

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $-2x^3 + 3x^2 - 1$

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = -1$.

Câu 2 (1,0 điểm)

a) Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 > 0$.

b) Tìm số phức z thỏa mãn $(1+i)z + 3i\bar{z} = \left(\frac{2i}{i-1}\right)^2$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = (e+1)x$, $y = (e^x + 1)x$.

Câu 4 (1,0 điểm)

a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $P = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

- b) Xếp ngẫu nhiên bốn người đàn ông, hai người đàn bà và một đứa trẻ ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Tính xác suất để đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB. SC tạo với đáy một góc 45° . Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

Câu 6 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2z = 0$ và hai đường thẳng d: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$, d': $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với đường thẳng d và cắt đường thẳng d'.

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên DE. Biết $H\left(\frac{2}{5}; -\frac{14}{5}\right)$, $F\left(\frac{8}{3}; -2\right)$, C thuộc đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$, D thuộc đường thẳng d': $x - 3y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

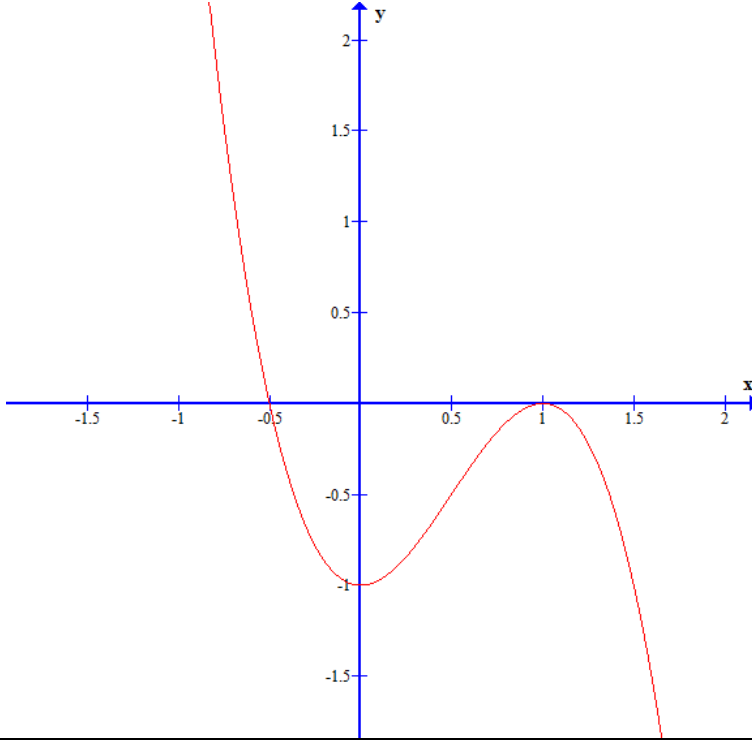
Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ x^2 + x + 3y + 17 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0 \end{cases}$$

Câu 9 (1,0 điểm). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

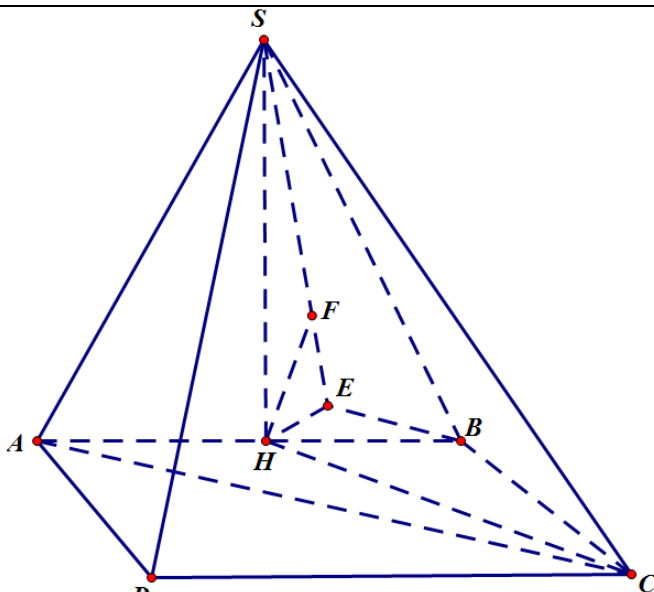
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

