Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

Lý thuyết chung

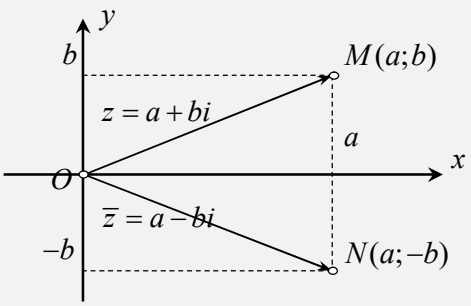
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$

◆ **Phép trừ hai số phức** $z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dạng 1. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

Dạng 1.1 Xác định phần thực, phần ảo của số phức

Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=-5-4i$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Câu 3. **(Mã 104 2018)** Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

A. $1-3i$ **B.** $-1+3i$ **C.** $1+3i$ **D.** $-1-3i$

Câu 4. **(Mã 103 -2018)** Số phức $5+6i$ có phần thực bằng

A. -6. **B.** 6. **C.** -5. **D.** 5

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A. $3+4i$ **B.** $4-3i$ **C.** $3-4i$ **D.** $4+3i$

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2017)** Kí hiệu a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3-2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

A. $a=3;b=\sqrt{2}$ **B.** $a=3;b=-2\sqrt{2}$ **C.** $a=3;b=2$ **D.** $a=3;b=2\sqrt{2}$

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Số phức $-3+7i$ có phần ảo bằng:

A. 7 **B.** -7 **C.** -3 **D.** 3

Câu 8. **(Mã 123 2017)** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.

A. $z=\sqrt{3}+i$ **B.** $z=-2$ **C.** $z=-2+3i$ **D.** $z=3i$

Câu 9. **(Mã 105 2017)** Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần thực a của z?

A. $a=2$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-3$

Câu 10. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức $z=3-4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$. **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. **D.** Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Dạng 1.2 Xác định số phức liên hợp, số phức đối, môđun của số phức

Câu 11. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Môđun của số phức $1+2i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 12. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Câu 13. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là:

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Câu 14. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là

A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 15. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 16. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$ là

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Câu 17. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$:

A. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$ **B.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

C. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$ **D.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2

Câu 18. **(Mã 104 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-2i$ là.

A. $3+2i$. **B.** $-3-2i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $-3+2i$.

Câu 19. **(Mã 103 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là:

A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Câu 20. **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z=2+i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{5}$ **B.** $|z|=5$ **C.** $|z|=2$ **D.** $|z|=3$

Câu 21. **(Mã 102 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là

A. $-3+5i$. **B.** $-5-3i$. **C.** $5+3i$. **D.** $-5+3i$.

Câu 22. **(Mã 101 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $3+4i$. **B.** $-4+3i$. **C.** $-3-4i$. **D.** $-3+4i$.

Câu 23. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho số phức $z=3+2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.

D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Câu 21 Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. **B.** Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. **D.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Câu 24. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Số phức đối của $z=5+7i$ là?

A. $\overline{z}=5+7i$. **B.** $-z=-5-7i$. **C.** $-z=-5+7i$. **D.** $-z=5-7i$.

Câu 25. **(Chuyên Sơn La 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là

A. $\overline{z}=1+2i$. **B.** $\overline{z}=2-i$. **C.** $\overline{z}=-1+2i$. **D.** $\overline{z}=-1-2i$.

Câu 26. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=5+6i$ là

A. $\overline{z}=-5+6i$. **B.** $\overline{z}=-5-6i$. **C.** $\overline{z}=6-5i$. **D.** $\overline{z}=5-6i$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho số phức $z=2-3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

A. $\overline{z}=3-2i$. **B.** $\overline{z}=3+2i$. **C.** $\overline{z}=-2-3i$. **D.** $\overline{z}=2+3i$.

Dạng 2. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

Câu 28. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $N(4;-3)$. **D.** $M(4;5)$.

Câu 29. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Câu 30. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 31. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 32. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng:

A. -2 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -1

Câu 33. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=1-2i$?

A. $Q(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $P(-2;1)$. **D.** $N(1;-2)$.

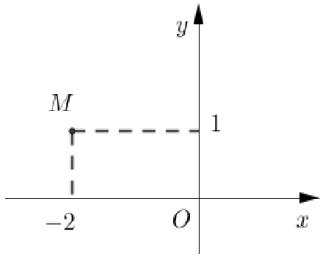
Câu 34. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=3-2i$?

A. $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Câu 35. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

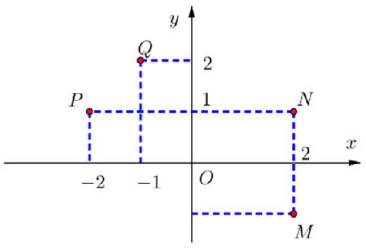
A. $N(-1;2)$. **B.** $P(2;-1)$. **C.** $Q(-2;1)$. **D.** $M(1;-2)$.

Câu 36. **(Đề Tham Khảo 2018)** Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



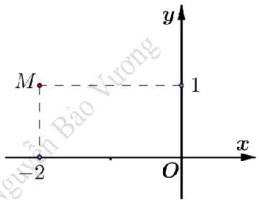
A. $z=1+2i$ **B.** $z=1-2i$ **C.** $z=2+i$ **D.** $z=-2+i$

Câu 37. **(Đề Tham Khảo 2019)** Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$?



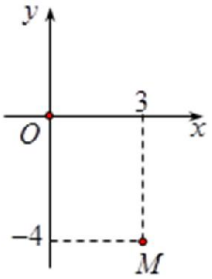
A. P **B.** M **C.** Q **D.** N

Câu 38. **(Mã 110 2017)** Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



A. $z_1=1-2i$ **B.** $z_2=1+2i$ **C.** $z_3=-2+i$ **D.** $z_4=2+i$

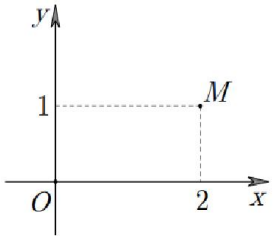
Câu 39. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$ **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là -4

C. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$ **D.** Phần thực là -4 và phần ảo là 3

Câu 40. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\bar{z}$ là:



A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

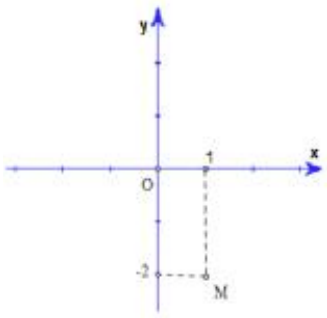
Câu 41. Điểm nào ở hình vẽ bên biểu diễn số phức $z=3-2i$?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Câu 42. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=2-3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

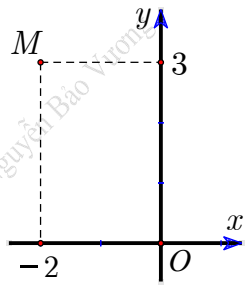
A. $M(-2;3)$. **B.** $Q(-2;-3)$. **C.** $N(2;-3)$. **D.** $P(2;3)$.

