

NGUYÊN HÀM_CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH NGUYÊN HÀM

I – TỔNG QUAN LÝ THUYẾT:

1. Nguyên hàm

a. Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

b. Định lý:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Ký hiệu $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Chú ý: $\int [f(x).g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$; $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$.

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = ax + b; a \neq 0$)	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int 0dx = C$		$\int 0du = C$
$\int dx = x + C$		$\int du = u + C$

$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax+b)^{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)	$\int A^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{A^{ax+b}}{\ln A} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$)
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{\tan(ax+b)}{a} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{\cot(ax+b)}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

II – PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b$ ($a \neq 0$) thì ta có $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

Vì $v'(x) dx = dv$, $u'(x) dx = dv$ nên đẳng thức còn được viết dưới dạng: $\int u dv = uv - \int v du$

II – BÀI TẬP TỰ LUẬN MINH HỌA:

Nhóm kỹ năng:**MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI CƠ BẢN****Ví dụ 1:** Xác định:

$$\text{a) } \int (x+1)^2 (2x-1) dx. \quad \text{b) } \int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x + 2}{x} dx. \quad \text{c) } \int (4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x}) dx. \quad (x > 0).$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \int (x+1)^2 (2x-1) dx = \int (x^2 + 2x + 1)(2x-1) dx = \int (2x^3 + 3x^2 - 1) dx = \frac{x^4}{2} + x^3 - x + C.$$

$$\text{b) Ta có: } \int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x + 2}{x} dx = \int \left(x^3 - 3x + 4 + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + C.$$

$$\text{c) Ta có, với } x > 0: \int (4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x}) dx = \int \left(4x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{4}} \right) dx = \frac{4x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{3x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = 3x\sqrt[3]{x} + \frac{12}{5}x\sqrt[4]{x} + C.$$

Ví dụ 2: Xác định:

$$\text{a) } \int 4^{2x+1} dx. \quad \text{b) } \int e^x (2 - e^x)^2 dx. \quad \text{c) } \int \frac{e^{2x} + 2 + e^{4x}}{e^{-x}} dx.$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \int 4^{2x+1} dx = \frac{4^{2x+1}}{2\ln 4} + C.$$

$$\text{Nhận xét: } \frac{4^{2x+1}}{2\ln 4} = \frac{4^{2x+1}}{4\ln 2} = \frac{4^{2x}}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \cdot 16^x = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{4x} \text{ (để phát triển đáp án trong vấn đề trắc nghiệm).}$$

$$\text{b) Ta có: } \int e^x (2 - e^x)^2 dx = \int e^x (4 - 4e^x + e^{2x}) dx = \int (4e^x - 4e^{2x} + e^{3x}) dx = 4e^x - 2e^{2x} + \frac{e^{3x}}{3} + C.$$

$$\text{c) Ta có: } \int \frac{e^{2x} + 2 + e^{4x}}{e^{-x}} dx = \int (e^{3x} + 2e^x + e^{5x}) dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2e^x + \frac{e^{5x}}{5} + C.$$

Ví dụ 3: Xác định:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int (2\sin 4x + 3\cos 5x + 1) dx. & \text{b) } \int (4\sin^2 2x + 6\cos^2 x) dx. \\ \text{c) } \int 2\sin^4 3x dx. & \text{d) } \int (\sin^4 2x + \cos^4 2x) dx. \end{array}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \int (2\sin 4x + 3\cos 5x + 1) dx = -\frac{\cos 4x}{2} + \frac{3\sin 5x}{5} + x + C.$$

b) Ta có: $\int (4\sin^2 2x + 6\cos^2 x) dx = \int [2(1 - \cos 4x) + 3(1 + \cos 2x)] dx = \int (3\cos 2x - 2\cos 4x + 5) dx$
 $= \frac{3\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{2} + 5x + C.$

c) Ta có: $2\sin^4 3x = 2(\sin^2 3x)^2 = 2\left(\frac{1 - \cos 6x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - 2\cos 6x + \cos^2 6x)$
 $= \frac{1}{2}\left(1 - 2\cos 6x + \frac{1 + \cos 12x}{2}\right) = \frac{3}{4} - 2\cos 6x + \frac{\cos 12x}{4}.$

Vậy $\int 2\sin^4 3x dx = \int \left(\frac{3}{4} - 2\cos 6x + \frac{\cos 12x}{4}\right) dx = \frac{3x}{4} - \frac{\sin 6x}{3} + \frac{\sin 12x}{48} + C.$

d) Ta có: $\sin^4 2x + \cos^4 2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 8x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 8x}{4}.$

Vậy $\int (\sin^4 2x + \cos^4 2x) dx = \int \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 8x}{4}\right) dx = \frac{3}{4}x + \frac{\sin 8x}{32} + C.$

Ví dụ 4: Xác định:

a) $\int 2\sin 3x \cos 2x dx.$

b) $\int 6\sin 4x \sin 2x dx.$

c) $\int \cos 5x \cos 2x dx.$

d) $\int 8\sin 3x \cos 2x \sin 6x dx.$

Lời giải:

a) Ta có: $\int 2\sin 3x \cos 2x dx = \int (\sin x + \sin 5x) dx = -\cos x - \frac{\cos 5x}{5} + C.$

b) Ta có: $\int 6\sin 4x \sin 2x dx = 3\int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \frac{3\sin 2x}{2} + \frac{\sin 6x}{2} + C.$

c) Ta có: $\int \cos 5x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos 7x) dx = \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 7x}{14} + C.$

d) Ta có: $8\sin 3x \cos 2x \sin 6x = 4(\sin x + \sin 5x)\sin 6x = 4\sin x \sin 6x + 4\sin 5x \sin 6x$
 $= 2(\cos 5x - \cos 7x) + 2(\cos x - \cos 11x) = 2\cos x + 2\cos 5x - 2\cos 7x - 2\cos 11x.$

Vậy $\int 8\sin 3x \cos 2x \sin 6x dx = \int (2\cos x + 2\cos 5x - 2\cos 7x - 2\cos 11x) dx$
 $= 2\sin x + \frac{2\sin 5x}{5} - \frac{2\sin 7x}{7} - \frac{2\sin 11x}{11} + C.$

Bài tập tự luyện: Xác định các nguyên hàm sau:

1) $\int (3x+1)^2 (2x+1) dx.$

2) $\int \frac{x^4 - 7x^2 + 2x + 5}{x^2} dx.$

3) $\int (4\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}) dx. (x > 0).$

4) $\int 9^{2x+1} dx.$

5) $\int e^{2x} (3 + e^{-x})^2 dx.$

6) $\int \frac{e^{2x} - 2 + \sqrt{e^{4x}}}{e^x} dx.$

7) $\int (3 \sin 2x + 2 \cos 7x + 1) dx.$

8) $\int (2 \sin^2 2x + 4 \cos^2 4x) dx.$

9) $\int 6 \sin^4 2x dx.$

10) $\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx.$

11) $\int 8 \sin 3x \cos 6x dx.$

12) $\int 10 \sin 2x \sin 8x dx.$

13) $\int 4 \cos 5x \cos 3x dx.$

14) $\int 16 \sin 2x \cos 3x \sin 6x dx.$

Nhóm kỹ năng:**NGUYÊN HÀM CÁC HÀM SỐ PHÂN THỨC**Nội dung:

Để tìm nguyên hàm của hàm số $\frac{P(x)}{Q(x)}$, trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức, ta thực hiện như sau:

- Nếu bậc của $P(x)$ không nhỏ hơn bậc của $Q(x)$, thì ta tách **phần nguyên** ra, tức là biểu

hiển: $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, trong đó $M(x)$ là đa thức, và $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ là phân thức có bậc của

$P_1(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$.

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu, thì ta phân tích mẫu thành tích các nhị thức bậc nhất và các tam thức bậc hai có biệt số âm:

$$Q(x) = (x-a)^m \dots (x^2 + px + q)^n \quad \Delta = p^2 - 4q < 0$$

- **Phân tích phân thức hữu tỉ thành các phân thức đơn giản:**

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x-a)^m (x^2 + px + q)^n} &= \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)} + \dots \\ &+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^{n-1}} \dots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)} \end{aligned}$$

- **Đồng nhất hai vế** để tìm các hệ số $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$.

Cuối cùng việc tìm nguyên hàm của các phân thức hữu tỉ được đưa về nguyên hàm của đa thức và các phân thức hữu tỉ đơn giản.

