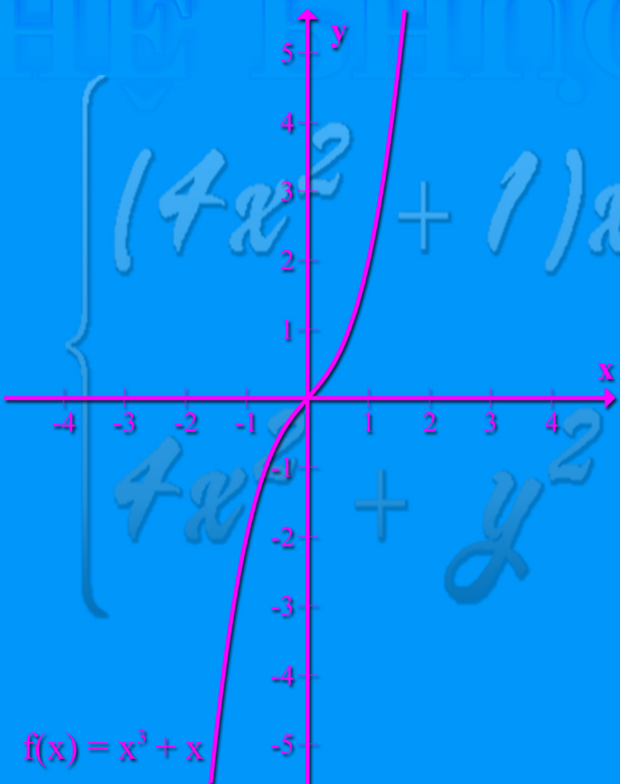
BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC

BOXMATH.VN

CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG

TUYỂN TẬP

HỆ PHƯƠNG TRÌNH



$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$$

Box Math
http://boxmath.vn

Mục lục

Lời nói đầu **2**

Các thành viên trong ban quản trị, trong nhóm biên soạn **3**

1 Sử dụng phép biến đổi đại số và phép thế **4**

2 Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ **75**

3 Sử dụng phương pháp hàm số **110**

4 Sử dụng phương pháp đánh giá **123**

5 Sử dụng phép thế lượng giác **143**

Lời nói đầu

Chúng tôi rất vui mừng khi "**Tuyển tập hệ phương trình của BoxMath**" được hoàn thành, bởi nó đáp ứng được nhiều mong mỏi của quý đọc giả, đặc biệt là các em học sinh. Có thể nói tuyển tập hệ phương trình của BoxMath là sự tập hợp nhiều bài toán hay và kỉ thuật thường dùng khi giải hệ phương trình.

Nội dung của tuyển tập hệ phương trình của BoxMath được chia theo phương pháp giải toán như sau:

1. **Sử dụng phép biến đổi đại số và thế**
2. **Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ**
3. **Sử dụng phương pháp hàm số**
4. **Sử dụng phương pháp đánh giá**
5. **Sử dụng phép thế lượng giác**

Hy vọng, tuyển tập hệ phương trình của BoxMath góp phần nhỏ đem lại nhiều thành công cho các bạn đọc giả, đặc biệt là quý Thầy Cô trong công tác giảng dạy, các em học sinh trong học tập, trong các kì thi cấp khu vực, cấp quốc gia.

Cuối cùng thay ban quản trị xin chúc các bạn lời chúc sức, thành đạt trong công sống, và tha thiết đón nhận ý kiến đóng góp quý báo của bạn đọc về những tồi tài, thiếu sót để tuyển tập hệ phương trình của BoxMath hoàn thiện hơn.

Hồng Ngự, ngày 16 tháng 6 năm 2012.
Thay mặt nhóm biên soạn
LÊ TRUNG TÍN

Các thành viên trong ban quản trị, trong nhóm biên soạn

1. Huỳnh Chí Hào - THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp.
2. Phạm Tuấn Khải - THPT Trần Văn Năng - Đồng Tháp.
3. Lê Trung Tín - THPT Hồng Ngự 2 - Đồng Tháp.
4. Hồ Hoàng Việt - Gò Đen - Long An.
5. Nguyễn Văn Thoan - Nam Định.
6. Nguyễn Mạnh Tuấn - Khánh Hòa.
7. Thái Mạnh Cường - Nghệ An.
8. Đinh Văn Minh - Vĩnh Phúc.
9. Giang Hoàng Kiệt - TP Hồ Chí Minh.
10. Ngô Công Bình - THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa.
11. Nguyễn Đức Huỳnh - THPT Hùng Vương - TP Hồ Chí Minh.
12. Nguyễn Quốc Oanh - THPT Sào Nam -Quảng Nam.

LaTeX

Hỗ trợ kĩ thuật Latex

- Châu Ngọc Hùng - THPT Ninh Hải - Ninh Thuận.

Trình bày bìa

- Phạm Tuấn Khải

1 Sử dụng phép biến đổi đại số và phép thế

$\boxed{1}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x & (1) \\ 1 + y^2 = 5\left(1 + x^2\right) & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Phương trình (2) tương đương với $y^2 - 5x^2 = 4 \quad (3)$

Thay vào phương trình (1) ta có:

$$x^3 + \left(y^2 - 5x^2\right)y = y^3 + 16 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2y - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 5xy - 16x = 0 \end{array}\right.$$

- Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

- Với $x^2 - 5xy - 16 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2 - 16}{5x}$, thay vào (3) ta có

$$\left(\frac{x^2 - 16}{5x}\right)^2 - 5x^2 = 4 \Leftrightarrow 124x^4 + 132x^2 - 256 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $(x; y) = (0; \pm 2), (1; -3), (-1; 3)$□

$\boxed{2}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2\left(y^4 - x^4\right) \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = \left(x^2 + 3y^2\right)\left(3x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = 2y^4 - 2x^4 + 3x^4 + 3y^4 + 10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y} = 3x^4 + 3y^4 + 10x^2y^2 - 2y^4 + 2x^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 5y^4x + x^5 + 10x^3y^2 \\ 1 = 5x^4y + y^5 + 10x^2y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 = 2 + 1 \\ x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5 = 2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^5 = 3 \\ (x - y)^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt[5]{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[5]{3} + 1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt[5]{3} - 1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x; y) = \left(\dfrac{\sqrt[5]{3} + 1}{2}; \dfrac{\sqrt[5]{3} - 1}{2}\right)$□

3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \neq 0$

Biến đổi hệ phương trình thành

$$\begin{cases} 2+3y=\dfrac{1}{x^3} \quad (1) \\ y^3-2=\dfrac{3}{x} \quad (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)$ vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} y^3+3y=\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x} &\Leftrightarrow y^3-\frac{1}{x^3}+3\left(y-\frac{1}{x}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{x}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}\right)+3\left(y-\frac{1}{x}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{x}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x}+3\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{x}\right)\left[\left(y+\frac{1}{2x}\right)^2+\frac{3}{4x^2}+3\right]=0 \\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Thay vào (2) ta được : $\dfrac{1}{x^3}-2=\dfrac{3}{x} \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x;y)=(-1;-1),\left(\dfrac{1}{2};2\right)\square$

4 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$$

Lời giải:

Nhân phương trình thứ hai với -8 rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được

$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=y^4-16y^3+96y^2-256y+256$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^4=(y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=y-4 \\ x-2=4-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y-2 \\ x=6-y \end{array}\right.$$

- Với $x=y-2$, thay vào phương trình đầu ta được:

$$\begin{aligned} &-8y^3+24y^2-32y+16=240 \\ &\Leftrightarrow y^3-3y^2+4y+28=0 \\ &\Leftrightarrow (y+2)\left(y^2-5y+14\right)=0 \\ &\Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=-4 \end{aligned}$$

- Với $x=6-y$, thay vào phương trình đầu ta được:

$$\begin{aligned}&-24y^3+216y^2-864y+1296=240\\&\Leftrightarrow y^3-9y^2+36y-44=0\\&\Leftrightarrow (y-2)\left(y^2-7y+22\right)=0\\&\Leftrightarrow y=2\Rightarrow x=4\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y)=(-4;-2),(4;2)\square$

5 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y & (1)\\ x^2-3=3\left(y^2+1\right) & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Thế (2) vào (1) ta có:

$$\begin{aligned}&3\left(x^3-y^3\right)=\left(x^2-3y^2\right)(4x+y)\\&\Leftrightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0\\&\Leftrightarrow x\left(x^2+xy-12y^2\right)=0\\&\Leftrightarrow x=0\vee x=3y\vee x=-4y\end{aligned}$$

- Với $x=0$, thay vào (2) ta có: $y^2=-2$ (vô nghiệm).
- Với $x=3y$, thay vào (2) ta có: $y^2=1\Leftrightarrow y=\pm1\Rightarrow x=\pm3$.
- Với $x=-4y$, thay vào (2) ta có: $y^2=\dfrac{6}{13}\Rightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{6}{13}}\Rightarrow x=\mp4\sqrt{\dfrac{6}{13}}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là:

$$(x;y)=(3;1),(-3;-1),\left(-4\sqrt{\frac{6}{13}};\sqrt{\frac{6}{13}}\right),\left(4\sqrt{\frac{6}{13}};-\sqrt{\frac{6}{13}}\right)$$

6 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3+y^3-xy^2=1 & (1)\\ 4x^4+y^4=4x+y & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Thay (1) vào (2), ta có:

$$\begin{aligned}&4x^4+y^4=(4x+y)\left(x^3+y^3-xy^2\right)\\&\Leftrightarrow xy\left(3y^2-4xy+x^2\right)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=1\\ y=0\Rightarrow x=1\\ 3y^2-4xy+x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\ x=3y\end{array}\right.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Thay vào (1), ta có: $x=y=1$

Thay vào (1), ta có: $x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}},y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x;y)=(0;1),(1;0),(1;1),\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)\square$

$\boxed{7}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=4 \\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=2 \end{cases} \qquad (I)$$

Lời giải:

Điều kiện: $x>0, y>0$

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}=\dfrac{5}{y+42x} \quad (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}=3 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) nhân (2) vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=\frac{15}{y+42x} \\ &\Leftrightarrow (y-2x)(y+42x)=15xy \\ &\Leftrightarrow y^2-84x^2+25xy=0 \\ &\Leftrightarrow (y-3x)(y+28x)=0 \\ &\Leftrightarrow y=3x\,(\text{ do } y+28x>0) \end{aligned}$$

Từ đó thế vào (2) ta được: $x=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{27};y=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{9}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y)=\left(\dfrac{5+2\sqrt{6}}{27};\dfrac{5+2\sqrt{6}}{9}\right)\square$

$\boxed{8}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge 1, y\ge 0$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2-xy-2y^2-(x+y)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)-(x+y)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)(x-2y-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x-2y-1=0\,(\text{ do } x+y>0) \\ &\Leftrightarrow x=2y+1 \end{aligned}$$

Thế vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} &y\sqrt{2y}+\sqrt{2y}=2y+2 \\ &\Leftrightarrow (y+1)\left(\sqrt{2y}-2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2y}-2=0\,(\text{ do } y\ge 0\Rightarrow y+1>0) \\ &\Leftrightarrow 2y=4 \\ &\Leftrightarrow y=2\Rightarrow x=5 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y)=(5;2)\square$

9 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 + 3x^2y = 5 \\ y^3 + 6xy^2 = 7 \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} & 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = 27 \\ & \Leftrightarrow (2x+y)^3 = 27 \\ & \Leftrightarrow 2x + y = 3 \\ & \Leftrightarrow y = 3 - 2x \end{aligned}$$

Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} & 2y^3 - 9y^2 + 7 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{7+\sqrt{105}}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5-\sqrt{105}}{8} \\ y = \dfrac{7-\sqrt{105}}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{105}}{8} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm là:

$$(x;y) = (1;1)\,, \left(\frac{5+\sqrt{105}}{8}; \frac{7-\sqrt{105}}{4}\right), \left(\frac{5-\sqrt{105}}{8}; \frac{7+\sqrt{105}}{4}\right)$$

10 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_5(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 3x + 2y > 0 \\ 3x - 2y > 0 \end{cases}$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} (3x-2y)(3x+2y)=5 \\ \log_5(3x+2y)-\dfrac{\log_5(3x-2y)}{\log_5 3}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y)=5 \\ \log_5 3.\log_5(3x+2y)-\log_5(3x-2y)=\log_5 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=\dfrac{5}{3x-2y} \\ \log_5 3\left[\log_5 5-\log_5(3x-2y)-1\right]-\log_5(3x-2y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y)=5 \\ \log_5 3.\log_5(3x-2y)+\log_5(3x-2y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y)=5 \\ \log_5(3x-2y)(\log_5 3+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2y)(3x+2y)=5 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y)=(1;-1)\square$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x & (1) \\ x\left(y^3-x^3\right)=7 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ (2) ta suy ra: $x\neq y$

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \left(x^4-xy^3\right)+\left(x^3y-x^2y^2\right)-9(x-y)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)\left[x\left(x^2+xy+y^2\right)+x^2y-9\right]=0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)\left[x(x+y)^2-9\right]=0 \\ &\Leftrightarrow x(x+y)^2-9=0 \quad (\text{do } x\neq y) \\ &\Leftrightarrow x(x+y)^2=9 \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (3) ta suy ra $x>0$. Từ phương trình (2) ta suy ra $y=\sqrt[3]{x^3+\dfrac{7}{x}}$, thay vào (3) ta được:

$$x\left(x+\sqrt[3]{x^3+\frac{7}{x}}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow x\left[x^2+2x.\sqrt[3]{x^3+\frac{7}{x}}+\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{7}{x}\right)^2}\right]-9=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2.\sqrt[3]{x^3+\frac{7}{x}}+x.\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{7}{x}\right)^2}-9=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x\sqrt[3]{x^6+7x^2}+\sqrt[3]{x(x^4+7)^2}-9=0 \quad (4)$$

Xét hàm số: $f\left(x\right) = x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x{(x^4 + 7)}^2} - 9, x > 0$

$$f'\left(x\right) = 3x^2 + 2\left[\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \frac{6x^6 + 14x^2}{3\sqrt[3]{\left(x^6 + 7x^2\right)^2}}\right] + \frac{1}{3}.\frac{9x^8 + 70x^4 + 49}{\sqrt[3]{\left[x{(x^4 + 7)}^2\right]^2}} > 0, \forall x > 0$$

Suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ Mà $f\left(1\right) = 0$

Suy ra (4) có nghiệm duy nhất $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(x; y) = (1; 2)\square$

12 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + xy\right)^2 = 2x + 9 \\ xy = \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2}\right)^2 = 2x + 9 \\ xy = \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^3 + 12x^2 + 48x + 64\right) = 0 \\ xy = \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -4 \\ xy = \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ xy = \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \vee \begin{cases} x = -4 \\ xy = \dfrac{-x^2 + 6x + 6}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = \dfrac{17}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x; y) = \left(-4; \dfrac{17}{4}\right)\square$

13 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + 3y - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 4xy + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow 2{(x + y)}^2 + 3(x + y) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = -2 \\ x + y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $x + y = -2 \Rightarrow x = -2 - y$ thay vào phương trình (2) ta được

${(-2 - y)}^2 + y^2 - 4(2 + y)y + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = -3 \\ y = -2 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right.$

- Với $x + y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} - y$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\left(\frac{1}{2}-y\right)^2+y^2+4\left(\frac{1}{2}-y\right)y+2y=0\Leftrightarrow -2y^2+3y+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{3+\sqrt{11}}{4}\Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{11}}{4}\\ y=\dfrac{3-\sqrt{11}}{4}\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{4}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là:$(x;y)=(1;-3);(-2;0);\left(\dfrac{3+\sqrt{11}}{4};\dfrac{-1-\sqrt{11}}{4}\right);\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{4};\dfrac{-1+\sqrt{11}}{4}\right)$□

14 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2-1=0 & (1)\\ x^3y-x^2+xy+1=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) + (2) vế với vế ta được

$$\begin{aligned} &x^4-x^2+x^2y^2+xy=0\\ \Leftrightarrow &x(x^3-x+xy^2+y)=0\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x=0\\ x^3-x+xy^2+y=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $x=0$, thay vào (1) không thỏa mãn.
- Với $x^3-x+xy^2+y=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{y}=\dfrac{-1-xy}{x}$, thay vào (2) ta được

$$x^3+x=\frac{-1-xy}{x}\Rightarrow y=\frac{-x^4-x^2-1}{x}\quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình (2) ta được:

$$x^2(-x^4-x^2-1)-x^2-x^4-x^2-1+1=0\Leftrightarrow x^6+2x^4+3x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^4+2x^2+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (loại)}\\ x^4+2x^2+3=0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm□

15 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2y-3y=-1\\ xy^2-3y^2=-2\end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình thành

$$\begin{cases} (2x^2-3)y=-1\\ (x-3)y^2=-2\end{cases}$$

Dễ thấy $y=0$ không phải nghiệm của hệ. Như vậy ta có

$$\begin{cases} 2x^2-3=\dfrac{-1}{y} \\ (x-3)=\dfrac{-2}{y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2-x=\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{y})(2x+\frac{2}{y}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{1}{y}=0 \\ 2x+\dfrac{2}{y}-1=0 \end{array}\right.$$

- Với $x=\dfrac{1}{y}$ thay vào phương trình thứ (2) ta được:

$$y-3y^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{-2}{3} \Rightarrow x=\dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$$

- Với $2x+\dfrac{2}{y}-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{y}$ thay vào phương trình thứ (2) ta được:

$$\frac{-5}{2}y^2-y+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{5} \Rightarrow x=\dfrac{7-2\sqrt{21}}{10} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{5} \Rightarrow x=\dfrac{7+2\sqrt{21}}{10} \end{array}\right.$$

Kết luận:Vậy hệ phương trình có 4 cặp nghiệm
$(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{-2}{3}\right),\left(\dfrac{-7-2\sqrt{21}}{10};\dfrac{-1+\sqrt{21}}{5}\right),\left(\dfrac{7+2\sqrt{21}}{10};\dfrac{-1-\sqrt{21}}{5}\right)$□

16 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-4xy^2+8y^3=1 \\ 2x^4+8y^4=2x+y \end{cases}$$

Lời giải:

Từ hệ phương trình trên nhân chéo 2 vế ta được:

$$(2x+y)(x^3-4xy^2+8y^3)=2x^4+8y^4$$

$$\Leftrightarrow x^3y-8x^2y^2+12xy^3=0 \qquad (1)$$

Với $y=0 \Rightarrow x=1$
Với $y\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3-8\left(\frac{x}{y}\right)^2+12\left(\frac{x}{y}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=2 \Rightarrow x=2y \\ \dfrac{x}{y}=6 \Rightarrow x=6y \\ \dfrac{x}{y}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

- Với $x = 2y$ thay vào phương trình đầu ta được

$$(2y)^3 4 - 8y^3 + 8y^3 = 1 \Leftrightarrow 8y^3 = 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow x = 1$$

- Với $x = 6y$ thay vào phương trình đầu ta được

$$(6y)^3 - 24y^3 + 8y^3 = 1 \Leftrightarrow 200y^3 = 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{200}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{216}{200}}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(x; y) = (1; 0), (0; 0); \left(1; \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{216}{200}}; \sqrt[3]{\frac{1}{200}}\right)\square$

17 Tìm m để hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + m = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

Từ phương trình thứ nhất ta có:

$$(x + 1 - y)\left[x^2 + (y - 1)x + y^2 - 2y - 2\right] = 0$$

Do $x^2 + (y - 1)x + y^2 - 2y - 2 > 0$ bởi điều kiện bài toán nên ta có $y = x + 1$
Thay vào phương trình số (2) ta có

$$x^2 - 2\sqrt{1 - x^2} = -m$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2\sqrt{1 - x^2}$ trong tập $[-1; 1]$

$$\Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -m \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m \leq 2$$

Vậy giá trị của m để hệ có nghiệm là $-1 \leq m \leq 2\square$

18 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{x^2y^4 + 2xy^2 - y^4 + 1} = 2(3 - \sqrt{2} - x)y^2 & (1) \\ \sqrt{x - y^2} + x = 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Dễ thấy $y = 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
Xét $y \neq 0$ chia hai vế phương trình (1) cho y^2, ta được phương trình mới như sau:

$$\frac{2}{y^2} - \sqrt{x^2 + \frac{2x}{y^2} + \frac{1}{y^4} - 1} = 6 - 2\sqrt{2} - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{y^2}\right) - \sqrt{\left(x + \frac{1}{y^2}\right)^2 - 1} = 6 - 2\sqrt{2}$$

Đặt $x + \dfrac{1}{y^2} = t$. Ta được $2t - \sqrt{t^2 - 1} = 6 - 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 3$

Với $t = 3$. Ta có $x + \dfrac{1}{y^2} = 3 \Rightarrow y^2 = \dfrac{1}{3 - x}$, thay vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{x - \frac{1}{3 - x}} + x = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\sqrt{2} + 1} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình trên có 3 nghiệm là $(x; y), (2; 1), \left(4 - \sqrt{2}; \sqrt{\sqrt{2} + 1}\right); \left(4 - \sqrt{2}; -\sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)$ □

19 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy = 3y - 13 \quad (1) \\ 3y^2 + 2xy = 2x + 11 \quad (2) \end{cases} (I)$$

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta rút $x = \dfrac{11 - 3y^2}{2y - 2}$ thế vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{11 - 3y^2}{2y - 2}\right)^2 + \frac{3(11 - 3y^2)y}{2y - 2} = 3y - 13 \\ \Leftrightarrow & \frac{(y - 3)(y + 7)(3y - 7)}{y - 1} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} y = 3 \Rightarrow x = -4 \\ y = -7 \Rightarrow x = \dfrac{17}{2} \\ y = \dfrac{7}{3} \Rightarrow x = -2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 3 cặp nghiệm $(x; y) = (3; -4); \left(-7; \dfrac{17}{2}\right); \left(\dfrac{7}{3}; -2\right)$ □

20 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y(x - 1) = 7 \\ 3y^2 + 4x(y - 1) = 3 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3y(x - 1) = 7 \\ (y - 1)\left[3(y + 1) + 4x\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3y(x - 1) = 7 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ 3y = -3 - 4x \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2 + 3x - 10 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y = -3 - 4x \\ x = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{5}{4} \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{-19}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết luận :Vậy hệ phương trình có 3 cặp nghiệm$(x; y) = \left(\frac{5}{4}; 1\right), (-2; 1) \left(4; \frac{-19}{3}\right)$□

21 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2 = x(y-1) & (1) \\ y^2 - 7 = y(x-1) & (2) \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Lấy (1) cộng (2) ta được:

$$(x-y)^2 + (x+y+1) = 6 \quad (3)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 + 9 = -x + y \\ \Leftrightarrow & (x-y)(x+y+1) = -9 \\ \Leftrightarrow & x + y + 1 = \frac{-9}{x-y} \quad (x \neq y) \end{aligned}$$

Thế vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} & (x-y)^2 - \frac{9}{x-y} = 6 \\ & \Rightarrow (x-y)^3 - 9 = 6(x-y) \\ & \Rightarrow x - y = 3 \end{aligned}$$

Thế vào (2) ta được

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = \frac{-1}{2}; y = \frac{-7}{2}$□

22 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy - x + y = 3 & (1) \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 & (2) \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3xy - 3x + 3y = 9 \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -3y(xy + y - 3) + 3x - 3y = -9 & (3) \\ 4x^3 + 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 5 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Lấy (3) cộng (4) với theo vế ta được:

$$\begin{aligned}
&4x^3+12x^2+12x-3xy^2+y^3-3y^2+4=0\\
\Leftrightarrow &4(x+1)^3+4y^3-3y^2(y+x+1)=0\\
\Leftrightarrow &(x+y+1)\left[4(x+1)^2-4(x+1)y+y^2\right]=0\\
\Leftrightarrow &(x+y+1)^2(2x+2-y)^2=0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x+y+1=0\\ 2x+2-y=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $x+y+1=0 \Rightarrow y=-x-1$ thay vào (1) ta có $x^2+3x+4=0$ (vô nghiệm)

- Với $2x+2-y=0 \Leftrightarrow y=2+2x$ thay vào (1) ta có $2x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4};\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right),\left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$ □

23 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2+y^4-4xy^3=1 & (1)\\ 2x^2+y^2-2xy=1 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Nhân vế của (2) với -2 rồi cộng cho (1) vế theo vế ta được: $y^4-2y^2-4xy^3+4xy+1=0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)^2-4xy\left(y^2-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(y^2-1\right)\left(y^2-1-4xy\right)=0\\
&\Leftrightarrow y=1 \vee y=-1 \vee y^2-1-4xy=0
\end{aligned}$$

Nếu $y=1$, thay vào (1) ta được: $4x^2+1-4x=1 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1\end{array}\right.$

Nếu $y=-1$, thay vào (1) ta được: $4x^2+1+4x=1 \Leftrightarrow x\left(x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=-1\end{array}\right.$

Nếu $y^2-1-4xy=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{y^2-1}{4y}$, thay vào (1) ta được:

$$4\left(\frac{y^2-1}{4y}\right)^2+y^4-4\left(\frac{y^2-1}{4y}\right)y^3=1 \Leftrightarrow 5y^4-6y^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=0\\ y=-1\Rightarrow x=0\\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là:

$$(x;y)=(1;1)\,,(0;1)\,,(-1;-1)\,,(0;-1)\,,\left(-\frac{\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{5}\right),\left(\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

24 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4+5y=6 & (1)\\ x^2y^2+5x=6 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned}&x^4-x^2y^2+5\left(y-x\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(x^2-y^2\right)-5\left(x-y\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(x-y\right)\left(x+y\right)-5\left(x-y\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[x^2\left(x+y\right)-5\right]=0\\ &\Leftrightarrow x=y\vee x^2\left(x+y\right)-5=0\end{aligned}$$

Nếu $x=y$, thay vào (1) ta được:

$$x^4+5x=6\Leftrightarrow \left(x^2-x+3\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\Rightarrow y=-2\\ x=1\Rightarrow y=1\end{array}\right.$$

Nếu $x^2\left(x+y\right)-5=0\Leftrightarrow y=\dfrac{5}{x^2}-x$ Thay vào (1) ta được:

$$x^4+5\left(\frac{5}{x^2}-x\right)=6\Leftrightarrow x^6-5x^3-6x^2+25=0$$

Từ (2) ta có: $5x=6-x^2y^2\leq 6\Rightarrow x\leq\dfrac{6}{5}$

Do đó:

$$5x^3+6x^2\leq 5.\left(\frac{6}{5}\right)^3+6\left(\frac{6}{5}\right)^2\leq\frac{432}{25}<25\Rightarrow x^6-5x^3-6x^2+25>0$$

Suy ra trường hợp này hệ vô nghiệm

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x;y)=\left(-2;-2\right),(1;1)\square$

25 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 & (1)\\ y\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\sqrt{3x^2+3} & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0\\ y\neq 0\end{cases}$

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{aligned}&y\sqrt{x}+y^2=2x\sqrt{x}+2xy\\ \Leftrightarrow & y^2+\left(\sqrt{x}-2x\right)y-2x\sqrt{x}=0\\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} y=-\sqrt{x}\\ y=2x\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Nếu $y=-\sqrt{x}$, thay vào (2) ta được:

$$-\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\sqrt{3x^2+3}$$

Ta có: $-\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)<0<\sqrt{3x^2+3}$ nên phương trình này vô nghiệm

- Nếu $y=2x$, thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned}&2x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\sqrt{3x^2+3}\\ \Leftrightarrow&\sqrt{x^2+1}\left(2x-\sqrt{3}\right)=2x\\ \Leftrightarrow&\sqrt{x^2+1}=\frac{2x}{2x-\sqrt{3}}\quad(3)\end{aligned}$$

Xét 2 hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2+1}, x\in(0;+\infty)$ và $g(x)=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}, x\in(0;+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0, \forall x\in(0;+\infty)$; $g'(x)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2x-\sqrt{3}}<0, \forall x\in(0;+\infty)$

Suy ra $f(x)$ đồng biến $(0;+\infty)$ trên và $g(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$

Ta thấy $f(\sqrt{3})=g(\sqrt{3})\Rightarrow x=\sqrt{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3)

Suy ra (4) có nghiệm duy nhất $x=\sqrt{3}\Rightarrow y=2\sqrt{3}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)\square$

26 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3-8+\sqrt{x-1}=\sqrt{y} & (1)\\ (x-1)^4=y & (2)\end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Điều kiện: $x\geq 1$

Với điều kiện đó, thay (2) vào (1), ta được

$$\begin{aligned}&x^3-8+\sqrt{x-1}=(x-1)^2\\ \Leftrightarrow&x^3-x^2+2x-9+\sqrt{x-1}=0\end{aligned}$$

Xét $f(x)=x^3-x^2+2x-9+\sqrt{x-1}$

Ta có $f'(x)=3x^2-2x+2+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}=2x^2+1+(x-1)^2+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}>0, \forall x>1$

Như vậy $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$, lại có $f(2)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=2$. Suy ra $y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)\square$

27 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+x^3y^3=19x^3 & (1)\\ y+xy^2=-6x^2 & (2)\end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Nếu $x=0$, thì hệ phương trình vô nghiệm.

Xét $x\neq 0$. Nhân hai vế của (2) với x, ta được: $xy+x^2y^2=-6x^3$

Thay vào (1), ta có:

$$-6\left(1+x^3y^3\right)=19\left(xy+x^2y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=\dfrac{-2}{3}\\ xy=\dfrac{-3}{2}\\ xy=-1\end{array}\right.$$

Với từng trường hợp, thay vào (1), ta suy ra được các cặp nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3}; y=-2\\ x=\dfrac{-1}{2}; y=3\\ x=0 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là: $\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$ và $\left(\dfrac{-1}{2};3\right)$□

28 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+xy^2=6x^2 & (1)\\ 1+x^2y^2=5x^2 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Nếu $x=0$,thì từ (1) suy ra $y=0$, loại do không thỏa mãn (2)

Nếu $y=0$, thì từ (1) cũng suy ra $x=0$, loại do không thỏa mãn (2)

Vậy $x\neq 0, y\neq 0$

Chia (1) cho y, chia (2) cho y^2 ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y}+x=6x.\dfrac{1}{y} & (1')\\ \dfrac{1}{y^2}+x^2=5x^2.\dfrac{1}{y^2} & (2')\end{cases}$$

Suy ra

$$\left(6x\frac{1}{y}\right)^2-2x\frac{1}{y}=5\left(x\frac{1}{y}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\dfrac{1}{y}=0\\ x\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{31}\end{array}\right.$$

Trường hợp $x\dfrac{1}{y}=0$ loại do $x\neq 0, y\neq 0$

Vậy từ $(1')$ suy ra $\begin{cases} x\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{31}\\ x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{12}{31}\end{cases}$

Suy ra $x,\dfrac{1}{y}$ là nghiệm của phương trình $t^2-\dfrac{12}{31}t+\dfrac{2}{31}=0$.

Phương trình này có $\Delta_t=\left(\dfrac{12}{31}\right)^2-\dfrac{8}{31}<0$ nên vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.□

29 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(1-2y)=y^2(4x+2y) & (1)\\ 2x^2+xy-y^2=x & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$. Vậy $(0;0)$ là một nghiệm

Xét $x \neq 0$, nhân cả hai vế của (2) với x, ta được

$$\begin{cases} x^2 = 4xy^2 + 2y^3 + 2x^2y \\ x^2 = 2x^3 + x^2y - y^2x \end{cases}$$

Suy ra

$$2x^3 - x^2y - 5xy^2 - 2y^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2y)(x + y)(2x + y) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -y \\ x = -\dfrac{1}{2}y \end{array}\right.$$

- Với $x = 2y$, thay vào (2) ta được $9y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{2}{9} \end{array}\right.$

Trong trường hợp này hệ có nghiệm $(0,0)\,, \left(\dfrac{2}{9};\dfrac{4}{9}\right)$

- Với $x = -y$, thay vào (2) ta được $x = 0$. Vậy hệ có nghiệm $(0;0)$

- Với $x = -\dfrac{1}{2}y$, thay vào (2) ta được $y^2 = \dfrac{1}{2}y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{array}\right.$

Trong trường hợp này hệ có nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right), (0;0)$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right), (0;0)$ và $\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{4}{9}\right)$ □

30 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y(xy - 2) = 3x^2 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y(xy - 2) = 3x^2 & (1) \\ y(y + x^2) = -2x & (2) \end{cases}$$

Suy ra
$$\frac{xy - 2}{y + x^2} = \frac{-3x}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 - 3x^3}{5x} \quad (3)$$

Thế (3) vào (1), ta được

$$\frac{4 - 3x^3}{5x}\left(x.\frac{4 - 3x^3}{5x} - 2\right) = 3x^2$$
$$\Leftrightarrow (4 - 3x^3)^2 - 10.(4 - 3x^3) - 75x^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 9x^6 - 69x^3 - 24 = 0$$

Đặt $x^3 = t$, ta được $9t^2 - 69t - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = \dfrac{1}{-3} \end{array}\right.$

- Với $t = 8$ suy ra $x = 2$ dẫn đến $y = -2$
- Với $t = \dfrac{-1}{3}$ suy ra $x = \sqrt[3]{\dfrac{-1}{3}}$ dẫn đến $y^2 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}y + 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} = 0$.

