

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN
CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI
CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2021-2022**

Môn thi: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 03/01/2022

(Đề thi có 01 trang, gồm 4 câu)

Câu 1. (5.0 điểm) Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1, u_2 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \sqrt{u_n + 2} + \frac{n-1}{3n} u_{n-1} + \frac{1}{3}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2. (5.0 điểm)

a) Cho hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(x + f(x) + y) = x + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Xét tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x + y) = f(y) + x, \forall y \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng tập A có tính chất: nếu $x_1 \in A$ và $x_2 \in A$ thì $x_1 - x_2 \in A$.

b) Hãy chỉ ra ít nhất hai hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ thỏa mãn $f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}$ và

$$f(x + f(x) + y) = x + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

c) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn

$$f(x + f(x) + y) = x + f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Câu 3. (5.0 điểm) Tìm số nguyên dương m lớn nhất sao cho với mọi $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ và mọi bộ 10 số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ thì luôn tồn tại cách chọn các số nguyên $c_1, c_2, \dots, c_{10} \in \{-1, 0, 1\}$ (không đồng thời bằng 0) để cho $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_{10} a_{10}$ chia hết cho k .

Câu 4. (5.0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi A' đối xứng A qua BC . Gọi P là giao điểm của $A'C$ và (O) (P khác C).

a) Gọi N, K lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC và tam giác PAC . Dựng hình bình hành $BNLO$. Chứng minh LK vuông góc BP .

b) Gọi d là đường thẳng qua A' song song BC . Gọi X là giao điểm của AP và d .

Đường thẳng qua X vuông góc AX cắt AA' tại S . Chứng minh đường tròn tâm S , bán kính SX tiếp xúc đường tròn (O) .

.....**HẾT**.....

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC**

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 3 câu)

**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN
CHỌN HỌC SINH GIỎI DỰ THI
CẤP QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2021-2022**

Môn thi: Toán

Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Ngày thi thứ hai: 04/01/2022

Câu 5. (6.0 điểm) Cho p là số nguyên tố lẻ có dạng $2^{2^k} + 1$ (với $k \in \mathbb{Z}^+$). Chứng minh rằng với mọi số nguyên a với $(a, p) = 1$ thì tồn tại $u \in \mathbb{N}$ sao cho $a \equiv 7^u \pmod{p}$.

Câu 6. (7.0 điểm) Với a, b là các số nguyên dương, xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1, u_2 = 2, \text{ và } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Gọi S là tập hợp các cặp số (a, b) sao cho mọi số nguyên dương m không thuộc dãy (u_n) thì đều có thể biểu diễn thành tổng của các số hạng phân biệt của dãy.

- Xác định tất cả các cặp số thuộc S .
- Ứng với mỗi cặp $(a, b) \in S$, tìm tất cả các số nguyên dương m không thuộc dãy (u_n) tương ứng sao cho cách biểu diễn trên là duy nhất.

Bài 7. (7.0 điểm) Cho tam giác ABC ($\widehat{ABC} > 90^\circ$) có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F .

- Đường thẳng AI cắt (O) tại R ($R \neq A$). Kẻ đường kính AT của (O) . Đường tròn đường kính IT cắt RD và AT lần lượt tại Z, Y . Chứng minh: $ZI \cdot YT = IY \cdot ZT$.
- Các đường thẳng EI và FI lần lượt cắt AD tại P, Q . Gọi X là giao điểm của BQ và CP . Chứng minh rằng $\widehat{AIX} = 90^\circ$.

.....**HẾT**.....

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.