SỞ GDĐT NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 50 câu, 06 trang)

ĐỀ THI THỬ KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021 (LẦN 2)

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh: ....

Số báo danh:..

Mã đề thi 001

Câu 1. Phương trình $z^2-2z+2=0$ có các nghiệm phức z_1, z_2. Tính $F=|z_1|+|z_2|$.

A. $F=1$. **B.** $F=2\sqrt{2}$. **C.** $F=2$. **D.** $F=\sqrt{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_2(4-x)=1$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 3. Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ vào 10 ghế kê thành hàng ngang?

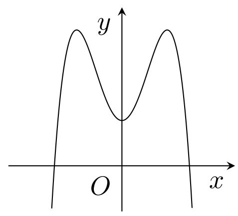
A. $6!\cdot 4!$. **B.** $6!+4!$. **C.** $10!$. **D.** 88400.

Câu 4.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

A. $y=2x^4-4x^2+1$. **B.** $y=-2x^4+4x^2+1$.

C. $y=2x^3-3x+1$. **D.** $y=-2x^3+3x+1$.



Câu 5. Với x là số thực dương tùy ý, $\dfrac{x\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$ bằng

A. $x^{\frac{7}{6}}$. **B.** $x^{\frac{5}{6}}$. **C.** $x^{\frac{11}{6}}$. **D.** $x^{\frac{13}{6}}$.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

A. $y=\dfrac{4x+1}{x+2}$. **B.** $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{-2x+3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Câu 7. Cho số phức $z=3+2i$. Giá trị của $z\overline{z}$ bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** 13. **D.** 5.

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2-\sin x$ là

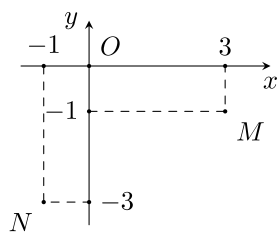
A. $3x^3-\cos x+C$. **B.** $x^3+\cos x+C$. **C.** $3x^3+\cos x+C$. **D.** $x^3-\cos x+C$.

Câu 9.

Biết điểm biểu diễn của hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là các điểm M và N như hình vẽ. Số phức z_1+z_2 có phần ảo bằng

A. -1. **B.** 1.

C. 2 . **D.** -4.



Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u}_1=(2021;0;0)$. **B.** $\overrightarrow{u}_3=(0;0;2021)$.

C. $\overrightarrow{u}_2=(0;2021;0)$. **D.** $\overrightarrow{u}_4=(2021;0;2021)$.

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. **B.** $y'=2.\mathrm{e}^{2x}$. **C.** $y'=2x.\mathrm{e}^{2x-1}$. **D.** $y'=\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$. Tâm I và bán kính R của mặt cầu là

A. $I(2;-1;3)$; $R=16$.
B. $I(-2;1;-3)$; $R=4$.
C. $I(2;-1;3)$; $R=4$.
D. $I(-2;1;-3)$; $R=16$.

Câu 13. Tìm $|z|$ biết $z=-3-i$.

A. $|z|=\sqrt{5}$.
B. $|z|=4$.
C. $|z|=2$.
D. $|z|=\sqrt{10}$.

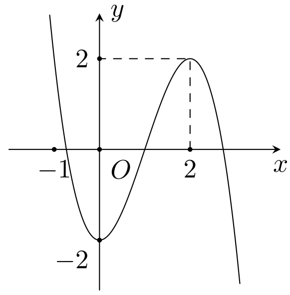
Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$, $f(0)=1$ và $\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=-3$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=-4$.
B. $f(2)=4$.
C. $f(2)=-2$.
D. $f(2)=-3$.

Câu 15.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$.
B. $(-2;2)$.
C. $(0;2)$.
D. $(2;+\infty)$.



Câu 16. Thể tích khối cầu có bán kính bằng 6 là

A. 48π.
B. 288π.
C. 36π.
D. 144π.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a}=-3\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{a}$ là

A. $(0;-4;3)$.
B. $(0;3;4)$.
C. $(0;-3;4)$.
D. $(-3;0;4)$.

Câu 18. Một khối chóp đáy là hình vuông có cạnh bằng 5 và chiều cao của hình chóp bằng 6. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. 150.
B. 10.
C. 50.
D. 30.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-4x)\leq\log_2(5x)$ là

A. $(4;9]$.
B. $[9;+\infty)$.
C. $(0;9]$.
D. $[0;9]$.

Câu 20. Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ là

A. $\dfrac{1}{14}$.
B. $\dfrac{1}{210}$.
C. $\dfrac{209}{210}$.
D. $\dfrac{13}{14}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=2\mathrm{e}^{2x-1}+\dfrac{1}{x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x-1}-\frac{1}{x^2}+C$.
B. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=4\mathrm{e}^{2x-1}-\frac{1}{x^2}+C$.
C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{2x-1}+\ln|x|+C$.
D. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x-1}+\ln|x|+C$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x-y+2z+1=0$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=2$.
B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.
C. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=4$.
D. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm phân biệt tạo thành một tam giác có trọng tâm $G(3;2;-1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{1}=1$. **B.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$. **C.** $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$. **D.** $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}-\frac{z}{3}=1$.

Câu 24. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25. Xét phương trình $4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$. Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Giá trị của biểu thức x_1+x_2 bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{13}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=0$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-6$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1 ↘		$-\infty$ || 2	↘	-3	↗	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

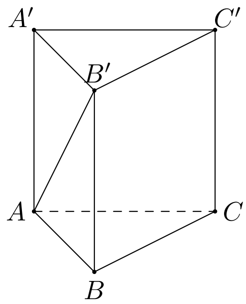
Câu 28. Xét tích phân $I=\int\limits_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$. Với phép đặt $t=\sqrt{x+1}$ tích phân đã cho có dạng

A. $I=\frac{4}{3}\int\limits_1^2 t\,dt$. **B.** $I=2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t}$. **C.** $I=2\int\limits_1^2 dt$. **D.** $I=\int\limits_1^2 \frac{dt}{t}$.

Câu 29.

Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác ABC có cạnh bằng a. Biết AB' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc có số đo bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.



Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n=3n-2$. Tìm công sai d của cấp số cộng đó.

A. $d=-3$. **B.** $d=3$. **C.** $d=2$. **D.** $d=-2$.

Câu 31. Tập xác định của hàm số $y=\log_3(5+4x-x^2)$ là

A. $[-1;5]$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-1;5\}$. **D.** $(-5;1)$.

Câu 32. Cho khối nón có độ dài đường sinh và chiều cao lần lượt là $\ell=2a$, $h=\sqrt{3}a$, thể tích khối nón bằng

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào có 3 điểm cực trị?

A. $y = \dfrac{x+1}{x+2}$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 3$.
C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. **D.** $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30°. **B.** 75°. **C.** 45°. **D.** 60°.