LUYỆN TẬP:

Ví dụ 1: Xác định các nguyên hàm sau:

$$\text{a) } I_1 = \int \frac{3x+1}{x-4} dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int \frac{x^4+4x-2}{2x+1} dx$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } I_1 = \int \frac{3x+1}{x-4} dx = \int \frac{3(x-4)+13}{x-4} dx = \int 3 dx + 13 \int \frac{1}{x-4} dx = 3x + 13 \ln|x-4| + C$$

$$\text{b) Biểu diễn: } \frac{x^4+4x-2}{2x+1} = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{12} + \frac{47}{24} + \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

Lúc đó:

$$I_2 = \int \frac{x^4+4x-2}{2x+1} dx = \int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{31}{16} - \frac{63}{16} \cdot \frac{1}{2x+1} \right) dx = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{16} + \frac{31x}{16} - \frac{63}{32} \ln|2x+1| + C.$$

Ví dụ 2: Xác định các nguyên hàm sau:

$$\text{a) } I_1 = \int \frac{3}{x^2-4} dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int \frac{1}{x^2-5x+6} dx$$

$$\text{c) } I_3 = \int \frac{1}{2x^2-3x+1} dx$$

Lời giải

a) Ta có:

$$I_1 = \int \frac{3}{x^2-4} dx = 3 \int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{3}{4} \int \frac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{3}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

b) Tương tự:

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = \int \frac{(x-2)-(x-3)}{(x-2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$$

$$\text{c) Phân tích: } \frac{1}{2x^2-3x+1} = \frac{1}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\text{Hướng 1: } I_3 = \int \frac{1}{2x^2-3x+1} dx = \int \frac{1}{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \int \left[\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)-(x-1)}{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} \right] dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-\frac{1}{2}} \right) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} \right| + C = \ln \left| \frac{2x-2}{2x-1} \right| + C$$

$$\text{Hướng 2: } I_3 = \int \frac{1}{2x^2-3x+1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(2x-1)} dx = \int \frac{(2x-1)-2(x-1)}{(x-1)(2x-1)} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-1} \right) dx = \ln|x-1| - \ln|2x-1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C$$

Nhận xét: Hướng 2 giải quyết tốt và gọn gàng hơn.

Ví dụ 3: Xác định các nguyên hàm sau:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4} dx$

b) $\int \frac{x^2+x}{x^2-5x+6} dx$

c) $\int \frac{2x^3+x}{x^2-3x+2} dx$

Lời giải

a) Phân tích: $\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} = \frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)} \quad (*)$$

Cách 1: $(*) \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} = \frac{(A+B)x+(-4A-B)}{(x-1)(x-4)}$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (A+B)x+(-4A-B) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -4A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$$

Cách 2: Từ $(*)$ đồng nhất ta có: $2x+1 = A(x-4) + B(x-1) \quad (**)$

Thay $x=1$ vào $(**)$: $3 = -3A \Leftrightarrow A = -1$.

Thay $x=4$ vào $(**)$: $9 = 3B \Leftrightarrow B = 3$.

Lúc đó:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4} \Rightarrow \int \frac{2x+1}{x^2-5x+4} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x-4} dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-4| + C$$

Cách 3: $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4} dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-4)} dx = \int \frac{2(x-1)+3}{(x-1)(x-4)} dx = \int \left(\frac{2}{x-4} + \frac{3}{(x-1)(x-4)} \right) dx$.

Nhận xét: Cách giải 2, tỏ ra khoa học và tốt hơn cách 1.

Ví dụ 4: Xác định các nguyên hàm sau:

a) $I_1 = \int \frac{x^2-x+4}{x^3-3x^2+2x} dx$

b) $I_2 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} dx$

c) $I_3 = \int \frac{x^2}{(x-1)^5} dx$

Lời giải

a) Phân tích: $\frac{x^2-x+4}{x^3-3x^2+2x} = \frac{x^2-x+4}{x(x^2-3x+2)} = \frac{x^2-x+4}{x(x-1)(x-2)}$

Sử dụng đồng nhất thức: $\frac{x^2-x+4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \quad (\forall x)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x+4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow x^2-x+4 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1) \quad \forall x \quad (*)$$

Thay $x=0$ vào (*), ta được: $4=2A \Leftrightarrow A=2$

Thay $x=1$ vào (*), ta được: $4=-B \Leftrightarrow B=-4$

Thay $x=2$ vào (*), ta được: $6=2C \Leftrightarrow C=3$.

Lúc đó: $I_1 = \int \frac{x^2-x+4}{x^3-3x^2+2x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-4}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = 2\ln|x| - 4\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

b) Phân tích: $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3} \quad (\forall x)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)} \quad (\forall x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2 \quad (\forall x) \quad (*)$$

Thay $x=1$ vào (*) ta được: $2=4B \Leftrightarrow B=\frac{1}{2}$.

Thay $x=-3$ vào (*) ta được: $10=16C \Leftrightarrow C=\frac{5}{8}$.

Thay $x=0$ vào (*) ta được: $1=-3A+3B+C \Leftrightarrow A=\frac{3B+C-1}{3}=\frac{3}{8}$.

Lúc đó: $I_2 = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)} dx = \int \left(\frac{3/8}{x-1} + \frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{5/8}{x+3} \right) dx = \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{8}\ln|x+3| + C$

c) Phân tích: $\frac{x^2}{(x-1)^5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4} + \frac{E}{(x-1)^5}$

Sử dụng phương pháp đồng nhất thức như trên.

Bài tập tương tự: Xác định các nguyên hàm sau:

- | | | |
|---------------------------------------|---|--------------------------------------|
| 1) $\int \frac{2}{4x^2-9} dx$ | 2) $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4} dx$ | 3) $\int \frac{2x^3+x}{x^2-3x+2} dx$ |
| 4) $\int \frac{2x-6}{(x-2)(3x-1)} dx$ | 5) $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$ | 6) $\int \frac{x+2}{x(x-3)} dx$ |

7) $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 6x + 5} dx$

8) $\int \frac{1}{(x^2 - 2x)^2} dx$

9) $\int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)} dx$

10) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

11) $\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2(x+3)} dx$

12) $\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx$

Nhóm kỹ năng:**NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN****DẠNG 1:**

$$I = \int f(x) \left| \begin{matrix} \sin x \\ \cos x \end{matrix} \right| dx, \text{ trong đó } f(x): \text{ đa thức.}$$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = \sin x dx & \text{chọn: } v = \int \sin x dx \end{cases}$

Ví dụ 1: Xác định:

a) $\int (x+1) \sin 2x dx.$

b) $\int (x^2 + x) \cos x dx.$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ \sin 2x dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases}$

Ta có: $\int (x+1) \sin 2x dx = -\frac{(x+1)\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} dx = -\frac{(x+1)\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x \Rightarrow du = (2x+1)dx \\ \cos x dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = \sin x \end{cases}$. Ta có: $\int (x^2 + x) \cos x dx = (x^2 + x) \sin x - \int (2x+1) \sin x dx.$

Xét $\int (2x+1) \sin x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ \sin x dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = -\cos x \end{cases}$

Ta có: $\int (2x+1) \sin x dx = -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C.$

Vậy $\int (x^2 + x) \cos x dx = (x^2 + x) \sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x + C'.$

DẠNG 2:

$$I = \int f(x).e^x dx, \text{ trong đó } f(x): \text{ đa thức.}$$

Phương pháp: Đặt $\begin{cases} u = f(x) & \Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = e^x dx & \text{chọn: } v = \int e^x dx \end{cases}$

Ví dụ 2: Xác định:

a) $\int (x+1)e^{2x} dx.$

b) $\int (x^2 + 4x)e^x dx.$

Lời giải

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = x + 1 \Rightarrow du = dx \\ e^{2x} dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases} \text{ Ta có: } \int (x+1)e^{2x} dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} u = x^2 + 4x \Rightarrow du = (2x+4)dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = e^x \end{cases} \text{ Ta có: } \int (x^2 + 4x)e^x dx = (x^2 + 4x)e^x - \int (2x+4)e^x dx$$

$$\text{Xét } \int (2x+4)e^x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = 2x+4 \Rightarrow du = 2dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \int (2x+4)e^x dx = (2x+4)e^x - \int 2e^x dx = (2x+4)e^x - 2e^x + C.$$

$$\text{Vậy } \int (x^2 + 4x)e^x dx = (x^2 + 4x)e^x - (2x+4)e^x + 2e^x + C'.$$

DẠNG 3:

$$I = \int f(x) \left| \frac{\ln x}{\log_a x} \right| dx, \text{ trong đó } f(x): \text{ đa thức.}$$

$$\boxed{\text{Phương pháp:}} \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = f(x) dx \Rightarrow \text{chọn: } v = \int f(x) dx \end{cases}$$