Câu 43. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?



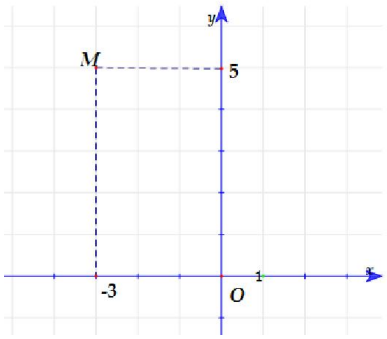
A. $1-2i$. **B.** $i+2$. **C.** $i-2$. **D.** $1+2i$.

Câu 44. **(Thanh Hóa 2019)** Điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu thị cho số phức



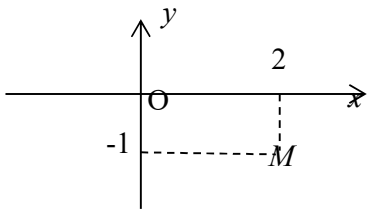
A. $3+2i$. **B.** $2-3i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $3-2i$.

Câu 45. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z. Chọn kết luận đúng về số phức $\overline{z}$.



A. $\overline{z}=3+5i$. **B.** $\overline{z}=-3+5i$. **C.** $\overline{z}=3-5i$. **D.** $\overline{z}=-3-5i$.

Câu 46. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?



A. $z=2-i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=-1-2i$.

Câu 47. **(Sở Bình Phước 2019)** Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1;-2)$?

A. $-1-2i$ **B.** $1+2i$ **C.** $1-2i$ **D.** $-2+i$

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là

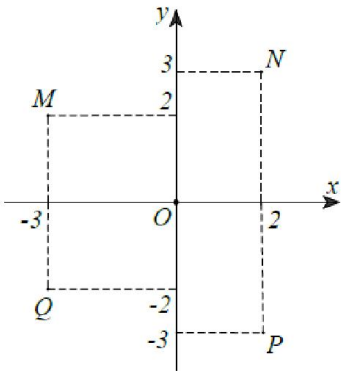
A. hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

B. hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.

C. hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

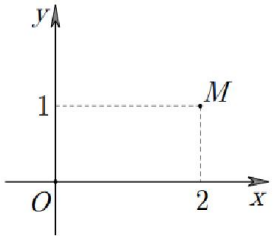
D. hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Câu 49. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$?



A. M. **B.** N. **C.** Q. **D.** P.

Câu 50. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\bar{z}$ là:



A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, 3 điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1=3-7i, z_2=9-5i$ và $z_3=-5+9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z=1-9i$. **B.** $z=3+3i$. **C.** $z=\frac{7}{3}-i$. **D.** $z=2+2i$.

Dạng 3. Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia cơ bản của số phức

Dạng 3.1 Phép tính cộng trừ 2 số phức

Câu 52. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Câu 53. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Câu 54. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Câu 55. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+i$ **B.** $-3-i$ **C.** $3-i$ **D.** $-3+i$

Câu 56. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng.

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Câu 57. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=4-i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Câu 58. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Câu 59. **(Mã 104 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(0;5)$. **B.** $(5;-1)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(5;0)$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 60. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Câu 61. **(Mã 103 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là

A. $(3;5)$. **B.** $(5;2)$. **C.** $(5;3)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 62. **(Mã 123 2017)** Cho 2 số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=3-10i$ **B.** 14 **C.** $z=7-4i$ **D.** $z=2+5i$

Câu 63. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=5$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=1$. **D.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$.

Câu 64. **(Mã 110 2017)** Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=-3-6i$ **B.** $z=11$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=3+6i$

Câu 65. **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z_1=1-2i$, $z_2=-3+i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z=z_1+z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $M(2;-5)$ **B.** $P(-2;-1)$ **C.** $Q(-1;7)$ **D.** $N(4;-3)$

Câu 66. **(Mã 104 2017)** Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=5-5i$ **B.** $z=1-i$ **C.** $z=1-5i$ **D.** $z=1+i$

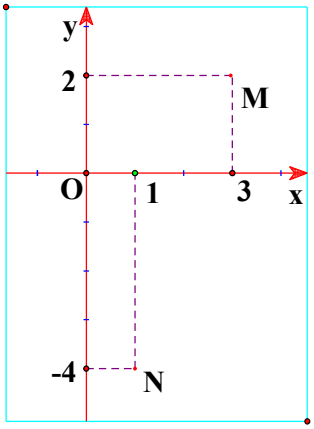
Câu 67. **(Mã 105 2017)** Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = -2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

A. $b=-3$ **B.** $b=2$ **C.** $b=-2$ **D.** $b=3$

Câu 68. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hai số phức $z_1 = 1+i$ và $z_2 = 2-3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1+z_2|=1$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$. **D.** $|z_1+z_2|=5$.

Câu 69. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng phức ở hình bên. Tính $|z_1+z_2|$.



A. $2\sqrt{29}$. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 116.

Dạng 3.2 Phép tính nhân, chia 2 số phức

Câu 70. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1 = 3-i$ và $z_2 = -1+i$. Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Câu 71. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Câu 72. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=2+2i$ và $w=2+i$. Mô đun của số phức $z\overline{w}$

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 73. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 40.

Câu 74. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Câu 75. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=2-i$, số phức $(2-3i)\overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Câu 76. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=-2+3i$, số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $-5-i$. **B.** $-1+5i$. **C.** $1-5i$. **D.** $5-i$.

Câu 77. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$. **C.** $1-5i$. **D.** $-5+i$.

Câu 78. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=-3-3i$. **B.** $w=3+7i$.. **C.** $w=-7-7i$ **D.** $w=7-3i$.