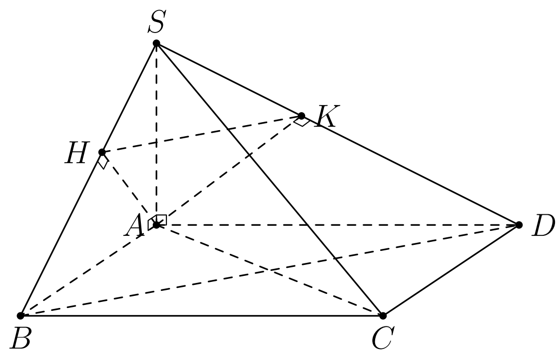
Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + z - 1 = 0$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là

A. $(-9; -13; 4)$. **B.** $(3; 5; -2)$. **C.** $(-1; -1; 0)$. **D.** $(1; 2; -1)$.

Câu 36.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

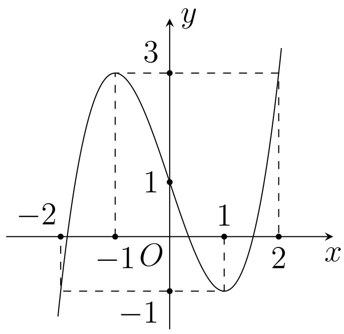
A. 90° . **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45° .



Câu 37.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. $m = 3$. **B.** $m = -13$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -9$.



Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\dfrac{2a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

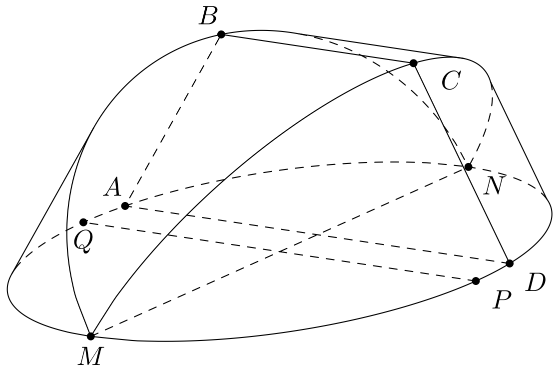
Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của α để tồn tại một mặt phẳng (Q) chứa d tạo với (P) một góc α°?

A. 75. **B.** 76. **C.** 77. **D.** 74.

Câu 40. Biết rằng $\displaystyle\int\limits_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\displaystyle\int\limits_0^3 g(3x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{16}{3}$. Khi đó $I = \displaystyle\int\limits_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 58. **B.** 122. **C.** 26. **D.** 143.

Câu 41. Một vật thể (H) có đáy dạng elip với trục lớn $MN = 20$, trục nhỏ $PQ = 12$. Biết rằng cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục lớn ta luôn được thiết diện là nửa lục giác đều. Tính thể tích V của vật thể (H).



A. $V = 450\sqrt{3}$. B. $V = 360\sqrt{3}$. C. $V = 270\sqrt{3}$. D. $V = 180\sqrt{3}$.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời $|z - 1 + 2i| = \sqrt{10}$ và $\dfrac{2z + 3 - i}{z - i}$ là số thuần ảo?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 43. Cho bất phương trình $\log_2^2 x - m\log_2 x < 4 - 2m$, với m là tham số. Gọi n là số nghiệm nguyên của bất phương trình. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để $n \in [1; 251]$?

A. 10. B. 6. C. 9. D. 3.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2021	$\searrow$	2020	$\searrow$	2016	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|) - 2019|$ là

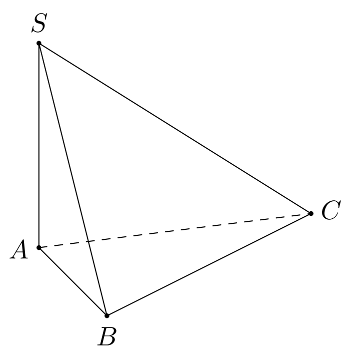
A. 5. B. 9. C. 3. D. 7.

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\ln 5} \mathrm{e}^{2x} f'(\mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x$ bằng

A. 126. B. 84. C. 63. D. 42.

Câu 46.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC), góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là 60°, $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là

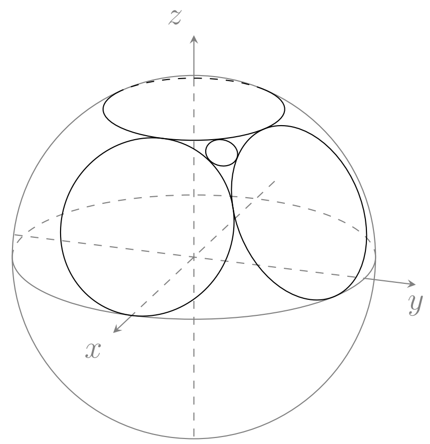


A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. B. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

C. $V = 2\sqrt{2}a^3$. D. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{5}$.

Câu 47.

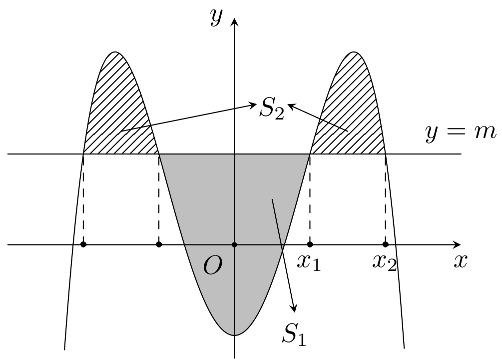
Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$. Trên mặt cầu lấy ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cùng bán kính 1 sao cho chúng đôi một tiếp xúc (có điểm chung duy nhất) như hình vẽ. Gọi $O_4(a;b;c)$ là tâm đường tròn bán kính nhỏ hơn 1, tiếp xúc với cả ba đường tròn trên. Nếu O_1 thuộc tia Oz và $O_2 \in (xOz)$, O_2 có hoành độ dương thì $a+b+c$ gần nhất với giá trị nào sau đây



A. 3,25. **B**. 3,24.

C. 3,22. **D**. 3,23.

Câu 48. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt (như hình vẽ) với $x_2=2x_1$. Gọi S_1 là diện tích phần hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho; S_2 là tổng diện tích hai hình phẳng nằm phía trên đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{19}{8}$. **B**. $\dfrac{30}{11}$. **C**. $\dfrac{19}{11}$. **D**. $\dfrac{30}{19}$.

Câu 49. Với các số phức z_1, z_2, $z_3=iz_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=5$ thì giá trị lớn nhất của $\min\limits_{t\in\mathbb{R}}|tz_2+(1-t)z_3-z_1|$ có dạng $a+\dfrac{b}{\sqrt{c}}$, ở đó a, b là các số nguyên dương, c là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ là

A. 15. **B**. 12. **C**. 13. **D**. 14.

Câu 50. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $a\in(-10;10)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $4^{x-2}=\log_2(x+a)+2a+5$?