Ví dụ 3: Xác định:

$$\text{a) } \int (2x+1) \ln x dx.$$

$$\text{b) } \int x \ln(x^2 - x) dx.$$

Lời giải

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ (2x+1) dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = x^2 + x \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \int (2x+1) \ln x dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x+1) dx = (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \Rightarrow du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx \\ x dx = dv \Rightarrow \text{chọn } v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \int x \ln(x^2 - x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2(2x-1)}{x^2-x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - x) - \frac{1}{2} \int \left(2x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x^2 - x) - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x-1| + C.$$

Bài tập tương tự:

1) Xác định các nguyên hàm sau:

$$I_1 = \int x \sin x dx$$

$$I_2 = \int x \cos 2x dx$$

$$I_3 = \int 2x \cos^2 x dx$$

$$I_4 = \int (2x-1) \cos^2 x dx$$

$$I_5 = \int (x^2+1) \sin x dx$$

$$I_6 = \int (x + \cos^2 x) \sin x dx$$

$$I_7 = \int (x + \sin^2 x) \cos x dx$$

$$I_8 = \int \frac{x + \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$I_9 = \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$I_{10} = \int x(2 \cos^2 x - 1) dx$$

$$I_{11} = \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$$

$$I_{12} = \int x \sin \sqrt{x} dx$$

$$I_{13} = \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$I_{14} = \int x \tan^2 x dx$$

$$I_{15} = \int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$$

$$I_{16} = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$I_{17} = \int (x^2 + 5) \sin x dx$$

$$I_{18} = \int \frac{x}{\cos 2x + 1} dx$$

2) Xác định các nguyên hàm sau:

$$I_1 = \int x e^x dx$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx$$

$$I_3 = \int (x+1)^2 e^{2x} dx$$

$$I_4 = \int e^{\sqrt{x}} dx$$

$$I_5 = \int x^3 e^{x^2} dx$$

$$I_6 = \int 2^x x dx$$

$$I_7 = \int (x^2 + 2x - 1) e^x dx$$

$$I_8 = \int e^{\cos x} \cdot \sin 2x dx$$

$$I_9 = \int e^{x+\ln x} dx$$

3) Xác định các nguyên hàm sau:

$$I_1 = \int \ln x dx$$

$$I_2 = \int x \ln x dx$$

$$I_3 = \int \ln^2 x dx$$

$$I_4 = \int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$$

$$I_5 = \int \log_2 (x-3) dx$$

$$I_6 = \int \lg x dx$$

$$I_7 = \int 2x \ln(1+x) dx$$

$$I_8 = \int x \ln(1+x^2) dx$$

$$I_9 = \int \ln(x^2 - x) dx$$

$$I_{10} = \int \ln(x^2 + 1) dx$$

$$I_{11} = \int x^2 \ln x dx$$

$$I_{12} = \int x^3 \ln^2 x dx$$

$$I_{13} = \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$I_{14} = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$I_{15} = \int (1 - \ln x)^2 dx$$

$$I_{16} = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

$$I_{17} = \int x \ln(x^2 + 1) dx$$

$$I_{18} = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) \ln x dx$$

4) Xác định các nguyên hàm sau:

$$I_1 = \int e^x \cos x dx$$

$$I_2 = \int \cos(\ln x) dx$$

$$I_3 = \int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx$$

$$I_4 = \int 5e^x \sin 2x dx$$

$$I_5 = \int e^{3x} \cdot \sin 5x dx$$

$$I_6 = \int \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) dx$$

$$I_7 = \int e^{2x} \sin^2 x dx$$

$$I_8 = \int \sin x \ln(\cos x) dx$$

$$I_9 = \int \ln(x^2 + x) dx$$

$$I_{10} = \int (x + \cos x) \sin x dx$$

$$I_{11} = \int x \sin x \cos^2 x dx$$

$$I_{12} = \int (x \ln x)^2 dx$$

Nhóm kỹ năng:**ĐỔI BIẾN****Ví dụ 1:** Xác định

a) $A = \int \tan x dx.$

b) $B = \int \cot x dx.$

Lời giải

a) $A = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Khi đó: $A = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$

b) $B = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Khi đó: $A = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$

Ví dụ 2: Xác định nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x) = e^{1+\cos x} \sin x.$

b) $f(x) = \sin^3 x \cos^5 x.$

Lời giải

a) $I = \int f(x) dx = \int e^{1+\cos x} \sin x dx.$

Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Khi đó: $I = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{1+\cos x} + C.$

b) $I = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^5 x dx.$

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$

Khi đó: $I = -\int (1 - t^2) t^5 dt = \int (t^7 - t^5) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C.$

Ví dụ 3: Xác định các nguyên hàm sau:

a) $A = \int \frac{9x^2 - 12x}{x^3 - 2x^2 + 5} dx.$

b) $B = \int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx.$

Lời giải

a) $A = \int \frac{9x^2 - 12x}{x^3 - 2x^2 + 5} dx = \int \frac{3(3x^2 - 4x)}{x^3 - 2x^2 + 5} dx.$

Đặt $t = x^3 - 2x^2 + 5 \Rightarrow dt = (3x^2 - 4x) dx$. Khi đó: $A = \int \frac{3dt}{t} = 3\ln|t| + C = 3\ln|x^3 - 2x^2 + 5| + C.$

$$b) B = \int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2t dt = dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } B &= \int \frac{(t^2-1)-1}{t} 2t dt = 2 \int (t^2-2) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - 2t \right) + C \\ &= 2\sqrt{x+1} \left(\frac{x+1}{3} - 2 \right) + C = \frac{2\sqrt{x+1}(x-5)}{3} + C. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Xác định các nguyên hàm sau:

$$a) A = \int \frac{(\ln x + 1)^2}{x} dx.$$

$$b) B = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

Lời giải

$$a) A = \int \frac{(\ln x + 1)^2}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x + 1 \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}. \text{ Khi đó: } A = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\ln x + 1)^3}{3} + C.$$

$$b) B = \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

$$\text{Đặt } t = \ln(\ln x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x \ln x} dx. \text{ Khi đó: } B = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C.$$

Ví dụ 5: Xác định các nguyên hàm sau:

$$a) I = \int \frac{e^{-x} - 1}{x + e^{-x}} dx.$$

$$b) J = \int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx.$$

Lời giải

$$a) I = \int \frac{e^{-x} - 1}{x + e^{-x}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 + e^{-x} \Rightarrow dt = (-e^{-x}) dx. \text{ Khi đó: } I = - \int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|1 + e^{-x}| + C.$$

$$b) J = \int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x - \cos x \Rightarrow dt = (\cos x + \sin x) dx. \text{ Khi đó: } J = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x - \cos x} + C.$$

Bài tập tương tự: Xác định các nguyên hàm sau:

$$1) A = \int \frac{\sqrt{1 + \cot x}}{\sin^2 x} dx.$$

$$6) F = \int \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx.$$

2) $B = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$

7) $G = \int e^{\cos 2x} \sin x \cos x dx.$

3) $C = \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$

8) $H = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx.$

4) $D = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$

9) $I = \int \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 x} dx.$

5) $E = \int x^3 \sqrt[3]{x^2-1} dx.$

10) $K = \int \cos^4 x dx.$

Nhóm kỹ năng:**DÙNG VI PHÂN****Ví dụ 1:** Xác định

a) $I = \int \tan x dx.$

b) $I = \int \cot x dx.$

Lời giải

a) Ta có: $I = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

b) Ta có: $I = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Ví dụ 2: Xác định

a) $I = \int \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx.$

b) $I = \int (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx.$

Lời giải

a) Ta có: $I = \int \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = \int \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+\sin 2x)}{1+\sin 2x} = \frac{1}{2} \ln(1+\sin 2x) + C.$

Nhận xét: So với phép đổi biến $t = 1 + \sin 2x$ thì cách dùng vi phân tỏ ra khoa học hơn.

b) Ta có: $I = \int (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx = \int e^{\sin x} \cos x dx + \int \cos^2 x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) + \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx$
 $= e^{\sin x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Ví dụ 3: Xác định

a) $I = \int \frac{dx}{e^x + 1}.$

b) $I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(1+e^x)^3}}$

Lời giải

a) Dùng kỹ thuật “thêm, bớt”, ta phân tích:

$$I = \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{(e^x + 1) - e^x}{e^x + 1} dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int dx - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1}$$

 $= x - \ln|e^x + 1| + C.$

b) Ta có: $I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(1+e^x)^3}} = \int (1+e^x)^{-3/2} d(1+e^x) = \frac{(1+e^x)^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C = \frac{3}{\sqrt{1+e^x}} + C.$

Ví dụ 4: Xác định a) $I = \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}.$ b) $I = \int \frac{4x^3}{2x^2 - 3x + 1} dx.$