Câu 79. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính môđun của số phức z biết $\overline{z}=(4-3i)(1+i)$.

A. $|z|=5\sqrt{2}$ **B.** $|z|=\sqrt{2}$ **C.** $|z|=25\sqrt{2}$ **D.** $|z|=7\sqrt{2}$

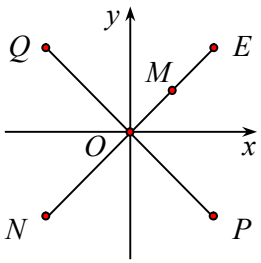
Câu 80. **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=1,b=0$ **B.** $a=0,b=1$ **C.** $a=1,b=-2$ **D.** $a=-2,b=1$

Câu 81. **(Mã 123 2017)** Cho số phước $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ

A. $Q(1;2)$ **B.** $N(2;1)$ **C.** $P(-2;1)$ **D.** $M(1;-2)$

Câu 82. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A. Điểm Q **B.** Điểm E **C.** Điểm P **D.** Điểm N

Câu 83. **(Mã 101 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1-i$ và $z_2=1+2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1+z_2$ có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(4;-1)$.

Câu 84. **(Mã 102 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=-2+i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(2;-3)$.

Câu 85. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\overline{z}=3+i$. **B.** $\overline{z}=-3-i$. **C.** $\overline{z}=3-i$. **D.** $\overline{z}=-3+i$.

Câu 86. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $z(1+2i)=4-3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.

A. $\overline{z}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$. **B.** $\overline{z}=\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i$. **C.** $\overline{z}=\frac{-2}{5}+\frac{11}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$.

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i)=3-5i$. Tính môđun của z

A. $|z|=\sqrt{17}$. **B.** $|z|=16$. **C.** $|z|=17$. **D.** $|z|=4$.

Câu 88. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức $z=(1-2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\frac{1}{z}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 89. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Cho số phức $z=(1-i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** $-2i$.

Câu 90. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức $z=1-\frac{1}{3}i$. Tìm số phức $\mathrm{w}=i\bar{z}+3z$.

A. $\mathrm{w}=\frac{8}{3}$. **B.** $\mathrm{w}=\frac{8}{3}+i$. **C.** $\mathrm{w}=\frac{10}{3}$. **D.** $\mathrm{w}=\frac{10}{3}+i$.

Câu 91. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức $z=-2+i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng toạ độ?

A. $M(-1;-2)$. **B.** $P(-2;1)$. **C.** $N(2;1)$. **D.** $Q(1;2)$.

Câu 92. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức $z=1+2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=2z+\bar{z}$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 2

Câu 93. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. **B.** $z.\bar{z}$ là số thực. **C.** $z+\bar{z}$ là số thực. **D.** $z-\bar{z}$ là số ảo.

Câu 94. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=3-4i$. Số phức $2z_1+3z_2-z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

A. $10i$. **B.** $-10i$. **C.** $11+8i$. **D.** $11-10i$.

Câu 95. **(THPT Gia Lộc Hải Dương Năm 2019)** Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\bar{z}=3-5i$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;4)$. **D.** $M(1;-4)$.

Câu 96. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z-5=7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\bar{z}=\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. **B.** $\bar{z}=-\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$. **C.** $\bar{z}=-\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. **D.** $\bar{z}=\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$.

Câu 97. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức $z=\frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(1;-4)$.

Câu 98. **(Chuyên Hạ Long 2019)**Cho $z_1=2+4i$, $z_2=3-5i$. Xác định phần thực của $w=z_1.\bar{z}_2^{2}$

A. -120. **B.** -32. **C.** 88. **D.** -152.

Câu 99. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(-1;1)$ **B.** $M(-1;-1)$ **C.** $M(1;1)$ **D.** $M(1;-1)$

Câu 100. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 z=4-3i$. Môđun của z bằng

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{4}{5}$

Câu 101. (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018) Cho $z=\dfrac{3+i}{x+i}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

A. $\dfrac{2x-4}{2}$. **B.** $\dfrac{4x+2}{2}$. **C.** $\dfrac{4x-2}{x^2+1}$. **D.** $\dfrac{2x+6}{x^2+1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ 7-8 ĐIỂM

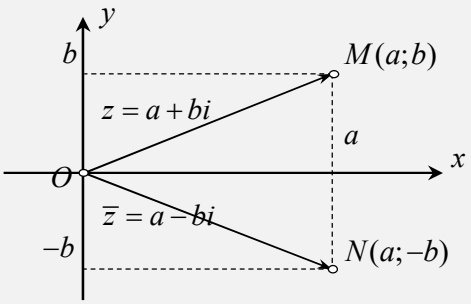
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$ ◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dạng toán. **Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K ?**

— **Bước 1**. Gọi số phức cần tìm là $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

— **Bước 2**. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\overline{z},|z|,...$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x,y$.

Lưu ý

Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z=x+y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x,y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó, ta cần nhớ:

— Môđun của số phức $z=x+y.i$ là $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\text{thực})^2+(\text{ảo})^2}$.

— Số phức liên hợp của $z=x+y.i$ là $\overline{z}=x-y.i$ (ngược dấu ảo).

— Hai số phức $z_1=x_1+y_1.i$ và $z_2=x_2+y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo).

Câu 1. **(Mã 104 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1;y=-1$. **B.** $x=-1;y=1$. **C.** $x=1;y=-1$. **D.** $x=1;y=1$.

Câu 2. **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các số thực x,y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=\sqrt{2},\ y=2$ **B.** $x=-\sqrt{2},\ y=2$ **C.** $x=0,\ y=2$ **D.** $x=\sqrt{2},\ y=-2$

Câu 3. **(Mã 101 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;y=-1$ **B.** $x=1;y=-3$ **C.** $x=-1;y=-3$ **D.** $x=-1;y=-1$

Câu 4. **(Mã 104 - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\bar{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Câu 5. **(Mã 103 - 2019)** Cho số z thỏa mãn $(2+i)z-4(\bar{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 6. **(Mã 102 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2;y=-2$ **B.** $x=2;y=-1$ **C.** $x=-2;y=-2$ **D.** $x=-2;y=-1$

Câu 7. **(Đề Tham Khảo -2019)** Tìm các số thực a,b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0,b=1.$ **B.** $a=1,b=2.$ **C.** $a=0,b=2.$ **D.** $a=\frac{1}{2},b=1.$

Câu 8. **(Mã 103 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2$; $y=4$ **B.** $x=-2$; $y=0$ **C.** $x=2$; $y=0$ **D.** $x=-2$; $y=4$

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Cho số phức z thoả mãn $3(\bar{z}-i)-(2+3i)z=7-16i.$ Môđun của z bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Mã 101 - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 11. **(THPT Cẩm Giàng 2 Năm 2019)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1$; $y=-3$. **B.** $x=-1$; $y=-3$. **C.** $x=-1$; $y=-1$. **D.** $x=1$; $y=-1$.