A. 3. **B**. 9. **C**. 11. **D**. 8.

——— HẾT ———

Câu	Mã đề																							
	001	002	003	004	005	006	007	008	009	010	011	012	013	014	015	016	017	018	019	020	021	022	023	024
1	B	D	D	C	D	C	D	C	C	A	A	A	A	B	C	D	D	A	B	D	C	C	D	D
2	B	D	D	B	A	A	C	B	D	C	D	B	D	A	D	A	C	B	A	C	C	D	C	C
3	C	B	A	A	A	C	C	B	A	A	B	C	A	C	B	B	D	D	A	D	C	A	A	B
4	B	B	A	D	B	C	C	C	D	B	A	A	C	D	A	B	D	C	D	C	B	C	D	B
5	D	B	A	C	D	D	C	A	C	B	A	D	A	B	A	B	C	B	C	B	C	B	A	B
6	B	A	C	D	D	D	B	B	C	D	C	B	D	A	B	A	C	D	D	D	D	C	A	B
7	C	A	D	A	B	D	C	C	D	A	A	D	D	D	B	C	A	B	B	D	D	D	C	B
8	B	B	B	C	B	C	B	C	D	D	A	B	B	A	B	A	A	A	B	B	A	B	B	C
9	D	D	C	C	A	B	C	A	D	A	D	B	A	D	D	D	D	A	B	A	A	B	B	C
10	C	C	A	D	C	B	D	B	B	B	B	A	C	D	A	B	A	C	A	D	B	A	A	B
11	B	A	A	B	A	C	A	A	B	A	D	C	B	A	D	B	A	D	C	C	C	D	C	C
12	C	C	C	A	D	D	A	D	C	C	D	D	C	D	B	C	D	C	B	D	A	C	B	C
13	D	A	C	B	C	A	B	A	B	A	D	A	D	B	A	D	A	A	B	A	B	D	C	C
14	C	C	A	C	C	D	B	D	C	A	D	C	B	D	D	A	D	C	A	B	D	B	D	D
15	C	B	C	D	C	A	A	D	A	A	D	A	A	D	C	A	D	D	B	C	C	D	D	A
16	B	A	D	A	A	C	B	B	C	B	A	A	A	D	C	B	A	B	C	B	A	C	B	B
17	C	B	A	C	D	D	C	B	C	A	D	A	C	A	C	C	D	B	B	D	C	D	D	A
18	C	C	C	B	B	D	B	C	D	B	C	A	A	A	D	A	D	B	B	D	B	B	A	D
19	A	A	A	C	C	D	A	A	C	D	B	B	A	D	B	B	B	B	A	D	C	C	A	D
20	D	A	B	D	B	A	C	D	A	A	A	B	A	C	A	C	D	C	C	A	B	D	C	C
21	D	C	A	A	C	D	B	B	C	B	B	D	D	C	A	D	A	B	B	A	B	A	D	D
22	B	B	B	C	A	C	D	A	C	B	A	A	A	C	D	D	D	B	C	C	D	B	C	C
23	D	D	B	C	B	C	B	B	C	A	D	D	B	B	A	C	A	A	B	D	B	D	B	A
24	B	B	B	D	B	B	C	C	B	D	D	D	B	B	A	D	C	D	C	A	C	D	D	A
25	A	A	C	B	C	D	B	A	B	D	A	A	A	B	B	C	B	C	C	C	B	D	D	D
26	A	A	B	C	D	B	D	A	B	C	B	D	C	C	C	D	B	C	B	C	A	A	A	A
27	B	B	D	A	D	D	C	C	A	C	A	B	C	C	C	B	D	C	C	D	D	A	C	C
28	C	C	B	B	C	B	B	B	A	C	A	D	C	D	C	D	D	C	D	A	C	A	A	D
29	B	C	C	C	A	D	D	C	A	A	B	B	A	A	D	D	C	A	C	B	D	C	D	A
30	B	B	D	D	A	B	C	C	D	C	A	A	A	C	C	C	C	A	A	B	D	A	A	B
31	B	D	B	D	D	B	B	B	B	A	D	A	C	A	C	D	B	C	C	B	D	B	A	B
32	B	B	D	D	D	B	D	D	C	A	D	A	A	C	A	D	C	D	D	D	B	D	D	B
33	B	A	B	B	A	B	A	A	C	B	B	B	B	C	B	A	D	A	D	A	A	A	C	C
34	D	D	D	C	B	A	C	B	C	D	A	C	B	C	D	C	C	B	D	B	C	B	D	B
35	C	D	A	B	A	D	B	C	C	A	A	A	B	B	C	B	D	A	C	D	B	B	A	D
36	D	B	A	B	B	B	D	A	C	C	A	D	B	C	C	B	C	D	A	A	A	B	C	B
37	B	D	B	C	C	B	B	B	A	A	C	B	B	A	B	B	A	A	C	D	A	D	A	D
38	A	B	B	B	C	C	D	A	C	C	C	A	D	D	A	D	A	A	B	A	C	C	B	B
39	A	B	A	B	C	A	A	D	A	C	C	B	C	C	D	B	A	D	D	D	C	A	B	C
40	C	B	D	A	C	B	D	C	A	B	D	A	D	D	C	C	B	B	C	B	B	D	D	B
41	B	B	D	A	C	B	D	C	C	D	C	C	B	A	C	A	B	B	C	D	B	A	C	C
42	A	A	C	B	D	A	B	A	C	A	A	A	C	A	A	A	C	B	C	C	C	D	B	D
43	C	D	D	A	B	D	A	C	B	C	C	B	C	C	C	D	D	D	D	B	B	A	B	A
44	D	B	B	D	A	D	C	A	A	B	D	D	D	A	A	C	D	B	A	A	A	B	C	C
45	B	C	C	D	D	B	D	D	A	D	D	A	D	C	B	B	D	A	C	D	A	C	C	B
46	A	A	D	D	D	A	B	C	A	D	A	D	A	A	B	D	D	B	B	B	A	C	D	A
47	D	B	B	A	B	B	B	B	C	D	D	D	C	C	D	D	C	A	A	B	C	C	B	D
48	C	D	A	D	D	B	D	B	C	C	C	B	D	C	B	C	D	B	A	D	B	C	C	C
49	B	C	D	C	C	D	A	A	C	A	C	C	B	D	C	C	D	D	B	B	A	C	C	C
50	C	C	C	C	C	C	A	A	D	C	A	B	B	A	B	D	B	A	A	C	D	D	C	D

SỞ GDĐT NINH BÌNH

Mã đề thi 001

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

ĐỀ THI THỬ KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021 (LẦN 2)

MÔN TOÁN

Câu 1. Phương trình $z^2 - 2z + 2 = 0$ có các nghiệm phức z_1, z_2. Tính $F = |z_1| + |z_2|$.

(A) $F = 1$. (B) $F = 2\sqrt{2}$. (C) $F = 2$. (D) $F = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, suy ra $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_2 (4 - x) = 1$ là

(A) $x = 3$. (B) $x = 2$. (C) $x = 1$. (D) $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\log_2 (4 - x) = 1 \Leftrightarrow 4 - x = 2^1 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 3. Có bao nhiêu cách xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ vào 10 ghế kê thành hàng ngang?

(A) $6! \cdot 4!$. (B) $6! + 4!$. (C) $10!$. (D) 88400.

Lời giải.

Việc xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ vào 10 ghế kê thành hàng ngang là một hoán vị của 10 phần tử.
Vậy số cách xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ vào 10 ghế kê thành hàng ngang là 10! (cách).

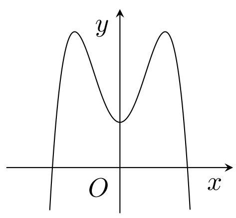
Chọn đáp án (C) □

Câu 4.

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?

(A) $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$. (B) $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

(C) $y = 2x^3 - 3x + 1$. (D) $y = -2x^3 + 3x + 1$.



Lời giải.

Hình dạng đồ thị suy ra hàm số là hàm bậc 4 trùng phương có hệ số bậc 4 là số âm. Khi đó hàm số $y = -2x^4 + 4x + 1$ có dạng đồ thị như hình vẽ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5. Với x là số thực dương tùy ý, $\dfrac{x\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$ bằng

(A) $x^{\frac{7}{6}}$. (B) $x^{\frac{5}{6}}$. (C) $x^{\frac{11}{6}}$. (D) $x^{\frac{13}{6}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{1+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{13}{6}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

(A) $y = \dfrac{4x+1}{x+2}$. (B) $y = \dfrac{3x+4}{x-1}$. (C) $y = \dfrac{-2x+3}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{4x+1}{x+2}$ cắt trục tung tại điểm $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+3}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm $(0;3)$.
- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x+4}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $(0;-4)$.
- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $(0;3)$.