Phương trình này vô nghiệm do $\Delta = \left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}\right)^2 - 8.\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} < 0$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ duy nhất là: $(2; -2)$□

31 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x^3 + 3y^3 - 2xy = 6 \\ 3x^3 + 2y^3 + 3xy = 8 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} 5x^3 + 3y^3 = 6 + 2xy \\ 3x^3 + 2y^3 = 8 - 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 13xy - 12 \\ y^3 = -21xy + 22 \end{cases} (*)$$

Suy ra
$$\begin{aligned} & (xy)^3 = (13xy - 12)(-21xy + 22) \\ & \Leftrightarrow (xy - 1)\left((xy)^2 + 274xy - 264\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -137 - \sqrt{19033} \\ xy = -137 + \sqrt{19033} \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $xy = 1$, thay vào (*) ta được nghiệm của hệ phương trình là $(1; 1)$
- Với $xy = -137 - \sqrt{19033}$, ta được $\begin{cases} x = \sqrt[3]{13a - 12} \\ y = \sqrt[3]{-21a + 22} \end{cases}$ với $a = -137 - \sqrt{19033}$
- Với $xy = -137 + \sqrt{19033}$, ta được $\begin{cases} x = \sqrt[3]{13b - 12} \\ y = \sqrt[3]{-21b + 22} \end{cases}$ với $b = -137 + \sqrt{19033}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm:
$(1; 1)$, $\left(x = \sqrt[3]{13a - 12}; y = \sqrt[3]{-21a + 22}\right)$ và $\left(x = \sqrt[3]{13b - 12}; y = \sqrt[3]{-21b + 22}\right)$
với $a = -137 - \sqrt{19033}$ và $b = -137 + \sqrt{19033}$.□

32 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 & (1) \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Trừ vế theo vế được
$$\begin{aligned} & y^4 - 2y^2 + 4xy(1 - y^2) = -1 \\ & \Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 = 4xy(y^2 - 1) \\ & \Leftrightarrow \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 1 - 4xy\right) = 0 \end{aligned}$$

- Với $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Ta có 4 nghiệm (0;1) và (1;1) và (-1;-1) và (0;-1)
- Với $y^2 - 1 = 4xy$, thay vào (2), ta được $4x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - 4x^2$ (3)

Lại thay (3) vào (1) ta có

$$(1-4x^2)^2 - 4xy(1-4x^2) = 1 - 4x^2$$

Nếu $1 - 4x^2 = 0$ thì $y = 0$ không thoả hệ. Vậy $1 - 4x^2 - 4xy = 1 \Leftrightarrow x^2 + xy = 0$

Với $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

Với $x = -y$ thay vào hệ được $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x;y)$là: (0;1),(0;-1),(1;1),(-1;-1) ,$\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$□

33 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có từ (2) suy ra: $y = \dfrac{2x^2 + 9x - 6}{7}$ (3)

Thay (3) và (1), ta được

$$2x^2\left(\frac{2x^2+9x-6}{7}\right) + 3x\left(\frac{2x^2+9x-6}{7}\right) = \frac{7.4x^2}{7} + 9\left(\frac{2x^2+9x-6}{7}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(2x^2+9x-6\right)\left(2x^2+3x-9\right) = 28x^2$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 + 24x^3 - 31x^2 - 99x + 54 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2)(4x^2+18x-54) = 0$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 2 \\ x = \dfrac{-9+3\sqrt{33}}{4} \\ x = \dfrac{-9-3\sqrt{33}}{4} \end{array}\right.$$

Với $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-1}{7}$. Suy ra hệ phương trình có nghiệm $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{7}\right)$

Với $x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{-16}{7}$. Suy ra hệ phương trình có nghiệm $\left(-2; \dfrac{-16}{7}\right)$

Với $x = \dfrac{-9+3\sqrt{33}}{4} \rightarrow y = 3$. Suy ra hệ phương trình có nghiệm$\left(\dfrac{-9+3\sqrt{33}}{4}; 3\right)$

Với $x = \dfrac{-9-3\sqrt{33}}{4} \rightarrow y = 3$. Suy ra hệ phương trình có nghiệm$\left(\dfrac{-9-3\sqrt{33}}{4}; 3\right)$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(x;y)$ là:

$\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{7}\right)$, $\left(-2; \dfrac{-16}{7}\right)$, $\left(\dfrac{-9+3\sqrt{33}}{4}; 3\right)$ và $\left(\dfrac{-9-3\sqrt{33}}{4}; 3\right)$.□

34 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} & (1)\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{y-3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\frac{y-3}{x}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x\end{array}\right.$$

Với $y=3$, thay vào (1), suy ra $x=0$

Với $\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \quad (3)$. Thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned} & x+3-\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=x\\ & \Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{x^2+3x}=9\\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}=3-x\\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3\\ 9-6x+x^2=x^2+3x\end{cases}\\ & \Leftrightarrow x=1\end{aligned}$$

Thay vào (3), suy ra $y=8$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;8)\square$

35 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)^4=13x-4\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}\end{cases}$$

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y}=\sqrt{2}\\ & \Leftrightarrow x+y+3x-y+2\sqrt{(x+y)(3x-y)}=2\Leftrightarrow 1-2x=\sqrt{(x+y)(3x-y)}\\ & \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=3x^2+2xy-y^2, x\le\frac{1}{2}\\ & \Leftrightarrow (x-y)^2=4x-1\end{aligned}$$

Thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned} & (4x-1)^2=13x-4\\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{16}\\ x=1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Do $x=1>\dfrac{1}{2}$ nên loại nghiệm này. Vậy $x=\dfrac{5}{16}$. Suy ra $y=\dfrac{-3}{16}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $\left(\dfrac{5}{16};\dfrac{-3}{16}\right)\square$

36 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases}$$

Lời giải:

Nếu $x=0$ thì $y=0$ và ngược lại. Vậy $(0;0)$ là 1 nghiệm của hệ

Xét $xy \neq 0$. Từ phương trình thứ 2 suy ra x, y cùng dấu

Nhân chéo 2 vế của 2 phương trình trong hệ đã cho, ta được

$$\begin{aligned} & 20x^2y^2 - 20y^4 = 3x^4 + 3x^2y^2 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^4 - 17x^2y^2 + 20y^4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x^2 = 4y^2 \\ x^2 = \dfrac{5}{3}y^2 \end{array}\right. \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ 3x = \sqrt{15}y \end{array}\right. \text{ (vì } x, y \text{ cùng dấu)} \end{aligned}$$

- Nếu $x=2y$, thế vào (1) ta được $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(-2;-1)$

- Nếu $3x=\sqrt{15}y$, thế vào (1) ta được $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt[4]{30375}}{6};\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2}\right)$ và $(x;y)=\left(\dfrac{-\sqrt[4]{30375}}{6};\dfrac{-\sqrt[4]{135}}{2}\right)$

Vậy hệ có 5 nghiệm $(x;y)$ là: $(0;0)$, $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\dfrac{\sqrt[4]{30375}}{6};\dfrac{\sqrt[4]{135}}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{-\sqrt[4]{30375}}{6};\dfrac{-\sqrt[4]{135}}{2}\right)$.□

37 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}=2 \quad (1) \\ y+\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}=0 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: x, y không đồng thời bằng 0

- Nếu $x=0$ thì thay vào (1), ta được $y=1$. Nghiệm $(0;1)$ thỏa mãn hệ phương trình

- Nếu $y=0$ thì thay vào (2), ta được $x=1$. $(x;y)=(1;0)$ không thỏa mãn hệ phương trình

Xét $x, y \neq 0$

Nhân cả hai vế của (1) với y, nhân cả hai vế của (2) với x, ta được

$$\begin{cases} xy+\dfrac{xy+2y^2}{x^2+y^2}=2y \ (3) \\ xy+\dfrac{2x^2-xy}{x^2+y^2}=0 \quad (4) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế (3) và (4), suy ra $xy+1=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y-1}{y}\ (y\neq 0)$

Thay vào (2) ta được

$$\frac{2(y-1)y-y^3}{(y-1)^2+y^4}+y=0$$
$$\Leftrightarrow y\left[\frac{y^4-1}{(y-1)^2+y^4}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow y=\pm 1$$

- Nếu $y=1$, thay vào (2) suy ra $x=0$ hoặc $x=-2$
- Nếu $y=-1$, thay vào (2), cũng suy ra được $x=0$ hoặc $x=-2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(0;1),(-2;1),(0;-1),(-2;-1)\square$

38 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2+x+y^2=7 & (1)\\ xy-x+y=3 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Nếu $x=-1$ thì không thỏa mãn (2). Vậy $x\neq -1$

Từ phương trình (2) ta có $xy-x+y=3\Rightarrow y=\dfrac{x+3}{x+1}$

Thay y vào phương trình (1)

$$(1)\Leftrightarrow 2x^2+x+\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2=7$$
$$\Leftrightarrow (2x^2+x-6)+\left[\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^2-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(2x-3)+\frac{4}{(x+1)^2}.(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2).\left[\frac{2x^3+x^2-4x+1}{(x+1)^2}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\\ 2x^3+x^2-4x+1=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\\ x=1\\ x=\dfrac{1}{4}\left(-3-\sqrt{17}\right)\\ x=\dfrac{1}{4}\left(-3+\sqrt{17}\right)\end{array}\right.$$

- Với $x=-2$, ta có nghiệm $(-2;-1)$
- Với $x=1$, ta có nghiệm $(1;2)$
- Với $x=\dfrac{1}{4}\left(-3-\sqrt{17}\right)$, ta có nghiệm $\left(\dfrac{1}{4}\left(-3-\sqrt{17}\right);\dfrac{9-\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\right)$
- Với $x=\dfrac{1}{4}\left(-3+\sqrt{17}\right)$, ta có nghiệm $\left(\dfrac{1}{4}\left(-3-\sqrt{17}\right);\dfrac{9+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\right)$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm:

$(-2;-1)$, $(1;2)$, $\left(\dfrac{1}{4}\left(-3-\sqrt{17}\right);\dfrac{9-\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{4}\left(-3-\sqrt{17}\right);\dfrac{9+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\right)\square$

39 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x-3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có (1) $\Leftrightarrow y\dfrac{9-x^2}{3}$

Thay vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} & y^4 + 4\left(2x-3\right)y^2 - 48\left(\frac{9-x^2}{3}\right) - 48x + 155 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y^4 + 4\left(2x-3\right)y^2 + 16x^2 - 48x + 11 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(y^2 + 4x - 11\right)\left(y^2 + 4x - 1\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} y^2 = -4x + 11 \ \ (3) \\ y^2 = -4x + 1 \quad (4) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thay (1) vào (3), ta được $\begin{cases} y = \dfrac{9-x^2}{3} \\ \left(\dfrac{9-x^2}{3}\right)^2 = -4x + 11 \quad (*) \end{cases}$

Ta có $(*) \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 36x - 18 \Leftrightarrow x^4 = 18(x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2} = 0 \ \ (6) \\ x^2 + 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} = 0 \ \ (7) \end{array}\right.$

$$(6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{12\sqrt{2} - 6\sqrt{36 - 24\sqrt{2}}}{12} \\ x = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{36 - 24\sqrt{2}}}{12} \end{array}\right.$$

$$(7) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\sqrt{2} + \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-12\sqrt{2} + 6\sqrt{36 - 24\sqrt{2}}}{12} \\ x = \dfrac{-3\sqrt{2} - \sqrt{18 - 12\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-12\sqrt{2} - 6\sqrt{36 - 24\sqrt{2}}}{12} \end{array}\right.$$

Thay (1) vào (4) ta có

$$\begin{cases} y = \dfrac{9-x^2}{3} \\ \left(\dfrac{9-x^2}{3}\right)^2 = -4x + 1(**) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (**) \Leftrightarrow\ & x^4 - 18x^2 + 36x + 72 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x^2 - 6x + 12\right)\left(x^2 + 6x + 6\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 6x + 6 = 0 \quad (\text{do } x^2 - 6x + 12 > 0, \forall x) \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -3 + \sqrt{3} \Rightarrow y = -1 + 2\sqrt{3} \\ y = -3 - \sqrt{3} \Rightarrow y = -1 - 2\sqrt{3} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm như trên. $\square$

40 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ y^3-x^3=y-x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có

$$\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ y^3-x^3=y-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=-y(y+1) & (1) \\ y(y-1)(y+1)=x^2(x-1) & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) được

$$\begin{aligned} & -x(x-1)(y-1)=x^2(x-1) \\ & \Leftrightarrow x(x-1)(x+y-1)=0 \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=1-y \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Nếu $x=0$ thay vào (1), ta được $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$
- Nếu $x=1$ thay vào (1), ta được $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$
- Nếu $x=1-y$ thay vào (1), ta được $(1-y)(-y)=-y(y+1) \Leftrightarrow -y^2=0 \Leftrightarrow y=0$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm
$(x;y)$ là: $(0;0),(0;-1),(1;0),(1;-1)$ $\square$

41 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-y^3=4x+2y \\ x^2-1=3(1-y^2) \end{cases}$$

Lời giải:

Xét $4-x^2=0 \Rightarrow x=2, y=0$ hoặc $x=-2, y=0$ (cả hai đều thỏa mãn).
Xét $y=0$ suy ra $x=2$ hoặc $x=-2$ (thỏa mãn)
Xét $y \neq 0$ và $x \neq \pm 2$
Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-x^3=-(y^3+2y) \\ 4-x^2=3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4-x^2)=-y(y^2+2) \\ 4-x^2=3y^2 \end{cases}$$

Suy ra $3xy=-(y^2+2)$. Vậy $\begin{cases} y^2=-3xy-2 & (1) \\ x^2=10+9xy & (2) \end{cases}$

Mặt khác hệ phương trình cũng có thể viết thành $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2+xy)=2(2x+y) \\ (x-y)(x+y)=4(1-y^2) \end{cases}$

Thay (1), (2) vào ta được: $\begin{cases} (x-y)(8+7xy)=2(2x+y) \\ (x+y)(x+y)=12(1+xy) \end{cases}$

Mặt khác, x khác y $\left(\text{nếu } x = y \text{ thì hệ trở thành } \begin{cases} 2x = y \\ x = y = \pm 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm}\right)$ nên

$$\Rightarrow 12(8 + 7xy)(1 + xy) = 2(2x + y)(x + y)$$
$$\Rightarrow 6(8 + 7xy)(1 + xy) = 2x^2 + y^2 + 3xy$$

Lại thay (1), (2) vào cho ta $6(8 + 7xy)(1 + xy) = 18(xy + 1)$ $xy = \dfrac{-5}{7}$
- Với $xy = -1$ ta được $x = -1, y = 1$ hoặc $x = 1, y = -1$.
- Với $xy = \dfrac{-5}{7}$ ta được $x = \dfrac{5}{\sqrt{7}}, y = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ hoặc $x = \dfrac{-5}{\sqrt{7}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Vậy hệ phương trình có sáu nghiệm $(x; y)$ là: $(1; -1); (-1; 1); (2; 0); (-2; 0); \left(\dfrac{5}{\sqrt{7}}; \dfrac{-1}{\sqrt{7}}\right); \left(\dfrac{-5}{\sqrt{7}}; \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$ □

42 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có $(1) \Leftrightarrow 2x^2 + x(y - 5) - y^2 - y + 2 = 0$
Xét $\Delta_x = (y - 5)^2 - 4.2.(-y^2 - y + 2) = 9y^2 + 18y + 9 = 9(y + 1)^2$
Vậy suy ra

$$\left[\begin{aligned} x &= 5 - y + 3(y + 1) = 2y + 8 \\ x &= 5 - y - 3(y + 1) = -4y + 2 \end{aligned}\right.$$

Nếu $x = 2y + 8$, thay vào (2) ta được

$$(2y + 8)^2 + y^2 + 2y + 8 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y^2 + 35y + 68 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Nếu $x = -4y + 2$, thay vào (2) ta được

$$(-4y + 2)^2 + y^2 - 4y + 2 + y - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 17y^2 - 19y + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} y &= 1 \\ y &= \frac{2}{17} \end{aligned}\right.$$

- Với $y = 1$, suy ra $x = -2$
- Với $y = \dfrac{2}{17}$, suy ra $x = \dfrac{26}{17}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là: $(-2; 1)$; $\left(\dfrac{26}{17}; \dfrac{2}{17}\right)$ □

43 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 4xy & (1) \\ x^2y^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ (2) suy ra $\left[\begin{array}{l} xy = 3 \\ xy = -3 \end{array}\right.$

Nếu $xy = 3$ thì thay vào (1) ta được

$$x^3 - \left(\frac{3}{x}\right)^3 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 = 2 - \sqrt{31} \\ x^3 = 2 + \sqrt{31} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{31}}; y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2 - \sqrt{31}}} \\ x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{31}}; y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2 + \sqrt{31}}} \end{array}\right.$$

Nếu $xy = -3$thì thay vào (1), ta được

$$x^3 - \left(\frac{-3}{x}\right)^3 = 4 \Leftrightarrow \left(x^3\right)^2 - 4x^3 + 27 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm.□

44 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos^2 x = \sin x.\sin y & (1) \\ \sin^2 x = \cos x.\cos y & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cộng vế theo vế của hệ phương trình, ta được $\cos(y - x) = 1 \Leftrightarrow y = x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Thay vào (1), ta được

$$\begin{aligned} &cos^2 x = \text{s inx}.\sin(x + k2\pi) \\ &\Leftrightarrow cos^2 x = \sin^2 x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Suy ra $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{m\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\dfrac{\pi}{4} + l\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{4} + m\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(l, m \in \mathbb{Z})$□

45 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+2} + \sqrt{y-1} = 5 \\ 2\sqrt{y+2} + \sqrt{x-1} = 5 \end{cases}$$

Lời giải:

Trừ vế theo vế của 2 phương trình trong hệ ta được:

$$\begin{aligned} &2\frac{x-y}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}} = \frac{x-y}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x-1}} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 2\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}\right) = \sqrt{y-1} + \sqrt{x-1} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $x = y$

Thế vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=5\\
&\Leftrightarrow 5x-18+4\sqrt{x^2+x-2}=0\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{18}{5}\\ 16\left(x^2+x-2\right)=25x^2+180x+324 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{18}{5}\\ \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=\dfrac{178}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: Viết lại

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{y-1}+2\sqrt{x-1}=\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}\\
&\Leftrightarrow 2\left(5-2\sqrt{x+2}\right)+2\sqrt{x-1}=\sqrt{x+2}+\frac{5-\sqrt{x-1}}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}+3\\
&\Leftrightarrow 4\left(x+2\right)=x+8+6\sqrt{x-1}\\
&\Leftrightarrow x=2\sqrt{x-1}\\
&\Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2;2)\square$

46 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=48\\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2\ge y^2$

Biến đổi hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2} = \dfrac{48}{y} \\ x+y+\dfrac{48}{y} = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24-y-\dfrac{48}{y} \\ x^2-y^2 = \dfrac{48^2}{y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24-y-\dfrac{48}{y} \\ \left(24-y-\dfrac{48}{y}\right)^2 - y^2 = \dfrac{48^2}{y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24-y-\dfrac{48}{y} \\ 24^2-2.24.y-\dfrac{2.24.48}{y}+2.48 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 24-y-\dfrac{48}{y} \\ \left[\begin{array}{l} y=6 \\ y=8 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=6 \\ y=8 \end{array}\right. \\ x=10 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(10;6)$ và $(10;8)\square$

$\boxed{\textbf{47}}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2 = 1 \\ x^3y-x^2+xy = -1 \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} x^2(x^2-2xy+y^2)+x^3y = 1 \\ -x(x-y)+x^3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-y)^2+x^3y = 1 \\ -x(x-y)+x^3y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3y = -1+x(x-y) & (1) \\ x^2(x-y)^2+x(x-y)-2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2), ta đặt $x(x-y)=a$, nên có:

$$a^2+a-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}\right.$$

Với $a=x(x-y)=1$, ta đem thế vào phương trình (1), vậy nên dẫn đến:

$$x^3y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$$

Với $x=0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm

Với $y=0$ thế vào ta được nghiệm $x=1$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 bộ nghiệm $(x;y)=(1;0)\square$

48 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}(x^2+x+1)(y^2+y+1)=3\\(1-x)(1-y)=6\end{cases}$$
**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:
$$\left((x-1)^2+3(x-1)+3\right)\left((y-1)^2+3(y-1)+3\right)=3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(y-1)^2+3(x-1)(y-1)(x+y+1)+3(x-1)^2+9(x-1)+3(y-1)^2+9(y-1)+6=0 \ (1)$$
Với $y=1$ không là nghiệm của hệ. Với $y\neq 1$, phương trình thứ hai của hệ tương đương:
$$x-1=\frac{6}{y-1} \quad (2)$$
Thế (2) vào (1), ta được:
$$(y-1)^2+9(y-1)+\frac{54}{y-1}+\frac{36}{(y-1)^2}+32=0$$
Đặt $t=y-1$, điều kiện $t\neq 1$ Ta có phương trình sau:
$$t^4+9t^3+32t^2+54t+36=0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3)(t^2+4x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\\ t=-3\end{array}\right.$$
Với $t=-2$, ta được: $y=-1, x=-2$

Với $t=-3$, ta được: $y=-2, x=-1$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x,y)=(-2;-1),(-1;-2)\square$

49 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\\x^2+y^2+x+y=4\end{cases}$$
**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Nhóm nhân tử phương trình thứ (1) ta được:
$$(x+y-2)(2x-y+1)=0$$
Ta thế $y=2-x$ vào phương trình (2), ta được nghiệm $x=1$

Ta thế $y=2x+1$ vào phương trình (2), ta được kết quả:
$$5x^2+7x-2=0$$
Với $x=\dfrac{-7+\sqrt{89}}{10}$ thì $y=\dfrac{-2+\sqrt{89}}{5}$

Với $x=\dfrac{-7-\sqrt{89}}{10}$ thì $y=\dfrac{-2-\sqrt{89}}{5}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 bộ nghiệm

$(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{-7+\sqrt{89}}{10};\dfrac{-2+\sqrt{89}}{5}\right),\left(\dfrac{-7-\sqrt{89}}{10};\dfrac{-2-\sqrt{89}}{5}\right)\square$

50 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}y^3=x^3\left(9-x^3\right)\\x^2y+y^2=6x\end{cases}$$
**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Với $y=0$ thì $x=0$, vậy $(0;0)$ là nghiệm của hệ

Với $y\neq 0$, thì hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x^2+y}{x}\right)^3-3y\left(\dfrac{x^2+y}{x}\right)=9 \\ \dfrac{x^2+y}{x}=\dfrac{6}{y} \end{cases}$$

Dẫn đến ta có kết quả sau sau $y^3=8\Rightarrow y=2$

Với $y=2$ thì $x=2$ hoặc $x=1$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(x;y)=(2;2),(1;2),(0;0)\square$

$\boxed{51}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y^2x+2x+y^3-y^2-1=7y \\ 2y^2+2xy+1=7y \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương :

$$\begin{cases} y(-2y^2+2y-1)+2x+y^3-y^2-1=7y \\ 2y^2+2xy+1=7y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y^3-6y^2+8y+1 \\ 2y^2+2xy+1=7y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y^3-6y^2+8y+1 \\ 2y^2+y(y^3-6y^2+8y+1)+1=7y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y^3-6y^2+8y+1 \\ y^4-6y^3+10y^2-6y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y^3-6y^2+8y+1 \\ (y-1)^4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)\square$

$\boxed{52}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-3xy^2-x+1=y^2-2xy-x^2 \\ y^3-3yx^2+y-1=y^2+2xy-x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x(x^2-y^2)-2xy^2+(x^2-y^2)+2xy-x+1=0 \quad (1) \\ y(y^2-x^2)-2x^2y+(x^2-y^2)-2xy+y-1=0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) $-i$(2) ta được phân tích sau:

$$x(x^2-y^2)-2xy^2+(x^2-y^2)+2xy-x+1-i[y(y^2-x^2)-2x^2y+(x^2-y^2)-2xy+y-1]=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(x+yi)-2xy(xi-y)+(x^2-y^2)(1-i)+2xy(1+i)-(x+yi)+1+i=0$$
$$\Leftrightarrow (x+yi)(x^2-y^2)+2xyi(x+yi)+(x^2-y^2)(1-i)-2xyi(i-1)-(x+yi)+1+i=0$$
$$\Leftrightarrow (x+yi)(x^2+2xyi-y^2)+(x^2+2xyi-y^2)(1-i)-(x+yi)+1+i=0$$
$$\Leftrightarrow (x+yi)^3+(1-i)(x+yi)^2-(x+yi)+1+i=0$$

Đặt $z=x+yi$, vậy nên dẫn đến:

$$z^3+(1-i)z^2-z+1+i=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+i-1)=0$$

Với $z=i$ thì $x=0$ và $y=1$

Với $z^2+z+i-1=0$ (bạn đọc tự giải). $\square$

53 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y-2x+3y^2=0 \\ y^2x+2y+x^2=0 \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Nhận thấy $x=y=0$ là 1 nghiệm của hệ.

Với $xy\neq 0$. Đặt $x=ty$, ta có hệ:

$$\begin{cases} t^2y^2-2t+3y=0 \\ ty^2+2+t^2y=0 \end{cases}$$

Nhân (2) với t rồi cộng và trừ vế theo vế ta được: $y=\dfrac{-t^3-3}{2t^2}=\dfrac{4t}{3-t^3}$

Từ đây ta có: $t^6-8t^3-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\sqrt[3]{9} \end{array}\right.$

- Với $t=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=1$
- Với $t=\sqrt[3]{9} \Rightarrow y=-\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3} \Rightarrow x=-2\sqrt[3]{3}$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(x;y)=(0;0),(1;-1),\left(-2\sqrt[3]{3};-\dfrac{2\sqrt[3]{9}}{3}\right)$ $\square$

54 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4(xy+x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 & (1) \\ \dfrac{2x+1}{x+y}=3 & (2) \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Từ phương trình (2), ta có: $x=1-3y \quad (3)$

Thế (3) vào (1) ta được

$$4[(1-3y)y+(1-3y)^2+y^2]+\frac{3}{(1-3y)^2}=7$$
$$\Leftrightarrow -56y^4+40y^3+34y^2-20y=0$$
$$\Leftrightarrow y\left(y-\frac{1}{2}\right)(-56y^2+12y+40)=0$$

- Với $y=0$ thì $x=1$
- Với $y=\dfrac{1}{2}$ thì $x=\dfrac{-1}{2}$
- Với $y=\dfrac{3-\sqrt{569}}{28}$ thì $x=\dfrac{19+3\sqrt{569}}{28}$
- Với $y=\dfrac{3+\sqrt{569}}{28}$ thì $x=\dfrac{19-3\sqrt{569}}{28}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm
$(x;y)=(1;0),\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right),\left(\dfrac{19-3\sqrt{569}}{28};\dfrac{3+\sqrt{569}}{28}\right),\left(\dfrac{19+3\sqrt{569}}{28};\dfrac{3-\sqrt{569}}{28}\right)\square$

55 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{x}(3\sqrt{x}-y)+x\sqrt{x}=3y+\sqrt{y-1}\\ 3xy^2+4=4x^2+2y+x\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 1\end{cases}$

• Với $x=1$, ta được:

$$\begin{cases}\sqrt{y-1}=4y-4\\ 3y^2-2y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow y=1$$

Suy ra $(x;y)=(1;1)$ là một nghiệm của hệ.

• Với $x>1$, phương trình thứ nhất tương đương:

$$\begin{aligned}&\sqrt{x-1}-\sqrt{y-1}+3(x-y)+\sqrt{x}(x-y)=0\\ \Leftrightarrow&\frac{x-y}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}+3(x-y)+\sqrt{x}(x-y)=0\\ \Leftrightarrow&(x-y)(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}+3+\sqrt{x})=0\\ \Leftrightarrow&x=y\end{aligned}$$

Thế $y=x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned}&3x^3-4x^2-3x+4=0\\ \Leftrightarrow&(x-1)(x+1)(3x-4)=0\\ \Leftrightarrow&x=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

Với $x=\dfrac{4}{3}$, ta được $y=x=\dfrac{4}{3}$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)\square$

56 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}-x^2y+2xy^2+3y^3-4(x+y)=0\\ xy(x^2+y^2)-1=3xy-(x+y)^2\end{cases}$$

Lời giải:

Phương trình thứ nhất tương đương:

$$\begin{aligned}&-x^2y-xy^2+3xy^2+3y^3-4(x+y)=0\\ \Leftrightarrow&(x+y)(3y^2-xy-4)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}y=-x\\ 3y^2-xy-4=0\quad(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

• Thế $y=-x$ vào phương trình thứ hai của hệ đã cho,ta được:

$$\begin{aligned}&2x^4-3x^2+1=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Suy ra $(x;y)=(-1;1),(1;-1),\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ là bốn nghiệm của hệ đã cho.