Câu 12. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1,y=-1$ **B.** $x=1,y=1$ **C.** $x=-1,y=1$ **D.** $x=1,y=-1$

Câu 13. **(Chuyên Sơn La 2019)** Tìm các số thực x và y thỏa mãn $(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)-(y-5)i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x=\frac{3}{2},y=-2$. **B.** $x=-\frac{3}{2},y=-\frac{4}{3}$. **C.** $x=1,y=\frac{4}{3}$. **D.** $x=\frac{3}{2},y=\frac{4}{3}$.

Câu 14. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$ **B.** $P=-\frac{1}{2}$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=-1$

Câu 15. **(Chuyên KHTN -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Môđun của z bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+2i)\overline{z}+z=3-4i$. Tính giá trị của biểu thức $S=3x-2y$.

A. $S=-12$ **B.** $S=-11$ **C.** $S=-13$ **D.** $S=-10$

Câu 17. **(Sở Bình Phước 2019)** Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz+(1-i)\overline{z}=-2i$ bằng

A. 6 **B.** –2 **C.** 2 **D.** –6

Câu 18. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $a,b\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a+bi)i-2a=1+3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a-b$ bằng

A. 4 **B.** –10 **C.** –4 **D.** 10

Câu 19. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$. **B.** $P=-\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=-1$

Câu 20. **(Chuyên Hạ Long -2019)** Tìm số phức z biết $4z+5\overline{z}=27-7i$.

A. $z=-3+7i$. **B.** $z=-3-7i$. **C.** $z=3-7i$. **D.** $z=3+7i$.

Câu 21. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Mô đun của số phức $w=(z+1)\overline{z}$ bằng.

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 22. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tìm các số thực a,b thỏa mãn $(a-2b)+(a+b+4)i=(2a+b)+2bi$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=-3,b=1$. **B.** $a=3,b=-1$. **C.** $a=-3,b=-1$. **D.** $a=3,b=1$.

Câu 23. Cho hai số phức $z_1=m+1-2i$ và $z_1=2-(m+1)i$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $z_1.z_2-8+8i$ là một số thực.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 24. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm mô đun của số phức z biết $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 25. Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i)+\overline{z}(1-i)+4-i=0$ với i là đơn vị ảo.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 26. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - TPHCM - 2018)** Tìm số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$.

A. $z=-2+i$. **B.** $z=-2-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $2+i$.

Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

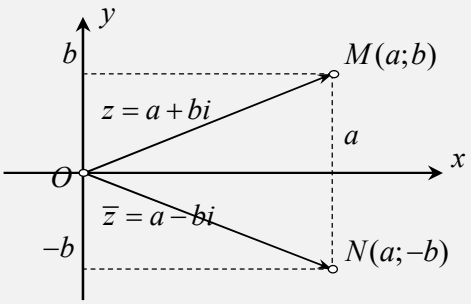
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$ ◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dạng toán. **Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K ?**

— **Bước 1**. Gọi số phức cần tìm là $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

— **Bước 2**. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\overline{z},|z|,...$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x,y$.

Lưu ý

Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z=x+y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x,y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó, ta cần nhớ:

— Môđun của số phức $z=x+y.i$ là $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\text{thực})^2+(\text{ảo})^2}$.

— Số phức liên hợp của $z=x+y.i$ là $\overline{z}=x-y.i$ (ngược dấu ảo).

— Hai số phức $z_1=x_1+y_1.i$ và $z_2=x_2+y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo).

Dạng 1. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=-4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=4$

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Câu 4. **(Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 5. **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 6. **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Câu 7. **(Mã 102 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Câu 9. **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Câu 10. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z.\bar{z}+z|=2$ và $|z|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i\sqrt{5}|+|z-i\sqrt{5}|=6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Câu 12. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Câu 13. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Môđun của số phức $w=1-z+z^2$ bằng

A. $|w|=\sqrt{445}$. **B.** $|w|=\sqrt{425}$. **C.** $|w|=\sqrt{37}$. **D.** $|w|=\sqrt{457}$

Câu 14. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 15. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Câu 16. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{\overline{z+i}}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 17. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 18. **(THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\overline{z}|i+(z+\overline{z})i^{2019}=1$?

A. 4 **B.** **C.** 1 **D.** 3

Câu 19. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|$ và z^2 là số thuần ảo

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Câu 20. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3|=|z-1|$ và $(z+2)(\overline{z}-i)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 22. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Câu 23. Cho ba số phức $z_1;\ z_2;\ z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 24. **(THPT Chuyên Hạ Long - Lần 2 - 2018)** Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z.\overline{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10. **B.** -8. **C.** -35. **D.** -7.

Câu 25. **(Đồng Tháp - 2018)** Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=\sqrt{2}$. **D.** $P=2$.

Câu 26. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0 \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0 \in \left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 28. **(Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Câu 30. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)** Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\frac{13}{3}iz$ có môđun bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\frac{3\sqrt{26}}{2}$. **D.** 13.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1$, $|z_2|=2$ và $|z_1+z_2|=3$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** một giá trị khác.

Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho số phức $z=a+bi(a,b\in R)$ thỏa mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính $P=a+b$.

A. 5. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 7. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 33. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1|=2\sqrt{3}$, $|z_2|=3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. $P=60$. **B.** $P=20\sqrt{3}$. **C.** $P=30\sqrt{2}$. **D.** $P=50$.

Câu 34. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)** Cho số phức $w=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|w^2+4|=2|w|$. Đặt $P=8(x^2-y^2)+12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=-\left(|\overline{w}|^2-2\right)^2$. **B.** $P=-\left(|w|^2-2\right)^2$. **C.** $P=-(|w|-4)^2$. **D.** $P=-\left(|w|^2-4\right)^2$.