Chọn đáp án B □

Câu 7. Cho số phức $z = 3 + 2i$. Giá trị của $z\overline{z}$ bằng

A 9. B $\sqrt{13}$. C 13. D 5.

Lời giải.

Ta có $z\overline{z} = |z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

Chọn đáp án C □

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là

A $3x^3 - \cos x + C$. B $x^3 + \cos x + C$. C $3x^3 + \cos x + C$. D $x^3 - \cos x + C$.

Lời giải.

Ta có $\int (3x^2 - \sin x)\,\mathrm{d}x = x^3 + \cos x + C$.

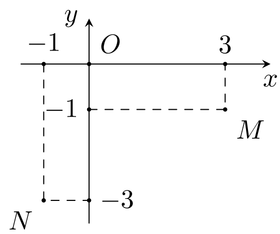
Chọn đáp án B □

Câu 9.

Biết điểm biểu diễn của hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là các điểm M và N như hình vẽ. Số phức $z_1 + z_2$ có phần ảo bằng

A -1. B 1.

C 2 . D -4.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta có $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -1 - 3i$, suy ra $z_1 + z_2 = 2 - 4i$, có phần ảo là -4.

Chọn đáp án D □

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A $\overrightarrow{u}_1 = (2021;0;0)$. B $\overrightarrow{u}_3 = (0;0;2021)$.

C $\overrightarrow{u}_2 = (0;2021;0)$. D $\overrightarrow{u}_4 = (2021;0;2021)$.

Lời giải.

Trục Oy có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$, mà $d \parallel Oy$ nên d có một vectơ chỉ phương là

$$\overrightarrow{u}_2 = 2021\overrightarrow{j} = (0;2021;0)$$

Chọn đáp án C □

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^{2x}$ là

A $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$. B $y' = 2.\mathrm{e}^{2x}$. C $y' = 2x.\mathrm{e}^{2x-1}$. D $y' = \mathrm{e}^{2x}\ln 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2\mathrm{e}^{2x}$

Chọn đáp án B □

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\colon (x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16$. Tâm I và bán kính R của mặt cầu là

(A) $I(2;-1;3)$; $R=16$.
(B) $I(-2;1;-3)$; $R=4$.
(C) $I(2;-1;3)$; $R=4$.
(D) $I(-2;1;-3)$; $R=16$.

Lời giải.

Tâm của mặt cầu (S) là $I(2;-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13. Tìm $|z|$ biết $z=-3-i$.

(A) $|z|=\sqrt{5}$.
(B) $|z|=4$.
(C) $|z|=2$.
(D) $|z|=\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $|z|=\sqrt{10}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$, $f(0)=1$ và $\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=-3$.

Tính $f(2)$.

(A) $f(2)=-4$.
(B) $f(2)=4$.
(C) $f(2)=-2$.
(D) $f(2)=-3$.

Lời giải.

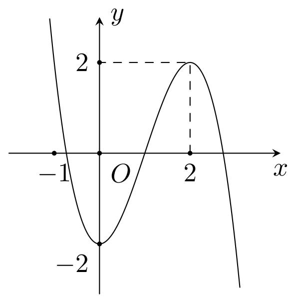
Ta có $-3=\int\limits_0^2 f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_0^2=f(2)-f(0)$. Suy ra $f(2)=1-3=-2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15.

Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(-\infty;0)$.
(B) $(-2;2)$.
(C) $(0;2)$.
(D) $(2;+\infty)$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16. Thể tích khối cầu có bán kính bằng 6 là

(A) 48π.
(B) 288π.
(C) 36π.
(D) 144π.

Lời giải.

Ta có $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=288\pi$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{a}=-3\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{a}$ là

(A) $(0;-4;3)$.
(B) $(0;3;4)$.
(C) $(0;-3;4)$.
(D) $(-3;0;4)$.

Lời giải.

vectơ $\overrightarrow{a}=0\cdot\overrightarrow{i}+(-3)\cdot\overrightarrow{j}+4\cdot\overrightarrow{k}$ nên tọa độ vectơ $\overrightarrow{a}=(0;-3;4)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Một khối chóp đáy là hình vuông có cạnh bằng 5 và chiều cao của hình chóp bằng 6. Thể tích của khối chóp đó bằng

Ⓐ 150. Ⓑ 10. **C** 50. Ⓓ 30.

Lời giải.

Ta có $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 6 = 50$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x^2 - 4x) \le \log_2 (5x)$ là

A $(4; 9]$. Ⓑ $[9; +\infty)$. Ⓒ $(0; 9]$. Ⓓ $[0; 9]$.

Lời giải.

Ta có

$$\log_2 \left(x^2 - 4x\right) \le \log_2(5x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \\ x^2 - 4x \le 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty) \\ x \in [0; 9] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; 9] \, .$$

Do đó bất phương trình có tập nghiệm là $(4; 9]$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20. Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ là

Ⓐ $\frac{1}{14}$. Ⓑ $\frac{1}{210}$. Ⓒ $\frac{209}{210}$. **D** $\frac{13}{14}$.

Lời giải.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = \mathrm{C}_{10}^4 = 210$.

Gọi A là biến cố "trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ", $n(A) = \mathrm{C}_{10}^4 - \mathrm{C}_6^4 = 195$.

Vậy xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ là $\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{13}{14}$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + \frac{1}{x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x-1} - \frac{1}{x^2} + C$. Ⓑ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{e}^{2x-1} - \frac{1}{x^2} + C$.

Ⓒ $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{2x-1} + \ln|x| + C$. **D** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x-1} + \ln|x| + C$.

Lời giải.

Theo bảng công thức nguyên hàm, ta có $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2x-1} + \ln|x| + C$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

Ⓐ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$. **B** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Ⓒ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$. Ⓓ $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $\mathrm{d}(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2$.

Suy ra, phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) có dạng $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm phân biệt tạo thành một tam giác có trọng tâm $G(3;2;-1)$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{1}=1$.
B. $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}+\frac{z}{3}=1$.
C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.
D. $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}-\frac{z}{3}=1$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ là giao điểm của mặt phẳng (P) với ba trục tọa độ.

Điểm $G(3;2;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $a=9$, $b=6$, $c=-3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}-\frac{z}{3}=1$.

Chọn đáp án D □

Câu 24. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{3-2x-5x^2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\frac{3}{5}$.

Chọn đáp án B □

Câu 25. Xét phương trình $4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$. Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Giá trị của biểu thức x_1+x_2 bằng

A. 3.
B. 2.
C. 6.
D. 8.

Lời giải.

Ta có $4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0 \Leftrightarrow 4^x-6\cdot 2^x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Do đó $x_1+x_2=3$.

Chọn đáp án A □

Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{13}{27}$.
B. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=0$.
C. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$.
D. $\max\limits_{[1;3]} f(x)=-6$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-8x^2+16x-9$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-16x+16$.

Xét $3x^2-16x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\frac{4}{3}. \end{array}\right.$

Dễ thấy $\frac{4}{3}\in[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\left\{f(1), f(3), f\left(\frac{4}{3}\right)\right\}$.

Mà $f(1)=0$; $f(3)=-6$; $f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{27}$ suy ra $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{27}$.