• Phương trình thứ hai của hệ đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}&(xy+1)(x^2+y^2-1)=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}xy=-1\\ x^2+y^2-1=0\quad(**)\end{array}\right.\end{aligned}$$

+ Thế $xy=-1$ vào (*), ta được: $y^2=1\Leftrightarrow y=\pm 1$.
Suy ra $(x;y)=(-1;1),(1;-1)$ là hai nghiệm của hệ đã cho.
+ Từ $x^2+y^2=1$ ta được $y\neq 0$. Do đó $(*)\Leftrightarrow x=\dfrac{3y^2-4}{y}$.
Thế $x=\dfrac{3y^2-4}{y}$ vào (**), ta được:

$$10y^4-25y^2+16=0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x;y)=(-1;1),(1;-1),\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ □

57 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x(\sqrt{y+1}+1)=7\sqrt{y+1}-1\\ x^2y+x\sqrt{y+1}=13y-x^2+12\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $y\geq -1$
phương trình thứ hai của hệ đã cho, tương đương:

$$(x^2-13)(y+1)+x\sqrt{y+1}+1=0\quad(*)$$

• Ta thấy $x=7$ không là nghiệm của hệ.
• Ta thấy $x\neq 7$, phương trình thứ nhất hệ đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}&x(\sqrt{y+1}+1)=7\sqrt{y+1}-1\\ \Leftrightarrow&(7-x)\sqrt{y+1}=x+1\\ \Leftrightarrow&\sqrt{y+1}=\dfrac{x+1}{7-x}\end{aligned}$$

Thế $\sqrt{y+1} = \dfrac{x+1}{7-x}$ vào (*), ta được:

$$\begin{aligned}
&(x^2-13)\left(\frac{x+1}{7-x}\right)^2 + \frac{x(x+1)}{7-x} + 1 = 0\\
\Leftrightarrow& x^4 + x^3 - 5x^2 - 33x + 36 = 0\\
\Leftrightarrow& (x-1)(x-3)(x^2+5x+12) = 0\\
\Leftrightarrow& \left[\begin{array}{l} x = 1\\ x = 3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $x=1$, ta được $\sqrt{y+1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y = -\dfrac{8}{9}$
Với $x=3$, ta được $\sqrt{y+1} = 1 \Leftrightarrow y = 0$
Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y) = \left(1; -\dfrac{8}{9}\right), (3;0)$ $\square$

58 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2\\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$.
Hệ phương đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2-y} = 2\\ 2y - 2\sqrt{y^2-x} = 1\end{cases}$$

Chuyển vế sau đó bình phương lên và thu gọn ta có :

$$\begin{cases} -4x + y + 4 = 0\\ -4y + 4x + 1 = 0\end{cases}$$

Vậy hệ có 1 nghiệm $(x;y) = \left(\dfrac{17}{12}; \dfrac{5}{3}\right)$ $\square$

59 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \sqrt{x-2y} = 6y + 2\\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $y \neq 0$
Phương trình thứ nhất tương đương:

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x-2y} - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{25y^2}{4}\\
\Leftrightarrow& \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-2y} = -2y & (1)\\ \sqrt{x-2y} = 3y & (2)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $\sqrt{x-2y} = -2y$, thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$\sqrt{x-2y} = x + 3y - 2 \Leftrightarrow -2y = x + 3y - 2 \Leftrightarrow x = -5y + 2$$

Thay $x=-5y+2$ vào (1) ta được $\sqrt{-7y+2}=-2y \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ 4y^2+7y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2 \Rightarrow x=12$

- Với $\sqrt{x-2y}=3y$, thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$\sqrt{x+3y}=x+3y-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3y}=-1 \text{ (loại)} \\ \sqrt{x+3y}=2 \Rightarrow x=4-3y \end{array}\right.$$

Thay $x=4-3y$ vào (2) ta được $\sqrt{4-5y}=3y \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ 9y^2+5y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{9} \Rightarrow x=\dfrac{8}{3}$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{9}\right),(12;-2).\square$

60 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16x^3y^3-9y^3=(2xy-y)(4xy^2+3) \\ 4x^2y^2-2xy^2+y^2=3 \end{cases}$$

Lời giải:

- Với $y=0$ không là nghiệm hệ.
- Với $y \ne 0$, ta chia phương trinh thứ nhất cho y^3, phương trình thứ hai cho y^2 ta được

$$\begin{cases} 16x^3-9=(2x-1)\left(4x+\dfrac{3}{y^2}\right) & (1) \\ 4x^2-2x+1=\dfrac{3}{y^2} & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$16x^3-9=(2x-1)(4x^2+2x+1) \Leftrightarrow 16x^3-9=8x^3-1 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$$

Thay $x=1$ vào (2) ta được $y=\pm 1$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;-1),(1;1).\square$

61 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3 \\ 2y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $xy \ne 0$

Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} 2\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{3}{x} \quad (*) \\ 2\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{4}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y} \end{cases}$$

Nhân vế theo vế ta được:

$$\frac{16}{x^2+y^2}=\frac{9}{x^2}-\frac{1}{y^2}$$
$$\Leftrightarrow 9y^4-8x^2y^2-x^4=0$$
$$\Leftrightarrow y^2=x^2$$

Thế $y^2 = x^2$ vào (*), ta được:

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Thử lại ta thấy nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x; y) = (1; 1), \left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ □

62 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x + y > 0$.
Phương trình thứ nhất tương đương:

$$(x + y - 1)(x^2 + y^2 + x + y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1$$

Thay $y = 1 - x$ vào phương trình thứ hai ta có: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = 3 \end{array} \right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) = (1; 0), (-2; 3)$ □

63 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 0$
Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$(x + y)(y + 1 - x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{array} \right.$$

Từ điều kiện suy ra $x + y > 0$, do đó ta chỉ nhận $x = 2y + 1$
Thê $x = 2y + 1$ vào phương trình thứ hai ta được

$$(y + 1)(\sqrt{2y} - 2) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (5; 2)$ □

64 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right) = y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right) = x\left(y^2+1\right) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta viết hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} xy^2+6x-y^2-6=x^2y+y & (1)\\ x^2y+6y-x^2-6=xy^2+x & (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\begin{aligned} &-xy\left(x-y\right)+6\left(x-y\right)+\left(x-y\right)=xy\left(x-y\right)-\left(x-y\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(x-y\right)\left(x+y-2xy+7\right)=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=y\\ x+y-2xy+7=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với: $x=y$ thay lại vào phương trình (1) ta được:

$$x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=y=2\\ x=y=3\end{array}\right.$$

- Với: $x+y-2xy+7=0$

• Lấy (1) cộng với (2) ta được:

$$6\left(x+y\right)-\left(x+y\right)^2+2xy-12=x+y\Leftrightarrow\left(x+y\right)^2-5\left(x+y\right)-2xy+12=0$$

• Ta đặt $S=x+y$, $P=xy$ $(S^2\geq 4P)$ khi đó ta được:

$$\begin{cases} S-2P+7=0\\ S^2-5S-2P+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} S=2P-7\\ \left(2P-7\right)^2-5\left(2P-7\right)-2P+12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} S=2P-7\\ P^2-10P+24=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} P=6\\ S=4\end{cases}\\ \begin{cases} P=4\\ S=1\end{cases}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

• Với $\begin{cases} P=5\\ S=6\end{cases}$ suy ra $x;y$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3\\ t=2\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(x;y)=(2;2),(3;3),(2;3),(3;2)$ □

65 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(y+1\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{1}{2} & (1)\\ 3xy=x+y+1 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x,y>-1$

Cách 1

Từ phương trình (2) của hệ ta có:

$$\begin{cases} y+1=\left(3y-1\right)x\\ x+1=\left(3x-1\right)y\end{cases}$$

Thay vào phương trình (1) ta được hệ mới:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\left(3x-1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(3y-1\right)^2}=\dfrac{1}{2}\\ 3xy=x+y+1\end{cases}$$

Đặt: $u = 3x - 1; v = 3y - 1$ suy ra: $uv = 9xy - 3(x+y) + 1 = 3(x+y+1) - 3(x+y) + 1 = 4$
Vậy ta có hệ mới là:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u^2} + \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{1}{2} \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 8 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = -4 \\ uv = 4 \end{cases} \end{array} \right.$$

- Với: $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 - 4v + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 2 \Rightarrow x = y = 1$ (thỏa)
- Với: $\begin{cases} u + v = -4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 - v \\ v^2 + 4v + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = -2 \Rightarrow x = y = -\dfrac{1}{3}$ (thỏa)

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ $\square$

Cách 2

Ta có đánh giá quen thuộc sau đây:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Do đó từ (1) ta có:

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} \geq \frac{2xy}{(x+1)(y+1)}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(y+1) \geq 4xy$$
$$\Leftrightarrow 3xy \leq x + y + 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2} = \dfrac{y^2}{(x+1)^2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y = 1 & \text{(thỏa)} \\ x = y = -\dfrac{1}{3} & \text{(thỏa)} \end{array} \right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (1; 1), \left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$ $\square$

Cách 3

Từ phương trình (2) của hệ ta có:

$$4xy = x + y + xy + 1 \Leftrightarrow 4xy = (x+1)(y+1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(x+1)(y+1)} = \frac{1}{4}$$

Kết hợp với (1) ta có được:

$$\frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{2xy}{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y+1} - \frac{y}{x+1}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

Với $x = y$ thế lại vào (2) ta được:

$$3x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y=1 & \text{(thỏa)} \\ x=y=-\dfrac{1}{3} & \text{(thỏa)} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(1;1), \left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)\square$

66 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{9x}{5} & (1) \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{5+3x}{6(5-y)} & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện:

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ x^2-y^2 \geq 0 \\ x-\sqrt{x^2-y^2} \neq 0 \end{cases} \quad (\star)$$

Ta biến đổi phương trình (2):

$$(2) \Leftrightarrow 30x-6xy=5y+3xy \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{5+9x}{30} \Leftrightarrow x=\frac{10x}{3y}-\frac{5}{9}\ (\star\star)$$

Thực hiện trục căn thức ở (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)^2}{y^2}=\frac{9x}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}\right)^2=\frac{9x}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}-1=\frac{9x}{5}=6\frac{x}{y}-1 \Leftrightarrow \frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=0 \\ \dfrac{x}{y}+\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-1}-3=0 \end{array}\right.$$

- Với:

$$\frac{x}{y}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{5}{9} \text{ (từ } (\star\star)) \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)}$$

- Với:

$$\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2-1}=3-\frac{x}{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} \leq 3 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-1=9-6\dfrac{x}{y}+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$

Từ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}$ và $(\star\star)$ suy ra: $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$ .Thử lại điều kiện $(\star)$ ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;3)\square$

67 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y(x-1) = 7 & (1) \\ 3y^2 + 4x(y-1) = 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Xuất phát từ phương trình (2) ta có:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 3\left(y^2-1\right) + 4(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-1)\left[3(y+1) + 4x\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ 3(y+1) + 4x = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với: $y = 1$ thay vào (1) ta được:

$$4x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} \\ x = -2 \end{array}\right.$$

- Với: $3(y+1) + 4x = 0$ kết hợp với (1) ta có hệ sau đây:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y(x-1) = 7 \\ 3x(y+1) + 4x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = -7 \\ 3(y+1) + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - (3+4x) = -7 \\ y = -\dfrac{3+4x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\dfrac{19}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y) = (-2;1), \left(\dfrac{5}{4};1\right), \left(4;-\dfrac{19}{3}\right)$ $\square$

68 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3y(x-1) = 60 \\ 3y^2 + 4x(y-1) = 48 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta biến đổi:

$$\begin{cases} 4x^2 + 3xy - 3y = 60 & (1) \\ 3y^2 + 4xy - 4x = 48 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) nhân 4 rồi cộng với (2) nhân 3 ta được:

$$4\left(4x^2 + 3xy - 3y\right) + 3\left(3y^2 + 4xy - 4x\right) = 384 \Leftrightarrow (4x+3y)^2 - 12(x+y) = 384 \ (3)$$

Lấy (1) cộng (2) ta được:

$$\left(4x^2 + 3xy - 3y\right) + \left(3y^2 + 4xy - 4x\right) = 108 \Leftrightarrow (4x+3y)(x+y) - (4x+3y) = 108 \ (4)$$

Đặt: $t = 4x + 3y$, từ (3) suy ra: $x + y = \dfrac{t^2 - 384}{12}$ thay vào (4) ta được:

$$t\left(\frac{t^2-384}{12} - t\right) = 108 \Leftrightarrow t^3 - 396t - 1296 = 0 \Leftrightarrow (t+18)\left(t^2 - 18t - 72\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -18 \\ t = 9 + 3\sqrt{17} \\ t = 9 - 3\sqrt{17} \end{array}\right.$$

- Với $t = -18$ suy ra:

$$\begin{cases} 4x + 3y = -18 \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

- Với $9 + 3\sqrt{17}$ suy ra:

$$\begin{cases}4x+3y=9+3\sqrt{17}\\ x+y=\dfrac{-25+9\sqrt{17}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{93-21\sqrt{17}}{2}\\ y=-59+15\sqrt{17}\end{cases}$$

- Với $9-3\sqrt{17}$ suy ra:

$$\begin{cases}4x+3y=9-3\sqrt{17}\\ x+y=\dfrac{-25-9\sqrt{17}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{93+21\sqrt{17}}{2}\\ y=-59-15\sqrt{17}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm

$(x;y)=(-3;-2),\left(\dfrac{93-21\sqrt{17}}{2};-59+15\sqrt{17}\right),\left(\dfrac{93+21\sqrt{17}}{2};-59-15\sqrt{17}\right)\square$

69 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3+y=2 & (1)\\ y^3+x=2 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2-1\right)=0$$

- Trường hợp $x=y$. Thay lại vào (1) ta được:

$$x^3+x=2\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)\Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } x^2+x+2>0\ \forall x\in\mathbb{R})$$

- Trường hợp $x^2+y^2+xy=1$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\geq y$, từ (1) ta có:

$$\begin{aligned}2=x^3+y\leq x^3+x&\Leftrightarrow x^3+x-2\geq 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)\geq 0\\ &\Leftrightarrow x\geq 1 \text{ (vì } x^2+x+2>0\ \forall x\in\mathbb{R})\end{aligned}$$

- $1\leq x\leq 2\Rightarrow 0\leq y\leq 1$ khi đó ta có:

$$x^3+y\geq x+y^3$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

Thử lại thấy không thỏa mãn $x^2+xy+y^2=1$

- $x\geq 2$. Ta có:

$$x^2+xy+y^2=\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2+\frac{3}{4}x^2\geq 3>1\Rightarrow \text{ hệ vô nghiệm}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x=y=1\square$

Cách 2

Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2-1\right)=0$$

- Với $x=y$. Thay lại vào (1) ta được:

$$x^3+x=2\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+x+2\right)\Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } x^2+x+2>0\ \forall x\in\mathbb{R})$$

- Với $x^2+y^2+xy=1\Leftrightarrow(x+y)^2-xy=1$

Cộng vế theo vế hai phương trình ban đầu ta được:

$$x^3+y^3+x+y=4\Leftrightarrow(x+y)^3-3xy(x+y)+x+y=4$$

Đặt: $a=x+y$; $b=xy$ $(a^2\geq 4b)$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} a^2 - b = 1 \\ a^3 - 3ab + a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b - 1 = 0 \\ a\left(a^2 - 3b + 1\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(-2b + 2\right) = 4 & (3) \\ a^2 - b - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra: $a \neq 0,\ b \neq 1$ và $a = \dfrac{2}{1-b}$

Thay vào (4):

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{1-b}\right)^2 - b - 1 = 0 &\Leftrightarrow b^3 - b^2 - b - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (b-2)\left(b^2 + b + 1\right) = 1 \\ &\Rightarrow b > 2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$a^2 - 4b \leq -4b = -8 < 0 \Rightarrow \text{vô lý} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)\square$

Chú ý: Ta có thể chứng minh $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ vô nghiệm như sau: Từ $a^2 - b = 1$ và $a^2 \geq 4b$ ta có:

$$1 = a^2 - b \geq a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow a^2 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow |a| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Thay $b = a^2 - 1$ vào $a^3 - 3ab + a = 4$ ta được:

$$a^3 - 2a + 2 = 0$$

Khảo sát hàm số $f(a) = a^3 - 2a + 2$ trên đoạn $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$

Ta dễ thấy phương trình $f(a) = 0$ với $a \in \left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$ vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Cách 3

Cộng, trừ hai vế tương ứng của hai phương trình ta được:

$$\begin{cases} (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 - 1\right) = 0 \\ (x+y)\left(x^2 - xy + y^2 + 1\right) = 4 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $x = y$ dễ thấy là hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$

Trường hợp 2: Xét hệ hai ẩn $S,\ P$:

$$\begin{cases} S^2 - P = 1 & (1) \\ S\left(S^2 - 3P + 1\right) = 4 & (2) \end{cases}$$

với $S = x + y$ và $P = xy$ $(S^2 \geq 4P)$

Từ (1) và điều kiện $S^2 \geq 4P$ ta suy ra: $-1 \leq P \leq \dfrac{1}{3}$

Thay $S^2 = 1 + P$ vào (2) ta được:

$$S\left(1 - P\right) = 2$$

Từ đây suy ra $S > 0$

Mặt khác (2) được viết lại theo ẩn S là:

$$S^3 - 2S + 2 = 0$$

Xét: $f(S) = S^3 - 2S + 2$ với $S > 0$. Lập bảng biến thiên ta thấy $f(S) > 0$ với mọi $S > 0$ nên trường hợp 2 vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (1; 1)\square$

70 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5\left(1 + x^2\right) \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y\left(y^2 - 4\right) = x\left(x^2 - 16\right) \\ y^2 - 4 = 5x^2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$5x^2y = x\left(x^2 - 16\right) \Leftrightarrow x\left(5xy - x^2 + 16\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{5}\left(x - \dfrac{16}{x}\right) \end{array}\right.$$

- Với $x = 0$ ta có:

$$y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 2$$

- Với $y = \dfrac{1}{5}\left(x - \dfrac{6}{x}\right)$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{25}\left(x - \frac{16}{x}\right)^2 - 4 = 5x^2 &\Leftrightarrow x^2 - 32x + \frac{256}{x^2} - 100 = 125x^2 \\ &\Leftrightarrow 31x^2 + 33 - \frac{64}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(31x + \frac{64}{x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ 31x^2 = -64 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; -2), (0; 2), (1; -3), (-1; 3)$□

Cách 2

Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 16x - 4y \quad (1) \\ y^2 - 5x^2 = 4 \quad (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với 4 và khéo léo thay (2) vào ta được phương trình:

$$\begin{aligned} &4\left(x^3 - y^3\right) = (16x - 4y)\left(y^2 - 5x^2\right) \\ \Leftrightarrow\ &x^3 - y^3 = (4x - y)\left(y^2 - 5x^2\right) \\ \Leftrightarrow\ &x^3 - y^3 = 4xy^2 - 20x^3 - y^3 + 5x^2y \\ \Leftrightarrow\ &x\left(21x^2 - 4y^2 - 5xy\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x(4y - 7x)(y + 3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{7}{4}x \\ y = -3x \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $x = 0$ thế lại vào (2) ta suy ra $y = \pm 2$

- Với $y = \dfrac{7}{4}x$ vào (2) ta được:

$$31x^2 = -64 \text{ (vô nghiệm)}$$

- Với $y = -3x$ vào (2) ta được:

$$4x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 & \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 2), (0; -2), (-1; 3), (1; -3)\square$

Cách 3

Viết hệ phương trình đã cho lại dưới dạng:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 16x - 4y & (1) \\ y^2 - 5x^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$ ta thấy hệ có nghiệm $(x; y) = (0; 2);\ (0; -2)$
- Xét $x \neq 0$ ta đặt $y = mx$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^3 - (mx)^3 = 16x - 4mx \\ (mx)^2 - 5x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - m^3\right) = 16 - 4m & (3) \\ x^2\left(m^2 - 5\right) = 4 & (4) \end{cases}$$

- Ta thấy $m = 1;\ m = 4$ không thỏa mãn hệ nên chia theo vế (3) và (4) ta thu được:

$$\begin{aligned} \frac{m^2 - 5}{1 - m^3} = \frac{1}{4 - m} &\Leftrightarrow 1 - m^3 = 4m^2 - 20 - m^3 + 5m \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 5m - 21 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = \dfrac{7}{4} \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $m = -3$ suy ra $y = -3x$ thế vào (2) ta thu được:

$$4x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 & \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$$

- Với $m = \dfrac{7}{4}$ suy ra $y = \dfrac{7}{4}x$ thay vào (2) ta được:

$$31x^2 = -64 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 2), (0; -2), (-1; 3), (1; -3)\square$

71 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 = x^3\left(9 - x^3\right) \\ x^2y + y^2 = 6x \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 9x^3 = \left(x^2 + y\right)\left(x^4 - x^2y + y^2\right) & (1) \\ y\left(x^2 + y\right) = 6x & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ

Với $xy \neq 0$:

- Chia (1) cho (2) ta được:

$$\frac{x^4 - x^2y + y^2}{y} = \frac{3}{2}x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2y + y^2 = \frac{3}{2}x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y\right)^2 = \frac{9}{2}x^2y \ (\star)$$

- Thay (2) vào $(\star)$ ta được:

$$\frac{36x^2}{y^2} = \frac{9}{2}x^2y \Leftrightarrow y^3 = 8$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

- Thay $y = 2$ lại vào (2) ta được:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 2), (2; 2)$□

Cách 2

- Ta thấy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$
- Xét $xy \neq 0$. Chia (1) cho x^6 và chia (2) cho x^4 ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{y^3}{x^6} - \dfrac{9}{x^3} = -1 \\ \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^4} = \dfrac{6}{x^3} \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = \dfrac{1}{x^3} \end{cases} (u;\ v \neq 0)$$

Ta được hệ mới:

$$\begin{cases} u^3 - 9v = -1 \\ u + u^2 = 6v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{u^3 + 1}{9} \\ 2u^3 - 3u^2 - 3u + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = -1 & \Rightarrow v = 0 \text{ (loại)} \\ u = 2 & \Rightarrow v = 1 \\ u = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow v = \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$$

- Với: $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ ta suy ra: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$
- Với: $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2} \\ v = \dfrac{1}{8} \end{cases}$ ta suy ra: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; 2), (2; 2)$□

72 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 + x + xy - 6y + 1 = 0 \\ y^3x - 8y^2 + x^2y + x = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (1 + y)\,x = -y^2 + 6y - 1 \\ yt + (1 + y^3)\,x = 8y^2 \end{cases} \quad (\text{với } t = x^2)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&D = -y\left(1+y\right)\\
&D_t = \left(y+1\right)\left(-y^4+7y^3-16y^2+7y-1\right)\\
&D_x = y\left(y^2-6y+1\right)
\end{aligned}$$

Nhận thấy $y=0$ hay $y=-1$ không phải là nghiệm hệ phương trình suy ra $D \neq 0$

Từ đó hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} t = \dfrac{D_t}{D} \\ x = \dfrac{D_x}{D} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\frac{D_t}{D} = \left(\frac{D_x}{D}\right)^2 \Leftrightarrow DD_t = \left(D_x\right)^2$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
DD_t &= \left(y+1\right)\left(-y^4+7y^3-16y^2+7y-1\right)\left[-y\left(1+y\right)\right]\\
&= y^7-5y^6+3y^5+18y^4+3y^3-5y^2+y\\
\left(D_x\right)^2 &= \left[y\left(y^2-6y+1\right)\right]^2 = y^6-12y^5+38y^4-12y^3+y^2
\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
DD_t = \left(D_x\right)^2 &\Leftrightarrow y^7-5y^6+3y^5+18y^4+3y^3-5y^2+y = y^6-12y^5+38y^4-12y^3+y^2\\
&\Leftrightarrow y^7-6y^6+15y^5-20y^4+15y^3-6y^2+y=0\\
&\Leftrightarrow y\left(y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1\right)=0\\
&\Leftrightarrow y\left(y-1\right)^6=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ (loại)} \\ y=1 \text{ (thỏa)} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $y=1$ thay lại vào phương trình đầu tiên của hệ ta suy ra $x=2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$ □

73 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-xy^2+2000y=0 & (1) \\ y^3-yx^2-500x=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ

Với $xy \neq 0$ từ hai phương trình của hệ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x\left(x^2-y^2\right)+2000y=0 \Leftrightarrow x^2-y^2 = -\frac{2000y}{x}$$

$$(2) \Leftrightarrow y\left(x^2-y^2\right)+500x=0 \Leftrightarrow x^2-y^2 = -\frac{500x}{y}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
\frac{2000y}{x} = \frac{500x}{y} &\Leftrightarrow 2000y^2 = 500x^2\\
&\Leftrightarrow 4y^2-x^2=0\\
&\Leftrightarrow \left(2y-x\right)\left(2y+x\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-2y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

- Với $x=2y$ thế vào (1) ta được:

$$6y^3+2000y=0 \Leftrightarrow y\left(6y^2+2000\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ (loại)} \\ 6y^2+2000=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

- Với $x=-2y$ thế vào (1) ta được:

$$-6y^3+2000y=0 \Leftrightarrow y\left(6y^2-2000\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ (loại)} \\ 6y^2-2000=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{10\sqrt{30}}{3} \Rightarrow x=-\dfrac{20\sqrt{30}}{3} \\ y=-\dfrac{10\sqrt{30}}{3} \Rightarrow x=\dfrac{20\sqrt{30}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(-\dfrac{20\sqrt{30}}{3};\dfrac{10\sqrt{30}}{3}\right),\left(\dfrac{20\sqrt{30}}{3};-\dfrac{10\sqrt{30}}{3}\right)\square$

74 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Nhân hai vế phương trình (2) với 3 ta được:

$$3x^2-24xy+4y^2=24y-51$$

Sau đó cộng vế với vế phương trình (1) nhóm các số hạng thích hợp ta được:

$$3(x+1)y^2-24(x+1)y+\left(x^3+3x^2+51x+49\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(3y^2-24y+x^2+2x+49\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left[3(y-4)^2+(x+1)^2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $x=-1$; $y=4$ ta thấy thỏa mãn hệ đã cho

Với $x=-1$ thay lại vào (1) ta được:

$$48-3y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm 4$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(-1;4),\ (-1;-4)\square$

75 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3=y+3 \\ y^3=x+3 \end{cases}$$

Lời giải:

Đây là hệ đối xứng loại 2 trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ ta được:

$$x^3-y^3=-(x-y) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^3+\frac{3}{4}y^2+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

Thay $x=y$ lại vào hệ ta được:

$$x^3 - x - 3 = 0\ (\star)$$

Xét hàm số:

$$f(x) = x^3 - x - 3$$

Lập bảng biến thiên ta thấy rằng $f(x) = 0$ có chỉ có 1 nghiệm thực duy nhất

Đặt: $x = a + b$, ta có:

$$\begin{aligned}(\star) &\Leftrightarrow (a+b)^3 - (a+b) - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + (3ab - 1)(a+b) - 3 = 0\end{aligned}$$

Ta chọn $a,\ b$ sao cho $ab = \dfrac{1}{3}$ khi đó ta có được:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 3\\ a^3b^3 = \dfrac{1}{27}\end{cases}$$

Suy ra $a^3,\ b^3$ là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$t^2 - 3t + \frac{1}{27} = 0$$

$$\Rightarrow x = a + b = \sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{\frac{239}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{\frac{239}{27}}}{2}}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = y = \sqrt[3]{\dfrac{3 + \sqrt{\frac{239}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{3 - \sqrt{\frac{239}{27}}}{2}}$ □

76 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^6 - y^3 - 15y - 14 = 3\left(2y^2 - x^2\right) & (1)\\ 4xy + 11x + 6y + 13 = 0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Trước hết ta đi giải phương trình (1)

Đặt: $\begin{cases} a = x^2\ (a \geq 0)\\ y = b - 2\end{cases}$

Ta được:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow a^3 + (b-2)^3 - 15(a-2) - 14 = 3\left[2(a-2)^2 - b\right]\\ &\Leftrightarrow a^3 + 3a = b^3 + 3b\\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) + 3(a-b) = 0\\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2 + 3\right) = 0\ (\star)\end{aligned}$$

Ta có:

$$a^2 + ab + b^2 + 3 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 3 > 0, \forall a, b$$

Do đó:

$$(\star) \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow y = x^2 - 2$$

Thay $y = x^2 - 2$ vào (2) ta được:

$$\begin{aligned}4x\left(x^2 - 2\right) + 11x + 6\left(x^2 - 2\right) + 15 = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(4x^2 + 2x + 1\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}\\ x = 1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Với $x = 1 \Rightarrow y = -1$ thử lại ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; -1)$□

77 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 & (1) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} - 2y + \sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \text{ (vô nghiệm với điều kiện của hệ)} \\ \sqrt{x} = 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x = 4y \end{array} \right.$$

Thế $x = 4y$ vào (2) ta được:

$$2\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa)}$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ (thỏa)

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(2; \dfrac{1}{2}\right)$□

78 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3(21y - 20) = 1 & (1) \\ x(y^3 + 20) = 21 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ, từ (2) ta có:

$$20 = \frac{21}{x} - y^3$$

Thay vào (1) ta được:

$$x^3\left(21y + y^3 - \frac{21}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow 21x^3y + x^3y^3 - 21x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1)\left(21x^2 + x^2y^2 + xy + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - 1)\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 20x^2 + \frac{3y^2}{4} + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow xy = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$$

Thay $x = \dfrac{1}{y}$ vào (2) ta được:

$$y^2 + \frac{20}{y} = 21 \Leftrightarrow y^2 - 21y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -5 & \Rightarrow x = -\dfrac{1}{5} \\ y = 1 & \Rightarrow x = 1 \\ y = 4 & \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x; y) = (1; 1)$; $\left(-\dfrac{1}{5}; 5\right)$; $\left(\dfrac{1}{4}; 4\right)$ $\square$

Cách 2

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ, từ hệ đã cho ta có:

$$\begin{cases} 21y - 20 = \dfrac{1}{x^3} \\ \dfrac{y^3 + 20}{21} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Suy ra:

$$21y - 20 = \left(\frac{y^3 + 20}{21}\right)^3$$

Đặt: $t = \dfrac{y^3 + 20}{21}$ ta được:

$$\begin{cases} t^3 = 21y - 20 \\ y^3 = 21t - 20 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ mới ta được:

$$\begin{aligned} t^3 - y^3 = -21(t - y) &\Leftrightarrow (t - y)\left(t^2 + ty + y^2 + 21\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - y)\left[\left(t + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 21\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow t = y \\ &\Leftrightarrow y^3 - 21y + 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = -5 & \Rightarrow x = -\dfrac{1}{5} \\ y = 1 & \Rightarrow x = 1 \\ y = 4 & \Rightarrow x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $(x; y) = (1; 1)$; $\left(-\dfrac{1}{5}; 5\right)$; $\left(\dfrac{1}{4}; 4\right)$ $\square$

79 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2x - 3} = (y^2 + 2011)(5 - y) + \sqrt{y} & (1) \\ y(y - x + 2) = 3x + 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta được:

$$(y + 3)(x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \text{ (loại)} \\ x = y - 1 \end{array}\right.$$

Thế $x = y - 1$ (1) ta có:

$$\sqrt{2y-5}-\sqrt{y}=\left(y^2+2011\right)(5-y) \Leftrightarrow \frac{y-5}{\sqrt{2y-5}+\sqrt{y}}=\left(y^2+2011\right)(5-y)$$
$$\Leftrightarrow (5-y)\left(\frac{1}{\sqrt{2y-5}+\sqrt{y}}+y^2+2011\right)=0$$

Vì:
$$\frac{1}{\sqrt{2y-5}+\sqrt{y}}+y^2+2011>0,\ \forall y>\frac{5}{2} \Rightarrow y=5 \Rightarrow x=4$$

Đối chiếu điều kiện ta suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;5)\square$

Chú ý: Ta phân tích được (2) thành tích là vì:
$$(2) \Leftrightarrow y^2+y(2-x)-(3x+3)=0$$

Có: $\Delta=(x+4)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=x+1 \end{array}\right. \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (y+3)(y-x-1)=0$

80 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1 \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ đã cho dưới dạng:
$$\begin{cases} \sqrt{1-y^2}=1-x \\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-y^2=1-2x+x^2 & (1) \\ 1-x^2=3-2\sqrt{3}y+y^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1)-(2) ta có được:
$$x^2-y^2=2\sqrt{3}y-2x+x^2-y^2-2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}y-1$$

Thê lại vào (1) ta được:
$$1-y^2=1-2\left(\sqrt{3}y-1\right)+\left(\sqrt{3}y-1\right)^2 \Leftrightarrow 4y^2-4\sqrt{3}y+3=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Thử lại giá trị $x;\ y$ ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\square$

81 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(2-2x+y-xy)+\log_{2-y}(x^2-3x+1)=6 & (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện:
$$\begin{cases} 0<1-x\neq 1 \\ 2-2x+y-xy>0 \\ 0<2+y\neq 1 \\ x^2-2x+1>0 \\ x+4>0 \\ y+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4<x<1 \\ x\neq 0 \\ -2<y\neq 1 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 2\log_{1-x}\left[(2+y)(1-x)\right]+\log_{2+y}(1-x)^2=6\\ &\Leftrightarrow \log_{1-x}(2+y)+\log_{2+y}(1-x)=2\\ &\Leftrightarrow \log_{1-x}(2+y)+\frac{1}{\log_{1-x}(2+y)}=2\\ &\Leftrightarrow \log^2_{1-x}(2+y)-2\log_{1-x}(2+y)+1=0\\ &\Leftrightarrow \log_{1-x}(2+y)=1\\ &\Leftrightarrow y=-1-x\end{aligned}$$

Thế $y=-1-x$ vào (2) ta được:

$$\log_{1-x}(4-x)-\log_{1-x}(4+x)=1\Leftrightarrow\frac{4-x}{4+x}=1-x\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\text{ (loại)}\\ x=-2\text{(thỏa)}\end{array}\right.$$

Với $x=-2\Rightarrow y=1$. Đối chiếu điều kiện ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(-2;1)\square$

82 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}y^2-x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}}=2x-2 & (1)\\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt[3]{2x-1}=1 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x>0$

Từ (1) ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{y^2+2}{x}-\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}-2\right)=0\ (\star)$$

Với mọi $x>0;\ y\in\mathbb{R}$ ta có: $\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}}+1>0$. Do đó:

$$(\star)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}-2=0\Leftrightarrow y^2+1=4x-1$$

Thế $y^2+1=4x-1$ vào (2) ta có:

$$\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1\ (\star\star)$$

Tới đây ta tiếp tục đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{4x-1}\\ v=\sqrt[3]{2x-1}\end{cases}$ $(u\geq 0)$. Từ đây ta có được:

$$(\star\star)\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1\\ u^2-2v^3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1-v\\ 2v^3-v^2+2v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=0\end{cases}\text{ (thỏa)}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases}\sqrt{4x-1}=1\\ \sqrt[3]{2x-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-1=1\\ 2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ (thỏa)}$$

Với: $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=0$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};0\right)\square$

83 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2y+xy^2+x-5y=0 & (1)\\ 2xy+y^2-5y+1=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Ta thấy rằng $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình đã cho. Từ phương trình (2) trong hệ ta có được:

$$x=\frac{5y-y^2-1}{2y}$$

Thế vào (1) ta có:

$$\left(\frac{5y-1-y^2}{2y}\right)^2.y+\left(\frac{5y-1-y^2}{2y}\right).y^2+\frac{5y-1-y^2}{2y}-5y=0$$
$$\Leftrightarrow \left(5y-1-y^2\right)^2+2y^2\left(5y-1-y^2\right)+2\left(5y-1-y^2\right)-20y^2=0$$
$$\Leftrightarrow y^4-3y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2};\frac{-\sqrt{5}\pm 1}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\right)\square$

84 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{4x-3}+y^3-4y^2-4y-5=\sqrt{y} & (1)\\ y\left(y-2x+2\right)=6x+3 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x\geq\frac{3}{4}\\ y\geq 0\end{cases}$

Ta biến đổi phương trình (2):

$$(2)\Leftrightarrow y^2-2\left(x-1\right)-6x-3=0$$
$$\Leftrightarrow \left(y+3\right)\left(y-2x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \text{ (loại)}\\ y=2x+1\end{array}\right.$$

Thay $y=2x+1$ vào (1) ta được:

$$\sqrt{4x-3}+(2x+1)^3-4\left(2x+1\right)^2-4\left(2x+1\right)-5=\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3}+8x^3-4x^2-18x-12=\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}+8x^3-4x^2-12x-12=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x-2\right)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}+\left(x-2\right)\left(8x^2+12x+6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[\frac{2}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}+8x^2+12x+6\right]=0\ (\star)$$

Vì với mọi $x\geq\frac{3}{4}$ thì:

$$\frac{2}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}+8x^2+12x+6>0$$

Do đó:

$$(\star) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa)}$$

Với: $x = 2 \Rightarrow y = 5$ (thỏa)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x; y) = (2; 5)\square$

85 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 + \sqrt{x(y+1)} \\ x^3 - y^2 = 7 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x(y+1) \geq 0$

Từ phương trình (1) ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 2x = 1 + y + \sqrt{x(y+1)} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{x}{y+1}} = \sqrt{\frac{y+1}{x}} + 1$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{y+1}{x}}, t > 0$ ta được $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \quad \text{(loại)} \end{cases}$

Với $t = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$ thế vào (2) ta được:

$$x^3 - x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)\square$

86 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \quad (1) \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Nhân phương trình(1) với x, nhân phương trình(2) với y ta có:

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{3x^2 - xy}{x^2 + y^2} = 3x \\ y^2 - \dfrac{xy + 3y^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau ta được : $x^2 - y^2 + 3 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 - 3x + 3$

Thế y^2 vào phương trình (2) loại trường hợp $x = 0$ ta được: $y = \dfrac{1}{2x - 3}$

Thế y vào (1) đưa về phương trình bậc 5, phân tích nhân tử ta có:

$$(x - 1)(x - 2)(4x^2 - 12x + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (2; 1), (1; -1).\square$

87 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \quad (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) cộng với 2 lần phương trình (2), ta được :

$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0 \Leftrightarrow (x+2y+1)(x+2y+2)=0$$

TH1: $x+2y+1=0 \Rightarrow x=-2y-1$ thay vào (2) ta được

$$y^2-2y-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y=1+\sqrt{2} & \Rightarrow x=-3-2\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} & \Rightarrow x=-3+2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

TH2: $x+2y+2=0 \Rightarrow x=-2y-2$ thay vào (2) ta được

$$y^2-y-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & \Rightarrow x=-3+\sqrt{5} \\ y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \Rightarrow x=-3-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Do đó hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$(x;y)=\left(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right);\left(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right);\left(-3+\sqrt{5};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(-3-\sqrt{5};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ □

88 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+y^2+4x^2-4y=2 & (1) \\ x^2y+2x^2+6y=23 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta có: $x^2=\dfrac{23-6y}{y+2}$ thay vào phương trình đầu sau đó thu gọn ta có :

$$\frac{(y^4-2y^2-256y+705)}{(y+2)^2}=0$$

Nên ta có :

$$y^4-2y^2-256y+705=0$$

Phân tích thành nhân tử ta có :

$$(y-3)(y-5)(y^2+8y+17)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \Rightarrow x^2=1 \\ y=5 \Rightarrow x^2=-1 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;3),(-1;3)$ □

89 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{x}{y+1}\right)^2=\dfrac{5}{4} \\ y^2+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2=\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x,y\neq -1$.