Câu 35. Số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=14$. **C.** $P=2$. **D.** $P=7$.

Câu 36. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\overline{z}|i+(z+\overline{z})i^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 37. **(Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Câu 38. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2(z+\bar{z})=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 39. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa mãn $z.\bar{z}-12|z|+(z-\bar{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Câu 40. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và $|z+2|^2-|z-i|^2=33$. Module của số phức $z-2-i$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 9. **C.** 25. **D.** 5.

Câu 41. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(z+1+i)(\bar{z}-i)+3i=9$ và $|\bar{z}|>2$. Tính $P=a+b$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Câu 42. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ và $|z_1-iz_2|=6$. Biết $|z_2|>|z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 43. Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\left(z+\frac{5}{|z|}\right)i=7-z$.

A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.

Dạng 2. Một số bài toán liên quan đến số phức có lũy thừa bậc cao, chứa tham số

Câu 44. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức $z=(1+i)^{2019}$. Phần thực của z bằng

A. -2^{1009}. **B.** 2^{2019}. **C.** -2^{2019}. **D.** 2^{1009}.

Câu 45. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Số phức $z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}+1$. **B.** $1-2^{1009}$. **C.** $2^{1009}-1$. **D.** $-(2^{1009}+1)$.

Câu 46. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Gọi T là tổng phần thực, phần ảo của số phức $w=i+2i^2+3i^3+...+2018i^{2018}$. Tính giá trị của T.

A. $T=0$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Câu 47. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ z_1+z_2+z_3=1\end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $S=z_1^{2019}+z_2^{2019}+z_3^{2019}$.

A. $S=-1$. **B.** $S=2^{2019}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2^{-2019}$.

Câu 48. Tính $S = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2019i^{2019}$

A. $S = -1010 - 1010i$. **B.** $S = 1010 - 1010i$. **C.** $S = 2019i$. **D.** $S = 1010 + 1010i$.

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + ... + \left(z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}\right)^2.$$

A. $P = 4038$. **B.** $P = 2019$. **C.** $P = 673$. **D.** $P = 6073$.

Câu 50. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Khai triển của biểu thức $\left(x^2 + x + 1\right)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{4036} x^{4036}$. Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + ... - a_{4034} + a_{4036}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** -2^{1009}. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 51. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4 = |z|$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 52. **(Mã 104 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 53. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z = \frac{m + 2i}{m - 2i}$ có phần thực dương

A. $m > 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $m < -2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 54. **(Kon Tum - 2019)** Cho hai số phức $z = 3 - 4i$ và $z' = (2 + m) + mi (m \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'| = |iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

A. -1. **B.** $\frac{\sqrt{46}}{2}$. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 55. Biết rằng $z = m^2 - 3m + 3 + (m - 2)i$, với $m \in \mathbb{R}$, là một số thực. Giá trị của biểu thức $P = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2019}$ bằng

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 0.

Câu 56. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho số phức z thoả mãn $\frac{1+i}{z}$ là số thực và $|z - 2| = m$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **D.** $m_0 \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 57. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z - m| = 6$ và $\frac{z}{z - 4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 58. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

Lý thuyết chung

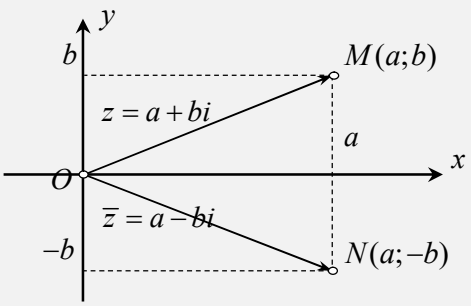
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$

◆ **Phép trừ hai số phức** $z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dạng 1. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

Dạng 1.1 Xác định phần thực, phần ảo của số phức

Câu 1. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Lời giải

Ta có phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng 3

Câu 2. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=-5-4i$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=-5-4i$ có phần thực là -5.

Câu 3. **(Mã 104 2018)** Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

A. $1-3i$ **B.** $-1+3i$ **C.** $1+3i$ **D.** $-1-3i$

Lời giải

Chọn C

Câu 4. **(Mã 103 -2018)** Số phức $5+6i$ có phần thực bằng

A. -6. **B.** 6. **C.** -5. **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Số phức $5+6i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng 6.

Câu 5. **(Mã 102 2018)** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A. $3+4i$ **B.** $4-3i$ **C.** $3-4i$ **D.** $4+3i$

Lời giải

Chọn A

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là: $z=3+4i$.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2017)** Kí hiệu a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3-2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

A. $a=3;b=\sqrt{2}$ **B.** $a=3;b=-2\sqrt{2}$ **C.** $a=3;b=2$ **D.** $a=3;b=2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B

Số phức $3-2\sqrt{2}i$ có phần thực là $a=3$ và phần ảo là $b=-2\sqrt{2}$.

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Số phức $-3+7i$ có phần ảo bằng:

A. 7 **B.** -7 **C.** -3 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Câu 8. **(Mã 123 2017)** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.

A. $z=\sqrt{3}+i$ **B.** $z=-2$ **C.** $z=-2+3i$ **D.** $z=3i$

Lời giải

Chọn D

Số phức z được gọi là số thuần ảo nếu phần thực của nó bằng 0.

Câu 9. **(Mã 105 2017)** Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần thực a của z?

A. $a=2$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-3$

Lời giải

Chọn A

Số phức $z=2-3i$ có phần thực $a=2$.

Câu 10. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức $z=3-4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$. **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3. **D.** Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Lời giải

Số phức $z=3-4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Dạng 1.2 Xác định số phức liên hợp, số phức đối, môđun của số phức

Câu 11. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Môđun của số phức $1+2i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 12. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là $\overline{z}=2-i$.

Câu 13. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là:

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 14. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là

A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 15. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là $\overline{z}=2+5i$.

Câu 16. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$ là

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn B

Ta có: $z=3-5i\Rightarrow\overline{z}=3+5i$.

Câu 17. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$:

A. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$ **B.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

C. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$ **D.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2

Lời giải

Chọn B

$z=3-2i\Rightarrow\overline{z}=3+2i$. Vậy phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Câu 18. **(Mã 104 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-2i$ là.