Chọn đáp án A □

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1 ↘		$-\infty$ || 2	↘	-3	↗	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

(A) 3. **(B) 1.** (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x \to 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28. Xét tích phân $I = \int\limits_0^3 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$. Với phép đặt $t = \sqrt{x+1}$ tích phân đã cho có dạng

(A) $I = \dfrac{4}{3}\int\limits_1^2 t\,\mathrm{d}t$. (B) $I = 2\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$. **(C) $I = 2\int\limits_1^2 \mathrm{d}t$.** (D) $I = \int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

Lời giải.

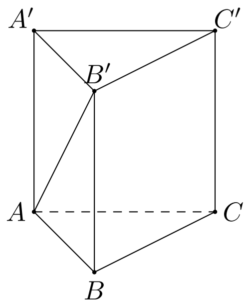
Ta có $t^2 = x+1$, suy ra $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Với $x = 0$ thì $t = 1$, với $x = 3$ thì $t = 2$, do đó $I = 2\int\limits_1^2 \mathrm{d}t$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29.

Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác ABC có cạnh bằng a. Biết AB' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc có số đo bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **(B) $\dfrac{3a^3}{4}$.** (C) $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. (D) $\dfrac{a^3}{4}$.



Lời giải.

Ta có $BB' = AB\tan 60° = a\sqrt{3}$. Do đó

$$V = S_{ABC} \cdot BB' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n - 2$. Tìm công sai d của cấp số cộng đó.

(A) $d = -3$. **(B) $d = 3$.** (C) $d = 2$. (D) $d = -2$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Suy ra công sai của cấp số cộng đã cho là $d = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 31. Tập xác định của hàm số $y = \log_3(5 + 4x - x^2)$ là

(A) $[-1; 5]$. **(B) $(-1; 5)$.** (C) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$. (D) $(-5; 1)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \log_3(5 + 4x - x^2)$ xác định khi $5 + 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 32. Cho khối nón có độ dài đường sinh và chiều cao lần lượt là $\ell = 2a$, $h = \sqrt{3}a$, thể tích khối nón bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. Ⓓ $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải.

Ta có $R = \sqrt{\ell^2 - h^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$, suy ra $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi a^3\sqrt{3}$.

Chọn đáp án B □

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào có 3 điểm cực trị?

Ⓐ $y = \dfrac{x+1}{x+2}$. **B** $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Ⓒ $y = x^4 + 2x^2 - 3$. Ⓓ $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$.

Lời giải.

Trong các hàm số đã cho, chỉ có hàm số trùng phương là có thể có điểm ba cực trị.

Hàm số trùng phương có ba điểm cực trị khi chỉ khi hệ số của x^4 và x^2 trái dấu.

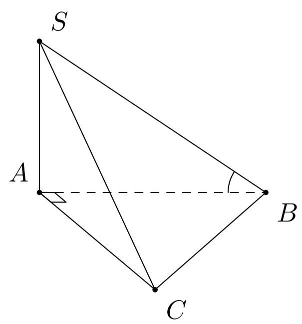
Vậy hàm số có 3 điểm cực trị là $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

Chọn đáp án B □

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Số đo góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

Ⓐ 30°. Ⓑ 75°. Ⓒ 45°. **D** 60°.

Lời giải.



Hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC) là AB.

Do đó $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, ta có

$$\tan B = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Chọn đáp án D □

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha)\colon x - 2y + z - 1 = 0$. Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là

Ⓐ $(-9; -13; 4)$. Ⓑ $(3; 5; -2)$. **C** $(-1; -1; 0)$. Ⓓ $(1; 2; -1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có phương trình là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = -1 - t \end{cases}$

Gọi $M = d \cap (\alpha)$.

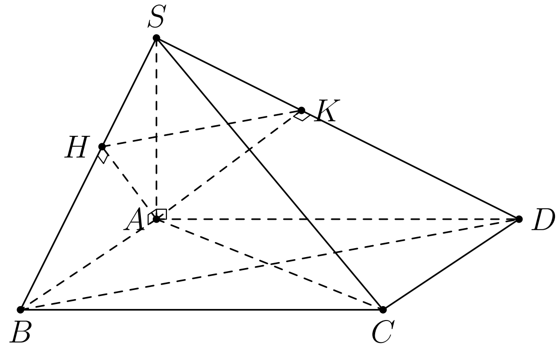
- $M \in d \Rightarrow M(1 + 2t; 2 + 3t; -1 - t)$.
- $M \in (\alpha) \Rightarrow (1 + 2t) - 2(2 + 3t) + (-1 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Vậy $M(-1;-1;0)$.

Chọn đáp án C $\square$

Câu 36.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng



A $90°$. **B** $30°$. **C** $60°$. **D** $45°$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \text{ (do } BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \quad (1)$

Lập luận tương tự ta có $AK \perp SC \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (AHK)$.

Ta lại có $SA \perp (ABCD)$. Do đó góc giữa (AHK) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SA và SC và bằng $\widehat{ASC}$ (do góc $\widehat{ASC}$ là góc nhọn).

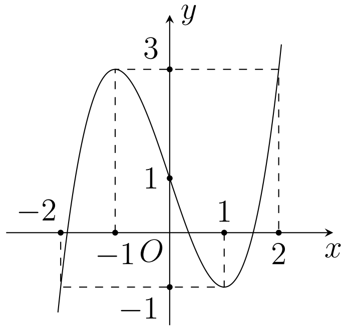
Ta có $AC = SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại A.

Vậy $\widehat{ASC} = 45°$.

Chọn đáp án D $\square$

Câu 37.

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g(x) = -10$.



A $m = 3$. **B** $m = -13$. **C** $m = -1$. **D** $m = -9$.

Lời giải.

Ta có $g'(x) = (6x^2 + 1)f'(2x^3 + x - 1)$.

Vì $6x^2 + 1 > 0$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x^3 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3 + x - 1 = -1 \\ 2x^3 + x - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = x_0 \in (0;1) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	0		x_0		1
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$3+m$	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	$3+m$

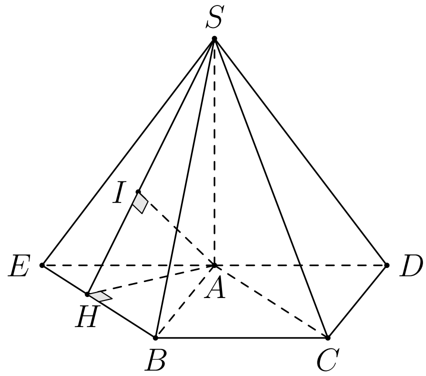
Dựa vào bảng biến thiên, ta được $\max\limits_{[0;1]} g(x) = 3 + m$. Suy ra $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A $\dfrac{2a}{3}$. (B) $\dfrac{a}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. (D) $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ACBE$, $AH \perp BE$, $AI \perp SH$. Do $AC \parallel (SBE)$ nên

$$\mathrm{d}\,[AC, SB] = \mathrm{d}\,[AC, (SBE)] = \mathrm{d}\,[A, (SBE)] = AI.$$

Ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{9}{4a^2}$$

Suy ra $AI = \dfrac{2a}{3}$. Vậy khoảng cách giữa AC và SB bằng $\dfrac{2a}{3}$.