Trừ hai phương trình của hệ đã cho, ta thu được:

$$(x-y)(x+y)+\left(\frac{x}{y+1}-\frac{y}{x+1}\right)\left(\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)+\frac{(x-y)(x+y)}{(x+1)(y+1)}\left(\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm y \\ 1+\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}\left(\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}\right)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm y \\ (x+1)^2(y+1)^2+x^2+1+y^2+1=0 \quad \text{(vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Trường hợp : $x=y$, ta phải giải phương trình sau:

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2(x^2+2x+2)=5(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 8x^2+8x^3+4x^4-5x^2-5-10x=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(2x^2+5x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $x=-y$, ta phải giải phương trình sau:

$$x^2+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2(x^2-2x+2)=5(x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-8x^3+4x^4-5x^2-5+10x=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1)(2x^2-5x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Thử lại, ta chỉ nhận các nghiệm $x=y=1$ và $x=y=-\dfrac{1}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;1);\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$□

90 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6\dfrac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y & (1) \\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Phương trình (1) tương đương với $(3y-2\sqrt{3x-y})(y+\sqrt{3x-y})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3y-2\sqrt{3x-y}=0 & (3) \\ y+\sqrt{3x-y}=0 & (4) \end{array}\right.$

Thế phương trình (3) vào phương tình (2):

$$\begin{cases} 6x+3y=8 \\ 3y-2\sqrt{3x-y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y=8 \\ 3y^2-16+10y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{6}(13+\sqrt{73}) \\ y=\dfrac{1}{3}(-5-\sqrt{73}) \\ x=\dfrac{1}{6}(13-\sqrt{73}) \\ y=\dfrac{1}{3}(-5+\sqrt{73}) \end{array}\right.\right.$$

Thế phương trình (4) vào phương tình (2):

$$\begin{cases} y+\sqrt{3x-y}=0 \\ 6x+5y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+\sqrt{3x-y}=0 \\ 2y^2-4+7y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x=4 \\ y=-4 \\ x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm
$(x;y)=\left(\dfrac{1}{6}\left(13+\sqrt{73}\right);\dfrac{1}{3}\left(-5-\sqrt{73}\right)\right);\left(\dfrac{1}{6}\left(13-\sqrt{73}\right);\dfrac{1}{3}\left(-5+\sqrt{73}\right)\right);(4;-4);\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$ □

91 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^3=1 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta thấy nếu x là nghiệm của hệ thì $-x$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $x \geq 0$.
Ta xét hai trường hợp:
Nếu $y \geq 0$ thì ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ x=0 \\ y=1 \end{array}\right.\right.$$

Nếu $y<0$ thì ta có hệ:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;0),(-1;0),(0;1)$ □

92 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{5y^4-x^4}-6\left(x^2-y^2\right)-2xy=0 & (1) \\ \dfrac{1}{2}\left(5y^2+x^2\right)^2-18=\sqrt{xy}\left(6-5y^2-x^2\right) & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ 5y^4-x^4 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với

$$(x^2+5y^2-6)(x^2+5y^2+2\sqrt{xy}+6)=0 \Leftrightarrow x^2+5y^2=6 \quad (3)$$

Thế vào (1) ta có:

$$\sqrt{5y^4-x^4}+\left(\sqrt{5y^4-x^4}\right)^2=2xy+(2xy)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5y^4-x^4}-2xy\right)\left(\sqrt{5y^4-x^4}+2xy+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5y^4-x^4}-2xy\right)\left(\sqrt{5y^4-x^4}+2xy+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{5y^4-x^4}=2xy$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

Thay $x=y$ vào (3) giải ra được $\left[\begin{array}{l} y=1; x=1 \\ y=-1; x=-1 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;1),(-1;-1)$. □

93 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y+2(x^2+y)=8 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình thứ nhất ta có:
$$x=\frac{5-y}{y+1}$$

Thế vào phương trình còn lại, sau đó quy đồng, rút gọn ta có:
$$3y^3-12y^2-9y+42=0$$

Phân tích thành nhân tử ta có:
$$3(y-2)\left(y^2-2y-7\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1\pm2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;2),\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},1+2\sqrt{2}\right),\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}},1-2\sqrt{2}\right)$.
□

94 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2+5x+y=9 \\ 3x^3+x^2y+2xy+6x^2=18 \end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 - 5x \\ 3x^3 + x^2(9 - x^2 - 5x) + 2x(9 - x^2 - 5x) + 6x^2 - 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - x^2 - 5x \\ -x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 18x - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - x^2 - 5x \\ (x-1)(x+3)(x^2 + 2x - 6) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - x^2 - 5x \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -15 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{7} \\ y = -4 \mp 7\sqrt{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 3); (3; -15); \left(-1 \pm \sqrt{7}; -4 \mp 7\sqrt{7}\right)$. $\square$

95 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y > 0$

Hệ phương trình tương đương với :

$$\begin{cases} \dfrac{3^x}{x} = \dfrac{2^y}{y} & (1) \\ 12^x x = 3^y y & (2) \end{cases}$$

Nhân vế theo vế ta được: $36^x = 6^y \Leftrightarrow y = 2x$

Thay vào (1) ta tìm được $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}} 2 \Rightarrow y = 2\log_{\frac{4}{3}} 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm guy nhất: $(x; y) = \left(\log_{\frac{4}{3}} 2; 2\log_{\frac{4}{3}} 2\right)$ $\square$

96 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y & (1) \\ 2y(x^2 - y^2) = 3x & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Nhân chéo phương trình (1) và phương trình (2) ta được:

$$3x^2(x^2+y^2)=20y^2(x^2-y^2)\Leftrightarrow 3x^4-17x^2y^2+20y^4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2=4y & (3)\\ 3x^2=5y^2 & (4)\end{array}\right.$$

Kết hợp (3) và (1) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x^2+y^2)=10y\\ x^2=4y\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x=0\\ y=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x=2\\ y=1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Kết hợp (4) và (1) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x^2+y^2)=10y\\ 3x^2=5y^2\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x=0\\ y=0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{375}\\ y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{375}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),(2;1),\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{375};\sqrt{\dfrac{3}{5}}\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{375}\right)$ □

97 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} & (1)\\ x+y=\sqrt{x+y+2} & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Mũ 6 hai vế của phương trình (1) ta được:

$$(x-y)^2=(x-y)^3\Leftrightarrow (x-y)^2(x-y-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y\\ x=y+1\end{array}\right.$$

+ Nếu $x=y$ tthì phương trình (2) trở thành:

$$2x=\sqrt{2x+2}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0\\ 4x^2=2x+2\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

+ Nếu $x=y+1$ thế vào (2) ta được:

$$2y+1=\sqrt{2y+3}\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -\dfrac{1}{2}\\ 4y^2+4y+1=2y+3\end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ □

98 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4\\ x(x+y+1)+y(y+1)=2\end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 & (1) \\ x^2+y^2+xy+x+y=2 & (2) \end{cases}$$

Trừ theo vế cho hai phương trình ta được:

$$xy=-2 \quad (3)$$

Cộng (2) và (3) theo vế ta được:

$$(x+y)^2+x+y=0 \Leftrightarrow (x+y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=-y-1 \end{array}\right.$$

+ Nếu $x=-y$ thì: (3) $\Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \Rightarrow y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{2} \end{array}\right.$

+Nếu $x=-y+1$thì (3) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=-2 \\ y=-2 \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),(1;-2),(-2;1)$ □

99 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 & (1) \\ 4x^2+2xy+6x-27=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Xét $y=0$ không là nghiệm của hệ.

Với $y\neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho y^2 và đặt $\dfrac{x}{y}=t$ phương trình (1) trở thành:

$$t^2-5t+6=0 \Rightarrow t=2, t=3$$

+Với $t=3 \Rightarrow x=3y$ khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 14y^2+6y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-3-3\sqrt{15}}{14} \Rightarrow x=\dfrac{-9-9\sqrt{15}}{14} \\ y=\dfrac{-3+3\sqrt{15}}{14} \Rightarrow x=\dfrac{-9+9\sqrt{15}}{14} \end{array}\right.$$

+Với $t=2 \Rightarrow x=2y$ khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow 20y^2+12y-27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{9}{10} \Rightarrow x=\dfrac{9}{5} \\ y=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=-3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$(x,y)=\left(\frac{-9-9\sqrt{15}}{14};\frac{-3-3\sqrt{15}}{14}\right),\left(\frac{-9+9\sqrt{15}}{14};\frac{-3+3\sqrt{15}}{14}\right),\left(-3;-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{9}{5};\frac{9}{10}\right) \quad □$$

100 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{8x}=\dfrac{y^4-1}{y} & (1) \\ x^2-2xy+y^2=8 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Dễ thấy:

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=2\sqrt{2} \\ x-y=-2\sqrt{2} \end{array}\right. \quad (3)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^4y-16y=8xy^4-8x\\ &\Leftrightarrow (x-2y)\left[xy(x^2+2xy+4y^2)+8\right]=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ xy(x^2+2xy+4y^2)+8=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

+ Thay $x=2y$ vào (3) ta được:

TH1: $x-y=2\sqrt{2}\Rightarrow \begin{cases} x=4\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2}\end{cases}$

TH2: $x-y=-2\sqrt{2}\Rightarrow \begin{cases} x=-4\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2}\end{cases}$

+ Phương trình $xy(x^2+2xy+4y^2)+8=0$ vô ngiệm

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=\left(4\sqrt{2};2\sqrt{2}\right),\left(-4\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right).\square$

101 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3=x^3\left(9-x^3\right) & (1)\\ x^2y+y^2=6x & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Dễ thấy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x,y\neq 0$. Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (y+x^2)(y^2-x^2y+x^4)=9x^3 & (3)\\ x^2+y=\dfrac{6x}{y} & (4)\end{cases}$$

Thay (4) vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} &y^2-x^2y+x^4=\frac{3}{2}x^2y\\ \Leftrightarrow &x^4-\frac{5}{2}x^2y+y^2=0\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} x^2=2y \\ x^2=\dfrac{y}{2}\end{array}\right.\end{aligned}$$

+ Với $x^2=2y$ thế vào (2) ta được nghiệm $x=2;y=2$

+ Với $x^2=\dfrac{y}{2}$ thế vào (2) ta được nghiệm $x=1;y=2$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;2),(1;2)$ $\square$

102 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2} & (1)\\ \sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=\sqrt{6} & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x.y\in[-1;1]$

Cách 1:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x+y+2\sqrt{(1+x)(1+y)}=4 & (3) \\ x+y=2\sqrt{(1-x)(1-y)} & (4) \end{cases}$$

Thay (4) vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(1+x)(1+y)}+\sqrt{(1-x)(1-y)}=2 \\ \Leftrightarrow &1-xy=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \\ \Leftrightarrow &(x-y)^2=0 \\ \Leftrightarrow &x=y \end{aligned}$$

Từ đây thế trở lại (1) dễ dàng suy ra được hê đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2:

Viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-y}=1 & (*) \\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1+x}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1+y}=3 & (**) \end{cases}$$

Cộng theo vế của $(*), (**)$ ta có:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x}+\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1+x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-y}+\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1+y}=4 \quad (\star)$$

áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})^2 &\le (1-x+1+x)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=4 \\ (\sqrt{1-y}+\sqrt{1+y})^2 &\le (1-y+1+y)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=4 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-x}+\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1+x}+&\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-y}+\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1+y}\le 4 \end{aligned}$$

Dấu "=" ở phương trình $(\star)$ xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ $\square$

103 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} & (1) \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$

Viết lại phương trình đầu của hệ thành:

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\frac{x+y-(x+3)}{x}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=0 & (3) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x & (4) \end{array}\right.$$

+ Từ (3) suy ra $x=-3$ và $y=3$, không thỏa điều kiện nên loại

+ Lấy (4) trừ phương trình (2) của hệ ta được:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=3$$

Giải phương trình này tìm được $x=1 \Rightarrow y=8$ (thỏa mãn)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;8)$ $\square$

104 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 8x^3+12x^2y=20 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^3=27 \\ y^3+6xy^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ y^3+3y^2(3-y)-7=0 \quad (*) \end{cases}$$

Ta lại có: $(*) \Leftrightarrow (y-1)(2y^2-7y-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{7-\sqrt{105}}{4} \\ y=\dfrac{7+\sqrt{105}}{4} \end{array}\right.$

Từ đó dễ dàng ta thu được nghiệm của hệ phương trinh đã cho là:

$$(x;y)=(1;1), \left(\frac{5+\sqrt{105}}{8};\frac{7-\sqrt{105}}{4}\right), \left(\frac{5-\sqrt{105}}{8};\frac{7+\sqrt{105}}{4}\right) \quad \square$$

105 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=45 \\ (x-y)(x^2+y^2)=85 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} (x+y)^2(x-y)=45 & (1) \\ 2(x-y)(x^2+y^2)=170 & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế của phương trình (2) cho phương trình (1) ta được:

$$2(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)(x+y)^2=125 \Leftrightarrow (x-y)^3=125 \Leftrightarrow x-y=5$$

Thế $x=y+5$ vào (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow (2y+5)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=4 \\ y=-4 \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x;y)=(4;-1);(1;-4)$ $\square$

106 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy+6=3x+2y \\ x^2-2x+y^2=4y-3 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} xy+6=3x+2y(1) \\ x^2-2x+y^2=4y-3(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-3)=0 \\ x^2-2x+y^2=4y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y^2-4y+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3 \\ x^2-2x=0 \end{cases} \end{array} \right.$

Đây là các hệ phương trình cơ bản.

Giải ra ta thu được các nghiệm của phương trình đã cho là: $(x;y)=(0;3),(2;1),(2;3)$ □

107 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 & (1) \\ x\,|x|+y\,|y|=-2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1) dễ dàng suy ra: $x=y$ hoặc $x=-3y$.

+ Với $x=y$ thế vào phương trình (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x|x|=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^4=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow x=y=-1$$

+ Với $x=-3y$ ta có:

$$(2) \Leftrightarrow -8y|y|=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y)=(-1;-1),\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ □

108 Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm $\forall b\in[0;1]$:

$$\begin{cases} a^x+a^y=8 \\ x+y=b^2-b+1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $0<a\neq 1$

Ta có:

$$\begin{cases} a^x+a^y=8 \\ x+y=b^2-b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x+a^y=8 \\ a^{x+y}=a^{b^2-b+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x+a^y=8 \\ a^x.a^y=a^{b^2-b+1} \end{cases}$$

Suy ra a^x,a^y là nghiệm của phương trình:

$$t^2-8t+a^{b^2-b+1}=0 \quad (*)$$

Để hệ đã cho có nghiệm thì (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{(*)}\geq 0 \Leftrightarrow a^{b^2-b+1}\leq 16 \quad \forall b\in[0;1] \Leftrightarrow 0<a\leq 16$

Vậy $a\in(0;16],a\neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán □

109 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=37 & (1) \\ x^2+z^2+xz=28 & (2) \\ y^2+z^2+yz=19 & (3) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có

$$(1)-(2) \Rightarrow y^2 - z^2 + x(y-z) = 9 \Leftrightarrow (y-z)(x+y+z) = 9 \quad (4)$$

$$(2)-(3) \Rightarrow x^2 - y^2 + z(x-y) = 9 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+z) = 9 \quad (5)$$

$$(4)-(5) \Rightarrow [(y-z)-(x-y)](x+y+z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y-z=x-y \end{array}\right.$$

Trường hợp: $x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-(x+y)$. Thay vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=37 \\ x^2+y^2+xy=28 \quad \text{(vô nghiệm)} \\ x^2+y^2+xy=19 \end{cases}$$

Trường hợp: $y-z=x-y=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+t \\ z=y-t \end{cases}$. Thay vào (4) ta được:

$$t(y+y+t+y-t)=9 \Leftrightarrow ty=3 \Leftrightarrow t=\frac{3}{y} \quad (6)$$

Thay vào (3) ta được:

$$y^2+(y-t)^2+y(y-t)=19 \Leftrightarrow 3y^2-3ty+t^2=19 \Leftrightarrow 3y^2+t^2=28 \quad (7)$$

Thay (6) vào (7) ta được:

$$3y^2+\frac{9}{y^2}=28 \Leftrightarrow 3y^4-28y^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 3 \Rightarrow t=\pm 1 \\ y^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t=\pm 3\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Giải từng trường hợp

$$\begin{cases} y=3 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-3 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ z=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ t=3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10\sqrt{3}}{3} \\ z=-\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ t=-3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{10\sqrt{3}}{3} \\ z=\dfrac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là:

$$(x;y;z)=(4;3;2),(-4;-3;-2),\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \quad \square$$

110 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z+t=15 & (1) \\ x^2+y^2+z^2+t^2=65 & (2) \\ x^3+y^3+z^3+t^3=315 & (3) \\ xt=yz & (4) \end{cases}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow (x+t)^2+(y+z)^2-2xt-2yz=65\\ &\Leftrightarrow (x+y+z+t)^2-2(x+t)(y+z)-4xt=65 \text{ (do (4))}\\ &\Leftrightarrow (x+y+z+t)^2-2(x+t)\left[15-(x+t)\right]-4xt=65 \text{ (do (1))}\\ &\Leftrightarrow 15^2-2(x+t)\left[15-(x+t)\right]-4xt=65\\ &\Leftrightarrow (x+t)^2-15(x+t)-2xt=-80 \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow (x+t)^3+(y+z)^3-3xt(x+t)-3yz(y+z)=315\\ &\Leftrightarrow (x+t)^3+(y+z)^3-3xt(x+y+z+t)=315 \text{ (do (4))}\\ &\Leftrightarrow (x+y+z+t)^3-3(x+t)(y+z)(x+y+z+t)-45xt=315 \text{ (do (1))}\\ &\Leftrightarrow 15^3-45(x+t)\left[15-(x+t)\right]-45xt=315\\ &\Leftrightarrow (x+t)^2-15(x+t)-xt=-68 \quad (6)\end{aligned}$$

Lấy (6) trừ (5), ta được: $xt=12$

Thay vào (5) ta được: $(x+t)^2-15(x+t)+56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+t=8 \\ x+t=7 \end{array}\right.$

Ta có các hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+t=8 \\ xt=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ t=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ t=6 \end{cases} \end{array}\right.$; $\begin{cases} x+t=7 \\ xt=12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ t=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ t=4 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} x+t=8 \\ xt=12 \end{cases}$, thay vào hệ ta có: $\begin{cases} y+z=7 \\ yz=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=3 \end{cases} \vee \begin{cases} y=3 \\ z=4 \end{cases}$

Với $\begin{cases} x+t=7 \\ xt=12 \end{cases}$, thay vào hệ ta có: $\begin{cases} y+z=8 \\ yz=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ z=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=2 \\ z=6 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm

$(x;y;z;t)=(6;4;3;2),(6;3;4;2),(2;4;3;6),(2;3;4;6),(4;6;2;3),(4;2;6;3),(3;6;2;4),(3;2;6;4)$ □

111 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^2(y+z)=xyz+14 & (1) \\ y^3+z^3+y^2(x+z)=xyz-21 & (2) \\ z^3+x^3+z^2(x+y)=xyz+7 & (3) \end{cases}$$

Lời giải:

$$(1)+(2)+(3) \Rightarrow x^3+y^3+z^3+\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)=3xyz$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+\left(x^2+y^2+z^2\right)(x+y+z)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2=0\,(*) \\ x+y+z=0\,(**) \end{array}\right.$$

TH $(*)$ ta có:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow VT_{(5)}\geq 0$$

Dấu $''=''$ xảy ra khi: $x=y=z=0$

TH$(**)$: $x+y+z=0 \Leftrightarrow z=-(x+y)$

Thay vào (1) và (3) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y^3+xy(x+y)=14 \\ x^3+xy(x+y)=7 \end{cases} (I)$$

Xét $x=0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3=14 \\ 0=7 \end{cases} (vn)$$

Xét $x\neq 0$ Đặt: $y=kx$ ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3\left(k^3+k^2+k\right)=14\,(4) \\ x^3\left(k^2+k+1\right)=7\,(5) \end{cases}$$

$$(4):(5) \Rightarrow \frac{k^3+k^2+k}{k^2+k+1}=2 \Leftrightarrow k^3-k^2-k-2=0 \Leftrightarrow k=2 \Leftrightarrow y=2x$$

Thay vào (5) ta được: $x=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow z=-3$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x;y;z)=(1;2;-3)\square$

112 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+x(y-z)^2=2 \\ y^3+y(z-x)^2=30 \\ z^3+z(x-y)^2=16 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+z^2-2yz)=2\,(1) \\ y(x^2+y^2+z^2-2xz)=30\,(2) \\ z(x^2+y^2+z^2-2xy)=16\,(3) \end{cases}$$

Lấy $(1)+(2)-2(3)$ ta có: $(x+y-2z)(x^2+y^2+z^2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-2z=0 \Leftrightarrow y=2z-x \\ x^2+y^2+z^2=0 \Leftrightarrow x=y=z=0\,(l) \end{array}\right.$$

Thay $y = 2z - x$ vào phương trình (1) và (3) ta có:

$$x(2x^2 + z^2 - 2xz) = 2\,(4)$$
$$z(4x^2 + 5z^2 - 4xz) = 16(5)$$

Đặt $z = kx$ ta tìm được $k = 2$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x, y, z) = (1, 3, 2)\square$

113 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3} & (1) \\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3} & (2) \\ z + y - x = \log_3(y - x) & (3) \end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $y - x > 0$ Lấy $(1) + (2)$ vế theo vế ta được:

$$x^4 + 2x^3 - x + \frac{1}{4} + y^4 + 2y^3 - y + \frac{1}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y^2 + y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x, y \in \left\{\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right\}$$

Xét phương trình: $t^2 + t - \frac{1}{2} = 0\,(*)$

Giả sử α là 1 nghiệm của phương trình $(*)$

$$\Rightarrow \alpha^2 = -\alpha + \frac{1}{2}; \alpha^3 = -\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha - 1}{2}; \alpha^4 = -2\alpha + \frac{3}{4}$$

Tức là:

$$x^4 = -2x + \frac{3}{4}; y^3 = \frac{3y - 1}{2}$$

Thay vào (1) ta được: $y - x = \sqrt{3}$ Suy ra: $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ thỏa $(1); (2); (4)$

Với $y - x = \sqrt{3}$ (thỏa điều kiện), thay vào (3) ta được:

$$z + \sqrt{3} = \log_3\sqrt{3} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất:

$(x; y; z) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)\square$

114 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2 - x)(1 - 2x)(2 + y)(1 + 2y) = 4\sqrt{10z + 1} & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x^2y^2 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

$$(2) \Leftrightarrow (x + y + z)^2 + (xy - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -(x + y) \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Thay vào (1) , ta được:

$$(2-x)(1-2x)\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)=4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\Leftrightarrow (2-x)(1-2x)\left(\frac{2x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x}\right)=4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(4-x^2)(1-4x^2)}{x^2}=4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}$$
$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17=4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}\,(3)$$

Đặt: $t=x+\frac{1}{x};|t|\geq 2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

$$(3)\Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)-17=4\sqrt{1-10t}$$
$$\Leftrightarrow 4t^2-25=4\sqrt{1-10t}$$
$$\Leftrightarrow \left(4t^2-25\right)^2-16(1-10t)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4t^2-20t+29\right)(2t+3)(2t+7)=0$$
$$\Leftrightarrow t=-\frac{7}{2}\,(do\,|t|\geq 2)$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=-\frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+7x+2=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{33}}{4}$$

Với $x=\dfrac{-7+\sqrt{33}}{4}\Rightarrow y=\dfrac{-7-\sqrt{33}}{4}\Rightarrow z=\dfrac{7}{2}$

Với $x=\dfrac{-7-\sqrt{33}}{4}\Rightarrow y=\dfrac{-7+\sqrt{33}}{4}\Rightarrow z=\dfrac{7}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y;z)=\left(\frac{-7+\sqrt{33}}{4};\frac{-7-\sqrt{33}}{4};\frac{7}{2}\right),\left(\frac{-7-\sqrt{33}}{4};\frac{-7+\sqrt{33}}{4};\frac{7}{2}\right)\square$

115 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2+2\sqrt{3}xy-y^2=1 & (1)\\ z(yz-2)+y=0 & (2)\\ z^2x+z^2+x=1 & (3)\end{cases}$$

Lời giải:

Từ (2) ta có:

$$yz^2-2z+y=0\Leftrightarrow y\left(z^2+1\right)=2z\Leftrightarrow y=\frac{2z}{z^2+1}$$

Từ (3) ta có:

$$x\left(z^2+1\right)=1-z^2\Leftrightarrow x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Thế vào (1) ta được:

$$\frac{\left(1-z^2\right)^2}{\left(1+z^2\right)^2}+\frac{4\sqrt{3}z\left(1-z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2}=\frac{4z^2}{\left(1+z^2\right)^2}+1$$
$$\Leftrightarrow \left(1+z^2\right)^2+4\sqrt{3}\left(1-z^2\right)=4z^2+\left(1+z^2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}z\left(1-z^2\right)-8z^2=0$$
$$\Leftrightarrow z\left[4\sqrt{3}\left(1-z^2\right)-8z\right]=0$$
$$\Leftrightarrow z\left(-4\sqrt{3}z^2-8z+4\sqrt{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=-\sqrt{3} \\ z=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

- Với $z=0$ suy ra: $y=0;\ x=1$
- Với $z=-\sqrt{3}$ suy ra: $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ x=-\dfrac{1}{2}$
- Với $z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ suy ra: $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ x=\dfrac{1}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y;z)=(1;0;0);\ \left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\sqrt{3}\right)\ \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$□

116 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xyz=8 \\ x^2y+y^2z+z^2x=73 \\ x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2=98 \end{cases}$$

Lời giải:

Phương trình 3 tương đương:
$$xy^2+yz^2+zx^2+\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)-6xyz=98$$
$$\Leftrightarrow xy^2+yz^2+zx^2=73$$
$$\Leftrightarrow xy^2+yz^2+zx^2=73=x^2y+y^2z+z^2x$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)=0 \Rightarrow x=y; y=z; z=x$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y;z)=()$ (Bạn đọc tự giải)□

117 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy+x-3y=4 \\ yz+z-5y=9 \\ zx-5x-3z=-6 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} xy+x-3y=4(1) \\ yz+z-5y=9(2) \\ zx-5x-3z=-6(3) \end{cases}$

Nếu y=-1 thế vào không thỏa mãn. Nếu y khác -1 thì từ (1) và (2) ta dễ có:
$$\begin{cases} x=\frac{4+3y}{y+1} \\ z=\frac{9+5y}{y+1} \end{cases}$$

Thế vào (3) thì:

$$(3) \Leftrightarrow \frac{(4+3y)(9+5y)}{(y+1)^2} - \frac{5(4+3y)}{y+1} - \frac{3(9+5y)}{y+1} = -6$$
$$\Leftrightarrow 15y^2 + 30y + 11 = 6(y+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 9y^2 + 18y + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ z = 11 \end{cases} \\ y = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ z = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm kể trên. □

2 Sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ

1 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 12xy + 12\left(x^2 + y^2\right) + \dfrac{9}{(x+y)^2} = 85 \\ 6x\left(x+y\right) + 3 = 13\left(x+y\right) \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 9\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)^2 + 3(x-y)^2 = 103 \\ 3\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right) + 3\left(x-y\right) = 13 \end{cases} \qquad (I)$$

Đặt $\begin{cases} a = x + y + \dfrac{1}{x+y} \quad (|a| \geq 2) \\ b = x - y \end{cases}$. Ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2 + 3b^2 = 103 \\ 3a + 3b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - 13b + 11 = 0 \\ 3a = 13 - 3b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \Rightarrow a = \dfrac{10}{3} \\ b = \dfrac{11}{2} \Rightarrow a = -\dfrac{7}{6} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với $a = \dfrac{10}{3}, b = 1$ thì: $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{10}{3} \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{-1}{3}\right); (2; 1)$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm như trên □

2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(4^{x+\frac{1}{2}} - 1\right)\left(4^{y+\frac{1}{2}} - 1\right) = 7.2^{x+y-1} & (1) \\ 4^x + 4^y + 2^{x+y} - 7.2^x - 6.2^y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Đặt : $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases} (u > 0; v > 0)$

Phương trình (2) trở thành $u^2 + (v-7)u + v^2 - 6v + 14 = 0$, có nghiệm khi

$$\Delta = (v-7)^2 - 4v^2 + 24v - 56 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3v^2+10v-7\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq v\leq \frac{7}{3}$$

Mặt khác viết phương trình (2) dưới dạng $v^2+(u-6)v+u^2-7u+14=0$, có nghiệm khi

$$\Delta=(u-6)^2-4u^2+28u-56\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3u^2+16u-20\geq 0 \Leftrightarrow 2\leq u\leq \frac{10}{3}$$

Phương trình (1) tương đương với $\left(2u-\dfrac{1}{u}\right)\left(2v-\dfrac{1}{v}\right)=\dfrac{7}{2}$

Xét hàm số : $z=2t-\dfrac{1}{t}, t\geq 1$, có $z'=2+\dfrac{1}{t^2}>0, \forall t\geq 1$

Do đó hàm số z đồng biến với $t\geq 1$

Khi đó: $\begin{cases} u\geq 2\Rightarrow 2u-\dfrac{1}{u}\geq \dfrac{7}{2} \\ v\geq 1\Rightarrow 2v-\dfrac{1}{v}\geq 1\end{cases} \Rightarrow \left(2u-\dfrac{1}{u}\right)\left(2v-\dfrac{1}{v}\right)\geq \dfrac{7}{2}$

Dấu bằng trong phương trình (1) xảy ra khi $\begin{cases} u=2 \\ v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 1 nghiệm là : $(x;y)=(1;0)\square$

$\boxed{3}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 & (1) \\ y^3x-8y^2+x^2y+x=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Lấy (2) trừ (1) ta được:

$$xy(y^2+x-1)=(3y-1)^2$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} xy(y^2+x-1)=(3y-1)^2 & (3) \\ y^2+x+xy-6y+1=0 & (4)\end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=y^2+x \\ v=xy\end{cases}$. Từ (3) và (4) ta có:

$$\begin{cases} v(u-1)=(3y-1)^2 \\ u+v=6y-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(6y-v-2)=(3y-1)^2 \\ u=6y-1-v\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v^2-2(3y-1)v+(3y-1)^2=0 \\ u=6y-1-v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-3y+1)^2=0 \\ u=6y-1-v\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v=3y-1 \\ u=3y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3y-1 \\ y^2+x=3y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-y^2)\,y=3y-1 \\ x=3y-y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3-3y^2+3y-1=0 \\ x=3y-y^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^3=0 \\ x=3y-y^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x;y) = (2;1)$□

4 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1: Đặt: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$ Ta đưa hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -98 \\ -3u^2 + 5v^2 = -9u - 25v \end{cases}$$

Ta nhân phương trình thứ hai với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được:

$$\begin{aligned} &(u-3)^3 + (v+5)^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow u - 3 = -v - 5 \\ &\Leftrightarrow u = -v - 2 \end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\begin{aligned} &(-v-2)^3 + v^3 = -98 \\ &\Leftrightarrow v^2 + 2v - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 3 \Rightarrow u = -5 \\ v = -5 \Rightarrow u = 3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ta suy ra:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x;y) = (-1;-4), (-1;4)$□

Cách 2: Nhân phương trình thứ hai của hệ với 3 rồi cộng cho phương trình đầu ta được:

$$(x+1)\left((x-1)^2 + 3(y-4)^2\right) = 0$$

Từ đó ta giải hệ tìm nghiệm□

5 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \dfrac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình được viết lại thành

$$\begin{cases} 5(x^2 + y^2) = 1 \\ 2x^2 - 2y^2 + 3x + 3xy + y = \dfrac{47}{25} \end{cases}$$

Ta thấy:

$$2x^2-2y^2+3x+3xy+y=\frac{47}{25}$$
$$\Leftrightarrow(2x-y)(x+2y)+(2x-y)+(x+2y)=\frac{47}{25}$$

Đặt $\begin{cases}a=2x-y\\b=x+2y\end{cases}$. Ta có:

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\ab+a+b=\dfrac{47}{25}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2-2ab=1\\2ab+2a+2b=\dfrac{94}{25}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2ab=(a+b)^2-1\\(a+b+1)^2=\dfrac{144}{25}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=\dfrac{7}{5}\\ab=\dfrac{12}{25}\end{cases}\\\begin{cases}a+b=-\dfrac{17}{5}\\ab=\dfrac{132}{25}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ta thấy hệ phương trình thứ hai vô nghiệm, hệ phương trình thứ nhất có 2 nghiệm là:

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{5}\\b=\dfrac{4}{5}\end{cases}\vee\begin{cases}a=\dfrac{4}{5}\\b=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{1}{5}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{11}{25}\\y=\dfrac{2}{25}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25};\dfrac{2}{25}\right)$□

$\boxed{6}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4}\\x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\qquad(I)$$

Lời giải:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y+xy\left(x^2+y\right)+xy=-\dfrac{5}{4}\\\left(x^2+y\right)^2+xy=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases}u=x^2+y\\v=xy\end{cases}$. Ta có:

$$\begin{cases}u+uv+v=-\dfrac{5}{4}\quad(1)\\u^2+v=-\dfrac{5}{4}\quad(2)\end{cases}$$

Lấy $(2)-(1)$ vế theo vế ta được:

$$u^2-u-uv=0 \Leftrightarrow u\left(u-1-v\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1+v \end{array}\right.$$

- Với $u=0 \Rightarrow v=-\dfrac{5}{4}$
- Với $u=1+v$, thế vào (2) ta được:

$$4u^2+4u+1=0 \Leftrightarrow u=-\frac{1}{2} \Rightarrow v=-\frac{3}{2}$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

$$\begin{cases} u=0 \\ v=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x^2 \\ x^3=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=-\dfrac{1}{2} \\ v=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2x}=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\right),\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)\square$

$\boxed{7}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-2x=y^4-y \quad (1) \\ \left(x^2-y^2\right)^3=3 \qquad (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} a=x+y \\ b=x-y \\ c^3=2 \end{cases}$. Phương trình (2) trở thành: $(ab)^3=c^3 \Leftrightarrow ab=c$

Ta có:

$$\begin{cases} x^4-y^4=(x-y)(x+y)\left(x^2+y^2\right)=ab\left[\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\right]=\dfrac{ab}{2}\left(a^2+b^2\right) \\ 2x-y=a+b-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+3b}{2}=\dfrac{a+c^3b}{2} \end{cases}$$

Phương trình (1) trở thành $\dfrac{ab}{2}\left(a^2+b^2\right)=\dfrac{a+c^3b}{2} \Leftrightarrow c\left(a^2+b^2\right)=a+c^3b$

Hệ phương tương đương với

$$\begin{cases} c\left(a^2+b^2\right)=a+c^3b \quad (3) \\ ab=c \quad (4) \end{cases}$$

Từ (4) ta suy ra $b = \dfrac{c}{a}$, thay vào (3) ta được:

$$\begin{aligned} & c\left(a^2 + \frac{c^2}{a^2}\right) = a + \frac{c^4}{a} \\ & \Leftrightarrow ca^4 + c^3 = a^3 + ac^4 \\ & \Leftrightarrow (ca-1)\left(a^3 - c^3\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow a = \frac{1}{c} \vee a = c \end{aligned}$$

Nếu $a = c \Rightarrow b = 1$ ta có: $x = \dfrac{c+1}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, y = \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$

Nếu $a = \dfrac{1}{c}, b = c^2$ thì $x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c} + c^2\right) = \dfrac{1+c^3}{2c} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}; y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{c} - c^2\right) = \dfrac{1-c^3}{2c} = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2}; \dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}; -\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\square$

8 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x-y+2)(2x+y) + 6x - 3y = -6 \\ \sqrt{2x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{2}; y \geq 1$

Đặt $a = \sqrt{2x+1}; b = \sqrt{y-1}$. Ta có hệ:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (a^2-b^2)(a^2+b^2) + 3(a^2-b^2-2) = -6 \\ a+b = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4(a-b)(a^2+b^2+3) = 0 \\ a+b = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a = b \\ a+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; y = 5 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = \dfrac{3}{2}; y = 5\square$

9 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8(x^2+y^2) + 4xy + \dfrac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x + y \neq 0$

Viết hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 5\left[(x+y)^2 + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right] + 3(x-y)^2 = 13 \\ \left[(x+y) + \dfrac{1}{x+y}\right] + x - y = 1 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} a = x + y + \dfrac{1}{x+y}, |a| \geq 2 \\ b = x - y \end{cases}$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 5a^2 + 3b^2 = 23 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = \dfrac{9}{4} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$, ta có:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)^2 = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (0; 1)$□

10 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 4 \\ x + y + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 4 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện $x \neq 0, y \neq 0$.
Hệ tương đương

$$\begin{cases} x + y + \frac{x^2+y^2}{xy} = 4 \\ (x+y)\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) = 4 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x^2+y^2}{xy} \end{cases}$ Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 2$$

Với $u = v = 2$, ta được

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{x^2+y^2}{xy} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (1; 1)$□

11 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^{\log_2 y} = 4y \\ y^{\log_2 x} = 8x \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y \neq 0$

Logarit cơ số 2 hai vế phương trình của hệ, ta được

$$\begin{cases} \log_2 x \log_2 y = 2 + \log_2 y \\ \log_2 x \log_2 y = 3 + \log_2 x \end{cases}$$

Đặt $a = \log_2 x, b = \log_2 y$. Ta được hệ

$$\begin{cases} ab = 2 + b \\ ab = 3 + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 1 \ \ (1') \\ ab = 2 + b \ \ (2') \end{cases}$$

Thay (1') vào (2') ta được $b(b-1) = 2 + b \Leftrightarrow b = 1 \pm \sqrt{3}$.

- Với $b = 1 + \sqrt{3}$ suy ra $a = \sqrt{3}$. Từ đó, ta có $x = \log_2\sqrt{3}, y = \log_2\left(1 + \sqrt{3}\right)$

- Với $b = 1 - \sqrt{3}$ suy ra $a = -\sqrt{3}$. Từ đó, ta có $x = \log_2\left(-\sqrt{3}\right), y = \log_2\left(1 - \sqrt{3}\right)$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\log_2\sqrt{3}; \log_2\left(1 + \sqrt{3}\right)\right); \left(\log_2\left(-\sqrt{3}\right); \log_2\left(1 - \sqrt{3}\right)\right)\Box$

12 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} = 6 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 1$

Cộng và trừ vế theo vế hai phương trình, ta được hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{y-1} + \sqrt{y+4} = 10 \\ \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} + \sqrt{y+4} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{y-1} + \sqrt{y+4} = 10 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6}} + \dfrac{5}{\sqrt{y-1} + \sqrt{y+4}} = 2 \end{cases}$$

Đặt $a = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+6}$, $b = \sqrt{y+4} + \sqrt{y-1}$. Ta có hệ :

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ \dfrac{5}{a} + \dfrac{5}{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 10 \\ ab = 25 \end{cases}$$

Suy ra a, b là nghiệm của phương trình: $X^2 - 10X + 25 = 0$

Do đó $a = b = 5$, dẫn đến $x = 3, y = 5$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(3; 5)\Box$

13 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 1 & (1) \\ 2x^3 - y^3 = 2y - x & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Nếu $x = 0$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} 2y^2 = 1 \\ y^3 + 2y = 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy $x \neq 0$

Chia phương trình (1) cho x^2, phương trình (2) cho x^3, ta được

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1 = \dfrac{1}{x^2} \\ 2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = 2\left(\dfrac{y}{x}\right).\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ: $\begin{cases} a = \dfrac{y}{x} \\ b = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$. Hệ trở thành:

$$\begin{cases} 2a^2 - 1 = b & (3) \\ 2 - a^3 = 2ab - b & (4) \end{cases}$$

Thế (3) vào (4), ta được:

$$5a^3 - 2a^2 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(5a^2 + 3a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Với $a = \dfrac{y}{x} = 1$; thế vào (1) suy ra $\left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai nghiệm $(1;1)$ hoặc $(-1;-1)\square$

14 Tìm m để hệ có nghiệm

$$\begin{cases} 2(x-1) - \sqrt{y-1} = m - 2 \\ 2(y-1) - \sqrt{x-1} = m - 2 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt

$$\begin{cases} \sqrt{y-1} = u, u \geq 0 \\ \sqrt{x-1} = v, v \geq 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2v^2 - u = m - 2 \\ 2u^2 - v = m - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(v^2 - u^2) + (v - u) = 0$$

$$\Leftrightarrow (v-u)(2v + 2u + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow v = u \ (2v + 2u + 1 > 0)$$

$$\Rightarrow x = y$$

Thay vào hệ ban đầu ta được

$$2x - \sqrt{x-1} = m$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4mx + m^2 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - (4m+1)x + m^2 + 1 = 0$$

Để hệ có nghiệm khi

$$4x^2 - (4m+1)x + m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{15}{8}$$

15 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases}$$

Lời giải:

Phương trình trong hệ ta viết hệ dưới dạng:
$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5 \quad (1) \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2=13 \quad (2) \end{cases}$$

Làm gọn lại hệ, ta đặt:
$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=a \\ y+\dfrac{1}{y}=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b \\ 2b^2-10b+12=0 \quad (3) \end{cases}$$

Giải phương trình (3), ta có nghiệm:
$$\Leftrightarrow 2b^2-10b+12=0$$
$$\Leftrightarrow b=3$$

- Với: $b=3$ dẫn đến $a=2$, ta có được hệ:
$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y^2-3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 2 bộ nghiệm $(x;y)=\left(1;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(1;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\square$

16 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta đặt: $a=x+y$ và $b=x+1$, hệ phương trình đã cho trở thành:
$$\begin{cases} \sqrt{a+b}-\sqrt{a}=1 \\ 2a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-2b+1=4a \\ a=\dfrac{5-b}{2} \end{cases}$$

Dẫn đến ta có phương trình sau $b^2=9$

Với $b=3$ suy ra được $a=1$, ta có hệ:
$$\begin{cases} x+1=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Với $b=-3$ suy ra được $a=4$, ta có hệ:
$$\begin{cases} x+1=-3 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=8 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 bộ nghiệm $(x;y)=(2;-1),(-4;8)\square$

18 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y \geq 0$. Ta đặt như sau $x+y=a$ và $2\sqrt{xy}=b$, ta có hệ sau:
$$\begin{cases}\sqrt{2a^2-b^2}+b=16\\ a+b=16\end{cases}$$
Dẫn đến ta có phương trình sau :$\sqrt{2a^2-b^2}=a$, nên:
$$(a-b)(a+b)=0 \quad (b \geq 0)$$
Với $a=b$ thì ta có kết quả sau:
$$x+y=2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y} \Rightarrow x=y=4$$
Với $a=-b$ thì ta có kết quả:
$$x+y=-2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-\sqrt{y} \text{ (loại trường hợp này)}$$
Vậy hệ phương trình đã cho có bộ nghiệm $(x;y)=(4;4)\square$

19 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases}x+y+x^2+y^2=8\\ xy(x+1)(y+1)=m\end{cases}$$

Lời giải:

Ta đặt: $a=x^2+x$ và $b=y^2+y$ với điều kiện $\left(a; b \geq -\dfrac{1}{4}\right)$

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases}a+b=8\\ ab=m\end{cases}$

Suy ra a, b là nghiệm của phương trình: $X^2-8X+m=0(1)$

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta'=16-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 16$ (I)

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm $X \geq -\dfrac{1}{4}$.

Mặt khác, với điều kiện (I), phương trình (1) có nghiệm $x=4-\sqrt{16-m}, x=4+\sqrt{16-m}>-\dfrac{1}{4}$.

Vậy $m \leq 16$ là giá trị cần tìm.

20 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y-3}=3\\ \sqrt{x-3}+\sqrt{y}=3\end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình dưới dạng như sau:
$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x-3}+\sqrt{y}+\sqrt{y-3}=6\\ \sqrt{x}-\sqrt{x-3}-\sqrt{y}+\sqrt{y-3}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x-3}+\sqrt{y}+\sqrt{y-3}=6\\ \dfrac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}-\dfrac{3}{\sqrt{y}+\sqrt{y-3}}=0\end{cases}$$
Ta đặt $a=\sqrt{x}+\sqrt{x-3}$ và $b=\sqrt{y}+\sqrt{y-3}$, dẫn đến hệ:

$$\begin{cases} a+b=6 \\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=0 \end{cases}$$

Vậy nên ta có: $a=b=3$

Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x-3}=3 \\ \sqrt{y}+\sqrt{y-3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(4;4)\square$

21 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=9 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}=u \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{xy}}=v \end{cases}$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u^3-3uv=9 \\ u(u+v+1)=18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3-3uv=9 \quad (1) \\ uv=18-u^2-u \quad (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} & u^3+3u^2+3u-63=0 \\ \Leftrightarrow & (u-3)(u^2+6u+21)=0 \\ \Leftrightarrow & u=3 \end{aligned}$$

Với $u=3$, ta được $v=2$. Khi đó, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ là hai nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned} & t^2-3t+2=0 \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{8} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=2 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=\left(1;\dfrac{1}{8}\right),\left(\dfrac{1}{8};1\right)\ \square$

22 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{(x+y)^2-xy}{3}} \\ v=\sqrt{\dfrac{(x+y)^2-2xy}{2}} \end{cases}$, điều kiện: $u \geq 0, v \geq 0$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\begin{aligned} &(u+v)^2=6u^2-2v^2 \\ \Leftrightarrow &5u^2-2uv-3v^2=0 \\ \Leftrightarrow &(u-v)(5u+3v)=0 \\ \Leftrightarrow &u=v \end{aligned}$$

Với $u=v$, ta được

$$\frac{(x+y)^2-xy}{3}=\frac{(x+y)^2-2xy}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow y=x$$

Thế $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ đã cho, ta được:

$$x\sqrt{2x^2+5x+3}=4x^2-5x-3$$

Đặt $u=\sqrt{2x^2+5x+3}$, điều kiện $u \geq 0$.

Khi đó ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u^2=2x^2+5x+3 \\ xu=4x^2-5x-3 \end{cases}$$

Suy ra: $\left(u+\dfrac{x}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2x \\ u=-3x \end{array}\right.$

Với $u=2x$, ta được $y=x=3$.

Với $u=-3x$, ta được $y=x=\dfrac{5-\sqrt{109}}{14}$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5-\sqrt{109}}{14};\dfrac{5-\sqrt{109}}{14}\right),(3;3)$ $\square$

23 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3y-1 \\ x^3+x^2y=x^2-x+1 \end{cases}$$

Lời giải:

Nếu $y=0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Xét $y \neq 0$, viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} x^2+1+y(x+y-1)=2y \\ (x^2+1)y(x+y-1)=y^2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x^2+1=a \\ (x+y-1)y=b \end{cases}$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+b=2y \\ ab=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=y \\ b=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ (x+y-1)y=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ (loại)} \\ y=2-x \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Thay $y=2-x$ vào phương trình (1) ta được: $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{5\mp\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ $\square$

24 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-2010)\left(2011+2012\sqrt[3]{y-2013}\right)=1 \\ \left(\sqrt[3]{x-2010}\right)(y-4024)=2012 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{x-2010} \\ v=\sqrt[3]{y-2013} \end{cases}$

Hệ phương trình trên tương đương

$$\begin{cases} u^3(2011+2012v)=1 \\ u(v^3-2011)=2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{u^3}-2012v=2011 & (1) \\ v^3-\dfrac{2012}{u}=2011 & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế của từng phương trình trong hệ, ta được:

$$\left(\frac{1}{u}-v\right)\left(\frac{1}{u^2}+\frac{v}{u}+v^2+2012\right)=0 \Leftrightarrow v=\frac{1}{u}$$

Thay $v=\dfrac{1}{u}$ vào phương trình (1) ta được:

$$v^3-2012v-2011=0 \Leftrightarrow (v+1)(v^2-v-2011)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=-1 \\ v=\dfrac{1\pm\sqrt{8045}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=\dfrac{2}{1\pm\sqrt{8045}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm:

$$(x;y)=(2009;2012),\left(2010+\left(\frac{2}{1\pm\sqrt{8045}}\right)^3;2013+\left(\frac{1\pm\sqrt{8045}}{2}\right)^3\right)$$

25 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=8 & (1) \\ \sqrt{x^2+9}+\sqrt{y^2+9}=10 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+9}-x+\sqrt{y^2+9}-y=2\\ \sqrt{x^2+9}+x+\sqrt{y^2+9}+y=18\end{cases}$$

Đặt:

$$u=\sqrt{x^2+9}-x \Leftrightarrow u=\frac{9}{\sqrt{x^2+9}+x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}+x=\frac{9}{u}$$
$$v=\sqrt{y^2+9}-y \Leftrightarrow v=\frac{9}{\sqrt{y^2+9}+y} \Leftrightarrow \sqrt{y^2+9}+y=\frac{9}{v}$$

Khi đó ta có hệ sau:

$$\begin{cases}u+v=2\\ \dfrac{9}{u}+\dfrac{9}{v}=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=2\\ uv=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2-v\\ v^2-2v+1=0\end{cases} \Leftrightarrow u=v=1$$

Với $u=v=1$ suy ra: $x=y=4$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;4)\square$

Cách 2

Trước hết ta có bất đẳng thức sau đây:

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$$

Chứng minh:

Xét vectơ:

$$\vec{u}=(x_1;y_1)\,,\vec{v}=(x_2;y_2)$$

Khi đó:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2;y_1+y_2)$$

Ta có:

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right| \geq \left|\vec{u}+\vec{v}\right| \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u};\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{u}=k\vec{v}\ (k>0) \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}>0 \Rightarrow$ Đpcm

áp dụng bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{y^2+3^2} \geq \sqrt{(x+y)^2+(3+3)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$$
$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{y}=1\\ x+y=8\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;4)\square$

Cách 3

Bình phương hai vế (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=64 \Leftrightarrow x^2+y^2=64-2xy$$

Tiếp tục bình phương hai vế của phương trình (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow x^2+y^2+2\sqrt{(x^2+9)(y^2+9)}+18=100$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2\sqrt{x^2y^2+9(x^2+y^2)+81}=82$$

Từ hai điều trên ta có:

$$2\sqrt{x^2y^2+9(64-2xy)+81}=18+2yx\ (\star)$$

Đặt: $t=xy$ ta được:

$$\sqrt{t^2-18t+657}=9+t \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq -9 \\ t^2-18t+657=81+18t+t^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t=16$$

$$\Leftrightarrow xy=16$$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ xy=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-y \\ y^2-8y+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;4)\square$

26 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2}+\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{x^2+y^2} \\ (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}+(y^2+z^2)\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{y^2+x^2}+3\sqrt{y^2+z^2} \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x^2+y^2} \\ v=\sqrt{y^2+z^2} \end{cases} \quad (u,v\geq 0)$

Do đó hệ đã cho đưa về dạng:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{v^2}{u^2}+\dfrac{v}{u}=\dfrac{1}{u^2} \\ u^3+v^3=u+3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+v^2=1 \\ (u+v)\left(u^2-uv+v^2-1\right)=2v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+v^2=1 \\ -2uv\left(u+v\right)=2v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+v^2=1 \\ v\left(u^2+uv+1\right)=0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ta thấy rằng:

$$u^2+uv+1=\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+1>0\ \forall u,\ v\geq 0$$

Do đó:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+uv+v^2=1 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\pm 1 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases} \quad (\text{vì } u,\ v\geq 0)$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=z=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y;z)=(1;0;0);\ (-1;0;0)\square$

Cách 2

Dễ thấy $x=y=z=0$ không là nghiệm của hệ phương trình

Chia hai vế phương trình cho $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$ và đặt:

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2} \\ v = \dfrac{1}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Ta có được hệ:

$$\begin{cases} 1+u^2+u=v \\ 1+u^3=v+3uv \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình trong hệ mới ta được:

$$u^2+u-u^3=-3uv \Leftrightarrow u\left(u^2-u-1-3v\right)=0 \ (\star)$$

Thế tiếp $v=1+u^2+u$ vào $(\star)$ và biến đổi ta được tiếp:

$$u\left(u^2+2u+2\right)=0 \Leftrightarrow u\left[(u+1)^2+1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow u=0 \Rightarrow v=1$$

Từ đó ta suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2+z^2}{x^2+y^2}=0 \\ \dfrac{1}{x^2+y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y;z)=(1;0;0);\ (-1;0;0)\square$

27 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^2\,y=9 & (1) \\ x^3-y^3=7 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Ta nhận thấy $y=0$ không phải là nghiệm của hệ

Chia hai vế (1) và (2) cho y^3 ta được:

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)+1\right]^2=\dfrac{9}{y^3} \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^3-1=\dfrac{7}{y^3} \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{y} \\ v=\dfrac{1}{y^3} \end{cases}$$

Khi đó ta được:

$$\begin{cases} (u+1)^2=9v \\ u^3-1=7v \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$7(u+1)^2=9\left(u^3-1\right) \Leftrightarrow 9u^3-7u^2-14u-16=0$$
$$\Leftrightarrow (u-2)\left(9u^2+11u+8\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2 \Rightarrow v=1 \\ 9u^2+11u+8=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Với:

$$\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=2 \\ \dfrac{1}{y^3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;1)\square$

Cách 2

Ta sẽ giải bằng phương pháp hàm số như sau

Từ phương trình (1) của hệ ta suy ra $y>0$ kết hợp điều này với phương trình (2) của hệ ta suy ra $x>0$

Rút x theo phương trình (1) ta được:

$$x=\frac{3}{\sqrt{y}}-y$$

Đặt $\sqrt{y}=t$; $t>0$ thế vào phương trình thứ hai của hệ và thực hiện rút gọn lại ta được phương trình:

$$\left(3-t^3\right)^3-t^9-7t^3=0$$

Xét hàm số:

$$f(t)=\left(3-t^3\right)^3-t^9-7t^3 \text{ với } t>0$$

Ta có:

$$f'(t)=-9t^2\left(3-t^3\right)^2-9t^8-21t^2<0\ ;\ \forall t>0$$

Như vậy hàm số $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$

Có $f(1)=0$ nên $t=1$ là nghiệm duy nhất

Từ $t=1$ suy ra $y=1$; $x=2$. Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ đã cho

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)\square$

28 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x\left(y^3-2\right)=3 \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x^3\left(y^3-2\right)^3=27 \end{cases}$$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ nên suy ra:

$$\left(y^3-2\right)^3=27(3y+2) \Leftrightarrow \left(\frac{y^3-2}{3}\right)^3=3y+2$$

Đặt: $t=\dfrac{y^3-2}{3}$ ta có hệ phương trình đối xứng loại 2:

$$\begin{cases} t^3=3y+2 \\ y^3=3t+2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} t^3-y^3=-3(t-y) &\Leftrightarrow (t-y)\left(t^2+yt+y^2\right)=-3(t-y) \\ &\Leftrightarrow (t-y)\left(t^2+yt+y^2+3\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ t^2+yt+y^2+3=0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Với $t = y$ suy ra:

$$y^3 - 2 = 3y \Leftrightarrow y^3 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = -1 \\ y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Với $t^2 + yt + y^2 + 3 = 0$ $(\star)$ ta dễ dàng có được phân tích như sau:

$$t^2 + yt + y^2 + 3 = \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0\ \forall t, y \in \mathbb{R} \Rightarrow (\star) \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; -1)$; $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ $\square$

Cách 2

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn hệ nên ta đưa hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2 + 3y = \dfrac{1}{x^3} \\ y^3 - 2 = \dfrac{3}{x} \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình trong hệ mới ta được:

$$y^3 + 3y = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x}\ (\star)$$

Bây giờ ta xét hàm số:

$$f(t) = t^3 + 3t\ (t \in \mathbb{R})$$

Ta có:

$$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Vì vậy:

$$(\star) \Leftrightarrow f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1$$

Thay lại vào phương trình đầu tiên của hệ ban đầu ta được:

$$2x^3 + 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \text{ (thỏa } x \neq 0) \Rightarrow y = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \text{ (thỏa } x \neq 0) \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; -1)$; $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ $\square$

29 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} 2\sqrt{xy - y} + x + y = 5 & (1) \\ \sqrt{5 - x} + \sqrt{1 - y} = m & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ (1) suy ra:

$$\begin{aligned} [5 - (x+y)]^2 = \left(2\sqrt{xy - y}\right)^2 &\Leftrightarrow (x+y)^2 - 10(x+y) + 25 = 4xy - 4y \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2(y+5)x + y^2 - 6y + 25 = 0(\star) \end{aligned}$$

Ta xem $(\star)$ là phương trình bậc hai ẩn x. Hệ đã cho có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = (y+5)^2 - y^2 + 6y - 25 = 16y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

Điều kiện của bài toán sẽ là:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{y} = 2$$

Đặt: $a = \sqrt{x-1}$; $b = \sqrt{y}$ với $0 \le a \le 2$; $0 \le b \le 1$ ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ \sqrt{4-a^2}+\sqrt{1-b^2} = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(a) = \sqrt{4-a^2}+\sqrt{-a^2+4a-3} = m \ (\star\star) \text{ với } 1 \le a \le 2$$

Lập bảng biến thiên hàm số $f(a)$ trên đoạn $[1;2]$ ta thấy rằng $(\star\star)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 \le m \le \sqrt{3}$

Vậy điều kiền của m để hệ có nghiệm là: $1 \le m \le \sqrt{3}$ □

30 Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1} = 3 \\ x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1} = m \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ y \ge -1 \end{cases}$

Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{y+1}\,(x+1)+\sqrt{x+1}\,(y+1) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1} = 3 \\ \sqrt{x+1}\sqrt{y+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\right) = m \end{cases}$$

Đặt:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{y+1} \end{cases} \quad \text{với } 0 \le u,\ v \le 3$$

Ta có được hệ mới:

$$\begin{cases} u+v=3 \\ uv\,(u+v) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ uv = \dfrac{m}{3} \end{cases}$$

Suy ra $u; v$ là nghiệm phương trình:

$$t^2 - 3t + \frac{m}{3} = 0 \Leftrightarrow m = -3t^2 + 9t \ (\star)$$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $(\star)$ có nghiệm trên $[0;3]$

Xét hàm số:

$$f(t) = -3t^2 + 9t \ ; \ t \in [0;3]$$

- Ta có:

$$f'(t) = -6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

- Lập bảng biến thiên ta suy ra $(\star)$ có nghiệm trên $[0;3] \Leftrightarrow 0 \le m \le \dfrac{27}{4}$

Vậy giá trị m cần tìm là: $0 \le m \le \dfrac{27}{4}$□

31 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2 \\ x^2y + 2x^2 + 6y = 23 \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Biến đổi hệ phương trình đưa về dạng:

$$\begin{cases}(x^2+2)^2+(y-2)^2=10\\(x^2+2)(y-2)+4(x^2+2)+4(y-2)=19\end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases}u=x^2+2\\v=y-2\end{cases}\quad (u\geq 2)$

Ta có được:

$$\begin{cases}u^2+v^2=10\\uv+4(u+v)=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^2-2uv=10 & (1)\\uv+4(u+v)=19 & (2)\end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$(u+v)^2-2[19-4(u+v)]=10$$
$$\Leftrightarrow (u+v)^2+8(u+v)-48=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}u+v=4 & \Rightarrow uv=3\\u+v=-12 & \Rightarrow uv=67\end{array}\right.$$

Xét tới điều kiện: $(u+v)^2\geq 4uv$ ta được:

$$\begin{cases}u+v=4\\uv=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=4-u\\u^2-4u+3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=4-u\\u=-1\text{ (loại) hoặc }u=3\text{ (thỏa)}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=3\\v=1\end{cases}$$

Với $u=3;\ v=1$ ta được:

$$\begin{cases}x^2+2=3\\y-2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\y=3\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;3)\ ;\ (-1;3)\square$

32 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^4-4x^2+y^2-6y+9=0\\x^2y+x^2+2y-22=0\end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $u=x^2-2; v=y-3$ hệ phương trình (I) tương đương:

$$\begin{cases}u^2+v^2=4\\uv+4(u+v)=8\end{cases}$$

Hệ phương trình đối xứng trên có

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}u+v=2\\uv=0\end{cases} & (II)\\ \begin{cases}u+v=-10\\uv=48\end{cases} & \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

Hệ (II)$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2+y-3=2 \\ (x^2-2)(y-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm 2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(\pm 2;3),(\pm\sqrt{2};5)\square$

33 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8 \\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+y\geq 0 \\ x-y\geq 0 \end{cases}$

Viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8 \\ \sqrt[4]{(x+y)^2(x-y)}=12 \end{cases} (I)$$

Đặt $u=\sqrt{x+y}, v=\sqrt[4]{x-y}$, $(u,v\geq 0)$. Hệ phương trình (I) tương đương:

$$\begin{cases} u+v=8 \\ u.v=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases} \\ \begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=4 \\ x-y=6^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=650 \\ y=646 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=36 \\ x-y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26 \\ y=10 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(650;646),(26;10).\square$

34 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)^2+y=3 \\ x^2+2xy-5y^2-5x+13y=6 \end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2+y=3 \\ x^2+2xy-5y^2-5x+13y=6 \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $x=a+1; y=b+2$ hệ phương trình (I) tương đương:

$$\begin{cases} a^2-2ab+b^2-2a+3b=0 & (1) \\ a^2+2ab-5b^2+a-5b=0 & (2) \end{cases}$$

Nhân -3 cho (1) rồi cộng (2) ta được:

$$-2a^2+8ab-8b^2+7(a-2b)=0$$
$$\Leftrightarrow -2(a^2-4ab+4b^2)+7(a-2b)=0$$
$$\Leftrightarrow (a-2b)(-2a+4b+7)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ -2a+4b+7=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1+2(-2-\sqrt{15})}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}(-2-\sqrt{15})) \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1+2(-2+\sqrt{15})}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}(-2+\sqrt{15})) \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm:

$(x;y)=(1;2),(3;3);\left(\dfrac{1+2(-2-\sqrt{15})}{2};\dfrac{1}{2}(-2-\sqrt{15})\right),\left(\dfrac{1+2(-2+\sqrt{15})}{2};\dfrac{1}{2}(-2+\sqrt{15})\right)$ □

35 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $(x,y)=(0,0)$ là 1 nghiệm của hệ:

Xét $(x,y)\neq(0,0)$

Đặt: $y=tx$. Hệ phương trình tương đương :
$$\begin{cases} x^2-2tx^2+x+tx=0 \\ x^4-4tx^3+3x^2+t^2x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+t-2tx+1=0 \\ x^2+t^2-4tx+3=0 \end{cases}$$

Đặt $x+t=S, xt=P$
$$\begin{cases} S-2P+1=0 \\ S^2-6P+3=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=0 \\ P=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+t=0 \\ x.t=\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} x+t=3 \\ x.t=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(0;0),(1;2),(2;2)$ □

36 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3y(1+y)+x^2y^2(2+y)+xy^3-30=0 \\ x^2y+x(1+y+y^2)+y-11=0 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $a=x+y; b=xy \quad (a^2\geq 4b)$

$$\begin{cases} ab(a+b)=30\\ ab+a+b=11\end{cases}$$

Đặt $ab=t; a+b=k \quad (k^2\geq 4t)$

$$\begin{cases} tk=30\\ t+k=11\end{cases} \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} k=5\\ t=6\\ k=6\\ t=-5\end{array}\right.\right. \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} a=3\\ b=2\\ x=5\\ y=1\end{array}\right.\right. \Rightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x=(1;2)\\ y=(2;1)\\ x=\left(\dfrac{5+\sqrt{21}}{2};\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\\ y=\left(\dfrac{5-\sqrt{21}}{2};\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\end{array}\right.\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x;y)=(1;2);(2;1);\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\square$$

37 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y+2\sqrt{4x+y}=1 & (1)\\ 2(x+3)=\sqrt{46-2y(3+8x+8y)} & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Phương trình (2) tương đương với:

$$\sqrt{46-16y(x+y)-6y}=6+2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3\\ 4x^2+16y(x+y)+16y^2+24x+6y-10=0 \quad (3)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3\\ 4(x+2y)+6(4x+y)=10\end{cases}$$

Đặt: $x+2y=u; \sqrt{4x+y}=v\geq 0$ cho ta hệ:

$$\begin{cases} 4u^2+6v^2=10\\ u+2v=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=1\\ u=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{7}\\ y=-\dfrac{5}{7}\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3}{7};-\dfrac{5}{7}\right)\square$

38 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 & (1)\\ y+xy^2=-6x^2 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Nhận xét $(x,y)=0$ không là nghiệm của hệ.