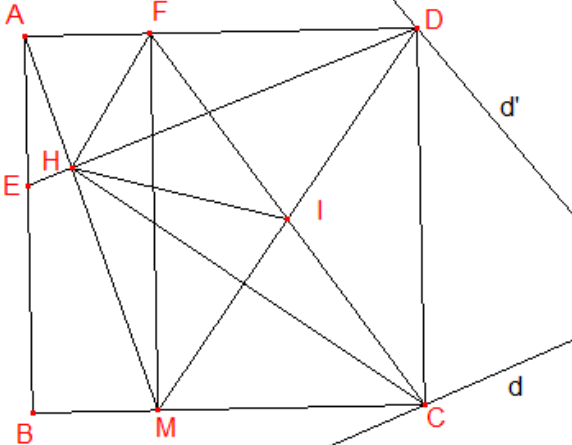
----- Hết -----

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	ĐÁP ÁN	Điểm																	
1		2,0																	
a)		1,0																	
	- TXĐ: $D = \mathbb{R}$. - Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -6x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.	0,25																	
	- Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$; Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$. - Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, $y_{CD} = 0$; Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -1$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$.	0,25																	
	Bảng biến thiên:<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>—</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>—</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'	—	0	+	0	—	y	$+\infty$		0		$-\infty$	0,25
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$															
y'	—	0	+	0	—														
y	$+\infty$		0		$-\infty$														
	Đồ thị:	0,25																	
b)		1,0																	
	Phương trình hoành độ giao điểm: $-2x^3 + 3x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$	0,25																	
	+ Với $x = 0$: $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ $\Rightarrow$ PTTT: $y = -1$.	0,25																	
	+ Với $x = \frac{3}{2}$: $y\left(\frac{3}{2}\right) = -1$, $y'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}$	0,25																	

	$\Rightarrow \text{PTTT: } y = -\frac{9}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - 1$	
	Hay $y = -\frac{9}{2}x + \frac{23}{4}$ Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -1, y = -\frac{9}{2}x + \frac{23}{4}$.	0,25
2		1,0
a)		0,5
	ĐK: $x > 0$. Đặt $t = \log_{\frac{1}{3}} x$. Bpt trở thành: $t^2 - 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 3 \end{cases}$	0,25
	+ $t < -1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x < -1 \Rightarrow x > 3$. + $t > 3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > 3 \Rightarrow x < \frac{1}{27}$. Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bpt là $\left(0; \frac{1}{27}\right) \cup (3; +\infty)$.	0,25
b)		0,5
	$(1+i)z + 3i\bar{z} = \left(\frac{2i}{i-1}\right)^2 \Leftrightarrow (1+i)z + 3i\bar{z} = -2i$. Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). PT trở thành: $(1+i)(a+bi) + 3i(a-bi) = -2i$	0,25
	$\Leftrightarrow a + 2b + (4a + b + 2)i = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 4a + b + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{7} \\ b = \frac{2}{7} \end{cases}$ Vậy $z = -\frac{4}{7} + \frac{2}{7}i$.	0,25
3		1,0
	Hoàn chỉnh giao điểm của hai đường là nghiệm của phương trình $(e+1)x = (1+e^x)x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ Diện tích cần tính là $S = \int_0^1 x(e^x - e) dx$	0,5
	$S = \left \int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 ex dx \right = \left \int_0^1 xd(e^x) - e \int_0^1 x dx \right$ $= \left xe^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx - e \frac{x^2}{2} \Big _0^1 \right = \frac{e}{2} - 1$	0,5

4		1,0
a)		0,5
	$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$	0,25
	$P = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 3 + 2\sqrt{2}.$	0,25
b)		0,5
	Có 6! Cách xếp 7 người quanh một bàn tròn $\Rightarrow n(\Omega) = 6! = 720.$ Gọi A là biến cố: “Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà”. Ta xếp đứa trẻ vào 1 chiếc ghế: 1 cách. Xếp 2 người đàn bà vào 2 ghế 2 bên đứa trẻ: 2! cách. Xếp 4 người đàn ông vào 4 ghế còn lại: 4! cách. $\Rightarrow n(A) = 2! \cdot 4! = 48$ Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}.$	0,25
5		1,0
	 HC là hình chiếu của SC trên mp(ABCD) nên góc giữa SC và mp(ABCD) là SCH . Từ gt suy ra $SCH = 45^0.$ Suy ra $SH = HC = a\sqrt{2}.$ $S_{ABCD} = 2a^2$ Vậy $V_{ABCD} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ (đvtt). Kẻ đt d đi qua B và song song với AC. Gọi E là hình chiếu của H trên đt d. Suy ra $AC \parallel (SBE)$ $\Rightarrow d(SB, AC) = d(AC, (SBE)) = d(A, (SBE)) = 2d(H, (SBE))$ (Vì $AB = 2HB$) Gọi F là hình chiếu của H trên SE. Khi đó: $BE \perp (SHE), HF \perp (SBE)$	0,25
		0,25
		0,25