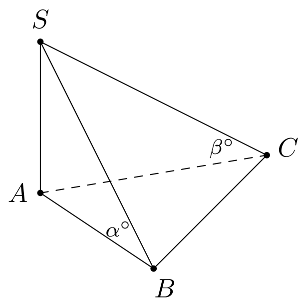
Chọn đáp án (A) □

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 1 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của α để tồn tại một mặt phẳng (Q) chứa d tạo với (P) một góc $\alpha°$?

A 75. (B) 76. (C) 77. (D) 74.

Lời giải.

Hiển nhiên $0 \leq \alpha \leq 90$. Rõ ràng qua d tồn tại mặt phẳng vuông góc với (P) nên giá trị lớn nhất của α là 90. Ta tìm giá trị nhỏ nhất của α.



Gọi C là giao điểm của d và (P). Trên d lấy điểm S khác C, gọi A là hình chiếu của S trên (P), B là hình chiếu của A trên giao tuyến của (Q) và (P). Khi đó

$$\alpha° = ((P), (Q)) = \widehat{SBC}$$
$$\beta° = \widehat{SCA} = (d, (P)).$$

Dễ thấy d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u} = (2; 1; -2)$ và (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (1; -2; 1)$ nên

$$\sin\alpha° = \frac{SA}{SB} \geq \frac{SA}{SC} = \sin\beta° = \left|\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}\right)\right| = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $B \equiv C$ hay (Q) là mặt phẳng chứa d và đường thẳng Δ nằm trong (P) vuông góc với d tại C. Hơn nữa, do α nguyên nên $\alpha \geq 16$. Vậy có 75 giá trị nguyên của α thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40. Biết rằng $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x = 37$ và $\displaystyle\int_0^3 g(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{16}{3}$. Khi đó $I = \displaystyle\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,\mathrm{d}x$ có giá trị là

Ⓐ 58. Ⓑ 122. Ⓒ 26. Ⓓ 143.

Lời giải.

Đặt $t = 3x$, suy ra $\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x$, khi đó

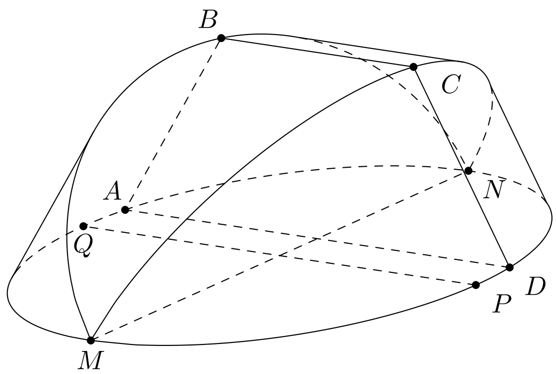
$$-\frac{16}{3} = \int_0^3 g(3x)\,\mathrm{d}x = \int_0^9 g(t)\frac{\mathrm{d}t}{3} \Rightarrow \int_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = -16.$$

Vậy

$$I = 2\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_0^9 g(x)\,\mathrm{d}x = 2\cdot 37 - 3\cdot 16 = 26.$$

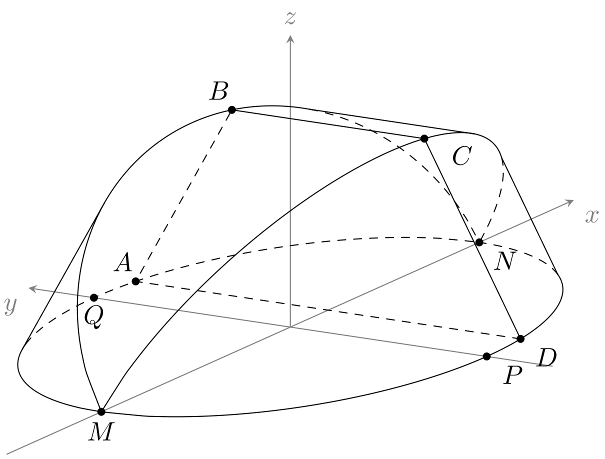
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 41. Một vật thể (H) có đáy dạng elip với trục lớn $MN = 20$, trục nhỏ $PQ = 12$. Biết rằng cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục lớn ta luôn được thiết diện là nửa lục giác đều. Tính thể tích V của vật thể (H).



Ⓐ $V = 450\sqrt{3}$. Ⓑ $V = 360\sqrt{3}$. Ⓒ $V = 270\sqrt{3}$. Ⓓ $V = 180\sqrt{3}$.

Lời giải.



Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Xét trong mặt phẳng Oxy, phương trình elip đáy là

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Xét một điểm thuộc trục lớn có hoành độ bằng x với thiết diện tạo thành là nửa lục giác đều $ABCD$. Khi đó ta có $AD = 12\sqrt{1 - \frac{x^2}{100}}$, do đó diện tích nửa lục giác đều $ABCD$ là

$$S(x) = 27\sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{100}\right).$$

Do đó thể tích vật thể (H) là

$$V = \int_{-10}^{10} S(x)dx = \int_{-10}^{10} 27\sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{100}\right) dx = 360\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án B □

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời $|z-1+2i| = \sqrt{10}$ và $\dfrac{2z+3-i}{z-i}$ là số thuần ảo?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ với $(x; y) \neq (0; 1)$. Khi đó

- $|z-1+2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$.
- $\dfrac{2z+3-i}{z-i}$ là số thuần ảo nên

$$\frac{2z+3-i}{z-i} + \frac{2\overline{z}+3+i}{\overline{z}+i} = 0 \Leftrightarrow 4z\overline{z} + (3+3i)\,z + (3-3i)\,\overline{z} + 2 = 0$$

hay $x^2 + y^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2} = 0$.

Ta thấy

- $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$ là phương trình đường tròn tâm $I_1\,(1; -2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{10}$.
- $x^2 + y^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2} = 0$ là phương trình đường tròn tâm $I_2\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{3}{4}\right)$ bán kính $R_2 = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $I_1I_2 = \dfrac{\sqrt{170}}{4}$ nên có $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ nên hai đường tròn có 2 điểm chung.Mặt khác do điểm $I\,(0; 1)$ thuộc 2 đường tròn nên chỉ có 1 số phức thỏa yêu cầu đề bài.

Cách 2. $\dfrac{2z+3-i}{z-i}$ là số thuần ảo nên

$$\begin{aligned}
&\frac{2z+3-i}{z-i} = mi \Rightarrow 2\,(x+yi) + 3 - i = m\,(x+yi) - i \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = m - my \\ 2y - 1 = mx \end{cases} \\
&\Rightarrow 2x + 3 = \frac{2y-1}{x} - \frac{2y-1}{x}y \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án A □

Câu 43. Cho bất phương trình $\log_2^2 x - m\log_2 x < 4 - 2m$, với m là tham số. Gọi n là số nghiệm nguyên của bất phương trình. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để $n \in [1; 251]$?

A. 10. B. 6. C. 9. D. 3.

Lời giải.

Với $x > 0$, bất phương trình đã cho tương đương

$$(\log_2 x - 2)\left(\log_2 x - (m-2)\right) < 0.$$

Dễ thấy với $m = 4$ thì bất phương trình vô nghiệm. Khi đó

- Nếu $m < 4$ hay $m \in \{1, 2, 3\}$ thì bất phương trình tương đương

  $$m - 2 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow 2^{m-2} < x < 4.$$

  Rõ ràng, $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình và có không quá 251 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu.