Xét $x,y\neq 0$

Chia hai vế của phương trình (1) cho y^3 và phương trình (2) cho y^2, ta được

$$\begin{cases} x^3+\dfrac{1}{y^3}=19\dfrac{x^3}{y^3} \\ x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{-6x^2}{y^2} \end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{1}{y}; y\neq 0$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+u^3=19x^3u^3 & (3) \\ x+u=-6x^2u^2 & (4) \end{cases}$$

Thế (3) vô (4) ta được phương trình

$$x^3+u^3=-\frac{19}{6}xu(x+u)\Rightarrow x^2+u^2+\frac{19}{6}xu=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{2}{3x} \\ y=-\dfrac{3}{2x} \end{array}\right.$$

- Với $y=-\dfrac{2}{3x}$ thế vô phương trình (2) được $x=\dfrac{1}{3}; y=-2$
- Với $y=-\dfrac{3}{2x}$ thế vô phương trình (2) được $x=-\dfrac{1}{2}; y=3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};-2\right);\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$ □

39 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{7x+y}>0 \\ v=\sqrt{2x+y}>0 \end{cases}$. Suy ra $x-y=\dfrac{3v^2-8u^2}{5}$

Thế trở lại vào hệ ban đầu ta được: $\begin{cases} u+v=5 \\ v+\dfrac{3v^2-8u^2}{5}=2\ (*) \end{cases}$

Với $u=5-v$ thế vào (*) ta được:

$$(*)\Leftrightarrow v^2-17v+42=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=3\Rightarrow u=2 \\ v=14\Rightarrow u=-9\ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Với $v=3, u=1$ ta dễ dàng tìm được $x=-1, y=11$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;11)$ □

40 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3-1)=-125 & (1) \\ 45x^2y+75x=6y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Dễ thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $y\neq 0$: chia cả hai vế của (1) cho y^3 , chia hai vế của (2) cho y^2 rồi đặt $a=3x, b=\dfrac{5}{y}$

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a^3+b^3=9 \\ ab(a+b)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right),\left(\dfrac{2}{3};5\right)$ □

41 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3.(2+3y)=8 \\ x(y^3-2)=6 \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Đặt $x=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=\dfrac{1}{x}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2+3y=8z^3 \\ y^3-2=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3y=8z^3 \quad (*) \\ 6z+2=y^3 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình trên và dễ dàng đưa về:

$$(2z-y)(4z^2+2zy+y^2+3)=0$$

Do $4z^2+2zy+y^2+3>0$ nên $2z-y=0$

Với $y=2z$ thế vào (*) ta được:

$$(*) \Leftrightarrow 4z^3-3z-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ z=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x;y)=(1;2),(-2;-1)$.□

42 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ \log_2(x+y)-\log_3(x-y)=1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x>|y|$

Ta có:

$$x^2-y^2=2$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=1$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x+y)+\log_2 3.\log_3(x-y)=1$$

Đặt: $\begin{cases} u = \log_2(x+y) \\ v = \log_3(x-y) \end{cases}$ Ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u + \log_2 3.v = 1 \end{cases} \Rightarrow (\log_2 3 + 1)v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow x = y + 1$$

Thế lại vào phương trình đầu của hệ ta được:

$$(y+1)^2 - y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ □

43 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y \neq 0$.

Đặt: $x + \dfrac{1}{x} = a; y + \dfrac{1}{y} = b$ khi đó hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ (5-b)^2 + b^2 - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ b = 3 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

+ Trường hợp 1:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 3 \\ y + \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \\ y = 1 \end{cases}$$

+ Trường hợp còn lại ta làm tương tự.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(x;y) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};1\right), \left(1;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(1;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \square$$

44 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 2 = \sqrt{y-1} + \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} \\ 2y - 2 = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y > 1$

Viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x-1) = \sqrt{y-1} + \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} \\ 2(y-1) = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x-1}; v = \sqrt{y-1}$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 2u^2 = v + \dfrac{1}{v} \\ 2v^2 = u + \dfrac{1}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2v = v^2 + 1 \quad (1) \\ 2v^2u = u^2 + 1 \quad (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (1) cho v và phương trình (2) cho u rồi trừ vế với vế ta được:

$$u^3 - v^3 + u - v = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

Từ $u = v$ dễ dàng suy ra $x = y$ và ta có:

$$2(x-1) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{x-1} = x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 13x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(4x^2 - 5x + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \ (4x^2 - 5x + 2 > 0)$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 2$ $\square$

45 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3\left(y^2 + 3y + 3\right) = 3y^2 \\ y^3\left(z^2 + 3z + 3\right) = 3z^2 \\ z^3\left(x^2 + 3x + 3\right) = 3x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

TH1: $xyz = 0$

$$x = 0, (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 = 0 \\ 3z^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $x = y = z = 0$

$y = 0, z = 0$ Cmtt hệ có nghiệm $x = y = z = 0$

TH2: $xyz \neq 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{y^2} + \dfrac{3}{y} + 1 \\ \dfrac{3}{y^3} = \dfrac{3}{z^2} + \dfrac{3}{z} + 1 \\ \dfrac{3}{z^3} = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{3}{x} + 1 \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^3 = 3b^2 + 3b + 1(1) \\ 3b^3 = 3c^2 + 3c + 1(2) \\ 3c^3 = 3a^2 + 3a + 1(3) \end{cases}$$

Từ $(1), (2), (3) \Rightarrow a, b, c > 0$

Nếu $a > b$:

$(1) - (2) \Rightarrow 0 < 3\left(a^3 - b^3\right) = 3(b-c)(b+c+1) \Rightarrow b > c$

$(2) - (3) \Rightarrow 0 < 3(b^3 - c^3) = 3(c-a)(c+a+1) \Rightarrow c > a \Rightarrow a > b > c > a$ (vô lý)

Suy ra hệ vô nghiệm

Nếu $a < b$:

Cmtt như trường hợp: $a > b$ta suy ra hệ vô nghiệm.Ta suy ra $a = b(4)$

Nếu $b > c$:

$(2) - (3) \Rightarrow 0 < 3(b^3 - c^3) = 3(c - a)(c + a + 1) \Rightarrow c > a$

$(3) - (1) \Rightarrow 0 < 3(c^3 - a^3) = 3(a - b)(a + b + 1) \Rightarrow a > b \Rightarrow b > c > a > b$ (vô lý)

Suy ra hệ vô nghiệm

Nếu $b < c$:

Cmtt như trường hợp: $b > c$ ta suy ra hệ vô nghiệm Ta suy ra $b = c$ (5)

Từ (4) và (5) ta suy ra $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z$

Thế vào hệ (I) ta được: $x^3(x^2 + 3x + 3) = 3x^2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x = 3$ (do $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow (x + 1)^3 = 4 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt[3]{4}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x; y; z) = \left(-1 + \sqrt[3]{4}; -1 + \sqrt[3]{4}; -1 + \sqrt[3]{4}\right)\square$

$\boxed{\textbf{46}}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0 \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z - 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0 \\ 4 \le x \le 7 \end{cases}$$

Lời giải:

Gọi (x_0, y_0, z_0) là nghiệm tùy ý của hệ thì ta có: $4 \le x_0 \le 7$

Đặt: $\begin{cases} u = y_0 + z_0 \\ v = y_0 z_0 \end{cases}$

Do (x_0, y_0, z_0) là nghiệm, nên ta có hệ thức sau:

$$\begin{cases} x_0^3 + x_0^2(13 - u) + x_0(2u - 2v - 26) + 5v - 7u + 30 = 0 \\ x_0^3 + x_0^2(17 - u) - x_0(2u + 2v - 26) + u - 3v - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\left(2x_0 - x_0^2 - 7\right) + v(5 - 2x_0) + x_0^3 + 13x_0^2 - 26x_0 + 30 = 0\,(1) \\ u\left(1 - 2x_0 - x_0^2\right) + v(-2x_0 - 3) + x_0^3 + 17x_0^2 + 26x_0 - 2 = 0\,(2) \end{cases}$$

Lấy $(1) - (2)$ vế theo vế ta có:

$$u(4x_0 - 8) + 8v - 4x_0^2 - 52x_0 + 32 = 0$$
$$\Leftrightarrow v = \frac{1}{2}\left[u(2 - x_0) + x_0^2 + 13x_0 - 8\right](3)$$

Thay (3) vào (1) ta có:

$$2u_0\left(2x_0 - x_0^2 - 7\right) + (5 - 2x_0)\left[u(2 - x_0) + x_0^2 + 13x_0 - 8\right] + 2\left(x_0^3 + 17x_0^2 + 26x_0 - 2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow -u_0(5x_0 + 4) + 5x_0^2 + 29x_0 + 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow -u_0(5x_0 + 4) = -(5x_0 + 4)(x_0 + 5)\,(4)$$

Do: $4 \le x_0 \le 7 \Rightarrow 5x_0 + 4 \neq 0$

Vậy từ (4) ta có: $u_0 = x_0 + 5$

Thay vào (3) ta lại có: $v_0 = 5x_0 + 1$

Như thế ta đi đến:

$$\begin{cases} y_0 + z_0 = x_0 + 5\,(5) \\ y_0 z_0 = 5x_0 + 1\,(6) \end{cases}$$

Theo định lý Viet, từ $(5),(6)$ ta suy ra y_0 và z_0 là các nghiệm của phương trình:

$$t^2 - (x_0 + 5)\,t + 5x_0 + 1 = 0\,(7)$$

$$\Delta = x_0^2 - 10x_0 + 21 = (x_0 - 3)(x_0 - 7)$$

Từ $4 \le x_0 \le 7$ ta suy ra:

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \le 3 \vee x_0 \ge 7 \\ 4 \le x_0 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 7$$

Vậy với $x_0 = 7$ thì (7) có nghiệm $t_1 = t_2 = 6 \Leftrightarrow y_0 = z_0 = 6$

Như thế hệ đã cho có nghiệm (x_0, y_0, z_0) thì chỉ có thể là: $x_0 = 7$

Thử lại ta thấy $(7, 6, 6)$ thỏa mãn hệ phương trình

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x; y; z) = (7; 6; 6)\square$

47 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} a = x + 2 \\ b = y + 3 \end{cases}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 + bz - 4b = 0\,(1) \\ a^2 + a - 7b + 3bz = 0\,(2) \\ 8a^2 - 2a + 18\left(b^2 + ab + bz - 4b\right) - 30z + 94 = 0\,(3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow b^2 + ab + bz - 4b = -a^2$$

Thay vào (3) ta có: $8a^2 - 2a - 18a^2 - 30z + 94 = 0$

$$\Leftrightarrow 10a^2 + 2a + 30z - 94 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{5a^2 + a - 47}{15}$$

Thay vào (2) ta có: $a^2 + a - 7b - b\left(\frac{5a^2+a-47}{5}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5a^2 + a - 12}{15}\right) b = a^2 + a$$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{5\left(a^2 + a\right)}{5a^2 + a - 12}$ (Vì $a = \frac{-1 \pm \sqrt{241}}{10}$ không là nghiệm của phương trình)

Nhân 2 vế của phương trình (1) với 3 rồi trừ cho phương trình (2) vế theo vế, ta được:

$$2a^2 - a + 3ab + 3b^2 - 5b = 0\,(4)$$

Thay $b = \dfrac{5\left(a^2+a\right)}{5a^2+a-12}$ vào (4) ta được:

$$2a^2 - a + \frac{15a\left(a^2+a\right)}{5a^2+a-12} + 3\left[\frac{5\left(a^2+a\right)}{5a^2+a-12}\right]^2 - \frac{25\left(a^2+a\right)}{5a^2+a-12} = 0$$

$\Leftrightarrow \left(2a^2-a\right)\left(5a^2+a-12\right)^2 + \left[15a\left(a^2+a\right) - 25\left(a^2+a\right)\right]\left(5a^2+a-12\right) + 75\left(a^2+a\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 50a^6 + 70a^5 - 208a^4 - 94a^3 + 182a^2 + 156a = 0$

$\Leftrightarrow a\left(a+2\right)\left(5a^2-14a+3\right)\left(5a^2+11a+3\right) = 0$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -2 \vee a = \dfrac{-11 \pm \sqrt{61}}{10}$

Tương ứng với các giá trị trên ta tìm được 4 nghiệm của hệ đã cho là:
$(x;y;z) = \left(-2;-3;\frac{47}{15}\right), \left(-4;-\frac{4}{3};\frac{29}{15}\right), \left(-\frac{31+\sqrt{61}}{10};\frac{2\sqrt{61}-28}{15};\frac{13-\sqrt{61}}{15}\right), \left(\frac{\sqrt{61}-31}{10};-\frac{2\sqrt{61}+28}{15};\frac{39+\sqrt{61}}{15}\right)$ □

48 Cho các tham số dương a, b, c. Tìm nghiệm dương của hệ phương trình sau::

$$\begin{cases} x+y+z = a+b+c & (1) \\ 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z = abc & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{xz} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz} = 4\,(3)$$

Đặt: $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}; y_1 = \frac{b}{\sqrt{xz}}; z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$

$$(3) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1.y_1.z_1 = 4\,(4)$$

Dễ thấy: $0 < x_1, y_1, z_1 < 2$ nên tồn tại các giá trị u, v thỏa: $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$ và $x_1 = 2\sin u; y_1 = 2\sin v$

$$(4) \Leftrightarrow z_1^2 + 4z_1.\sin u.\sin v + 4\sin^2 u + 4\sin^2 v - 4 = 0$$

$$\Delta' = \left(2\sin u.\sin v\right)^2 - \left(4\sin^2 u + 4\sin^2 v - 4\right) = 4\left(1-\sin^2 u\right)\left(1-\sin^2 v\right) = 4\cos^2 u.\cos^2 v > 0$$

$$(4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -2\sin u.\sin v - 2\cos u.\cos v < 0 \\ z_1 = -2\sin u.\sin v + 2\cos u.\cos v > 0 \end{array}\right.$$

Do đó: $a = 2\sqrt{yz}.\sin u; b = 2\sqrt{zx}.\sin v; c = 2\sqrt{xy}\left(\cos u.\cos v - \sin u.\sin v\right)$
Thay vào (1) ta có:

$$x+y+z = 2\sqrt{yz}.\sin u + 2\sqrt{zx}.\sin v + 2\sqrt{xy}\left(\cos u.\cos v - \sin u.\sin v\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{2}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{2} = 0$$

Ta tính được: $\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \dfrac{b\sqrt{x}}{2\sqrt{zx}} + \dfrac{a\sqrt{y}}{2\sqrt{yz}} = \dfrac{a+b}{2\sqrt{z}} \Rightarrow z = \dfrac{a+b}{2}$

Tương tự, ta cũng có: $y = \dfrac{c+a}{2}; x = \dfrac{b+c}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y;z) = \left(\dfrac{b+c}{2};\dfrac{c+a}{2};\dfrac{a+b}{2}\right)$ □

49 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Trước hết $(x;y;z) = (0;0;k),(0;k;0).(k;0;0)$ là các nghiệm của phương trình.
Với $(x;y;z) \neq (0;0;0)$, hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+3 \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2 = \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}+4 \\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z}+5 \end{cases}$$

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$ Khi đó, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} (c+b)^2 = a^2+a+3 \\ (a+c)^2 = b^2+b+4 \\ (b+a)^2 = c^2+c+5 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hệ trên ta được:

$$(a+b+c)^2 - (a+b+c) - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c = 4 \\ a+b+c = -3 \end{array}\right.$$

Với $a+b+c = 4$, ta được:

$$\begin{cases} (4-a)^2 = a^2+a+3 \\ (4-b)^2 = b^2+b+4 \\ (4-c)^2 = c^2+c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{9} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = \dfrac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{13} \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{9}{11} \end{cases}$$

Với $a+b+c = -3$, ta được:

$$\begin{cases} (-3-a)^2 = a^2+a+3 \\ (-3-b)^2 = b^2+b+4 \\ (-3-c)^2 = c^2+c+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{6}{5} \\ b = -1 \\ c = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{6} \\ y = -1 \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là
$(x;y;z) = (0;0;k),(0;k;0),(k;0;0), \left(\dfrac{9}{13};\dfrac{3}{4};\dfrac{9}{11}\right), \left(-\dfrac{5}{6};-1;-\dfrac{5}{4}\right)$ □

50 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ z^2+2z(x+y) = 8 \\ z(y-x) = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $x+y=a, y-x=b$.

Khi đó, hệ tương đương:

$$\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ z^2+2za=8 \\ zb=4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4 & (1) \\ a=\dfrac{8-z^2}{2z} & (2) \\ b=\dfrac{4\sqrt{3}}{z} & (3) \end{cases}$$

Thế (2) và (3) vào phương trình (1), ta được:

$$\frac{\left(8-z^2\right)^2}{4z^2}+\frac{48}{z^2}=4$$
$$\Leftrightarrow \left(z^2-16\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-4 \\ z=4 \end{array}\right.$$

• Với $z=4$, ta được $a=-1, b=\sqrt{3}$. Khi đó ta co hệ:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ -x+y=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};4\right)$ là nghiệm của hệ.

• Với $z=-4$, ta được $a=1, b=-\sqrt{3}$. Khi đó ta co hệ:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x+y=-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};-4\right)$ là nghiệm của hệ.

Vậy hệ có 2 nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};4\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2};-4\right)$ □

51 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}=3 \\ x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{118}{9} \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{y\sqrt{y}}-\dfrac{1}{z\sqrt{z}}=\dfrac{728}{27} \end{cases}$$

Lời giải:

Với điều kiện xác định của hệ ta đặt:

- $a=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=a^2+2$; $x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=a^3+3a$
- $b=\sqrt{y}-\dfrac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow y+\dfrac{1}{y}=b^2+2$; $y\sqrt{y}+\dfrac{1}{y\sqrt{y}}=b^3+3b$
- $c=\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{z}} \Rightarrow z+\dfrac{1}{z}=c^2+2$; $z\sqrt{z}+\dfrac{1}{z\sqrt{z}}=c^3+3c$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c=\dfrac{8}{3} \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{64}{9} \\ a^3+b^3+c^3=\dfrac{512}{27} \end{cases}$$

áp dụng hằng đẳng thức:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)$$

Thay giá trị vào ta suy ra:

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$$

Thay lần lượt vào lại hệ ta được hệ sẽ có các cặp nghiệm:

$$(a;b;c)=\left(0;0;\frac{8}{3}\right)\ ;\ \left(\frac{8}{3};0;0\right)\ ;\ \left(0;\frac{8}{3};0\right)$$

Từ đó suy ra:

$$(x;y;z)=(1;1;9)\ ;\ (9;1;1)\ ;\ (1;9;1)$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ phương trình ban đầu

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(x;y;z)=(1;1;9),\ ;(9;1;1),\ ;(1;9;1)\square$

52 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2\left(y+z\right)^2=\left(3x^2+x+1\right)y^2z^2 \\ y^2\left(x+z\right)^2=\left(4y^2+y+1\right)x^2z^2 \\ z^2\left(x+y\right)^2=\left(5z^2+z+1\right)x^2y^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình luôn có các nghiệm $(x;y;z)$ có dạng $(m;0;0)\ ;\ (0;n;0)\ ;\ (0;0;p)$ với $m,\ n,\ p$ là các số thực tùy ý

Trường hợp $xyz\neq 0$, chia hai vế các phương trình cho $x^2y^2z^2$ ta được hệ:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)^2=4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2=5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt: $a=\dfrac{1}{x}\ ;\ b=\dfrac{1}{y}\ ;\ c=\dfrac{1}{z}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} a^2+a+3=\left(b+c\right)^2 \\ b^2+b+4=\left(c+a\right)^2 \\ c^2+c+5=\left(a+b\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a+b+c+\dfrac{1}{2}\right)\left(b+c-a-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{4} \\ \left(a+b+c+\dfrac{1}{2}\right)\left(c+a-b-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{4} \\ \left(a+b+c+\dfrac{1}{2}\right)\left(a+b-c-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{19}{4} \end{cases}$$

Đặt: $k=a+b+c+\dfrac{1}{2}\ ;\ A=b+c-a-\dfrac{1}{2}\ ;\ B=c+a-b-\dfrac{1}{2}\ ;\ C=a+b-c-\dfrac{1}{2}$

Ta có:

$$\frac{1}{4k}=\frac{A}{11}=\frac{B}{15}=\frac{C}{19}=\frac{A+B+C}{45}=\frac{k-2}{45}$$
$$\Leftrightarrow 4k^2-8k-45=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=\dfrac{9}{2} \\ k=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

- Với $k=\dfrac{9}{2}$ ta có:

$$\begin{cases} A=\dfrac{10}{9} \\ B=\dfrac{5}{6} \\ C=\dfrac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{13}{9} \\ b=\dfrac{4}{3} \\ c=\dfrac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{13} \\ y=\dfrac{3}{4} \\ z=\dfrac{9}{11} \end{cases}$$

- Với $k=-\dfrac{5}{2}$ ta có:

$$\begin{cases} A=-\dfrac{11}{10} \\ B=-\dfrac{5}{2} \\ C=-\dfrac{19}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{6}{5} \\ b=-1 \\ c=-\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{6} \\ y=-1 \\ z=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm:

$(x;y;z)=(m;0;0)$; $(0;n;0)$; $(0;0;p)$; $\left(\dfrac{9}{13};\dfrac{3}{4};\dfrac{9}{11}\right)$; $\left(-\dfrac{5}{6};-1;-\dfrac{5}{4}\right)$, $(m,n,p\in\mathbb{R})\square$

53 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}=y^3-6 \\ \sqrt{y+2}=z^3-25 \\ \sqrt{z+1}=x^3+1 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $a=\sqrt{x+3}, b=\sqrt{y+2}, c=\sqrt{z+1}\,(a,b,c\geq 0)$.

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} a=\left(b^2-2\right)^3-6 \\ b=\left(c^2-1\right)^3-25 \\ c=\left(a^2-3\right)^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\left(b^2-2\right)^3-b-6=f(b) \\ b-c=\left(c^2-1\right)^3-c-25=g(c) \\ c-a=\left(a^2-3\right)^3-a+1=h(a) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(b^2-2\right)^3\geq 6>1^3 \\ \left(c^2-1\right)^3\geq 25>2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>\sqrt{3} \\ c>\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra:

$$\left(a^2-3\right)^3+1>\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a>\sqrt{3} \\ a^2-3>\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\ (*) \end{cases}$$

Ta có:
$$\begin{cases} f'(b) = 3\left(b^2-2\right)^2.2b - 1 > 3.1.2\sqrt{3} - 1 > 0 \quad \forall b > \sqrt{3} \\ g'(c) = 3\left(c^2-1\right)^2.2c - 1 > 3.2^2.2\sqrt{3} - 1 > 0 \quad \forall c > \sqrt{3} \\ h'(a) = 3\left(a^2-3\right)^2.2a - 1 > 3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.2\sqrt{3} - 1 > 3.\dfrac{1}{2}.2\sqrt{3} - 1 > 0 \quad \forall a(*) \end{cases}$$

Suy ra: $f(b), g(c), h(a)$ là hàm đồng biến và $f(2) = g(2) = h(2) = 0$

Trường hợp 1: $a > 2 \Rightarrow h(a) > h(2) = 0 \Rightarrow c > a > 2 \Rightarrow g(c) > g(2) = 0 \Rightarrow b > c > 2 \Rightarrow f(b) > f(2) = 0 \Rightarrow a > b > 2 \Rightarrow a > b > c > a$. Suy ra trường hợp $a > 2$ vô lý.

Trường hợp 2: $a < 2$, lý luận tương tự ta suy ra điều vô lý.

Vậy ta có:
$$a = 2 \Rightarrow c = a + h(a) = 2 \Rightarrow b = c + g(c) = 2$$
$$a = b = c = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{y+2} = 2 \\ \sqrt{z+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Thử lại : $x = 1, y = 2, z = 3$ là nghiệm của hệ

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x; y; z) = (1; 2; 3)\square$

3 Sử dụng phương pháp hàm số

$\boxed{1}$ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2-2\right) = 6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right) & (1) \\ x^3 - 2x + 1 = y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận xét: $x + \sqrt{x^2+9} > \sqrt{x^2} + x \geq |x| + x \geq 0; y + \sqrt{y^2+9} > \sqrt{y^2} + y \geq |y| + y \geq 0$

Suy ra: $\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}} > 0$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 2x + 6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) = y^3 - 2y + 6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right)\ (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 2t + 6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right), t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = 3t^2 - 2 + \frac{6}{\sqrt{t^2+9}} = 3\left(t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \frac{2}{3}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{t^2+9}{27} + \frac{1}{\sqrt{t^2+9}} + \frac{1}{\sqrt{t^2+9}} + \frac{26}{27}\left(t^2+9\right) \geq 1 + \frac{26}{27}\left(t^2+9\right) \geq 1 + \frac{26}{27}.9 = \frac{29}{3}$$
$$\Leftrightarrow t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \frac{2}{3} \geq 0$$

Suy ra: $f'(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó: $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0\,(4)$$

Xét hàm số: $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ liên tục trên các đoạn $[-2;0], [0;1], [1;2]$

$f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow (4)$ có nghiệm $x_1 \in (-2;0)$

$f(0).f(1) < 0 \Rightarrow (4)$ có nghiệm $x_2 \in (0;1)$

$f(1).f(2) < 0 \Rightarrow (4)$ có nghiệm $x_3 \in (1;2)$

Vậy (4) có ít nhất 3 nghiệm trên $(-2;2)$

Phương trình (4) là phương trình bậc 3 có không quá 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$, nên phương trình (4) có đúng 3 nghiệm $x_1, x_2, x_3 \in (-2;2)$

Đặt: $x = 2\cos\varphi, \varphi \in (0;\pi) \Rightarrow \sin\varphi \neq 0$

$$\begin{aligned}
&(4) \Leftrightarrow 8\cos^3\varphi - 4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow 8\sin\varphi.\cos^3\varphi - 4\sin\varphi.\cos^2\varphi - 4\sin\varphi.\cos\varphi + \sin\varphi = 0\\
&\Leftrightarrow \sin 4\varphi = \sin\varphi\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = k2\pi \\ \varphi = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Với: $\varphi \in (0;\pi) \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{7}; \varphi = \dfrac{3\pi}{7}; \varphi = \dfrac{5\pi}{7}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $(x;y;z) = (2\cos\varphi; 2\cos\varphi; 2\cos\varphi), \varphi = \dfrac{\pi}{7}; \varphi = \dfrac{3\pi}{7}; \varphi = \dfrac{5\pi}{7}$ □

2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4).(2y^2 - 3y + 4) = 18\,(1) \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0\,(2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta xem (2) là phương trình bậc hai theo x: $x^2 + x(y-7) + y^2 - 6y + 14 = 0$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (y-7)^2 - 4(y^2 - 6y + 14) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

Tương tự, ta xem (2) là phương trình bậc hai theo y: $y^2 + y(x-6) + x^2 - 7x + 14 = 0$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (x-6)^2 - 4(x^2 - 7x + 14) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

Xét hàm số: $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 4t - 3$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} < 1$$

Suy ra, trên $[1, +\infty)$ hàm số này đồng biến.

Ta được: $f(x) \geq f(2) = 6; f(y) \geq f(1) = 3 \Rightarrow f(x).f(y) \geq 18$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2, y = 1$ Thay vào (2), ta thấy không thỏa

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm□

$\boxed{3}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2y^3+2x\sqrt{1-x}=3\sqrt{1-x}-y & (1) \\ y=2x^2-1+2xy\sqrt{1+x} & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt: $a=\sqrt{1-x} \Rightarrow x=1-a^2$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2y^3+2\left(1-a^2\right)a=3a-y \\ &\Leftrightarrow 2y^3+y=2a^3+a \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t)=2t^3+t, t\in\mathbb{R}$; $f'(t)=6t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Nên:

$$(3) \Leftrightarrow f(y)=f(a) \Leftrightarrow y=a \Leftrightarrow y=\sqrt{1-x}$$

Thay vào (2), ta được:

$$\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2} \quad (4)$$

Đặt: $x=\cos t, t\in[0;\pi]$

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos t}=2\cos^2 t-1+2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cos 2t+\sin 2t \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\frac{t}{2}=\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{t}{2} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t+\frac{\pi}{4}=\frac{t}{2}+k2\pi \\ 2t+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{t}{2}+k2\pi \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{\pi}{6}+k\frac{4\pi}{3} \\ t=\frac{3\pi}{10}+k\frac{4\pi}{5} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vì $t\in[0;\pi] \Rightarrow t=\dfrac{3\pi}{10}$ Khi đó:

$$x=\cos\frac{3\pi}{10}; y=\sqrt{1-\cos\frac{3\pi}{10}}=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{20}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=\left(\cos\dfrac{3\pi}{10};\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{20}\right)$ □

$\boxed{4}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^{11}+xy^{10}=y^{22}+y^{12} & (1) \\ 7y^4+13x+8=2y^4\sqrt[3]{x\left(3x^2+3y^2-1\right)} & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Dễ thấy với $y = 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
Chia 2 vế phương trình (1) cho y^{11}, ta có:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y\,(3)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^{11} + t, t \in \mathbb{R}$; $f'(t) = 11t^{10} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$
Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2 \Rightarrow x > 0$$

Thay vào (2) ta được:

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x(3x^2+3x-1)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}\,(4)$$

Đặt: $t = \dfrac{1}{x} > 0$

$$(4) \Leftrightarrow 7t + 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3+3t-t^2}$$
$$\Leftrightarrow (2t+1)^3 + 2(2t+1) = 3 + 3t - t^2 + 2\sqrt[3]{3+3t-t^2}\,(5)$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 + 2a, a > 0$; $f'(a) = 3a^2 + 2 > 0, \forall a > 0$
Suy ra $f(a)$ là hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$

$$(5) \Leftrightarrow f(2t+1) = f\left(\sqrt[3]{3+3t-t^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2t+1 = \sqrt[3]{3+3t-t^2}$$
$$\Leftrightarrow (2t+1)^3 = 3+3t-t^2$$
$$\Leftrightarrow 8t^3 + 13t^2 + 3t - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t+1)\left(8t^2+5t-2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-5+\sqrt{89}}{16}\,(do\,t > 0)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{16}{\sqrt{89}-5} \Rightarrow y = \pm\frac{4}{\sqrt{\sqrt{89}-5}}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$$(x;y) = \left(\frac{16}{\sqrt{89}-5}; \frac{4}{\sqrt{\sqrt{89}-5}}\right), \left(\frac{16}{\sqrt{89}-5}; -\frac{4}{\sqrt{\sqrt{89}-5}}\right)$$

5 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2y + y^3 = x^6 + 2x^4 & (1) \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện $y \geq 1$
Do $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ nên

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 + 2\frac{y}{x} = x^3 + 2x$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 2t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2 \geq 0 \Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(x) \Leftrightarrow \frac{y}{x} = x \Leftrightarrow y = x^2$$

Thay $y = x^2$ vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned}
&(x+2)\sqrt{x^2+1} = x^2 + 2x + 1\\
&\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x^2+1} - x) = 1\\
&\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{x^2+1} + x\\
&\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}\\ x = -\sqrt{3}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) = (-\sqrt{3}; 3), (\sqrt{3}; 3)\square$

6 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}).5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & (1)\\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1), đặt $t = 2x - y$ ta được

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^t + 5\left(\frac{4}{5}\right)^t = 1 + 2.2^t$$

Đặt $f(t) = 5\left(\dfrac{1}{5}\right)^t + 5\left(\dfrac{4}{5}\right)^t$ và $g(t) = 1 + 2.2^t$

Dễ dàng nhận thấy $f(t)$ nghịch biến còn $g(t)$ đồng biến, lại có $f(1) = g(1)$ nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Suy ra $2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

Thay vào (2) ta được: $(2x-1)^3 + 4x + 1 + \ln(4x^2 - 2x + 1) = 0 \quad (3)$

Đặt $h(x) = (2x-1)^3 + 4x + 1 + \ln(4x^2 - 2x + 1)$

Ta có $h'(x) = 6(2x-1)^2 + 4 + \dfrac{8x-2}{4x^2-2x+1} = 6(2x-1)^2 + \dfrac{16x^2+2}{4x^2-2x+1} > 0$

Suy ra $h(x)$ đồng biến, lại thấy $f(0) = 0$. Do đó, $x = 0$ là nghiệm duy nhất của (3), dẫn đến $y = -1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(0; -1)\square$

7 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y)\\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x)\end{cases}$$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 2y\\ y^3 - 2y^2 + 2y + 1 = 2x\end{cases}$

Xét $f(t) = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2 > 0 \quad \forall t$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên R

Hệ đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} f(x) = 2y \\ f(y) = 2x \end{cases}$$

- Nếu $x > y$, suy ra $f(x) > f(y)$ dẫn đến $2y > 2x$. Lại suy ra $y > x$, mâu thuẫn. Vậy hệ không có nghiệm $x > y$

- Nếu $x < y$, tương tự như trên, cũng loại được trường hợp này

Vậy nếu hệ có nghiệm $(x; y)$ thì $x = y$

Thế vào trên được hệ có 3 nghiệm : $(1; 1)$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ $\square$

8 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3\left(2+3y\right) = 8 \\ x\left(y^3-2\right) = 6 \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm, chia 2 vế cho $x \neq 0$, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2}{x}\right)^3 = 3y + 2 \\ y^3 = \dfrac{6}{x} + 2 \end{cases}$$

Vế trừ vế ta có được phân tích sau:

$$\left(\frac{2}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{x}\right) = y^3 + 3y$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$

Với $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in R$

Dẫn đến $\dfrac{2}{x} = y$, thế vào phương trình (1) ta có:

$$y^3 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

Với $y = -1$ thì $x = -2$

Với $y = 2$ thì $x = 1$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 bộ nghiệm $(x; y) = (-2; -1), (1; 2)$ $\square$

9 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0 \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 5 \\ y \leq 4 \\ 2x + y + 5 \geq 0 \\ 3x + 2y + 11 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$\left(3\left(5-x\right)+2\right)\sqrt{5-x} = \left(3\left(4-y\right)+2\right)\sqrt{4-y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\left(3t^2+2\right)t$ với $t\in\mathbb{R}$. Khi đó, $f(t)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có
$$f'\left(t\right)=9t^2+2>0,\forall t\in\mathbb{R}$$
Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ phương trình (1), ta được:
$$\begin{aligned}&f\left(\sqrt{5-x}\right)=f\left(\sqrt{4-y}\right)\\&\Leftrightarrow\sqrt{5-x}=\sqrt{4-y}\\&\Leftrightarrow y=x-1\end{aligned}$$
Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta có:
$$x^2+6x+13=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}\qquad(2)$$
Điều kiện xác định của phương trình (4) là $x\geq-\dfrac{4}{3}$. Khi đó:
$$\begin{aligned}&(4)\Leftrightarrow x^2+x+2\left(x+2-\sqrt{3x+4}\right)+3\left(x+3-\sqrt{5x+9}\right)=0\\&\Leftrightarrow x^2+x+\frac{2\left(x^2+x\right)}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3\left(x^2+x\right)}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0\\&\Leftrightarrow\left(x^2+x\right)\left(1+\frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}\right)=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+x=0\\1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0\end{array}\right.\end{aligned}$$
• Với $x^2+x=0$, ta được: $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$.
• Với $1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0$, do điều kiện $x\geq-\frac{4}{3}$ nên vế trái luôn dương.
Dẫn đến phương trình vô nghiệm.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(0;-1)\,,(x;y)=(-1;-2)$

10 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}x^3+x+\log_2\dfrac{x}{y}=8y^3+2y+1 & (1)\\y^2-xy+\dfrac{1}{4}=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{x}{y}>0\\y\neq0\end{cases}\Leftrightarrow xy>0$

Ta có:
$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow x^3+x+\log_2|x|-\log_2|y|=8y^3+2y+1\\&\Leftrightarrow x^3+x+\log_2|x|=8y^3+2y+1+\log_2|y|\\&\Leftrightarrow x^3+x+\log_2|x|=8y^3+2y+\log_2|2y|\quad(\star)\end{aligned}$$
Xét hàm số: $f(t)=t^3+t+\log_2|t|$ với $t\neq0$

Ta có: $f'(t) = \begin{cases} 3t^2 + 1 + \dfrac{1}{t.\ln 2} & \text{nếu t>0} \\ 3t^2 + 1 - \dfrac{1}{t\ln 2} & \text{nếu t<0} \end{cases}$.