Lời giải

a) Dùng kỹ thuật “thêm, bớt”, ta phân tích:

$$I = \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1} = \int \frac{x^2 \cdot x dx}{x^2 + 1} = \int \frac{(x^2 + 1 - 1) \cdot x dx}{x^2 + 1} = \int x dx - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C.$$

b) Phân tích: $\frac{4x^3}{2x^2 - 3x + 1} = 2x + 3 + \frac{7x - 3}{2x^2 - 3x + 1} = 2x + 3 + \frac{7}{4} \cdot \frac{(2x^2 - 3x + 1)'}{2x^2 - 3x + 1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$

$$= 2x + 3 + \frac{7}{4} \cdot \frac{(2x^2 - 3x + 1)'}{2x^2 - 3x + 1} + \frac{9}{4} \cdot \frac{[(2x - 1) - 2(x - 1)]}{(x - 1)(2x - 1)} = 2x + 3 + \frac{7}{4} \cdot \frac{(2x^2 - 3x + 1)'}{2x^2 - 3x + 1} + \frac{9}{4} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{2x - 1} \right)$$

Suy ra: $I = \int \left[2x + 3 + \frac{7}{4} \cdot \frac{(2x^2 - 3x + 1)'}{2x^2 - 3x + 1} + \frac{9}{4} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{2x - 1} \right) \right] dx$

$$= \int (2x + 3) dx + \frac{7}{4} \int \frac{d(2x^2 - 3x + 1)}{2x^2 - 3x + 1} + \frac{9}{4} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{9}{4} \int \frac{d(2x - 1)}{2x - 1}$$

$$= (x^2 + 3x) + \frac{7}{4} \ln|2x^2 - 3x + 1| + \frac{9}{4} \ln|x - 1| - \frac{9}{4} \ln|2x - 1| + C.$$

Bài tập tương tự: Xác định các nguyên hàm sau:

1) $I = \int \frac{3x}{x^2 + 1} dx$ 2) $I = \int \frac{\ln^2 x - \ln x + 4}{2x} dx$ 3) $I = \int \frac{e^x dx}{e^x + 2}$

4) $I = \int (e^{\sin x} \cdot \cos x + \tan x) dx$ 5) $I = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$ 6) $I = \int \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$

7) $I = \int \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{1 + \cos x} dx$ 8) $I = \int x^3 \cdot \sqrt{1 - x^2} dx$ 9) $I = \int \frac{x^2 + e^x + 2x^2 e^x}{2e^x + 1} dx$

IV – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MINH HỌA:

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ và C là hằng số thì $\int f(x)dx = F(x) + C$.
- B. Mọi hàm số liên tục trên $(a;b)$ đều có nguyên hàm trên $(a;b)$.
- C. $F(x)$ là họ nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$.
- D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \forall x \in (a;b)$.

Lời giải

Phương án C sai, vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên chỉ kéo theo được

$$F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b) \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

Câu 2. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\int 0dx = C$ (C là hằng số).
- B. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số).
- C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số).
- D. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).

Lời giải

Ở phương án C, trường hợp $\alpha = -1$ thì khẳng định trên sai $\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 3. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên:

- A. $(0; \pi)$.
- B. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. $(\pi; 2\pi)$.
- D. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Ta có: Vì $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số có nguyên hàm trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 4. Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $(x-3)^4$?

- A. $\frac{(x-3)^5}{5} + x$.
- B. $\frac{(x-3)^5}{5}$.
- C. $\frac{(x-3)^5}{5} + 2016$.
- D. $\frac{(x-3)^5}{5} - 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left[\frac{(x-3)^5}{5} + x\right]' = (x-3)^4 + 1 \neq (x-3)^4 \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

Câu 5. Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $\sin 2x$ và $\cos^2 x$.

B. $\cos 2x$ và $\sin^2 x$.

C. e^{2x} và $2e^{-2x}$.

D. $\tan 2x$ và $\frac{2}{\cos^2 2x}$.

Lời giải

Vì $(\tan 2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$ nên phương án D đúng $\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 6. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ là

A. $F(x) = x$.

B. $F(x) = -\cot x + \frac{\pi}{2}$.

C. $F(x) = -\cot x$.

D. $F(x) = \sin x + \frac{\pi}{2} - 1$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\cot \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$. Vậy $F(x) = -\cot x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 7. Hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F'(x) = \frac{3}{(3x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$. Lúc đó, $F(x)$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{x+1} + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{3x-1} + C$.

C. $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x-1} + C$.

D. $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{C}{3x-1}$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int \left[\frac{3}{(3x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx = \int \frac{1}{(3x-1)^2} d(3x-1) - \int \frac{1}{(x+1)^2} d(x+1)$
 $= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x-1} + C \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 8. Hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ và đồ thị $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2017 là

A. $F(x) = x^2 + x + 2017$.

B. $F(x) = \cos 2x + 2016$.

C. $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2017$.

D. $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2016$.

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int (3x^2 + 2x + 1) dx = x^3 + x^2 + x + C$.

Đồ thị $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2017 $\Rightarrow F(0) = 2017$

$\Rightarrow C = 2017$. Vậy $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2017 \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}; \left(x > \frac{1}{2}\right)$ là

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1)$

$= \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 10. Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = e^{x^3}$.

B. $f(x) = 3x^2 e^{x^3}$.

C. $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$.

D. $f(x) = x^3 e^{x^3} - 1$.

Lời giải

Ta có: $F'(x) = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3} \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 11. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$ là

A. $\int f(x) dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{6} \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$.

C. $\int f(x) dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{6} \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} dx = \int \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} d\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C$.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 12. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 4x$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = -\frac{\cos 4x}{4} + 2.$

B. $F(x) = -\frac{\cos 4x}{2} + 2.$

C. $F(x) = \frac{\cos 4x}{2} + 2.$

D. $F(x) = 2 \cos 4x + 2.$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int 2 \sin 4x dx = -\frac{\cos 4x}{2} + C$. Vì $F(0) = \frac{3}{2}$ nên $-\frac{1}{2} + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 2$.

Vậy $F(x) = -\frac{\cos 4x}{2} + 2 \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 13. Giá trị m để hàm số $F(x) = 4mx^3 + 2x^2 + (m^2 - 2)x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 12x^2 + 4x - x$ là

A. $m = -1.$

B. $m = 0.$

C. $m = 1.$

D. $m = 2.$

Lời giải

Ta có: $F'(x) = 12mx^2 + 4x + m^2 - 2 = f(x)$. Đồng nhất các hệ số tương ứng ta được:

$$\begin{cases} 12m = 12 \\ m^2 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$

Câu 14. Tính $\int \frac{1}{4-x^2} dx$ ta được kết quả

A. $\frac{1}{4} \ln |(2-x)(2+x)| + C.$

B. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2-x}{2+x} \right| + C.$

C. $-\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2-x}{2+x} \right| + C.$

D. $\frac{1}{4} \ln |x-2| \cdot \ln |x+2| + C.$

Lời giải

Ta có: $\int \frac{1}{4-x^2} dx = \int \frac{1}{(2-x)(2+x)} dx = \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right] dx$

$= \frac{1}{4} (\ln |2-x| + \ln |2+x|) + C = \frac{1}{4} \ln |(2-x)(2+x)| + C \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $f(0) = 1$ thì $f(1)$ có giá trị bằng

A. $\ln 2.$

B. $2 \ln 3 - 1.$

C. $2 \ln 3 + 1.$

D. $\frac{1}{2} \ln 3 + 1.$

Lời giải

Ta có: $f(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+1} d(2x+1) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C.$

$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 1$

Vậy $f(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 1 \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị $y = F(x)$ đi qua điểm $A\left(\frac{\pi}{12}; 0\right)$ thì $F(x)$ là

A. $F(x) = -\frac{\cot 2x + \sqrt{3}}{2}.$

B. $F(x) = \frac{\cot 2x - \sqrt{3}}{2}.$

C. $F(x) = \frac{-\cot 2x + \sqrt{3}}{2}.$

D. $F(x) = \cot 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{\sin^2 2x} dx = -\frac{1}{2} \cot 2x + C.$

Đồ thị $y = F(x)$ đi qua điểm $A\left(\frac{\pi}{12}; 0\right) \Rightarrow 0 = F\left(\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{6} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $F(x) = -\frac{1}{2} \cot 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-\cot 2x + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 17. Kết quả $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ là

A. $\frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2}.$

B. $\frac{\ln^4 x}{4x} + C.$

C. $\frac{\ln^4 x}{4} + C.$

D. $3\ln^2 x + C.$

Lời giải

Ta có: $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x d\ln x = \frac{\ln^4 x}{4} + C \Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 18. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ ta được kết quả

A. $F(x) = x \sin x - \cos x + C.$

B. $F(x) = \sin x - x \cos x + C.$

C. $F(x) = \sin x + x \cos x + C.$

D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C.$

Lời giải

Đặt $u = x, dv = \sin x dx \Rightarrow du = dx, v = -\cos x.$

Ta có: $F(x) = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 19. Kết quả của $\int x \ln(2+x) dx$ là