- Nếu $m > 4$ thì bất phương trình tương đương

  $$2 < \log_2 x < m - 2 \Leftrightarrow 4 < x < 2^{m-2}.$$

  Do có không quá 251 số nguyên x thỏa mãn bất phương trình nên $2^{m-2} \leq 256$ hay $m \leq 10$, tức $m \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Vậy có tất cả 9 số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu.
Chọn đáp án C □

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1	0	4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2021	↘ 2020 ↘	2016	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|) - 2019|$ là

A 5. B 9. C 3. D 7.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	2016	↗	2020	↘	2016	↗	$+\infty$

Dễ thấy phương trình $f(|x|) - 2019 = 0$ có bốn nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4 với $x_1 < -4 < x_2 < 0 < x_2 < 4 < x_4$. Do đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	x_1	-4	x_2	0	x_3	4	x_4	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ 3 ↘	0	↗ 1 ↘	0	↗ 3 ↘	0	↗ $+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D) □

Câu 45. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x-3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int\limits_0^{\ln 5} e^{2x} f'(e^x)\, dx$ bằng

(A) 126. [B] 84. (C) 63. (D) 42.

Lời giải.

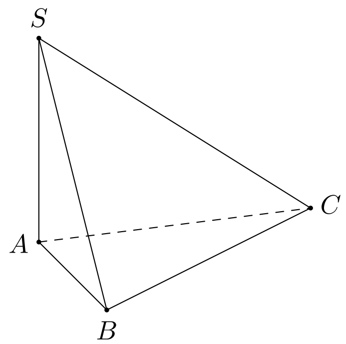
Đặt $t = e^x$, suy ra $dt = e^x\, dx$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_1^5 t f'(t)\, dt = t f(t)\Big|_1^5 - \int\limits_1^5 f(t)\, dt \\ &= 5f(5) - f(1) - \int\limits_1^2 (4t-3)\ dt - \int\limits_2^5 \left(t^2+1\right)\ dt \\ &= 129 - 3 - 42 = 84. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 46.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SBC), góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là 60°, $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a là

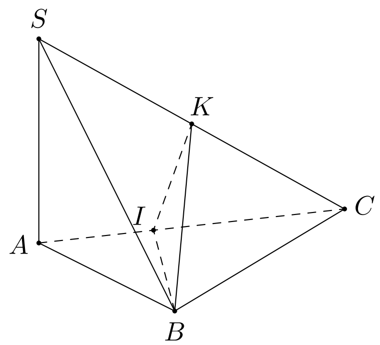


[A] $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. (B) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

(C) $V = 2\sqrt{2}a^3$. (D) $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{5}$.

Lời giải.

Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$. Do $BC \perp SA$ và $BC \perp AH$ nên $BC \perp (SAB)$, do đó tam giác ABC vuông tại B. Kẻ $BI \perp AC$, suy ra $BI \perp SC$ và kẻ $BK \perp SC$ thì $SC \perp (BIK)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKI} = 60^\circ$. Do $\widehat{BSC} = 45^\circ$ nên $SB = BC = a\sqrt{2}$ và K là trung điểm của SC nên $BK = \dfrac{SB\sqrt{2}}{2} = a$. Ta có



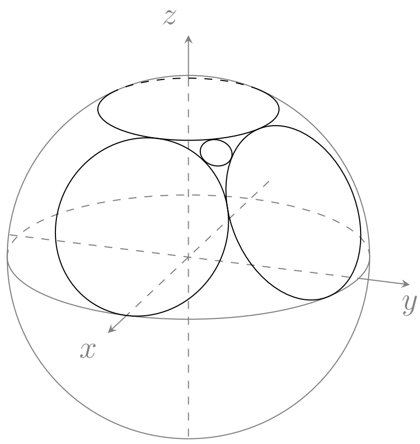
$$\begin{aligned} & BI = BK \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \\ & \frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow AB = \frac{BI \cdot BC}{\sqrt{BC^2 - BI^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}, \\ & SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $V = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot SA = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{15}$.

Chọn đáp án (A) □

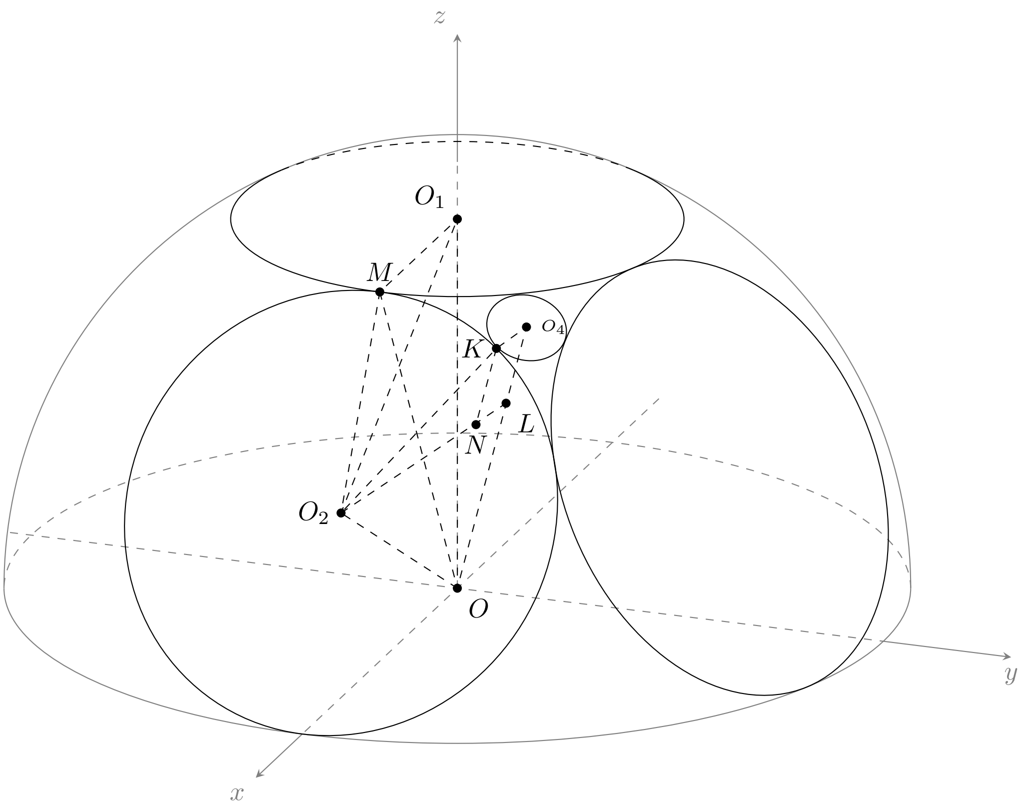
Câu 47.

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Trên mặt cầu lấy ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) cùng bán kính 1 sao cho chúng đôi một tiếp xúc (có điểm chung duy nhất) như hình vẽ. Gọi $O_4(a; b; c)$ là tâm đường tròn bán kính nhỏ hơn 1, tiếp xúc với cả ba đường tròn trên. Nếu O_1 thuộc tia Oz và $O_2 \in (xOz)$, O_2 có hoành độ dương thì $a + b + c$ gần nhất với giá trị nào sau đây



A. 3,25.
B. 3,24.
C. 3,22.
D. 3,23.

Lời giải.