	Suy ra $d(H, (SBE)) = HF$. $HE = HB \cdot \sin EBH = HB \cdot \sin BAC = HB \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{5}}$. $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{22}}{11}$. Vậy $d(SB, AC) = \frac{2a\sqrt{22}}{11}$.	0,25
6		1,0
	mp (P) có VTPT $\vec{n_p} = (2; -1; 2)$, đường thẳng d có VTCP $\vec{u_d} = (1; 3; 2)$. PTTS của d': $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$.	0,25
	Đường thẳng Δ nằm trong mp(P), vuông góc với đường thẳng d nên chọn VTCP của Δ là $\vec{u_\Delta} = [\vec{n_p}, \vec{u_d}] = (-8; -2; 7)$.	0,25
	Gọi $A = d' \cap (P) \Rightarrow A(1 - 2t; 2 + t; t)$. Vì $A \in (P)$ nên $t = 0 \Rightarrow A(1; 2; 0)$.	0,25
	Δ nằm trong mp(P) và cắt d' nên Δ đi qua A. Vậy PT đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 - 8t \\ y = 2 - 2t \\ z = 7t \end{cases}$.	0,25
7		1,0
	 Gọi M là giao điểm của AH và BC. Hai tam giác ADE và BAM bằng nhau nên $BM = AE = AF$. Suy ra các tứ giác ABMF, DCMF là các hình chữ nhật.. Gọi I là giao điểm của FC và MD. Ta có $HI = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}FC$ nên tam giác HFC vuông tại H.	0,25
	Giả sử $C(c; 2 - c)$. $\vec{HC} \cdot \vec{HF} = 0 \Rightarrow C(-2; 4)$.	0,25
	Giả sử $D(3m - 2; m)$. $\vec{DC} \cdot \vec{DF} = 0 \Rightarrow D(4; 2)$.	0,25
	PT đường thẳng AD: $3x - y - 10 = 0$.	0,25

	Giả sử $A(a; 3a - 10)$. $DA = DC \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(6; 8) \\ A(2; -4) \end{cases}.$ Vì $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}$ cùng hướng nên $A(2; -4)$. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \Rightarrow B(-4; -2)$. Vậy $A(2; -4), B(-4; -2), C(-2; 4), D(4; 2)$.	0,25
8		1,0
	$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} & (1) \\ x^2 + x + 3y + 17 - 6\sqrt{x + 7} - 2x\sqrt{3y + 1} = 0 & (2) \end{cases}$ ĐK: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -\frac{1}{3} \\ 2x - y - 1 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x - y - 1} - \sqrt{x} + \sqrt{3y + 1} - \sqrt{x + 2y} = 0$ * Nhận xét: - Nếu $\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} = 0 \\ \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (L)} \Rightarrow \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x} > 0$ - Nếu $\begin{cases} \sqrt{3y + 1} = 0 \\ \sqrt{x + 2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$. Thay vào PT(2) thấy không thỏa mãn $\Rightarrow \sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y} > 0$ $\Leftrightarrow \frac{x - y - 1}{\sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x}} - \frac{x - y - 1}{\sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y}} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y} \end{cases}$	0,25
	+ TH1: $x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$. Thế vào PT (2) ta được: $x^2 + 4x + 14 - 6\sqrt{x + 7} - 2x\sqrt{3x - 2} = 0 \quad (3). \text{ ĐK: } x \geq \frac{2}{3}$ $(3) \Leftrightarrow 2[6\sqrt{x + 7} - (x + 16)] + x[4\sqrt{3x - 2} - (3x + 2)] + x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) \left(\frac{2}{6\sqrt{x + 7} + x + 16} + \frac{9x}{4\sqrt{3x - 2} + 3x + 2} - 1 \right) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2)^2 \left(\frac{2}{6\sqrt{x + 7} + x + 16} + \frac{6x - 2 - 4\sqrt{3x - 2}}{4\sqrt{3x - 2} + 3x + 2} \right) = 0$	0,25

	$\Leftrightarrow (x-2)^2 \left(\frac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16} + \frac{2(\sqrt{3x-2}-1)^2}{4\sqrt{3x-2}+3x+2} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x=2 \text{ (TM)} \Rightarrow y=1 \text{ (TM)}.$	
	+ TH2: $\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y}$ Ta có: $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y} \end{cases}$ Trừ hai vế tương ứng của hai phương trình ta được: $\sqrt{x} = \sqrt{3y+1} \Leftrightarrow 3y = x-1.$	0,25
	Thế vào PT (2) ta được: $x^2 + 2x + 16 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{x} = 0 \quad (4). \text{ĐK: } x \geq 0$ PT(4) $\Leftrightarrow (\sqrt{x+7}-3)^2 + (x-\sqrt{x})^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-3=0 \\ x-\sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases} \text{ (vô lý)} \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1).$	0,25
9		1,0
	Không giảm tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $a, b, c \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với : $\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right) + \left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right) + \left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right) \leq 9 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \leq 9$ Với $f(x) = \frac{4}{1-x} - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x-x^2}, x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$	0,25
	Ta đánh giá $f(x) = \frac{5x-1}{x-x^2} \leq 18x-3, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ Bất đẳng thức này đúng với $\forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$	0,5
	Do đó $f(a) + f(b) + f(c) \leq 18(a+b+c) - 9 = 9$ (đpcm) Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$, do đó dấu bằng xảy ra của bất đẳng thức ban đầu là $a=b=c$	0,25

----- Hết -----

*** Chú ý:** Các cách giải khác nếu đúng vẫn được điểm tối đa.