A. $3+2i$. **B.** $-3-2i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $-3+2i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\overline{z}=a-bi$ từ đó suy ra chọn đáp án **B.**

Câu 19. **(Mã 103 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là:

A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ là số phức $z=a-bi,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Câu 20. **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z=2+i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{5}$ **B.** $|z|=5$ **C.** $|z|=2$ **D.** $|z|=3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$.

Câu 21. **(Mã 102 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là

A. $-3+5i$. **B.** $-5-3i$. **C.** $5+3i$. **D.** $-5+3i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là $5+3i$

Câu 22. **(Mã 101 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $3+4i$. **B.** $-4+3i$. **C.** $-3-4i$. **D.** $-3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $a+bi$ là số phức $a-bi$.

Vậy số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là số phức $3+4i$.

Câu 23. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho số phức $z=3+2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.

D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Lời giải

$z=3+2i \Leftrightarrow \overline{z}=3-2i$. Nên số phức $\overline{z}$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

Câu 21 Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$. **B.** Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.

C. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$. **D.** Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Lời giải

$\overline{z}=3+2i$.

Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Câu 24. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Số phức đối của $z=5+7i$ là?

A. $\overline{z}=5+7i$. **B.** $-z=-5-7i$. **C.** $-z=-5+7i$. **D.** $-z=5-7i$.

Lời giải

Số phức đối của z là $-z$. Suy ra $-z=-5-7i$.

Câu 25. **(Chuyên Sơn La 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là

A. $\overline{z}=1+2i$. **B.** $\overline{z}=2-i$. **C.** $\overline{z}=-1+2i$. **D.** $\overline{z}=-1-2i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\overline{z}=a-bi$.

Câu 26. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=5+6i$ là

A. $\overline{z}=-5+6i$. **B.** $\overline{z}=-5-6i$. **C.** $\overline{z}=6-5i$. **D.** $\overline{z}=5-6i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ là số phức $\overline{z}=x-yi$. Do đó số phức liên hợp của số phức $z=5+6i$ là $\overline{z}=5-6i$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho số phức $z=2-3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

A. $\overline{z}=3-2i$. **B.** $\overline{z}=3+2i$. **C.** $\overline{z}=-2-3i$. **D.** $\overline{z}=2+3i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=2-3i$ là $\overline{z}=2+3i$.

Dạng 2. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

Câu 28. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $N(4;-3)$. **D.** $M(4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=(1+2i)^2=1^2+2.1.2i+(2i)^2=-3+4i$.

Vậy trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm $P(-3;4)$.

Câu 29. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm $P(-1;2)$.

Câu 30. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điểm $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z, suy ra $z=-3+i$.

Vậy phần thực của z bằng -3.

Câu 31. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức $z\Rightarrow z=-1+3i$.

Vậy phần thực của z bằng -1.

Câu 32. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng:

A. -2 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -1

Lời giải

Chọn A

Điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow z=-2+i$

Vậy phần thực của z là -2

Câu 33. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=1-2i$?

A. $Q(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $P(-2;1)$. **D.** $N(1;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn số phức $z=1-2i$ là điểm $N(1;-2)$.

Câu 34. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=3-2i$?

A. $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z=a+bi \Rightarrow N(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z

$z=3-2i \Rightarrow N(3;-2)$

Câu 35. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

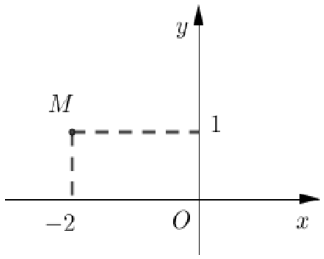
A. $N(-1;2)$. **B.** $P(2;-1)$. **C.** $Q(-2;1)$. **D.** $M(1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm $N(-1;2)$.

Câu 36. **(Đề Tham Khảo 2018)** Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



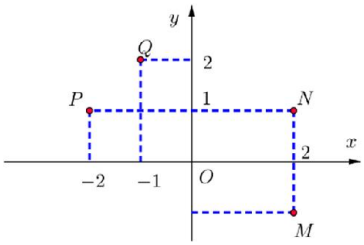
A. $z=1+2i$ **B.** $z=1-2i$ **C.** $z=2+i$ **D.** $z=-2+i$

Lời giải

Chọn D

Theo hình vẽ $M(-2;1) \Rightarrow z=-2+i$

Câu 37. **(Đề Tham Khảo 2019)** Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$?



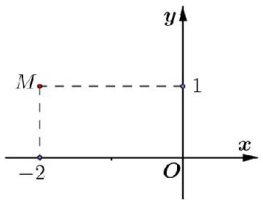
A. P **B.** M **C.** Q **D.** N

Lời giải

Chọn C

Ta có điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$ trên hệ trục tọa độ Oxy là điểm $Q(-1;2)$

Câu 38. **(Mã 110 2017)** Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



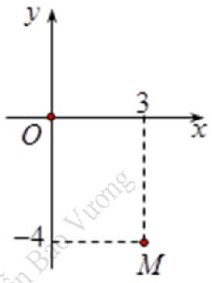
A. $z_1=1-2i$ **B.** $z_2=1+2i$ **C.** $z_3=-2+i$ **D.** $z_4=2+i$

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1=-2+i$

Câu 39. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



Nguyễn Bảo Vương

A. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$ **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là -4

C. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$ **D.** Phần thực là -4 và phần ảo là 3

Lời giải

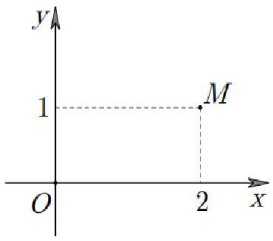
Chọn B

Nhắc lại: *Trên mặt phẳng phức, số phức* $z=x+yi$ *được biểu diễn bởi điểm* $M(x;y)$.

Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x=3$ và tung độ $y=-4$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Câu 40. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\bar{z}$ là:



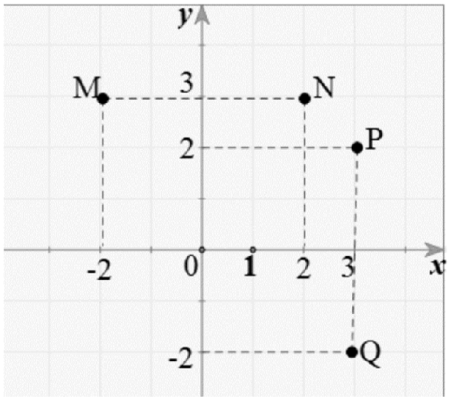
A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

Lời giải

Điểm $M(2;1)$ trong hệ tọa độ vuông góc cuả mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=2+i$ suy ra $\bar{z}=2-i$.