Có thể thấy $f'(t) > 0$ với mọi $t \neq 0$ nên $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$

Do đó:

$$(\star) \Leftrightarrow f(|x|) = f(|2y|) \Leftrightarrow |x| = |2y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -2y \end{array} \right.$$

Với $x = 2y$ ta có:

$$(2) \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} & \Rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

Với $x = -2y$ ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 3y^2 = -\frac{1}{4} \text{ (vô nghiệm)}$$

Đối chiếu điều kiện hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(x; y) = \left(1; \dfrac{1}{2}\right), \left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ $\square$

11 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{1 - x^2} = 3\sqrt{1 - (y-1)^2}$$

Do đó điều kiện: $|x| \leq 1$; $|y - 1| \leq 1$

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng:

$$y^3 - 3y^2 + 2 = x^3 - 3x \Leftrightarrow (y - 1)\left[(y - 1)^2 - 3\right] = x(x^2 - 3) \ \ (3)$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = t(t^2 - 3)$ với $|t| \leq 1$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 3 \leq 0, \ \forall |t| \leq 1$. Do đó $f(t)$ là hàm nghịch biến trên đoạn $[-1; 1]$

Do đó:

$$(3) \Leftrightarrow f(y - 1) = f(x) \Leftrightarrow y - 1 = x$$

Khi đó (2) trở thành:

$$(1 - x^2) + 2\sqrt{1 - x^2} - 1 = 0 \ (\star)$$

Đặt: $t = \sqrt{1 - x^2}$ $(t \geq 0)$. Phương trình $(\star)$ trở thành:

$$t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} - 1 \text{ (thỏa)} \\ t = -\sqrt{2} - 1 \text{ (loại)} \end{array} \right.$$

Với $t = \sqrt{2} - 1$ suy ra:

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 2} \\ x = -\sqrt{2\sqrt{2} - 2} \Rightarrow y = 1 - \sqrt{2\sqrt{2} + 2} \end{array} \right.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra hệ có nghiệm:

$(x; y) = \left(\sqrt{2\sqrt{2} - 2}; 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 2}\right), \ \left(-\sqrt{2\sqrt{2} - 2}; 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 2}\right)$ $\square$

12 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y - 2} + y^2 \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x - 2} + x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y \geq 2$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\sqrt{x^2+91}+\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{y^2+91}+\sqrt{y-2}+y^2$$

Xét hàm số

$f(u)=\sqrt{u^2+91}+\sqrt{u-2}+u^2, u \in (2;+\infty)$

$f'(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+91}}+\dfrac{1}{2\sqrt{u-2}}+2u>0, \forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow$ Hàm số đồng biến $\Rightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình (1) ta có: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2$

Xét hàm số

$$g(x)=\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2, \forall x \in (2;+\infty)$$

$$g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+91}}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-2x<0, \forall t \in (0;+\infty)$$

$\Rightarrow$ g(x) có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$ □

13 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x^2+1)x+(y-4)\sqrt{(3-y)}=0 & (1) \\ 22x^2+9y^2+18\sqrt{(4-3x)}=76 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Biến đổi phương trình (1) thành:

$$x^3+x=(3-y)\sqrt{3-y}+\sqrt{3-y}$$

Xét hàm số: $f(t)=t^3+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0$

Hàm số $f(t)$ đồng biến $\Rightarrow f(x)=f\left(\sqrt{3-y}\right) \Leftrightarrow x=\sqrt{3-y}$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$22x^2+9\left(3-x^2\right)^2+18\sqrt{4-3x}=76 \Leftrightarrow 9x^4-32x^2+18\sqrt{4-3x}+5=0 \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(x)=9x^4-32x^2+18\sqrt{4-3x}+5\left(0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow f'(t)=4x(9x^2-16)-\dfrac{27}{\sqrt{4-3x}}<0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến

Mà $f(x)=f(1)=0 \Rightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*)$\Rightarrow y=2$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$ □

15 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x^2+y^2)=y^4(y^2+1) & (1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq -\dfrac{5}{4}$.

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình (1) cho y^3 ta được:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{x}{y}=y^3+y$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ hàm số đồng biến và $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(y)$ suy ra $x=y^2$

Thay vào phương trình (2) ta có $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6$ giải ra được $x=1, y^2=1$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(1;-1);(1;1)$ $\square$

16 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(4x^2+1)+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x\le \dfrac{3}{4} \\ y\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Nhân hai vế phương trình (1) với 2 ta có:

$$(4x^2+1)2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow f(2x)=f\left(\sqrt{5-2y}\right)$$

Xét $f(t)=(4t^2+1)2t$ có $f'(t)=3t^2+1>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

$$f(2x)=f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y} \Rightarrow y=\frac{5-4x^2}{2}$$

Thay vào phương trình (2) ta được: $g(x)=4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7$ trên $\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$

Ta có $g'(x)$ ngịch biến, mà $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$$\square$

17 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8x^2+18y^2+36xy-10x\sqrt{6xy}-15y\sqrt{6xy}=0 & (1) \\ 2x^2+3y^2=30 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $xy\ge 0$.

Nếu $x=0$ suy ra $y=0$ không thoả mãn phương trình (2) của hệ.

Nếu $y=0$ cũng tương tự, vậy $xy>0$.

Phương trình (1) của hệ tương đương với

$$8x^2+18y^2+36xy-10x\sqrt{6xy}-15y\sqrt{6xy}=0 \Leftrightarrow \frac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}+\frac{\sqrt{6xy}}{2x+3y}=\frac{5}{2}$$

Đặt $t=\dfrac{2x+3y}{\sqrt{6xy}}, t\ge 2$. Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{1}{t}, t\ge 2$, ta thấy $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}>0, t\ge 2$ suy ra $f(t)\ge \dfrac{5}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $t=2$ hay khi $2x=3y$.

Thay vào phương trình (2) suy ra nghiệm: $x=3, y=2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$. $\square$

18 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y & (1) \\ x^6 + y^6 = 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (2) dễ dàng suy ra: $x, y \in [-1;1]$

Xét hàm số $f(t) = x^3 - 3t$ trên [-1;1]

Ta có $f'(t) = 3(t^2 - 1) \le 0$ với mọi $x \in [-1;1]$

Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $[-1;1]$.

Từ phương trình (1) ta có $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ Khi đó:
$$(2) \Leftrightarrow x^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \\ x = y = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là $x = y = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ hoặc $x = y = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ □

19 Tìm a để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} \le a \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} \le a \end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện cần:

Ta có nếu $(x_0; y_0)$ là 1 nghiệm của hệ bất phương trình thì $(y_o; x_o)$ cũng là một nghiệm của hệ bất phương trình.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì ta có $x_o = y_o$.

Khi đó hệ bất phương trình được viết lại là:
$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \le a \quad (*) \end{cases}$$

Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi bất phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \quad \forall x \ge 0$.
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x > 0$$

Do đó hàm số f(x) đồng biến trên $[0; +\infty)$
$$\Rightarrow f(x) \ge f(0) = 1 \quad \forall x \ge 0$$

Suy ra bất phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a = 1$.

+ Điều kiện đủ:

Với $a = 1$ ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} \le 1 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} \le 1 \end{cases} \qquad (I)$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y} \geq 1 \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \quad (II)$

Từ (I) và (II) ta có: $x = y = 0$.

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm $\square$

20 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}} = 3\sqrt{3} & (1) \\ x+y+z = 1 & (2) \\ xy+yz+zx = \dfrac{7}{27}+2xyz & (3) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x > 0, y > 0, z > 0$

Từ phương trình $x+y+z = 1$ ta thấy trong các số x, y, z phải có ít nhất một số không lớn hơn $\dfrac{1}{3}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $z \leq \dfrac{1}{3}$. Do đó $z \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Đặt $S = xy+yz+zx-2xyz = xy(1-2z)+z(x+y) = xy(1-2z)+z(1-z)$

Do $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1-z}{2}\right)^2$ nên

$$S \leq \left(\frac{1-z}{2}\right)^2(1-2z)+z(1-z) = \frac{1}{4}\left(-2z^3+z^2+1\right)$$

Xét hàm số $f(z) = \dfrac{1}{4}(-2z^3+z^2+1)$.

Ta có $f'(z) = \dfrac{1}{4}(-6z^2+2z) = \dfrac{1}{2}z(-3z+1) \geq 0, \forall z \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Suy ra $f(z) \leq f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{7}{27}, \forall z \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right]$.

Do đó: $S \leq \dfrac{7}{27}$. Dấu $'' ='' $ xảy ra khi và chỉ khi: $x = y, z = \dfrac{1}{3}$.

Thay vào (2) ta được: $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Thử lại ta thấy $(x; y; z) = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$ $\square$

21 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3-2y^3-2(x^2-3y^2)+3(x-2y)-1 = 0 \\ y^3-2z^3-2(y^2-3z^2)+3(y-2z)-1 = 0 \\ z^3-2x^3-2(z^2-3x^2)+3(z-2x)-1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2+3x-1 = 2y^3-6y^2+6y \\ y^3-2y^2+3y-1 = 2z^3-6z^2+6z \\ z^3-2z^2+3z-1 = 2x^3-6x^2+6x \end{cases}$$

Đặt: $f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t - 1; g(t) = 2t^3 - 6t^2 + 6t$ Ta có:

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}; g'(t) = 6t^2 - 12t + 6 = 6(t-1)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Do đó $f(t), g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(y)\,(1) \\ f(y) = g(z)\,(2)\ (II) \\ f(z) = g(x)\,(3) \end{cases}$$

Giả sử (x, y, z) thỏa mãn hệ phương trình đã cho. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$
Từ (1) và (2) suy ra:

$$g(y) \geq g(z) \Rightarrow y \geq z$$

Từ (2) và (3) suy ra:

$$g(z) \geq g(x) \Rightarrow z \geq x$$

Do đó: $x = y = z$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0\,(4) \end{cases}$$

Đặt $t = x - 1$

$$\begin{aligned} &(4) \Leftrightarrow (t+1)^3 - 4(t+1)^2 + 3(t+1) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0\,(5) \end{aligned}$$

Đặt $h(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$, ta có $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$
Vì $h(-2) = -7 < 0; h(0) = 1 > 0; h(1) = -1 < 0; h(2) = 1 > 0$
Nên phương trình: $h(t) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2, 2)$
Đặt $t = 2\cos\varphi, \varphi \in (0, \pi)$. Khi đó $\sin\varphi \neq 0$

$$\begin{aligned} &(5) \Leftrightarrow 8\cos^3\varphi - 4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos\varphi\left(2\cos^2\varphi - 1\right) - 4\left(1 - \sin^2\varphi\right) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos\varphi\cos 2\varphi + 4\sin^2\varphi - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos\varphi\cos 2\varphi\sin\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \\ &\Leftrightarrow \sin 4\varphi = \sin 3\varphi \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\varphi = 3\varphi + k2\pi \\ 4\varphi = \pi - 3\varphi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = k2\pi \\ \varphi = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Với $\varphi \in (0, \pi)$ ta thu được: $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}\right\}$
Do đó: $t = 2\cos\varphi, \varphi \in \left\{\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}\right\}$
Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y; z) = (2\cos\varphi + 1; 2\cos\varphi + 1; 2\cos\varphi + 1), \varphi = \dfrac{\pi}{7}; \dfrac{3\pi}{7}; \dfrac{5\pi}{7}$ □

22 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x\\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z)=y\\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x)=z\end{cases}$$

Lời giải:

Xét đại diện phương trình (1): $\sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x \Leftrightarrow log_3(6-y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}=f(x)$

Có $f'(x)=\dfrac{6-x}{\sqrt{x^2-2x+6}^3}>0$ do $6-x>0$ là đk tồn tại pt

Giả sử $x>y>z \Rightarrow \begin{cases}log_3(6-x)<log_3(6-z)\Leftrightarrow f(z)<f(y)<f(x)\\ f(x)>f(y)>f(z)\end{cases}$ (Vô lý).

Cm tương tự với $x<y<z$ (Vô lý).

Vậy, $x=y=z$

Thế vào ta có: $log_3 6-x=f(x)$

Có: $f(x)$ đồng biến, $g(x)=log_3 6-x$ nghịch biến nên $f(x)=g(x)$ có nghiệm duy nhất.

Nhận thấy $x=3$ là nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y;z)=(3;3;3)\square$

4 Sử dụng phương pháp đánh giá

1 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0 & (1)\\ 2x^3+3x^2+6y-12x+13=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

$$(1)\Leftrightarrow 2x=x^2y^2+y^2\geq 0\Rightarrow x\geq 0$$

$$(1)\Leftrightarrow y^2\left(x^2+1\right)=2x\Leftrightarrow y^2=\frac{2x}{x^2+1}\leq 1\Rightarrow -1\leq y\leq 1$$

$$(2)\Leftrightarrow 2x^3+3x^2-12x+7+6y+6=0\Leftrightarrow (x-1)^2(2x+7)+6(y+1)=0$$

Ta có: $\begin{cases}(x-1)^2(2x+7)\geq 0\,(\text{do } x\geq 0)\\ 6(y+1)\geq 0\,(-1\leq y\leq 1)\end{cases}\Rightarrow (x-1)^2(2x+7)+6(y+1)\geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}(x-1)^2(2x+7)=0\\ y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$

Thử lại ta thấy $x=1, y=-1$ là nghiệm của hệ

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x;y)=(1;-1)\square$

2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \end{cases}$
Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \quad (*)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2}\right) \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{1+2x^2} = \sqrt{1+2y^2} \Leftrightarrow x = y$ (do $x, y \ge 0$)
Ta lại có:

$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} = \frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2x^2)(1+2y^2)(1+2xy)} \le 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \le \frac{2}{1+2xy} \quad (2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$
Từ (1) và (2) ta có bất đẳng thức $(*)$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$
Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{x(1-2x)} = \dfrac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{9-\sqrt{73}}{36} \\ x = y = \dfrac{9+\sqrt{73}}{36} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x; y) = \left(\dfrac{9-\sqrt{73}}{36}; \dfrac{9-\sqrt{73}}{36}\right), \left(\dfrac{9+\sqrt{73}}{36}; \dfrac{9+\sqrt{73}}{36}\right)$ □

3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^3 + 3xy^2 = 7y & (1) \\ y^3 + 6x^2y = 7 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Dễ thấy $x = y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình

$$(2) \Leftrightarrow y\left(y^2 + 6x^2\right) = 7 > 0 \Rightarrow y > 0$$
$$(1) \Leftrightarrow x\left(4x^2 + 3y^2\right) = 7y > 0 \Rightarrow x > 0$$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2), ta có:

$$4x^3 + 3xy^2 - y^3 - 6x^2y = 7(y-1)$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(4x^2 - 2xy + y^2\right) = 7(y-1) \quad (3)$$

Từ phương trình (3) ta suy ra $x - y$ và $y - 1$ cùng dấu
- Nếu $0 < y < 1 \Rightarrow y - 1 < 0 \Rightarrow x - y < 0 \Rightarrow 0 < x < y < 1 \Rightarrow y^3 + 6x^2y < 7$ (mâu thuẫn với (2))
- Nếu $y > 1 \Rightarrow y - 1 > 0 \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow x > y > 1 \Rightarrow y^3 + 6x^2y > 7$ (mâu thuẫn với (2))

Nên $y = 1$ thay vào (2) ta suy ra $x = 1$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x; y) = (1; 1)\square$

4 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = x^2 + y^2 + 2 & (1) \\ x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 8 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta có

$$x\left(x^2 + 3y^2\right) = x^2 + y^2 + 2 \Rightarrow x > 0$$

Nếu $y = 0$ thì hệ trở thành $\begin{cases} x^4 = 8 \\ x^3 = x^2 + 2 \end{cases}$ (vô nghiệm) Từ đó suy ra: $y \neq 0$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 + (2xy)^2 = 8 & (3) \\ x^2 + y^2 + 2 = x\left(x^2 + y^2\right) + y\,(2xy) & (4) \end{cases}$$

Từ (4) ta có:

$(x^2 + y^2 + 2)^2 = [x(x^2 + y^2) + y(2xy)]^2 \leq (x^2 + y^2)\left[(x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2\right] = 8(x^2 + y^2)\,(*)$ (do (3))

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 + 4\left(x^2 + y^2\right) + 4 \leq 8\left(x^2 + y^2\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)^2 - 4\left(x^2 + y^2\right) + 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 2\right)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2 \end{aligned}$$

Dấu " = " trong (*) xảy ra khi: $\dfrac{x^2 + y^2}{x} = \dfrac{2xy}{y} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (do $x > 0$)

Thế vào hệ ta có: $\begin{cases} 1 + y^4 + 6y^2 = 8 \\ 1 + 3y^2 = 1 + y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \vee y^2 = -7 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là: $(x; y) = (1; 1), (1; -1)\square$

5 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1 - y^2}\right) & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 + x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + y}} = \dfrac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{xy}}} & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $|x| \leq 1, |y| \leq 1, xy \geq 0$

Từ (1) suy ra $0 \leq x \leq 1$. Do đó: $0 \leq y \leq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y}}\right)^2 \leq 2\left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + y}\right) \quad (3)$$

Ta chứng minh :

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\le\frac{2}{1+\sqrt{xy}}\qquad(4)$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned}&(4)\Leftrightarrow 2+x+y+2\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\left(x+y\right)\le 2+2\left(x+y\right)+2xy\\&\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{xy}\right)\left(x+y\right)-2\sqrt{xy}\left(1-\sqrt{xy}\right)\ge 0\\&\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{xy}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0\quad(\forall x,y\in[0,1])\end{aligned}$$

Từ (3) và (4), suy ra:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\le\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y$

Thay $x=y$ vào (2) ta được:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)\qquad(5)$$

Đặt $x=\sin t,t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}&(5)\Leftrightarrow\sqrt{1+\cos t}=\sin t\left(1+2\cos t\right)\\&\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\left[1+2\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\right]\left(\text{ do } t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos\frac{t}{2}>0\right)\\&\Leftrightarrow 3\sin\frac{t}{2}-4\sin^3\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\&\Leftrightarrow\sin\frac{3t}{2}=\sin\frac{\pi}{4}\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}+\frac{k4\pi}{3}\\t=\frac{\pi}{2}+\frac{k4\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

Với $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, ta được:

$$\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}\\t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=1\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),(1;1)\square$

6 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^3+y^2=2 & (1)\\x^2+xy+y^2-y=0 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

$$(2)\Leftrightarrow x^2+yx+y^2-y=0$$

$$\Delta=y^2-4\left(y^2-y\right)=-3y^2+4y$$

Phương trình có nghiệm $x\Leftrightarrow\Delta\ge 0\Leftrightarrow -3y^2+4y\ge 0\Leftrightarrow 0\le y\le\frac{4}{3}$

$$(2)\Leftrightarrow y^2+\left(x-1\right)y+x^2=0$$

$$\Delta = (x-1)^2 - 4x^2 = -3x^2 - 2x + 1$$

Phương trình có nghiệm $y \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + y^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{49}{27} < 2$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm$\square$

7 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 1 & (1) \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \dfrac{3xy}{2(1-x)^2} & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \neq 1$. Xét phương trình bậc hai: $2t^2 + yt - 1 = 0\,(3)$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + yx - 1 = 0$$

cho thấy $t = x$ là một nghiệm của phương trình (3)

$$(2) \Leftrightarrow 2.\frac{9x^2}{4(1-x)^4} + y.\frac{-3x}{2(1-x)^2} - 1 = 0$$

cho thấy $t = \dfrac{-3x}{2(1-x)^2}$ là một nghiệm của phương trình (3)

Dễ thấy phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt mà $x \neq \dfrac{-3x}{2(1-x)^2}$, nên áp dụng định lý Viet, ta có:

$$x.\frac{-3x}{2(1-x)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 2 \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $(x;y) = \left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};2\right), \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2};2\right)$$\square$

8 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 + 4xy - 3 = 0 \\ (x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Biến đổi hệ phương trình thành

$$\begin{cases} 2(x+y)^2 + 4xy - 3 = 0 \quad (1) \\ (x+y)^4 - 2(x+y)^2 + (x+y) + (2y-1)^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có: $(x+y)^2 \geq 4xy$

$$\Rightarrow 2(x+y)^3 + (x+y)^2 - 3 \geq 2(x+y)^2 + 4xy - 3 = 0\,(\text{ do } (1))$$
$$\Rightarrow 2(x+y)^3 + (x+y)^2 - 3 \geq 0$$

Đặt: $t = x + y$ Ta có:

$$\begin{aligned}
&2t^3 + t^2 - 3 \geq 0\\
&\Leftrightarrow 2(t-1)\left(t^2 + t + \frac{3}{2}\right) \geq 0\\
&\Leftrightarrow t \geq 1 \left(\text{ do } t^2 + t + \frac{3}{2} > 0\right)
\end{aligned}$$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow t^4 - 2t^2 + t + (2y-1)^2 = 0$

Xét hàm số: $f(t) = t^4 - 2t^2 + t, \forall t \geq 1$

$$f'(t) = 4t^3 - 4t + 1 > 0, \forall t \geq 1$$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$, suy ra:

$$\forall t \geq 1 \Rightarrow f(t) \geq f(1) = 0$$

Do đó:

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 0 \\ (2y-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\square$

9 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y-1} = 2 \\ x + \sqrt{12x + y^2} = 19 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq 4; y \geq 1$

Từ phương trình thứ nhất, ta có:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{x-4} - 4 = \sqrt{y-1} - 2\\
&\Leftrightarrow \frac{2(x-8)}{\sqrt{x-4}+2} = \frac{y-5}{\sqrt{y-1}+2}
\end{aligned}$$

•Xét $x > 8 \Rightarrow y > 5$. Khí đó :

$$VT = x + \sqrt{12x + y^2} > 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$$

•Xét $x < 8 \Rightarrow y < 5$. Khí đó :

$$VT = x + \sqrt{12x + y^2} < 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$$

Do đó $x = 8; y = 5$. Thử lại thỏa mãn hệ

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x; y) = (8; 5)\square$

10 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{4x + y^2}} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện $x > -2, y \geq 0$ Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ. Với $y > 0$, ta được

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} > 1 \\ \frac{1}{x} < \frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{4x}} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3(7-\sqrt{33})}{2} > 1$$

Do đó, điều kiện để hệ có nghiệm là $x > \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2}, y > 0$ (I)

Với điều kiện (I), ta được + Nếu $y < x - 1$ thì

- Từ (1), ta được

$$\begin{cases} x > \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2} \\ \sqrt{x+2} < 1 + \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

- Từ (2), ta được

$$\begin{cases} x > \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2} \\ \frac{1}{x} > \frac{1}{6} + \frac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3(7-\sqrt{33})}{2} < x < 2$$

Do đó, trong trường hợp này hệ vô nghiệm.

+Nếu $y > x - 1 > 0$ thì

- Từ (1), ta được

$$\begin{cases} x > \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2} \\ \sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3(7-\sqrt{33})}{2} < x < 2$$

- Từ (2), ta được

$$\begin{cases} x > \dfrac{3(7-\sqrt{33})}{2} \\ \frac{1}{x} < \frac{1}{6} + \frac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Do đó, trong trường hợp này hệ vô nghiệm. + Do đó, ta có $y = x - 1$. Khi đó, hệ trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x; y) = (2; 1)\square$

11 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2 + (4x-1)^2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2 + x = y\sqrt{14x-1} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{14}$

Đặt: $t = 4x \left(t \geq \dfrac{2}{7}\right)$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} y^2 + (t-1)^2 = \sqrt[3]{t(2t+1)} & (1) \\ \dfrac{5}{2}t^2 + \dfrac{t}{4} = y\sqrt{\dfrac{7}{2}t - 1} & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có: $y > 0$

áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt[3]{t(2t+1)} = \sqrt[3]{2t.\frac{2t+1}{2}.1} \leq \frac{2t + \dfrac{2t+1}{2} + 1}{3} = t + \frac{1}{2}$$

Do đó, từ (1) suy ra:

$$y^2 + (t-1)^2 \leq t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 \leq -t^2 + 3t - \frac{1}{2} \quad (3)$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$y\sqrt{\frac{7}{2}t - 1} \leq \frac{y^2 + \dfrac{7}{2}t - 1}{2}$$

Do đó, từ (2) suy ra:

$$\frac{5}{2}t^2 + \frac{t}{4} \leq \frac{y^2 + \dfrac{7}{2}t - 1}{2} \Leftrightarrow 5t^2 - 3t + 1 \leq y^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$\begin{aligned} & 5t^2 - 3t + 1 \leq -t^2 + 3t - \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow (2t-1)^2 \leq 0 \\ & \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Thay $x = \dfrac{1}{8}$ vào hệ phương trình ta có:

$$\begin{cases} y^2 + \dfrac{1}{4} = 1 \\ y\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y) = \left(\dfrac{1}{8}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ □

12 Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^6 + y^8 + z^{10} \leq 1 \\ x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \geq 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Từ (1) ta có: $-1 \le x, y, z \le 1$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} & x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \ge x^6 + y^8 + z^{10} \\ \Leftrightarrow & x^6 \left(1 - x^{2001}\right) + y^8 \left(1 - y^{2001}\right) + z^{10} \left(1 - z^{2001}\right) \le 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Từ $-1 \le x, y, z \le 1$ ta thấy:

$$x^6 \left(1 - x^{2001}\right), y^8 \left(1 - y^{2001}\right), z^{10} \left(1 - z^{2001}\right) \ge 0$$

Do đó:

$$(3) \Leftrightarrow x^6 \left(1 - x^{2001}\right) = y^8 \left(1 - y^{2001}\right) = z^{10} \left(1 - z^{2001}\right) = 0 \Leftrightarrow x, y, z = 1 \vee x, y, z = 0$$

Kết hợp với (1) hệ bất phương trình có các nghiệm là: $(x; y; z) = (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$ $\square$

13 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. Suy ra $x \ge 0$

Do $x \ge 0$, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, suy ra $y^2 = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \le 1$, dẫn đến $-1 \le y \le 1 \quad (*)$

Mặt khác

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{-2x^3 - 3x^2 + 12x - 13}{6} = \frac{(-2x - 7)(x - 1)^2}{6} - 1 \;\; (3)$$

Do $x \ge 0$ nên từ (3) suy ra $y \le -1\,(**)$

Từ (*) và (**) suy ra $y = -1$

Thay $y = -1$, suy ra $x = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(1; -1)$ $\square$

14 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{y - 2} + y^2 = \sqrt{x^2 + 91} \\ \sqrt{x - 2} + x^2 = \sqrt{y^2 + 91} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện : $x, y \ge 2$

Do vài trò x, y như nhau, nên giả sử $x \ge y$, vậy nên:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 91} \ge \sqrt{y^2 + 91} \Rightarrow & \sqrt{y - 2} + y^2 \ge \sqrt{x - 2} + x^2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{y - 2} - \sqrt{x - 2} + (y - x)(y + x) \ge 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{y - x}{\sqrt{y - x} + \sqrt{x - 2}} + (y - x)(y + x) \ge 0 \\ \Leftrightarrow & y \ge x \end{aligned}$$

Vậy nên $x = y$ dẫn đến ta có phân tích sau:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{x^2+91} \\
\Leftrightarrow &\sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9 = \sqrt{x^2+91} - 10 \\
\Leftrightarrow &\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x+3)(x-3) = \frac{(x+3)(x-3)}{\sqrt{x^2+91}+10} \\
\Leftrightarrow &(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + 1 - \frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}\right) = 0
\end{aligned}$$

- Với $x = 3 \Rightarrow y = 3$
- Với $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} + 1 - \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} = 0.$

Do $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} < 1$ nên $(x+3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+91}+10} - 1\right) = (x+3)\left(\dfrac{-9-\sqrt{x^2+91}}{\sqrt{x^2+91}+10}\right) < 0$

Dẫn đến $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1} = (x+3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+91}} - 1\right)$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã chó có nghiệm $(3;3)\square$

15 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x} + \sqrt{3y} = 6 \\ \sqrt{3x+16} + \sqrt{3y+16} = 10 \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phhương trình 2 ta có:

$\sqrt{3x+16} + \sqrt{3y+16} = \sqrt{(\sqrt{3x})^2 + 4^2} + \sqrt{(\sqrt{3y})^2 + 4^2} \geq \sqrt{\left(\sqrt{3x} + \sqrt{3y}\right)^2 + (4+4)^2} = 10$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (3; 3)\square$

16 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 & (1) \\ 2x^3 + 3x^2 + 6y - 12x + 13 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ (1) ta có:

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow x \geq 0$$

Mặt khác ta có:

$$2x \leq x^2 + 1\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (luôn đúng)}$$

Do đó:

$$y^2 = \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1\ (\star)$$

Từ (2) ta lại có:

$$y = -\frac{2x^3+3x^2-12x+13}{6} = -\frac{2x^3+3x^2-12x+7}{6} - 1 = \frac{(x-1)^2(2x+7)}{6} - 1$$

Vì $x \geq 0$ suy ra: $y \leq -1\ (\star\star)$

Từ $(\star)$ và $(\star\star)$ ta có:

$$y = -1 \Rightarrow x = 1$$

Thử lại ta thấy $x=1;\ y=-1$ thỏa mãn hệ

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;-1)\square$

17 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y^2-54x+9y^2=0 & (1)\\ 2x^2+y^3=12x-45 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta có:
$$(2)\Leftrightarrow 2\left(x-3\right)^2=-y^3-27\Rightarrow y^3\le -27\Rightarrow y\le -3$$
Xem (1) là phương trình bậc 2 ẩn x phương trình có nghiệm
$$\Leftrightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow 27^2-9y^4\ge 0\Leftrightarrow y^4\le 81\Leftrightarrow -3\le y\le 3$$
Từ đó ta suy ra: $y=-3$ thế vào (2) ta được:
$$x^2-6x+9=0\Leftrightarrow x=3$$
Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-3;3)\square$

18 Tìm nghiệm dương của hệ phương trình:
$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{4y}{y+1}+\dfrac{2z}{z+1}=1\\ 8^9x^3y^4z^2=1\end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình đầu tiên của hệ ta có được:
$$\frac{1}{x+1}=\frac{2x}{x+1}+\frac{4y}{y+1}+\frac{2z}{z+1}$$
$$\frac{1}{y+1}=\frac{3x}{x+1}+\frac{3y}{y+1}+\frac{2z}{z+1}$$
$$\frac{1}{z+1}=\frac{3x}{x+1}+\frac{4y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 8 số dương lần lượt ta có:
$$\frac{1}{x+1}\ge 8\sqrt[8]{\frac{x^2y^4z^2}{\left(x+1\right)^2\left(y+1\right)^4\left(z+1\right)^2}}$$
$$\frac{1}{y+1}\ge 8\sqrt[8]{\frac{x^3y^3z^2}{\left(x+1\right)^3\left(y+1\right)^3\left(z+1\right)^2}}$$
$$\frac{1}{z+1}\ge 8\sqrt[8]{\frac{x^3y^4z}{\left(x+1\right)^3\left(y+1\right)^4\left(z+1\right)}}$$
Suy ra:
$$\frac{1}{\left(x+1\right)^3}\frac{1}{\left(y+1\right)^4}\frac{1}{\left(z+1\right)^2}\ge 8^9\sqrt[8]{\frac{x^{24}y^{32}z^{20}}{\left(x+1\right)^{24}\left(y+1\right)^{32}\left(z+1\right)^{20}}}$$
Hay là ta được:
$$8^9x^3y^4z^2\le 1$$
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{y}{y+1}=\dfrac{z}{z+1}=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{8}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm dương duy nhất là $(x;y;z)=\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{8}\right)\square$

19 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1} \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{3}{\sqrt{y-1}}=4 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y > 1 \Rightarrow xy > 1$

Ta chứng minh:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}+1}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{xy}+1\right)+(y+1)\left(\sqrt{xy}+1\right)\ge 2\left(x+1\right)\left(y+1\right)$$
$$\Leftrightarrow (x+y)\sqrt{xy}+2\sqrt{xy}\ge x+y+2xy$$
$$\Leftrightarrow (x+y)\left(\sqrt{xy}-1\right)+2\sqrt{xy}\left(1-\sqrt{xy}\right)\ge 0$$
$$\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$$

Luôn đúng $\forall xy > 1$

Ta có:

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+1}+1+\frac{y}{x+1}+1=\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+1}+2$$
$$\Leftrightarrow (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)=\frac{2\left(2\sqrt{xy}+1\right)}{\sqrt{xy}+1}$$

Mặt khác:

$$\begin{cases} x+y+1\ge 2\sqrt{xy}+1 \\ \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}\ge\dfrac{2}{\sqrt{xy+1}} \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x+y+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)\ge\frac{2\left(2\sqrt{xy}+1\right)}{\sqrt{xy}+1}, \forall xy>1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ thế vào phương trình thứ hai ta được $x = y = 5$ là nghiệm của hệ. □

20 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}=x+y \\ x\sqrt{2xy+5x+3}=4xy-5x-3 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có: $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\ge\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)^2=\frac{3}{4}(x+y)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}\ge\sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2}+\sqrt{\frac{\frac{3}{4}(x+y)^2}{3}}=|x+y|\ge x+y$$

Dấu "=" xảy ra khi: $x = y \ge 0$

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned}
&x\sqrt{2x^2+5x+3} = 4x^2-5x-3\\
\Leftrightarrow &2x^2+5x+3+x\sqrt{2x^2+5x+3}-6x^2=0\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2+5x+3}=-3x \text{ (vô nghiệm)}\\ \sqrt{2x^2+5x+3}=2x\end{array}\right.\\
\Rightarrow &-2x^2+5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \text{ (loại)}\\ x=3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $(x; y) = (3; 3)$.□

22 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^4\left(1-2x^2\right)=y^4 & (1)\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3\left(x^3-x+2y^2\right) & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Viết lại hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{4-(x^2y-1)^2}=2x^6-x^4+y^4\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=x^3\left(x^3-x+2y^2\right)\end{cases}$$

Lấy phương trình (2) trừ (1) ta được:

$$\begin{aligned}\sqrt{4-(x^2y-1)^2}-1-\sqrt{1+(x-y)^2}&=(x^3-y^2)^2\geq 0\\ \Rightarrow \sqrt{4-(x^2y-1)^2}&\geq 1+\sqrt{1+(x-y)^2} \quad (3)\end{aligned}$$

Ta có $\sqrt{4-(x^2y-1)^2}\leq 2\leq 1+\sqrt{1+(x-y)^2}$. Do đó đẳng thức ở (3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$ □

23 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)\sqrt{y}+(y-1)\sqrt{x}=\sqrt{2xy}\\ x\sqrt{2y-2}+y\sqrt{2x-2}=\sqrt{2}xy\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y \geq 1$

Phương trình thứ hai tương đương với:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-1}}{y}=1$$

Ta thấy rằng $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}, \dfrac{\sqrt{y-1}}{y}\leq\dfrac{1}{2}$ nên đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=2$.

