -2)$, $B(3; 1; 2)$, $C(1; -1; 1)$ và $D(x_D; y_D; z_D)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 4)$.
- b) $\overrightarrow{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$.
- c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
- d) Toạ độ điểm D là $(0; 3; 3)$.

Lời giải

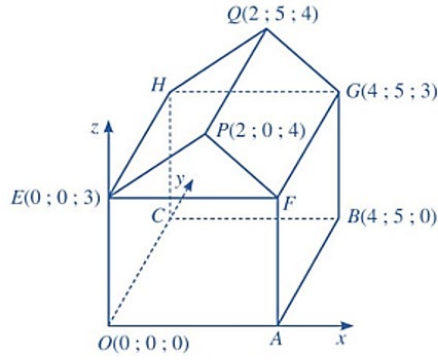
Đáp án : a) Đ ; b) S ; c) S ; d) Đ

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 4)$, $\overrightarrow{DC} = (1 - x_D; -1 - y_D; 1 - z_D)$. Vì $ABCD$ là hình bình

$$\text{hành nên } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}. \text{ Suy ra } \begin{cases} 1 - x_D = 1 \\ -1 - y_D = 2 \\ 1 - z_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -3 \\ z_D = -3 \end{cases}$$

$$D(0; -3; -3).$$

Câu 4: Hình minh hoạ sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm F là $(4; 0; 3)$.

b) Tọa độ $\overrightarrow{AH} = (4; 5; 3)$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

Lời giải

Đáp án : a) Đ ; b) S ; c) S ; d) Đ

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4$, $y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4; 0; 0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5$, $z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0; 5; 3)$. Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$; $z_F = z_E = 3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên tọa độ điểm F là $(4; 0; 3)$.

b) Nên $\overrightarrow{AH} = (-4; 5; 3)$ và $\overrightarrow{AF} = (0; 0; 3)$

c) Suy ra $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 + 0 + 9 = 9$

d) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có: $\overrightarrow{FP} = (-2; 0; 1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4; 0; 0)$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}| \cdot |\overrightarrow{FE}|}$$

$$= \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

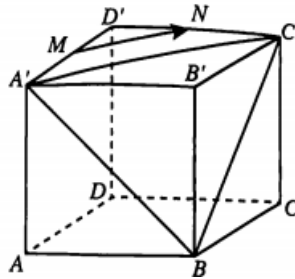
Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 60°



Vì $MN \parallel A'C'$ nên $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B}) = \widehat{C'A'B}$.

Tam giác $C'A'B'$ là tam giác đều vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương. Suy ra $\widehat{C'A'B} = 60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A'B}) = \widehat{C'A'B} = 60^\circ$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Trả lời

Trả lời: $-0,5$

Vì $MN \parallel A'C'$ nên $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C'B}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'B}) = 180^\circ - \widehat{A'C'B} = 120^\circ$.

Ta có: $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $C'B = a\sqrt{2}$. Suy ra

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{C'B}| \cdot \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C'B}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ = -0,5a^2.$$

Vậy $n = -0,5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5), B(1;1;3), C(4;-2;3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 120°

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (0; 2; 2), \overrightarrow{BC} = (3; -3; 0)$. Suy ra

$$\cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{0 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0^2}} = \frac{-1}{2}.$$

Suy ra góc $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 2; 8)$, $N(0; 1; 3)$ và $P(2; m; 4)$.
Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

Lời giải

Trả lời: -10

Ta có $\overrightarrow{NM} = (3; 1; 5)$, $\overrightarrow{NP} = (2; m-1; 1)$.

Do tam giác MNP vuông tại N nên $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Rightarrow 6 + m - 1 + 5 = 0 \Rightarrow m = -10$.

Câu 5: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển 150m về phía nam và 200m về phía đông, đồng thời cách mặt đất 50m. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển 180m về phía bắc và 240m về phía tây, đồng thời cách mặt đất 60m.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

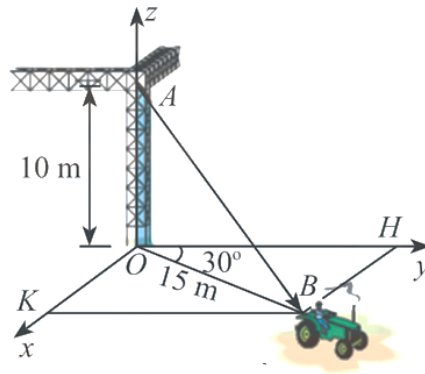
Trả lời: 550

Vị trí A, B có tọa độ lần lượt là: $(150; 200; 50), (-180; -240; 60)$.

Suy ra khoảng cách giữa hai flycam đó bằng:

$$AB = \sqrt{(-180 - 150)^2 + (-240 - 200)^2 + (60 - 50)^2} \approx 550(\text{m}).$$

Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1m. Tìm được tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$, khi đó $a + c = ?$



Lời giải

Trả lời: 2,5

$$\overrightarrow{OA} = 10\vec{k} \Rightarrow A(0;0;10)$$

$$\text{Ta có: } OH = OB \cdot \cos 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$OK = OB \cdot \cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{2}; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10\right)$$

Vậy $a + c = 2,5$