- A. $\frac{x^2}{2} \ln(2+x) - 2 \ln(2+x) - \frac{x^2}{4} + x + C.$ B. $\ln(2+x) + \frac{x}{2+x} + C.$
 C. $\frac{x^2}{2} \ln(2+x) + 2 \ln(2+x) + \frac{x^2}{4} - x + C.$ D. $\ln(2+x) + \frac{x^2}{4} + x + C.$

Lời giải

Đặt $u = \ln(2+x)$, $dv = xdx \Rightarrow du = \frac{1}{2+x} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Ta có: $\int x \ln(2+x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(2+x) - \int \frac{x^2}{2(2+x)} dx + C_1$
 $= \frac{x^2}{2} \ln(2+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 2 + \frac{4}{2+x} \right) dx = \frac{x^2}{2} \ln(2+x) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln|2+x| \right) + C$
 $= \frac{x^2}{2} \ln(2+x) - \frac{x^2}{4} + x - 2 \ln(2+x) + C \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$

Câu 20. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - 1$. Biết đồ thị của hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Lúc đó, tọa độ các giao điểm của hai đồ thị $f(x)$ và $F(x)$ là

- A. $(0; -1).$ B. $(3; 5).$ C. $(0; -1)$ và $(3; 5).$ D. $(0; -1)$ và $(3; 0).$

Lời giải

Ta có: $F(x) = \int (2x - 1) dx = x^2 - x + C.$

Phương trình hoành độ giao điểm của $F(x)$ và $f(x)$:

$$x^2 - x + C = 2x - 1$$

Đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm trên trục tung $\Rightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = x^2 - x - 1.$

Khi đó $x^2 - x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy có hai giao điểm là $(0; -1)$ và $(3; 5).$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 21. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{2-3x}$ là

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (2-3x) \sqrt[3]{2-3x} + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{3}{4} (2-3x) \sqrt[3]{2-3x} + C.$
 C. $\int f(x) dx = -(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C.$ D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{4} (2-3x) \sqrt[3]{2-3x} + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int \sqrt[3]{2-3x} dx$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{2-3x} \Rightarrow t^3 = 2-3x \Rightarrow 3t^2 dt = -3dx \Rightarrow dx = -t^2 dt.$$

$$\text{Khi đó } \int f(x) dx = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{4}(2-3x)\sqrt[3]{2-3x} + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x + 1}$ là

A. $\int f(x) dx = \ln|\cos 3x + 1| + C.$ B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln|\cos 3x + 1| + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln|\cos 3x + 1| + C.$ D. $\int f(x) dx = -\ln|\cos 3x + 1| + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \frac{\sin 3x}{\cos 3x + 1} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \cos 3x + 1 \Rightarrow dt = -3 \sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3} dt$$

$$\text{Khi đó } \int f(x) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln|t| + C = -\frac{1}{3} \ln|\cos 3x + 1| + C.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 23. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x}}$ là

A. $\int f(x) dx = \ln(2 + \sqrt{x}) + C.$ B. $\int f(x) dx = 2\sqrt{x} + 2\ln(2 + \sqrt{x}) + C.$

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(2 + \sqrt{x}) + C.$ D. $\int f(x) dx = 2 + 2\ln(2 + \sqrt{x}) + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \frac{1}{2 + \sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = t - 2 \Rightarrow x = (t - 2)^2 \Rightarrow dx = 2(t - 2) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int f(x) dx &= \int \frac{2(t-2) dt}{t} = \int \left(2 - \frac{2}{t} \right) dt = 2(t - \ln|t|) + C_1 \\ &= 2(2 + \sqrt{x} - \ln|2 + \sqrt{x}|) + C_1 = 2\sqrt{x} - 2\ln(2 + \sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Câu 24. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ là

- A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(x+10)\sqrt{x-1} + C.$ B. $\int f(x)dx = (x+10)\sqrt{x-1} + C.$
 C. $\int f(x)dx = \frac{x-3}{2(x-1)\sqrt{x-1}} + C.$ D. $\int f(x)dx = \sqrt{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x-1}} + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} dx.$

Đặt $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow 2t dt = dx \Rightarrow dx = 2t dt.$

Khi đó $\int f(x)dx = \int \frac{t^2+2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (t^2+2) dt = 2 \left(\frac{1}{3} t^3 + 2t \right) + C$
 $= \frac{2}{3} (x-1) \sqrt{x-1} + 4 \sqrt{x-1} + C = \frac{2}{3} (x+10) \sqrt{x-1} + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 25. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (e^{\cos x} + \cot x) \sin x$ là

- A. $\int f(x)dx = e^{\cos x} + \sin x + C.$ B. $\int f(x)dx = -e^{\cos x} - \sin x + C.$
 C. $\int f(x)dx = -e^{\cos x} + \sin x + C.$ D. $\int f(x)dx = e^{\cos x} - \sin x + C.$

Lời giải

Ta có $\int f(x) = \int (e^{\cos x} + \cot x) \sin x dx = \int e^{\cos x} \sin x dx + \int \cos x dx$
 $= -\int e^{\cos x} d \cos x + \int \cos x dx = -e^{\cos x} + \sin x + C.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

V – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN:

Câu 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai (đánh dấu X vào ô thích hợp)?

Các cặp hàm số sau đây đều là nguyên hàm của cùng một hàm số:

	Đúng	Sai
a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ và $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$	☐	☐
b) $f(x) = e^{\sin x} \cos x$ và $g(x) = e^{\sin x}.$	☐	☐

c) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ và $g(x) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$. ☐ ☐

d) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ và $g(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$. ☐ ☐

e) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ và $g(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$. ☐ ☐

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ và C là hằng số thì $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. Mọi hàm số liên tục trên $(a;b)$ đều có nguyên hàm trên $(a;b)$.

C. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (a;b)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \forall x \in (a;b)$.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(t)dt = F(t) + C$.

B. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

C. $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)dx = F(u) + C$.

D. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ (k là hằng số).

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. B. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx; (k \in \mathbb{R})$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

D. $\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\int 0dx = C$ (C là hằng số).

B. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ (C là hằng số).

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (C là hằng số).

D. $\int dx = x + C$ (C là hằng số).

Câu 6. Hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên K nếu:

- A. $f(x)$ xác định trên K .
 B. $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên K .
 C. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất trên K .
 D. $f(x)$ liên tục trên K .

Câu 7. Hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên:

- A. $(0; \pi)$.
 B. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $(\pi; 2\pi)$.
 D. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 8. Nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng D thì:

- A. $f(x)$ không có nguyên hàm trên D .
 B. $f(x)$ có đúng một nguyên hàm trên D .
 C. $f(x)$ có hai nguyên hàm trên D .
 D. $f(x)$ có vô số nguyên hàm trên D .

Câu 9. Hàm số $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$ có nguyên hàm trên:

- A. $(-\infty; +\infty)$.
 B. $(0; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 0)$.
 D. $[0; +\infty)$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây **không** phải là nguyên hàm của hàm số $(x-3)^4$?

- A. $\frac{(x-3)^5}{5} + x$.
 B. $\frac{(x-3)^5}{5}$.
 C. $\frac{(x-3)^5}{5} + 2016$.
 D. $\frac{(x-3)^5}{5} - 1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu với mọi $x \in K$, ta có:

- A. $F'(x) = f(x) + C$.
 B. $F'(x) = f(x)$.
 C. $f'(x) = F(x)$.
 D. $f'(x) = F(x) + C$.

Câu 12. Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

- A. $\sin 2x$ và $\cos^2 x$.
 B. $\sin 2x$ và $\sin^2 x$.

C. e^x và e^{-x} .

D. $\tan x^2$ và $\frac{1}{\cos^2 x^2}$.

Câu 13. Cặp hàm số nào sau đây có tính chất: Có một hàm số là nguyên hàm của hàm số còn lại?

A. $\sin 2x$ và $\cos^2 x$.

B. $\cos 2x$ và $\sin^2 x$.

C. e^{2x} và $2e^{-2x}$.

D. $\tan 2x$ và $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Câu 14. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = 3x^2 + 3x + C$.

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$.

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$.

Câu 15. Hàm số $F(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x + C$ là họ nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 5x^2 + 4x + 2$.

B. $f(x) = 15x^2 + 8x - 2$.

C. $f(x) = \frac{5x^2}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

D. $f(x) = 5x^2 + 4x - 2$.

Câu 16. Nguyên hàm của hàm số: $y = x^2 - 3x + \frac{5}{x}$ là

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5\ln|x| + C$.

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 5\ln x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 5\ln x + C$.