Câu 41. Điểm nào ở hình vẽ bên biểu diễn số phức $z=3-2i$?

A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.



Lời giải

Chọn D.

Câu 42. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=2-3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

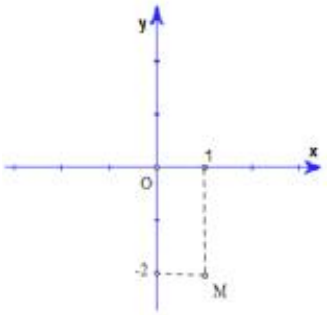
A. $M(-2;3)$. **B.** $Q(-2;-3)$. **C.** $N(2;-3)$. **D.** $P(2;3)$.

Lời giải

Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ là $(a;b)$.

Với $z=2-3i$ ta có $a=2$ và $b=-3$. Do đó điểm biểu diễn tương ứng là $N(2;-3)$.

Câu 43. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

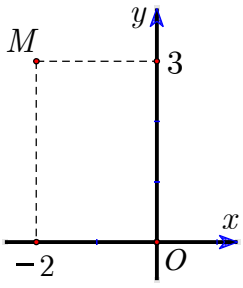


A. $1-2i$. **B.** $i+2$. **C.** $i-2$. **D.** $1+2i$.

Lời giải

Tọa độ điểm $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=1-2i$.

Câu 44. **(Thanh Hóa 2019)** Điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu thị cho số phức

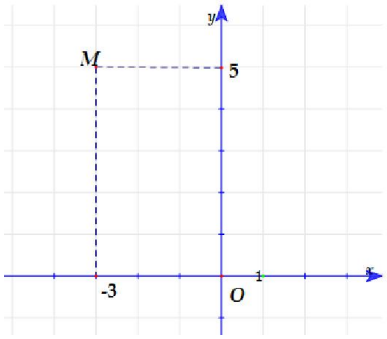


A. $3+2i$. **B.** $2-3i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $3-2i$.

Lời giải

Điểm $M(-2;3)$ biểu thị cho số phức $z=-2+3i$.

Câu 45. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z. Chọn kết luận đúng về số phức $\overline{z}$.

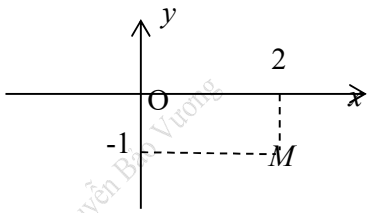


A. $\overline{z}=3+5i$. **B.** $\overline{z}=-3+5i$. **C.** $\overline{z}=3-5i$. **D.** $\overline{z}=-3-5i$.

Lời giải

Tọa độ điểm $M(-3;5)\Rightarrow z=-3+5i\Rightarrow \overline{z}=-3-5i$.

Câu 46. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?



A. $z=2-i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=-1-2i$.

Lời giải

Điểm $M(2;-1)$ nên nó biểu diễn cho số phức $z=2-i$.

Câu 47. **(Sở Bình Phước 2019)** Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1;-2)$?

A. $-1-2i$ **B.** $1+2i$ **C.** $1-2i$ **D.** $-2+i$

Lời giải

Chọn C

$M(1;-2)$ là điểm biểu diễn cho số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -2, tức là $1-2i$.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là

A. hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

B. hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.

C. hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

D. hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

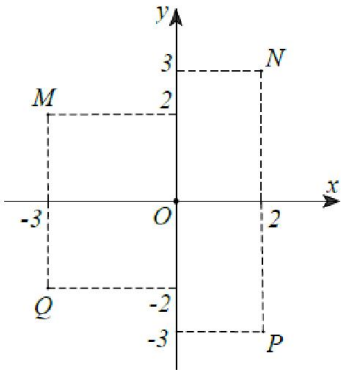
Lời giải

Điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(a;b)$

Điểm biểu diễn của số phức $-z=-a-bi$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $N(-a;-b)$

Do đó: điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ

Câu 49. Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$?



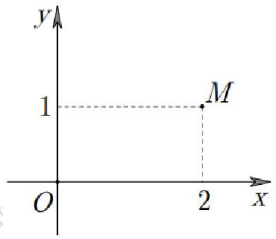
A. M. **B.** N. **C.** Q. **D.** P.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$ là $\overline{z}=2+3i$. Điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$ là $N(2\,;\,3)$.

Vậy điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$ là N.

Câu 50. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là:



A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

Lời giải

Điểm $M(2;1)$ trong hệ tọa độ vuông góc cuả mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=2+i$ suy ra $\overline{z}=2-i$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, 3 điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1=3-7i, z_2=9-5i$ và $z_3=-5+9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z=1-9i$. **B.** $z=3+3i$. **C.** $z=\frac{7}{3}-i$. **D.** $z=2+2i$.

Lời giải

Ta có: $A(3;-7), B(9;-5), C(-5;9)$

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{7}{3};-1\right)$

Vậy trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức $z=\frac{7}{3}-i$.

Dạng 3. Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia cơ bản của số phức

Dạng 3.1 Phép tính cộng trừ 2 số phức

Câu 52. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overline{z_2}=1+i$. Do đó $z_1+\overline{z_2}=(-3+i)+(1+i)=-2+2i.$

Vậy phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng 2.

Câu 53. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1+z_2=3+4i$.

Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng 3.

Câu 54. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1+z_2=3-2i+2+i=5-i$.

Câu 55. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+i$ **B.** $-3-i$ **C.** $3-i$ **D.** $-3+i$

Lời giải

Chọn C

Tacó: $z_1+z_2=1-2i+2+i=3-i$.

Câu 56. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng.

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1+z_2=1-3i+3+i=4-2i$.

Câu 57. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=4-i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1-z_2=(1+2i)-(4-i)=-3+3i$.

Câu 58. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1-z_2=(1-3i)-(3+i)=1-3i-3-i=-2-4i$.

Câu 59. **(Mã 104 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(0;5)$. **B.** $(5;-1)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(5;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2z_1+z_2=5-i$. Nên ta chọn **A.**

Câu 60. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z_1-z_2=3-2i-(2+i)=1-3i$

Câu 61. **(Mã 103 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là

A. $(3;5)$. **B.** $(5;2)$. **C.** $(5;3)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1+2z_2=(1+i)+2(2+i)=5+3i$.

Do đó điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là $(5;3)$.