Thay vào phương trình thứ nhất ta thấy thoả mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 2)$ □

24 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2}\\ 6x-y-11+\sqrt{10-4x-2x^2}=0\end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình thứ hai, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$y-6x+11=\sqrt{10-4x-2x^2}=\frac{\sqrt{4(10-4x-2x^2)}}{4}\leq\frac{4+10-4x-2x^2}{4}$$

Thu gọn ta có:

$$2x^2-20x+4y+30\leq 0\Rightarrow x^2-10x+2y+15\leq 0\quad(1)$$

Tiếp tục như vậy cho phương trình thứ hai ta có:

$$x^2+2x-2=\sqrt{-y^2-4y-2}=\frac{\sqrt{1(-y^2-4y-2)}}{2}\leq\frac{-y^2-4y-2}{2}$$

Thu gọn ta có:

$$2x^2+4x+y^2+4y-3\leq 0\quad(2)$$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta có:

$$3x^2-6x+y^2+6y+12\leq 0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+(y+3)^2\leq 0$$

Nghiệm của bất phương trình trên là:

$$\begin{cases}x-1=0\\y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-3\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;-3)$ □

25 Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2007}+|y+1| &=a\\ |x|\sqrt{y^2+2y+2007} &=\sqrt{2007-x^2}-a\end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện cần:

Cộng vế với vế hai phương trình ta được:

$$\sqrt{x^2+2007}+|y+1|+|x|.\sqrt{y^2+2y+2007}=\sqrt{2007-x^2}$$

Nhận xét:

$$VT\geq\sqrt{2007}$$
$$VP\leq\sqrt{2007}$$

Suy ra: $x=0$ và $y=-1$

Thay ngược lại vào hai phương trình ban đầu, suy ra $a=\sqrt{2007}$

+ Điều kiện đủ:

Với $a=\sqrt{2007}$. Thế vào hệ, để ý: $x^2\geq 0; |y+1|\geq 0$ suy ra:

$$\sqrt{2007}=\sqrt{x^2+2007}+|y+1|\geq=\sqrt{2007}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=0; y=-1$.

Vậy $a=\sqrt{2007}$ là giá trị cần tìm. □

26 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=3 & (1)\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $x, y > 0$.

Từ phương trình (1) ta suy ra:

$$3+\sqrt{xy}=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow \sqrt{xy}\leq 3 \quad (*)$$

Tiếp tục từ phương trình (2) và bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$4=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\leq \sqrt{1+1}\sqrt{x+y+2}$$
$$\Rightarrow x+y\geq 6\Leftrightarrow \sqrt{xy}=x+y-3\geq 3 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\sqrt{xy}=3\Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=3$ □

27 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

áp dụng liên tiếp 2 lần bất đẳng thức quen thuộc: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ với mọi a, b, c

Ta sẽ được:

$$x^4+y^4+z^4\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq xy^2z+xyz^2+x^2yz=xyz(x+y+z)=xyz$$

Dấu "=" xảy ta khi $x=y=z$.

Kết hợp với $x+y+z=1$ ta suy ra nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ □

28 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+xy=z^{2^{2003}}+2z^{2^{2002}} & (1) \\ x^4+y^4=2z^{2^{2004}} & (2) \\ (x+y)^{z-1}=(z+2004)^{x-y} & (3) \end{cases}$$

**** http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn - http://boxmath.vn ****

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta có:

$$2z^{2^{2004}}=x^4+y^4\geq 2x^2y^2\Rightarrow xy\leq z^{2^{2003}} \quad (*)$$

Ta lại có:

$$(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\Rightarrow (x+y)^4\leq 4\left(x^2+y^2\right)^2\leq 4.2\left(x^4+y^4\right)=16z^{2^{2004}}$$
$$\Rightarrow x+y\leq 2z^{2^{2002}} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) cho ta:

$$x+y+xy\leq z^{2^{2003}}+2z^{2^{2002}}$$

Dấu $''=''$ xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z^{2^{2002}}$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x=y=z^{2^{2002}} \\ (2x)^{z-1}=(z+2004)^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=z=1 \\ x=y=\dfrac{1}{2}; z=\pm\dfrac{1}{\sqrt[2^{2002}]{2}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(x;y;z) = (1;1;1)\,,\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\pm\frac{1}{\sqrt[2^{2002}]{2}}\right)$ $\square$

29 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=-y\left(x+z\right) \\ x^2+x+y=-2yz \\ 3x^2+8y^2+8xy+8yz=2x+4z+2 \end{cases}$$

Lời giải:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} x\left(x+y\right)+y\left(y+z\right)=0\,(1) \\ x\left(x+1\right)+y\left(2z+1\right)=0\,(2) \\ 4(x+y)^2+4(y+z)^2=(x+1)^2+(2z+1)^2\,(3) \end{cases}\qquad (I)$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy chọn: $\overrightarrow{u}=(x,y)\,;\overrightarrow{v}=(x+y,y+z)\,;\overrightarrow{w}=(x+1,2z+1)$

Khi đó:

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0 \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}=0 \\ 4|\overrightarrow{v}|^2=|\overrightarrow{w}|^2\,(6) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\,(4) \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}=0\,(5) \\ |\overrightarrow{w}|=2\,|\overrightarrow{v}|\,(6) \end{cases}$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Nếu $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\Rightarrow x=y=0$ (và lúc đó $(4)\,,(5)$ cũng được thỏa mãn) Thay $x=y=0$ vào (6), tức là thay vào (3) và ta có:

$$4z+2=0\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}$$

Do đó hệ có nghiệm: $\left(0;0;-\frac{1}{2}\right)$

TH2: Nếu $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ .Từ (6) ta suy ra $\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}$ hoặc là cùng $\neq\overrightarrow{0}$, hoặc là chúng cùng là vectơ không.

a) Nếu $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+1=0 \\ 2z+1=0 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ z=-\dfrac{1}{2} \\ z=x=-y \end{cases}$$

Trường hợp này vô nghiệm

b) Nếu $\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}$ cùng $\neq\overrightarrow{0}$. Khi đó do $(4)\,,(5)$ suy ra $\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}$ là 2 vectơ cùng phương (vì chúng cùng vuông góc với $\overrightarrow{u}$). Kết hợp với (6) suy ra: $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{v}\vee\overrightarrow{w}=-2\overrightarrow{v}$

Nếu $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{v}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+1=2x+2y \\ 2z+1=2y+2z \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Thay $x=0,y=\frac{1}{2}$ vào (1), ta có: $z=-\frac{1}{2}$

Trường hợp này hệ có nghiệm: $\left(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Nếu $\overrightarrow{w}=-2\overrightarrow{v}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+1=-2x-2y \\ 2z+1=-2y-2z \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{-1-3x}{2} \\ z=\dfrac{3x}{4} \end{cases}$$

Thay vào (1), ta có:

$$8x^2 = 2(1+3x)^2 = 7x + 21x^2$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5x + 2 = 0$$

Trường hợp này vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $(x;y;z) = \left(0;0;-\frac{1}{2}\right), \left(0;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\square$

30 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 & (1) \\ \frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}=4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = 4$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{xy}+\frac{2}{yz}+\frac{2}{zx}=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xz}+\frac{1}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{yz}+\frac{1}{z^2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=-\frac{1}{z} \\ \frac{1}{y}=-\frac{1}{z} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-z$$

Thế vào hệ ta có nghiệm: $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm là: $(x;y;z)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\square$

31 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2009x+2010y=(x-y)^2 \\ 2010y+2011z=(y-z)^2 \\ 2011z+2009x=(z-x)^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt: $a = 2009 > 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+(a+1)\,y=(x-y)^2\,(1) \\ (a+1)\,y+(a+2)\,z=(y-z)^2\,(2)\,(I) \\ (a+2)\,z+az=(z-x)^2\,(3) \end{cases}$$

Ta có: $ax = \frac{(x-y)^2+(z-x)^2-(y-z)^2}{2} = (x-y)(x-z)$

Tương tự: $(a+1)\,y=(y-x)(y-z)\,;(a+2)\,z=(z-x)(z-y)$

Từ đây suy ra: $ax.(a+1)\,y.(a+2)\,z=-[(x-y)(y-z)(z-x)]^2\le 0$

Từ (I) ta thấy tổng của từng cặp $ax,(a+1)\,y,(a+2)\,z$ đều không âm, ta sẽ chứng minh cả ba giá trị này đều không âm.

Thật vậy, giả sử $ax < 0 \Leftrightarrow x < 0$ Từ (1) và (3), suy ra:

$$(a+1)\,y > 0; (a+2)\,z > 0 \Leftrightarrow y, z > 0$$

hay $x - y < 0; x - z < 0 \Rightarrow ax = (x-y)(x-z) > 0$ (mâu thuẫn)
Do đó: $ax \geq 0$
Tương tự, ta cũng có: $(a+1)\,y \geq 0; (a+2)\,z \geq 0$
Nhưng tích của ba số này lại không âm nên ta phải có: $ax = (a+1)\,y = (a+2)\,z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$
Thử lại thấy thỏa
Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(x;y;z) = (0;0;0)\square$

32 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 = \cos(\pi x_2) \\ 3\sqrt{3}x_2 = \cos(\pi x_3) \\ 3\sqrt{3}x_3 = \cos(\pi x_4) \\ 3\sqrt{3}x_4 = \cos(\pi x_1) \end{cases}$$

Lời giải:

Giả sử $x_1 = max\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$.
Vậy nên dẫn đến có điều kiện sau: $0 < x_1; x_2; x_3; x_4 < \dfrac{1}{2}$
Do $y = cosx$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên từ các phương trình trong hệ ta được kết quả sau:

$$x_2 = min\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$$
$$x_3 = max\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$$
$$x_4 = min\,(x_1; x_2; x_3; x_4)$$

Thế nên hệ phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} 3\sqrt{3}x_1 = \cos(\pi x_2) \\ 3\sqrt{3}x_2 = \cos(\pi x_1) \end{cases}$$

Ta suy ra được phân tích:

$$3\sqrt{3}\,(x_1 - x_2) = 2\sin\frac{\pi\,(x_1 - x_2)}{2}.\sin\frac{\pi\,(x_1 + x_2)}{2}$$

Hay cũng là:

$$\frac{3\sqrt{3}\,(x_1 - x_2)}{2} \leq \sin\frac{\pi\,(x_1 - x_2)}{2} \leq \frac{\pi\,(x_1 - x_2)}{2} \quad (1)$$

Mà do giả thiết $x_1 \geq x_2$ và $3\sqrt{3} > \pi$ nên (1) xảy ra khi $x_1 = x_2$ hay $3\sqrt{3}\pi = \cos(\pi x_1)$
Vậy nên ta có được phân tích sau: $\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\pi - \cos(\pi x_1) = 0 \quad (2)$ Vế trái của (2) là một hàm đồng biến nên phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm
Dễ thấy $x_1 = \dfrac{1}{6}$ là nghiệm của phương trình (2)
Tóm lại là hệ phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 + \dfrac{1}{6}\square$

33 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \\ x,y,z>0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Nhân theo vế 2 phương trình trong hệ ta được: $(x+y+z)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\frac{1}{z})=9(*)$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức C-S ta có:$VT_{(*)} \geq (1+1+1)^2=9=VP_{(*)}$

Dấu "=" xảy ra khi x=y=z=1

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1;1;1).□

34 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+3x^2+2x-5=y \\ y^3+3y^2+2y-5=z \\ z^3+3z^2+2z-5=x \end{cases}$$

Lời giải:

Cộng theo vế 3 phương trình đã cho ta được:

$$x^3+y^3+z^3+3(x^2+y^2+z^2)+x+y+z=15(*)$$

Dễ thấy x=y=z=1 là một nghiệm.

Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} (x-1)[(x+2)^2+2]=y-1 \\ (y-1)[(y+2)^2+2]=z-1 \\ (z-1)[(z+2)^2+2]=x-1 \end{cases}$$

+Nếu $x>1 \Rightarrow y>1 \Rightarrow z>1$

Khi đó: VT(*)>15=VP suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

+Nếu $x<1 \Rightarrow y<1 \Rightarrow z<1$

Khi đó VT(*)<15=VP nên hệ phương trình cũng vô nghiệm.

Vậy $x=y=z=1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.□

Cách 2:

Viết lại hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-1)(x^2+4x+6)=y-1 \\ (y-1)(y^2+4y+6)=z-1 \\ (z-1)(z^2+4z+6)=x-1 \end{cases}$$

Trường hợp 1: Nếu $x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow z=1$. Suy ra $(1;1;1)$ là một nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $x \neq 1 \Rightarrow y \neq 1 \Rightarrow z \neq 1$. Khi đó, nhân vế theo vế ta được:

$$(x^2+4x+6)(y^2+4y+6)(z^2+4z+6)=1$$

. Điều này không thể xảy ra. Nên hệ có nghiệm duy nhất kể trên.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y;z)=(1;1;1)$□

35 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2 \\ y^2+yz+z^2=b^2 \\ z^2+zx+x^2=c^2 \end{cases}$$

Với $x;y;z$ là nghiệm, a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $x+y+z \le \sqrt{ab+bc+ca}$

Lời giải:

+Nếu x+y+z <0 ta có điều phải chứng minh.

+Nếu $x+y+z \ge 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(x+y+z)^2 \le \sum \sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)}$$

Trong đó:

$$\sum \sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)} = \sqrt{(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)}+$$
$$+\sqrt{(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)}+\sqrt{(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$\sqrt{m_1^2+n_1^2}+\sqrt{m_2^2+n_2^2} \ge \sqrt{(m_1+m_2)^2+(n_1+n_2)^2}$$

Ta có:

$$\sum \sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)} = \sum \sqrt{\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2\right]\left[\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2\right]}$$
$$\ge \sum\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)\left(x+\frac{z}{2}\right)+\frac{3}{4}yz\right] = \sum\left[x^2+yz+\frac{xy}{2}+\frac{xz}{2}\right]$$
$$=(x+y+z)^2$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh$\square$

36 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+6\sqrt{xy}-y=6 \\ x+6\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3 \end{cases}$$

Với $x;y;z$ là nghiệm, a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $x+y+z \le \sqrt{ab+bc+ca}$

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra xy cùng dấu. Hơn nữa từ phương trình thứ (2) ta thấy nếu $x,y<0$ thì phương trình này vô nghiệm nên suy ra hệ có nghiệm khi $x,y>0$ Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có : $\sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2} \Rightarrow 6 = x+6\sqrt{xy}-y \le x+3(x+y)-y = 4x+2y \Rightarrow 2x+y \ge 3$

Ta sẽ chứng minh:

$$x+\frac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)} \ge 2x+y \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} \ge \sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y \ (\star)$$

Ta có: $x+y \le \sqrt{2(x^2+y^2)}$. Để chứng minh $(\star)$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là:

$$\frac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} \ge 2\sqrt{2(x^2+y^2)} \ (1)$$

Mặt khác ta cũng có: $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ nên (1) sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được:

$$\frac{6(x^3+y^3)}{x^2+y^2+\dfrac{x^2+y^2}{2}} \ge 2\sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3) \ge (x^2+y^2)\sqrt{2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow x^6+y^6+4x^3y^3-3x^2y^2(x^2+y^2) \ge 0 \ (2)$$

Vì $y>0$ chia hai vế cho y^6 đặt $t=\dfrac{x}{y}>0$ bất đẳng thức (2) trở thành.

$$t^6-3t^4+4t^3-3t^2+1 \ge 0$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do: $t^6-3t^4+4t^3-3t^2+1=(t-1)^2(t^4+2t^3+2t+1)$
Như vậy ta có:

$$x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)} \ge 3$$

Kết hợp tất cả các vấn đề vừa chỉ ra ta thấy chỉ có bộ số x,y thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x,\ y>0 \\ 2x+y=3 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow$ $x=y=1$ là nghiệm của hệ phương trình.

5 Sử dụng phép thế lượng giác

$\boxed{1}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1 \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$

Đặt:

$$\begin{cases} x=\sin a\ ;\ a \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ y=\cos b\ ;\ b \in [0;\pi] \end{cases}$$

Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} \sin a+\sin b=1 \\ \cos a+\cos b=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}=1 \\ 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}=\sqrt{3} \end{cases}$$

Từ hệ trên ta thấy $\cos\dfrac{a-b}{2} \ne 0$ nên ta có:

$$\tan\frac{a+b}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow a+b=\frac{\pi}{3}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}\sin a+\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=1&\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)=1\\&\Leftrightarrow\cos\left(a-\frac{\pi}{6}\right)=1\\&\Leftrightarrow a-\frac{\pi}{6}=0\\&\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Với $a=\frac{\pi}{6}$ ta có: $\begin{cases}x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\\ y=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Đối chiếu điều kiện thỏa nên hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$□

2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1 & (1)\\ \sqrt{2}\,(x-y)\,(1+4xy)=\sqrt{3} & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1) gợi cho ta đặt ẩn phụ đưa về lượng giác.

Đặt: $\begin{cases}x=\sin\alpha\\ y=\cos\alpha\end{cases}\quad(\alpha\in[0;2\pi])$

Khi đó phương trình (2) được viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha-\cos\alpha)\,(1+2\sin 2\alpha)=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin\alpha-\cos\alpha+2\sin 2\alpha\sin\alpha-2\sin 2\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin\alpha-\cos\alpha+\cos\alpha-\cos 3\alpha-\sin 3\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\sin 3\alpha+\cos 3\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \Leftrightarrow\ &\cos\left(3\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{7\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\\ \alpha=-\frac{13\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

Vì $\alpha\in[0;2\pi]$ suy ra: $\alpha\in\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36};\frac{55\pi}{36};\frac{11\pi}{36};\frac{35\pi}{36};\frac{59\pi}{36}\right\}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(\sin\alpha;\cos\alpha)$ với $\alpha\in\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36};\frac{55\pi}{36};\frac{11\pi}{36};\frac{35\pi}{36};\frac{59\pi}{36}\right\}$ □

3 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}z^2+2xyz=1 & (1)\\ 3x^2y^2+3xy^2=1+x^3y^4 & (2)\\ z+zy^4+4y^3=4y+6y^2z & (3)\end{cases}$$

Lời giải:

Vì $z=0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên:

$$(1) \Leftrightarrow xy = \frac{1-z^2}{2z}$$

Đặt $z=\tan\varphi\,(*)$ với $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$
Ta có:

$$xy = \frac{1-z^2}{2z} = \frac{1-\tan^2\varphi}{2\tan\varphi} = \cot 2\varphi$$

Thay vào (2) ta được :

$$3\cot^2 2\varphi + 3y\cot 2\varphi = 1 + y\cot^3 2\varphi \Leftrightarrow y = \frac{3\cot^2 2\varphi - 1}{\cot^3 2\varphi - 3\cot 2\varphi} = \frac{1}{\cot 6\varphi} = \tan 6\varphi$$

Ta suy ra: $x = \cot 2\varphi.\cot 6\varphi$ Thay vào (3) ta được :

$$z = \frac{4\tan 6\varphi - 4\tan^3 6\varphi}{1 - 6\tan^2 6\varphi + \tan^4 6\varphi} = \tan 24\varphi(**)$$

Từ $(*)$và $(**)$ ta có:

$$\tan 24\varphi = \tan\varphi$$
$$\Leftrightarrow 24\varphi = \varphi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \varphi = \frac{k\pi}{23}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Với $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$ ta thu được:

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{23}, \pm\frac{2\pi}{23}, \pm\frac{3\pi}{23}, \pm\frac{4\pi}{23}, \pm\frac{5\pi}{23}, \pm\frac{6\pi}{23}, \pm\frac{7\pi}{23}, \pm\frac{8\pi}{23}, \pm\frac{9\pi}{23}, \pm\frac{10\pi}{23}, \pm\frac{11\pi}{23}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là: $(x;y;z) = (\cot 2\varphi.\cot 6\varphi; \tan 6\varphi; \tan\varphi)$
với $\varphi = \pm\frac{\pi}{23}, \pm\frac{2\pi}{23}, \pm\frac{3\pi}{23}, \pm\frac{4\pi}{23}, \pm\frac{5\pi}{23}, \pm\frac{6\pi}{23}, \pm\frac{7\pi}{23}, \pm\frac{8\pi}{23}, \pm\frac{9\pi}{23}, \pm\frac{10\pi}{23}, \pm\frac{11\pi}{23}$ □

4 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2z(x+y) + 1 = x^2 - y^2 \, (1) \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2zx - 2yz \, (2) \\ y(3x^2 - 1) = -2x(x^2+1) \, (3) \end{cases}$$

Lời giải:

Vì $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa phương trình (3) nên:

$$(3) \Leftrightarrow y = \frac{-2x(x^2+1)}{3x^2-1} \Leftrightarrow x + y = \frac{3x^3 - x - 2x(x^2+1)}{3x^2-1} \Leftrightarrow x + y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2-1}$$

Đặt: $x = \tan\varphi, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\} \Rightarrow \cos\varphi \neq 0, \cos 3\varphi \neq 0$
Ta có:

$$\tan\varphi + y = \frac{\tan^3\varphi - 3\tan\varphi}{3\tan^2\varphi - 1} \Leftrightarrow y = \tan 3\varphi - \tan\varphi$$

(1) $\Leftrightarrow z=\frac{x^2-y^2-1}{2(x+y)}$ (do $x=-y$ không thỏa phương trình (1) $\Rightarrow \tan 3\varphi \neq 0$)

$$\Leftrightarrow z=\frac{(2\tan\varphi-\tan 3\varphi).\tan 3\varphi-1}{2\tan 3\varphi}=\frac{2\tan\varphi.\tan 3\varphi-\tan^2 3\varphi-1}{2\tan 3\varphi}$$
$$\Leftrightarrow z=\tan\varphi-\frac{\tan 3\varphi+\cot 3\varphi}{2}=\tan\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi}+\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}\right)$$
$$\Leftrightarrow z=\tan\varphi-\frac{1}{\sin 6\varphi}$$

$$(2)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2zx+2yz=1+x^2$$
$$\Leftrightarrow (y+z-x)^2=1+x^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\tan 3\varphi-\tan\varphi+\tan\varphi-\frac{1}{\sin 6\varphi}-\tan\varphi\right)^2=1+\tan^2\varphi$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi}-\frac{1}{2\sin 3\varphi.\cos 3\varphi}-\tan\varphi\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\sin^2 3\varphi-1}{2\sin 3\varphi.\cos 3\varphi}-\tan\varphi\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6\varphi}{\sin 6\varphi}+\tan\varphi\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6\varphi.\cos\varphi+\sin 6\varphi.\sin\varphi}{\sin 6\varphi.\cos\varphi}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos 5\varphi}{\sin 6\varphi.\cos\varphi}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$
$$\Leftrightarrow \cos 5\varphi=\pm\sin 6\varphi$$
$$\Leftrightarrow \cos 5\varphi=\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\varphi\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-6\varphi\right)\\ \cos 5\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+6\varphi\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5\varphi=\pm\left(\frac{\pi}{2}-6\varphi\right)+k2\pi\\ 5\varphi=\pm\left(\frac{\pi}{2}+6\varphi\right)+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi=\frac{\pi}{22}+\frac{k2\pi}{11},\varphi=\frac{\pi}{2}-k2\pi\\ \varphi=-\frac{\pi}{22}+\frac{k2\pi}{11},\varphi=-\frac{\pi}{2}-k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Với: $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}\Rightarrow\varphi=\pm\frac{\pi}{22};\pm\frac{3\pi}{22};\pm\frac{5\pi}{22};\pm\frac{7\pi}{22};\pm\frac{9\pi}{22}$
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là:
$(x;y;z)=\left(\tan\varphi;\tan 3\varphi-\tan\varphi;\tan\varphi-\frac{1}{\sin 6\varphi}\right),\varphi=\pm\frac{\pi}{22};\pm\frac{3\pi}{22};\pm\frac{5\pi}{22};\pm\frac{7\pi}{22};\pm\frac{9\pi}{22}\square$

$\boxed{5}$ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right) & (1)\\ xy+yz+zx=1 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

ĐK: $xyz \neq 0$

Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-x, -y, -z)$ cũng là một nghiệm của hệ và từ (1) suy ra x, y, z cùng dấu nên ta chỉ cần xét x, y, z dương là đủ.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Đặt: $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \\ z = \tan\gamma \end{cases}, \alpha;\beta;\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right) = 4\left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\beta}\right) = 5\left(\tan\gamma + \dfrac{1}{\tan\gamma}\right) (3) \\ \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1\,(4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow 3\frac{\tan^2\alpha + 1}{\tan\alpha} = 4\frac{\tan^2\beta + 1}{\tan\beta} = 5\frac{\tan^2\gamma + 1}{\tan\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin\beta} = \frac{5}{\sin\gamma}\,(5)$$

$$(4) \Leftrightarrow \tan\alpha\left(\tan\beta + \tan\gamma\right) = 1 - \tan\beta\tan\gamma$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1 - \tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta + \tan\gamma} = \cot\left(\beta + \gamma\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}\,(6)$$

Từ (5) và(6), suy ra $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ là các góc trong một tam giác vuông, có các cạnh là 3, 4, 5

Do đó: $2\gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan\gamma = 1 = z$ Từ đó ta có:

$$\begin{cases} \tan\beta = y = \dfrac{1}{2} \\ \tan\alpha = x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -1\right)$ $\square$

6 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 1 & (1) \\ 20\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 11\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 2007\left(z + \dfrac{1}{z}\right) & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $xyz \neq 0$

Nếu $(x; y; z)$ là một nghiệm của hệ thì $(-x; -y; -z)$ cũng là một nghiệm của hệ và từ (1) suy ra x, y, z cùng dấu nên ta chỉ cần xét x, y, z dương.

Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ và khác 0, đặt: $\begin{cases} x = \tan\alpha \\ y = \tan\beta \\ z = \tan\gamma \end{cases}$ với $0 < \alpha, \beta, \gamma < \dfrac{\pi}{2}$

Từ đó hệ (1) và (2) trở thành:

$$\begin{cases} \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1 & (3) \\ 20\left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right) = 11\left(\tan\beta + \dfrac{1}{\tan\beta}\right) = 2007\left(\tan\gamma + \dfrac{1}{\tan\gamma}\right) & (4) \end{cases}$$

Ta có:

$$\bullet\ (3) \Leftrightarrow \tan\alpha\left(\tan\beta+\tan\gamma\right)=1-\tan\alpha\tan\gamma$$
$$\Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{1-\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta+\tan\gamma}=\cot\left(\beta+\gamma\right)$$
$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow 2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma \text{ là các góc trong một tam giác}$$

$$\bullet\ (4) \Leftrightarrow 20\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha}=11\frac{\tan^2\beta+1}{\tan\beta}=2007\frac{\tan^2\gamma+1}{\tan\gamma}$$
$$\Leftrightarrow \frac{20}{\sin 2\alpha}=\frac{11}{\sin 2\beta}=\frac{2007}{\sin 2\gamma}$$

áp dụng định lý sin ta tính được ba cạnh của tam giác có 3 góc $2\alpha,\ 2\beta, 2\gamma$ là:

$$\begin{cases} a=20\\ b=11\\ c=2007\end{cases}$$

Dễ thấy a,b,c không thỏa mãn bất đẳng thức trong tam giác do đó tam giác trên không tồn tại.
Do đó hệ đã cho vô nghiêm$\square$

$\boxed{7}$ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2+2\sqrt{3}xy-y^2=1 & (1)\\ z\left(yz-2\right)+y=0 & (2)\\ z^2x+z^2+x=1 & (3)\end{cases}$$

Lời giải:

Từ (2) ta có:

$$yz^2-2z+y=0 \Leftrightarrow y\left(z^2+1\right)=2z \Leftrightarrow y=\frac{2z}{z^2+1}$$

Từ (3) ta có:

$$x\left(z^2+1\right)=1-z^2 \Leftrightarrow x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Đặt: $z=\tan\dfrac{a}{2};\ a\in(-\pi;\pi) \Rightarrow \begin{cases} x=\cos a\\ y=\sin a\end{cases}$

Thế vào phương trình (1) ta được:

$$\cos^2 a+2\sqrt{3}\sin a\cos a=\sin^2 a+1$$
$$\Leftrightarrow \cos 2a+\sqrt{3}\sin 2x=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2a=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(2a-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ a=k\pi\end{array}\right.$$

Vì: $a\in(-\pi;\pi)$ suy ra: $a\in\left\{0;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right\}$

Từ đó ta có:

- Với $a=0$ suy ra: $x=1;\ y=0;\ z=0$

- Với $a = \dfrac{\pi}{3}$ suy ra: $x = \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ z = \sqrt{3}$

- Với $a = \dfrac{4\pi}{3}$ suy ra: $x = -\dfrac{1}{2};\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ z = -\sqrt{3}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y;z) = (1;0;0);\ \left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{3}\right)\ \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\square$

8 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = y + 2 \\ y^2 = z + 2 \\ z^2 = x + 2 \end{cases}$$

Lời giải:

Dẽ thấy $x, y, x \geq -2$

Giả sử: $x = Max(x;y;z)$

+Nếu $x > 2 \Rightarrow y > 2 \Rightarrow z > 2$.

Do x=Max(x;y;z) suy ra x>y nên $z^2 = x + 2 > y + 2 = x^2 \Rightarrow z > x(VL)$

+Nếu $x \leq 2$ suy ra $x, y, z \leq 2$.

Đặt:$x = 2\cos a; y = 2\cos b; z = 2\cos c\,(a;b;c \in [0;\pi])$

Thay vào hễ đã cho dễ có:

$$\begin{cases} \cos b = \cos 2a \\ \cos c = \cos 2b \\ \cos a = \cos 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 2a \\ b = 2\pi - 2a \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} c = 2b \\ c = 2\pi - 2b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a = 2c \\ a = 2\pi - 2c \end{array}\right. \end{cases}$$

Đây là hệ cơ bản, giải ra với chú ý $a, b, c \in [0;\pi]$ ta thu được nghiệm của hệ phương trình đã cho là hoán vị vòng quanh của các bộ số sau:

$(a;b;c) = (0;0;0)\,;\left(\frac{4\pi}{9};\frac{8\pi}{9};\frac{2\pi}{9}\right);\left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right);\left(\frac{2\pi}{7};\frac{4\pi}{7};\frac{6\pi}{7}\right)\square$