Gọi tâm ba đường tròn bán kính 1 là O_1, O_2, O_3. Tâm đường tròn cần tìm là O_4. Dễ thấy, mặt cầu đã cho có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 2$. Gọi M là giao điểm của (O_1) và (O_2). Khi đó $MO_1 = MO_2 = 1$, $OM = 2$ nên $OO_1 = OO_2 = O_1O_2 = \sqrt{3}$. Dễ thấy, OO_4 là trục của tam giác $O_1O_2O_3$. Gọi L là tâm của tam giác $O_1O_2O_3$, khi đó $O_2L = 1$ và $OL = \sqrt{2}$. Gọi K là giao điểm của (O_2) và (O_4), N là hình chiếu của K trên O_2L. Để ý rằng $OO_2 \perp O_2K$ nên hai tam giác vuông OO_2L và O_2KN đồng dạng. Suy ra

$$\frac{KN}{O_2L} = \frac{O_2K}{O_2O} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow KN = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow OO_4 = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ các dữ kiện trên, ta dễ dàng tính được $O_1\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, $O_2\left(\frac{3}{2};0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Khi đó, tọa độ của O_3 là nghiệm dương của hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+\left(z-\sqrt{3}\right)^2=3 \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\sqrt{2} \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

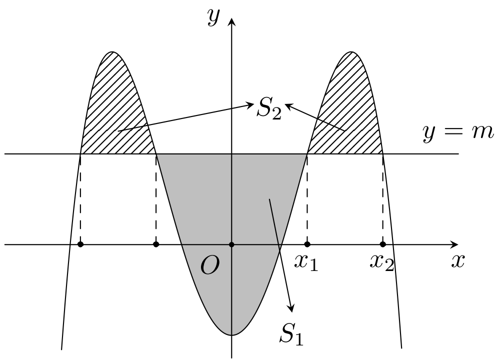
Suy ra $L\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{\sqrt{2}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Do đó đường thẳng OL có phương trình $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{z}{2\sqrt{3}}$. Do $O_4\in OL$ nên $O_4\left(2t;\sqrt{2}t;2\sqrt{3}t\right)$, $t>0$, do đó

$$\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}=OO_4=\sqrt{18t^2}=3\sqrt{2}t\Rightarrow t=\frac{6+\sqrt{6}}{18}.$$

Do đó $O_4\left(\dfrac{6+\sqrt{6}}{9};\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{9};\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}\right)$. Vậy $a+b+c\approx 3{,}22879$ gần 3,23 nhất.

Chọn đáp án D □

Câu 48. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt (như hình vẽ) với $x_2=2x_1$. Gọi S_1 là diện tích phần hình phẳng nằm dưới đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho; S_2 là tổng diện tích hai hình phẳng nằm phía trên đường thẳng $y=m$, giới hạn bởi đường thẳng $y=m$ và đồ thị hàm số đã cho. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.



A. $\dfrac{19}{8}$.
B. $\dfrac{30}{11}$.
C. $\dfrac{19}{11}$.
D. $\dfrac{30}{19}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm đưa về dạng $ax^4+bx^2+c'=0$. Với phép đặt $t=x^2$, $(t\geq 0)$ ta có phương trình

$$at^2+bt+c'=0.$$

Do phương trình có nghiệm $x_2=2x_1$ nên có

$$\begin{cases} t_2=4t_1 \\ t_1+t_2=-\dfrac{b}{a} \\ t_1t_2=\dfrac{c'}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=-\dfrac{b}{5a} \\ ac'=\dfrac{4b^2}{25}. \end{cases}$$

Khi đó

$$\frac{1}{2}S_1 = -\int\limits_0^{x_1} \left(ax^4+bx^2+c'\right)dx = -\left(\frac{ax_1^5}{5}+\frac{bx_1^3}{3}+c'x_1\right) = -\frac{19c'x_1}{30},$$

$$\frac{1}{2}S_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(ax^4+bx^2+c'\right)dx = \left(\frac{ax_2^5}{5}+\frac{bx_2^3}{3}+c'x_2\right) - \left(\frac{ax_1^5}{5}+\frac{bx_1^3}{3}+c'x_1\right) = -\frac{11c'x_1}{30}.$$

Vậy $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{19}{11}$.

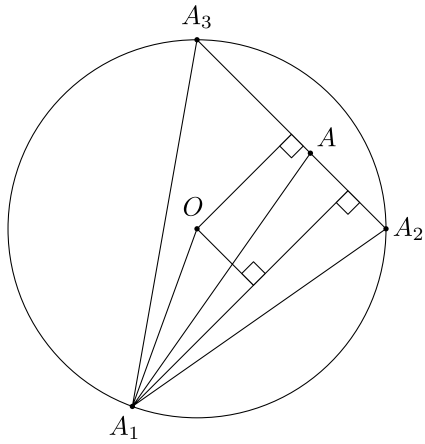
Cách 2. Chọn hàm $y = -x^4 + 5x^2 - 1$ thì $m = 3$. Khi đó $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Chọn đáp án C □

Câu 49. Với các số phức z_1, z_2, $z_3 = iz_2$ thay đổi thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 5$ thì giá trị lớn nhất của $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} |tz_2 + (1-t)z_3 - z_1|$ có dạng $a + \dfrac{b}{\sqrt{c}}$, ở đó a, b là các số nguyên dương, c là số nguyên tố. Giá trị của $a+b+c$ là

A 15. B 12. C 13. D 14.

Lời giải.



Với $t \in \mathbb{R}$, đặt $z = tz_2 + (1-t)z_3$. Trong mặt phẳng phức, gọi A_1, A_2, A_3, A lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3, z. Khi đó, theo cách định nghĩa của z, A là một điểm nằm trên đường thẳng A_2A_3. Suy ra

$$\min_{t\in\mathbb{R}} |tz_2 + (1-t)z_3 - z_1| = \min A_1A = d(A_1, A_2A_3).$$

Để ý rằng $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 5$ nên các điểm A_1, A_2, A_3 thuộc đường tròn tâm O, hơn nữa, do $z_2 = iz_3$ nên $\widehat{A_2OA_3} = 90^\circ$. Ta có

$$d(A_1, A_2A_3) \le OA_1 + d(O, A_2A_3) = 5 + \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $z_1 = -\dfrac{5+5i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = 5$, $z_3 = 5i$. Vậy $a = b = 5$, $c = 2$ và $a+b+c = 12$.

Chọn đáp án B □

Câu 50. Có tất cả bao nhiêu số nguyên $a \in (-10;10)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $4^{x-2} = \log_2(x+a) + 2a + 5$?

A 3. B 9. C 11. D 8.

Lời giải.

Đặt $t = \log_2(x+a)$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$2^{2x-4} = t + 2\left(2^t - x\right) + 5 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x-5} + 2x - 5 = 2\cdot 2^t + t.$$

Đặt $f(u) = 2\cdot 2^u + u$, dễ thấy $f'(u) = 2\cdot 2^u \ln 2 + 1 > 0$, với mọi u, hay $f(u)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình trên ta có

$$f(2x-5) = f(t) \Leftrightarrow 2x-5 = t \Leftrightarrow a = 2^{2x-5} - x.$$

Đặt $g(x) = 2^{2x-5} - x$, ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x-5} \ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \frac{\log_2(\ln 2)}{2} = x_0.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$g(x_0) \approx -1{,}5$	$\nearrow$	

Do đó tồn tại x thỏa mãn yêu cầu khi và chỉ khi $a \geq g(x_0)$. Do a nguyên và $a \in (-10; 10)$ nên có 11 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án C $\square$

——— HẾT ———