D. $F(x) = 2x - 3 - \frac{5}{x^2} + C$.

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x-1)(x-2)$ là

A. $F(x) = 2x - 3 + C$.

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

Câu 18. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ là

A. $F(x) = x$.

B. $F(x) = -\cot x + \frac{\pi}{2}$.

C. $F(x) = -\cot x$.

D. $F(x) = \sin x + \frac{\pi}{2} - 1$.

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $\cot x + C$.

B. $-\cot x + C$.

C. $-\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + C$.

D. $\frac{2\cos x}{\sin^2 x} + C$.

Câu 20. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai (đánh dấu X vào ô thích hợp)?

Các cặp hàm số sau đây đều là nguyên hàm của cùng một hàm số:

	Đúng	Sai
a) $F(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 3}$ và $G(x) = \frac{x^2 - 2x + 9}{2x - 3}$.	☐	☐
b) $F(x) = 5 + 2\sin^2 x$ và $G(x) = 1 + \cos 2x$.	☐	☐
c) $F(x) = (x + 5)^2$ và $G(x) = x^2 + 10x - 7$.	☐	☐
d) $F(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ và $G(x) = -\tan^2 x + 8$.	☐	☐

Câu 21. Hàm số $F(x) = \ln x$ là nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(0; +\infty)$?

A. $\frac{1}{x}$.

B. $-\frac{1}{x}$.

C. $\frac{1}{x^2}$.

D. $-\frac{1}{x^2}$.

Câu 22. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5-2x} + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{7}{x} + C$.

B. $F(x) = -\ln|5-2x| + 2\ln|x| + \frac{7}{x} + C$.

C. $F(x) = \ln|5-2x| + 2\ln|x| - \frac{7}{x} + C$.

D. $F(x) = -\ln|5-2x| - 2\ln|x| + \frac{7}{x} + C$.

Câu 23. Hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F'(x) = \frac{3}{(3x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$. Lúc đó, $F(x)$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{x+1} + C$.

B. $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{3x-1} + C$.

$$C. F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x-1} + C.$$

$$D. F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{C}{3x-1}.$$

Câu 24. Hàm số $F(x)$ biết $F'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ và đồ thị $y = F(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2017 là

$$A. F(x) = x^2 + x + 2017.$$

$$B. F(x) = \cos 2x + 2016.$$

$$C. F(x) = x^3 + x^2 + x + 2017.$$

$$D. F(x) = x^3 + x^2 + x + 2016.$$

Câu 25. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 4x$ là

$$A. \int f(x)dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \frac{1}{4}\cos 4x + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \cos 4x + C.$$

$$D. \int f(x)dx = -\cos 4x + C.$$

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ là

$$A. \int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$B. \int f(x)dx = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$C. \int f(x)dx = -\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$D. \int f(x)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Câu 27. Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số

$$A. f(x) = e^{x^3}.$$

$$B. f(x) = 3x^2 e^{x^3}.$$

$$C. f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}.$$

$$D. f(x) = x^3 e^{x^3} - 1.$$

Câu 28. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \tan^2 \frac{x}{6}$ là

$$A. \int f(x)dx = \tan \frac{x}{6} + C.$$

$$B. \int f(x)dx = 6 \tan \frac{x}{6} + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{1}{6} \tan \frac{x}{6} + C.$$

$$D. \int f(x)dx = -6 \tan \frac{x}{6} + C.$$

Câu 29. Biết $\int f(v)du = F(v) + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

$$A. \int f(4x-3)dx = 4F(x) - 3 + C.$$

$$B. \int f(4x-3)dx = F(4x-3) + C.$$

$$C. \int f(4x-3)dx = \frac{1}{4}F(4x-3) + C.$$

$$D. \int f(4x-3)dx = 4F(4x-3) + C.$$

Câu 30. Hàm số $F(x)$, thỏa mãn điều kiện $F'(x) = x + \frac{5}{x}$ là

$$A. F(x) = 1 - \frac{5}{x^2} + C.$$

$$B. F(x) = \frac{x^2}{2} + 5\ln|x| + C.$$

$$C. F(x) = \frac{x^2}{2} + 5\ln x + C.$$

$$D. F(x) = \frac{x^2}{2} + 5\ln x.$$

Câu 31. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$ là

$$A. \int f(x)dx = -\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

$$B. \int f(x)dx = -\frac{1}{6}\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

$$D. \int f(x)dx = \frac{1}{6}\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$$

Câu 32. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 4x$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

$$A. F(x) = -\frac{\cos 4x}{4} + 2.$$

$$B. F(x) = -\frac{\cos 4x}{2} + 2.$$

$$C. F(x) = \frac{\cos 4x}{2} + 2.$$

$$D. F(x) = 2\cos 4x + 2.$$

Câu 33. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ là

$$A. \int f(x)dx = \sin 2x + C.$$

$$B. \int f(x)dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C.$$

$$C. \int f(x)dx = 2\sin 2x + C.$$

$$D. \int f(x)dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

Câu 34. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x \cos 3x$ là

$$A. \int f(x)dx = \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

$$B. \int f(x)dx = -\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

$$C. \int f(x)dx = \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

$$D. \int f(x)dx = -\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + C.$$

Câu 35. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin 2x \cos x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{2\cos 3x}{3} - 2\cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{2\cos 3x}{3} + 2\cos x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2\cos 3x}{3} - 2\cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{2\cos 3x}{3} + 2\cos x + C.$

Câu 36. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin 3x \sin x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\sin 4x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + C.$

Câu 37. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\cos 3x \cos 2x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{2\sin 5x}{5} - 2\sin x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2\sin 5x}{5} - 2\sin x + C..$

C. $\int f(x)dx = \frac{2\sin 5x}{5} + 2\sin x + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{2\sin 5x}{5} + 2\sin x + C.$

Câu 38. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{4}x + \frac{\sin 4x}{16} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{3}{4}x + \frac{\sin 4x}{16} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{3}{4}x - \frac{\sin 4x}{16} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{3}{4}x - \frac{\sin 4x}{16} + C.$

Câu 39. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{5}{8}x + \frac{3\sin 4x}{8} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{5}{8}x - \frac{3\sin 4x}{32} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{5}{8}x + \frac{3\sin 4x}{32} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{5}{8}x - \frac{3\sin 4x}{8} + C.$

Câu 40. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{\sin 4x}{16} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x + \frac{\sin 4x}{16} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{\sin 4x}{16} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{\sin 4x}{16} + C.$

Câu 41. Giá trị m để hàm số $F(x) = 4mx^3 + 2x^2 + (m^2 - 2)x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 12x^2 + 4x - x$ là

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 42. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ là

- A. $\int f(x)dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^4 x}{4} + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$. D. $\int f(x)dx = -\frac{\sin^5 x}{5} + C$.

Câu 43. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + e^{-x}$ là

- A. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C$. B. $\int f(x)dx = -e^x + e^{-x} + C$.
C. $\int f(x)dx = e^x + e^{-x} + C$. D. $\int f(x)dx = e^x - e^{-x} + C$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = xe^x$. Giá trị a, b để $F(x) = (ax + b)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là

- A. $a = 1; b = 1$. B. $a = -1; b = 1$.
C. $a = 1; b = -1$. D. $a = -1; b = -1$.

Câu 45. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 5^{-x}$ là

- A. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 5} + C$. B. $\int f(x)dx = \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 5} + C$.
C. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 5 - \ln 2} + C$. D. $\int f(x)dx = \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 5} + C$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \pi$. B. $f(x) = 2x - \sin 2x + \pi$.
C. $f(0) = \pi$. D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x (2 + e^{-x})$ là

- A. $F(x) = 2e^x - x + C$. B. $F(x) = 2e^x + e^x \ln e^x + C$.

C. $F(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

D. $F(x) = 2e^x + x + C.$

Câu 48. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ là

A. $F(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 4}{2} + C.$

B. $F(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2x + C.$

C. $F(x) = e^{2x} + e^{-2x} - 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + x + C.$

Câu 49. Tính $\int \frac{2}{2x+1} dx$ ta được kết quả

A. $-\ln|2x+1| + C.$

B. $-\frac{1}{(2x+1)^2} + C.$

C. $\frac{\ln|2x+1|}{2} + C.$

D. $\ln|2x+1| + C.$

Câu 50. Tính $\int \frac{6}{1-3x} dx$ ta được kết quả

A. $3\ln|1-3x| + C.$

B. $\frac{18}{(1-3x)^2} + C.$

C. $-2\ln|1-3x| + C.$

D. $2\ln|1-3x| + C.$

Câu 51. Tính $\int \frac{2x+1}{x+1} dx$ ta được kết quả

A. $2x - \ln|x+1| + C.$

B. $2x + \ln|x+1| + C.$

C. $2 - \ln|x+1| + C.$

D. $(2x+1)\ln|x+1| + C.$

Câu 52. Tính $\int \frac{4x+2}{x-1} dx$ ta được kết quả

A. $4x - 6\ln|x-1| + C.$

B. $4x + 6\ln|x-1| + C.$

C. $4x + 3\ln|x-1| + C.$

D. $4x + \ln|x-1| + C.$

Câu 53. Tính $\int \frac{4x+2}{2-x} dx$ ta được kết quả

A. $4x + 10\ln|2-x| + C.$

B. $-4x + 10\ln|2-x| + C.$

C. $4x - 10\ln|2-x| + C.$

D. $4x + \ln|2-x| + C.$

Câu 54. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(2) = 0$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = \ln|2x-1| + \ln 3$.

B. $F(x) = \ln|2x-1| - \ln 3$.

C. $F(x) = 2\ln|2x-1| + \ln 3$.

D. $F(x) = \frac{\ln|2x-1|}{2} - \ln 3$.

Câu 55. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{1-x}$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = 4$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = -2x + 5\ln|1-x| + 8$.

B. $F(x) = -2x + 5\ln|1-x| - 8$.

C. $F(x) = 2x + 5\ln|1-x| + 8$.

D. $F(x) = 2x + 5\ln|1-x| - 8$.

Câu 56. Tính $\int \frac{x^2+1}{x+1} dx$ ta được kết quả

A. $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x+1| + C$.

B. $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$.

C. $\frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x+1| + C$.

D. $\frac{x^2}{2} - x - \ln|x+1| + C$.

Câu 57. Tính $\int \frac{1}{x^2-1} dx$ ta được kết quả

A. $\frac{1}{2} \ln|(x+1)(x-1)| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C$.

C. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln|x-1| \cdot \ln|x+1| + C$.

Câu 58. Tính $\int \frac{1}{x^2-4x+3} dx$ ta được kết quả

A. $\frac{1}{2} \ln|(x-1)(x-3)| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$.

C. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln|x-1| \cdot \ln|x-3| + C$.

Câu 59. Tính $\int \frac{1}{4-x^2} dx$ ta được kết quả

A. $\frac{1}{4} \ln|(2-x)(2+x)| + C$.

B. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2-x}{2+x} \right| + C$.

$$C. -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|+C.$$

$$D. \frac{1}{4}\ln|x-2|\cdot\ln|x+2|+C.$$

Câu 60. Tính $\int \frac{x^2-3x+4}{x^2-3x+2} dx$ ta được kết quả

$$A. x+2\ln|(x-1)(x-2)|+C.$$

$$B. x+2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C.$$

$$C. x+2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$$

$$D. x+2\ln|x-1|+\ln|x-2|+C.$$

Câu 61. Tính $\int \frac{2}{x^2+2x+1} dx$ ta được kết quả

$$A. -\frac{1}{x+1}+C.$$

$$B. -\frac{2}{x+1}+C.$$

$$C. 2\ln|x^2+2x+1|+C.$$

$$D. -\frac{4(x+1)}{(x^2+2x+1)^2}+C.$$

Câu 62. Tính $\int \frac{-2}{x^2+4x+4} dx$ ta được kết quả

$$A. -\frac{2}{x+2}+C.$$

$$B. -\frac{1}{x+2}+C.$$

$$C. -2\ln|x^2+4x+4|+C.$$

$$D. -\frac{2(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}+C.$$

Câu 63. Tính $\int \frac{2x}{x^2-2x+1} dx$ ta được kết quả

$$A. 2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

$$B. 2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

$$C. \ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

$$D. 2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C.$$

Câu 64. Tính $\int \frac{2x^2-4x+5}{x^2-2x+1} dx$ ta được kết quả

$$A. 2x-\frac{3}{x-1}+C.$$

$$B. 2-\frac{3}{x-1}+C.$$

$$C. 2x+\frac{2}{x-1}+C.$$

$$D. 2x+\frac{4}{x-1}+C.$$

Câu 65. Tính $\int \frac{2}{(2x+1)^3} dx$ ta được kết quả

$$A. -\frac{1}{2(2x+1)^2}+C.$$

$$B. -\frac{1}{(2x+1)^2}+C.$$

C. $\frac{1}{(2x+1)^2} + C.$

D. $\frac{1}{2(2x+1)^2} + C.$

Câu 66. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 4x}{1-x}$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(2) = 1$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = -x^2 - 6x - 6\ln|1-x|.$

B. $F(x) = -x^2 - 6x + 6\ln|1-x| + 17.$

C. $F(x) = -x^2 - 6x - 6\ln|1-x| + 17.$

D. $F(x) = -x^2 - 6x - \ln|1-x| + 17.$

Câu 67. Hàm số nào sau đây **không** phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$?

A. $F(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x+1}.$

B. $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}.$

C. $F(x) = \frac{x^2 - 3x - 3}{x+1}.$

D. $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x+1}.$

Câu 68. Hàm số $F(x) = 7e^x - \tan x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = e^x \left(7 - \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right).$

B. $f(x) = 7e^x + \frac{1}{\cos^2 x}.$

C. $f(x) = 7e^x + \tan^2 x - 1.$

D. $f(x) = 7 \left(e^x - \frac{1}{\cos^2 x} \right).$

Câu 69. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $f(0) = 1$ thì $f(1)$ có giá trị bằng

A. $\ln 2.$

B. $2\ln 3 - 1.$

C. $2\ln 2 + 1.$

D. $2\ln 3 + 1.$

Câu 70. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{6x-2}}$ là

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^{3x-1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{6x-2} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt{e^{3x-1}} + C.$

Câu 71. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ là

A. $\int f(x) dx = \sqrt{4x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2\sqrt{4x+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{\sqrt{4x+1}}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = -4\sqrt{4x+1} + C.$

Câu 72. Hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{\cos x}{(4 + \sin x)^2}$ là

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(4 + \cos x)^2} + C.$

B. $f(x) = \frac{\sin x}{4 + \sin x} + C.$

C. $f(x) = \frac{1}{4 + \cos x} + C.$

D. $f(x) = -\frac{1}{4 + \sin x} + C.$

Câu 73. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ là

A. $\int f(x)dx = -\sqrt{2-x} + C.$

B. $\int f(x)dx = -2\sqrt{2-x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2-x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -3\sqrt{2-x} + C.$

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 2\sin 2x + \cos x$ và $f(0) = 4$ thì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Câu 75. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+5}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x+5)\sqrt{2x+5} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x+5)\sqrt{2x+5} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+5} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+5} + C.$

Câu 76. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{4-3x}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{9}(4-3x)\sqrt{4-3x}.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}(4-3x)\sqrt{4-3x}.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{2}{9}(4-3x)\sqrt{4-3x} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}\sqrt{4-3x} + C.$

Câu 77. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$ biết $F(0) = 1$, là

A. $F(x) = \frac{2^x + \ln 2 - 1}{e^x(\ln 2 - 1)}.$

B. $F(x) = \left(\frac{2}{e}\right)^x.$

C. $F(x) = \frac{2^x + \ln 2}{e^x(\ln 2 - 1)}.$

D. $F(x) = \frac{1}{\ln 2 - 1} \left(\frac{2}{e}\right)^x + \left(\frac{1}{e}\right)^x + \frac{1}{1 - \ln 2}.$

Câu 78. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{4}(x-3)\sqrt[3]{x-3} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{3}{4}(x-3)\sqrt[3]{x-3} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(x-3)\sqrt[3]{x-3}.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C.$

Câu 79. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$ là

- A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$ B. $\int f(x)dx = -\frac{3}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$
 C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(1-3x)\sqrt[3]{1-3x} + C.$ D. $\int f(x)dx = -(1-3x)^{-\frac{2}{3}} + C.$

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị $y = F(x)$ đi qua điểm $A\left(\frac{\pi}{12}; 0\right)$ thì $F(x)$ là

- A. $F(x) = -\frac{\cot 2x + \sqrt{3}}{2}.$ B. $F(x) = \frac{\cot 2x - \sqrt{3}}{2}.$
 C. $F(x) = \frac{-\cot 2x + \sqrt{3}}{2}.$ D. $F(x) = \cot 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 81. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{3x}}$ là

- A. $\int f(x)dx = \frac{3\sqrt{e^{3x}}}{2} + C.$ B. $\int f(x)dx = \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}} + C.$
 C. $\int f(x)dx = \frac{2e^{\frac{3x+2}{2}}}{3x+2} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{2\sqrt{e^{3x}}}{3} + C.$

Câu 82. Hàm số $F(x) = (x+1)^2 \sqrt{x+1} + 2016$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = \frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1} + C.$ B. $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1} + C.$
 C. $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}.$ D. $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} + C.$

Câu 83. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$. Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

- A. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3.$ B. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3.$
 C. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1.$ D. $F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}.$

Câu 84. Biết $F(x) = 6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x}}$. Khi đó giá trị của a bằng

- A. -3 . B. 3 . C. 6 . D. $\frac{1}{6}$.

Câu 85. Tính $F(x) = \int x \sin x dx$ ta được kết quả

- A. $F(x) = x \sin x - \cos x + C$. B. $F(x) = \sin x - x \cos x + C$.
C. $F(x) = \sin x + x \cos x + C$. D. $F(x) = x \sin x + \cos x + C$.

Câu 86. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x$. Biết đồ thị của hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Lúc đó, tọa độ các giao điểm của hai đồ thị $f(x)$ và $F(x)$ là

- A. $(0;0)$. B. $(2+\sqrt{2}; 14+10\sqrt{2}); (0;0)$.
C. $(2+\sqrt{2}; 14+10\sqrt{2}); (2-\sqrt{2}; 14-10\sqrt{2}); (0;0)$.
D. $(1+\sqrt{2}; 4+2\sqrt{2}); (1-\sqrt{2}; 4-2\sqrt{2}); (0;0)$.

Câu 87. Tính $\int x \ln^2 x dx$ ta được kết quả

- A. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$. B. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$.
C. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x - 2\ln x + 1) + C$. D. $\frac{1}{2}x^2(2\ln^2 x + 2\ln x + 1) + C$.

Câu 88. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x - 1$. Biết đồ thị của hàm số $F(x)$ và $f(x)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Lúc đó, tọa độ các giao điểm của hai đồ thị $f(x)$ và $F(x)$ là

- A. $(0;-1)$. B. $(3;5)$. C. $(0;-1)$ và $(3;5)$. D. $(0;-1)$ và $(3;0)$.

Câu 89. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$ ta được kết quả

- A. $F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C$. B. $F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C$.
C. $F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C$. D. $F(x) = \frac{-1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C$.

Câu 90. Tính $F(x) = \int x e^{\frac{x}{3}} dx$ ta được kết quả

- A. $F(x) = (x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$. B. $F(x) = 3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$.
C. $F(x) = \frac{x-3}{3}e^{\frac{x}{3}} + C$. D. $F(x) = \frac{x+3}{3}e^{\frac{x}{3}} + C$.

Câu 91. Tính $F(x) = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ ta được kết quả

A. $F(x) = -x \tan x + \ln |\cos x| + C.$

B. $F(x) = -x \cot x + \ln |\cos x| + C.$

C. $F(x) = x \tan x + \ln |\cos x| + C.$

D. $F(x) = -x \cot x - \ln |\cos x| + C.$

Câu 92. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$ ta được kết quả

A. $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$

B. $F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C.$

C. $F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C.$

D. $F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C$

Câu 93. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$ ta được kết quả

A. $F(x) = \frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

B. $F(x) = \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$

C. $F(x) = -\frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$

D. $F(x) = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$

Câu 94. Hàm số $F(x) = x \sin x + \cos x + 2017$ là một nguyên hàm của hàm số nào?

A. $f(x) = x \cos x.$

B. $f(x) = x \sin x.$

C. $f(x) = -x \cos x.$

D. $f(x) = -x \sin x.$

Câu 95. Tính $\int \frac{1 + \ln x}{x^2} dx$ ta được kết quả

A. $\frac{-\ln x - 2}{x} + C.$

B. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C.$

C. $-\frac{x+1}{x} (1 + \ln(x+1)) + \ln |x| + C.$

D. $-\frac{1 + \ln(x+1)}{x} - \ln |x+1| + \ln |x| + C.$

Câu 96. Để xác định $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ theo phương pháp đổi biến số, để tối ưu ta nên đặt biến số phụ

A. $t = \sqrt[3]{1+x^3}.$

B. $t = 1+x^3.$

C. $t = x^2.$

D. $t = x^2 \sqrt[3]{1+x^3}.$

Câu 97. Để tính $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ theo phương pháp đổi biến số, để tối ưu ta nên đặt biến số phụ

A. $t = \frac{1}{x}.$

B. $t = \ln x.$

C. $t = (\ln x)^3.$

D. $t = \frac{(\ln x)^3}{x}.$

Câu 98. Kết quả $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ là

A. $\frac{3 \ln^2 x - \ln^3 x}{x^2}.$

B. $\frac{\ln^4 x}{4x} + C.$

C. $\frac{\ln^4 x}{4} + C.$

D. $3 \ln^2 x + C.$

Câu 99. Để tính $\int xe^{x^2} dx$ theo phương pháp đổi biến số, để tối ưu ta nên đặt biến số phụ

- A. $t = x^2$. B. $t = e^{x^2}$. C. $t = xe^{x^2}$. D. $t = e^x$.

Câu 100. Kết quả của $\int xe^{x^2} dx$ là

- A. $xe^{x^2} + C$. B. $\frac{e^{x^2}}{2} + C$. C. $e^{x^2} + C$. D. $x + e^{x^2} + C$.

Câu 101. Để tính $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ theo phương pháp đổi biến số, để tối ưu ta nên đặt biến số phụ

- A. $t = \frac{1}{x^2}$. B. $t = \frac{1}{x}$. C. $t = \cos \frac{1}{x}$. D. $t = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.

Câu 102. Kết quả của $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ là

- A. $\sin \frac{1}{x} + C$. B. $-\sin \frac{1}{x} + C$.
C. $-\frac{1}{x^4} \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x} + C$. D. $-\frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} + C$.

Câu 103. Để tính $\int \sin x \cos^5 x dx$ theo phương pháp đổi biến số, để tối ưu ta nên đặt biến số phụ

- A. $t = \cos x$. B. $t = \sin x$.
C. $t = \cos^5 x$. D. $t = \sin x \cos x$.

Câu 104. Kết quả của $\int \sin x \cos^5 x dx$ là

- A. $5\cos^4 x + C$. B. $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$.
C. $5\cos^4 x \sin x + C$. D. $\frac{\cos^6 x}{6} + C$.

Câu 105. Kết quả của $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$ là

- A. $2\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$. B. $2\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) + C$.
C. $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$. D. $\frac{1}{3}(x^2+x+1) + C$.

Câu 106. Để tính $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\cos x - \sin x}} dx$ theo phương pháp đổi biến số, để tối ưu ta nên đặt biến số phụ

- A. $t = \cos x + \sin x$. B. $t = \sin x - \cos x$.
C. $t = \sqrt{\cos x - \sin x}$. D. $t = \sqrt{\cos x + \sin x}$.

Câu 107. Kết quả của $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\cos x - \sin x}} dx$ là

A. $-2\sqrt{\cos x - \sin x} + C.$

B. $2\sqrt{\cos x - \sin x} + C.$

C. $\sin x + \cos x + C.$

D. $\sin x - \cos x + C.$

Câu 108. Để tính $\int xe^x dx$ theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, để tối ưu ta nên đặt

A. $u = e^x, dv = x dx.$

B. $u = x, dv = e^x dx.$

C. $u = xe^x, dv = dx.$

D. $u = e^x, dv = dx.$

Câu 109. Kết quả của $\int xe^x dx$ là

A. $e^x + xe^x + C.$

B. $\frac{x^2}{2}e^x + C.$

C. $xe^x - e^x + C.$

D. $\frac{x^2}{2}e^x + e^x + C.$

Câu 110. Để tính $\int x^2 \cos x dx$ theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, để tối ưu ta nên đặt

A. $u = x, dv = x \cos x dx.$

B. $u = x^2, dv = \cos x dx.$

C. $u = \cos x, dv = x^2 dx.$

D. $u = x^2 \cos x, dv = dx.$

Câu 111. Kết quả của $\int x^2 \cos x dx$ là

A. $2x \cos x - x^2 \sin x + C.$

B. $2x \cos x + x^2 \sin x + C.$

C. $x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C.$

D. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$

Câu 112. Để tính $\int x \ln(2+x) dx$ theo phương pháp tính nguyên hàm từng phần, để tối ưu ta nên đặt

A. $u = x, dv = \ln(2+x) dx.$

B. $u = \ln(2+x), dv = x dx.$

C. $u = x \ln(2+x), dv = dx.$

D. $u = \ln(2+x), dv = dx.$

Câu 113. Kết quả của $\int x \ln(2+x) dx$ là

A. $\frac{x^2}{2} \ln(2+x) - 2 \ln(2+x) - \frac{x^2}{4} + x + C.$

B. $\ln(2+x) + \frac{x}{2+x} + C.$

C. $\frac{x^2}{2} \ln(2+x) + 2 \ln(2+x) + \frac{x^2}{4} - x + C.$

D. $\ln(2+x) + \frac{x^2}{4} + x + C.$

HẾT