Câu 62. **(Mã 123 2017)** Cho 2 số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=3-10i$ **B.** 14 **C.** $z=7-4i$ **D.** $z=2+5i$

Lời giải

Chọn C

$z=5-7i+2+3i=7-4i$.

Câu 63. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=5$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=1$. **D.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

$z_1+z_2=1+i+(2-3i)=3-2i$ nên ta có: $|z_1+z_2|=|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 64. **(Mã 110 2017)** Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=-3-6i$ **B.** $z=11$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=3+6i$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=z_1-z_2=(4-3i)-(7+3i)=-3-6i$.

Câu 65. **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z_1=1-2i$, $z_2=-3+i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z=z_1+z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $M(2;-5)$ **B.** $P(-2;-1)$ **C.** $Q(-1;7)$ **D.** $N(4;-3)$

Lời giải

Chọn B

$z=z_1+z_2=-2-i$.

Câu 66. **(Mã 104 2017)** Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=5-5i$ **B.** $z=1-i$ **C.** $z=1-5i$ **D.** $z=1+i$

Lời giải

Chọn D

$z+2-3i=3-2i \Leftrightarrow z=3-2i-2+3i=1+i$.

Câu 67. **(Mã 105 2017)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=-3$ **B.** $b=2$ **C.** $b=-2$ **D.** $b=3$

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=z_1-z_2=3+2i \Rightarrow b=2$

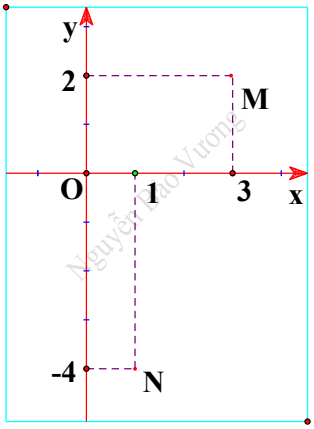
Câu 68. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=1$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$. **D.** $|z_1+z_2|=5$.

Lời giải

Ta có $z_1+z_2=1+i+2-3i=3-2i \Rightarrow |z_1+z_2|=|3-2i|=\sqrt{13}$.

Câu 69. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng phức ở hình bên. Tính $|z_1+z_2|$.



A. $2\sqrt{29}$. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 116.

Lời giải

Từ hình bên ta có tọa độ $M(3;2)$ biểu diễn số phức $z_1=3+2i$.

Tọa độ $N(1;-4)$ biểu diễn $z_2=1-4i$.

Ta có $z_1+z_2=4-2i \Rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{(4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

Dạng 3.2 Phép tính nhân, chia 2 số phức

Câu 70. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1z_2=(3-i)(-1+i)=-2+4i$.

Suy ra phần ảo của z_1z_2 bằng 4.

Câu 71. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=1+2i$ và $\mathrm{w}=3+i$. Môđun của số phức $z.\overline{\mathrm{w}}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\left|z.\overline{\mathrm{w}}\right|=|z|.\left|\overline{\mathrm{w}}\right|=|z|.|\mathrm{w}|=\sqrt{1+2^2}.\sqrt{3^2+1}=5\sqrt{2}.$

Câu 72. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=2+2i$ và $\mathrm{w}=2+i$. Mô đun của số phức $z\overline{\mathrm{w}}$

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

$\left|z\overline{\mathrm{w}}\right|=\left|(2+2i)(2-i)\right|=\left|6+2i\right|=2\sqrt{10}$

Câu 73. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z.\overline{w}=(4+2i)(1-i)=6-2i$. Suy ra $\left|z.\overline{w}\right|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Câu 74. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w=1+i\Rightarrow\overline{w}=1-i$

$z.\overline{w}=(1+3i)(1-i)=4+2i$

Từ đây ta suy ra: $\left|z.\overline{w}\right|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 75. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=2-i$, số phức $(2-3i)\overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2-3i)\overline{z}=(2-3i)(2+i)=7-4i$.

Câu 76. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=-2+3i$, số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $-5-i$. **B.** $-1+5i$. **C.** $1-5i$. **D.** $5-i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z=-2+3i\Rightarrow\overline{z}=-2-3i$. Do đó $(1+i)\overline{z}=(1+i).(-2-3i)=1-5i$.

Câu 77. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$. **C.** $1-5i$. **D.** $-5+i$.

Lời giải

Chọn D.

Vì $\overline{z}=-3-2i$ nên ta có $(1-i)\overline{z}=(1-i)(-3-2i)=-5+i$

Câu 78. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=-3-3i$. **B.** $w=3+7i$.. **C.** $w=-7-7i$ **D.** $w=7-3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w=iz+\overline{z}=i(2+5i)+(2-5i)=2i-5+2-5i=-3-3i$

Câu 79. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính môđun của số phức z biết $\overline{z}=(4-3i)(1+i)$.

A. $|z|=5\sqrt{2}$ **B.** $|z|=\sqrt{2}$ **C.** $|z|=25\sqrt{2}$ **D.** $|z|=7\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

$\overline{z}=(4-3i)(1+i)=7+i\Rightarrow z=7-i\Rightarrow|z|=5\sqrt{2}$

Câu 80. **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=1,b=0$ **B.** $a=0,b=1$ **C.** $a=1,b=-2$ **D.** $a=-2,b=1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z=1-i+i^3=1-i+i^2.i=1-i-i=1-2i$ (vì $i^2=-1$)

Suy ra phần thực của z là $a=1$, phần ảo của z là $b=-2$.

Câu 81. **(Mã 123 2017)** Cho số phước $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ

A. $Q(1;2)$ **B.** $N(2;1)$ **C.** $P(-2;1)$ **D.** $M(1;-2)$

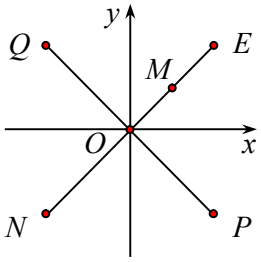
Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

$w=iz=i(1-2i)=2+i$

Câu 82. **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A. Điểm Q **B.** Điểm E **C.** Điểm P **D.** Điểm N

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của z là điểm $M(a;b)$

$\Rightarrow 2z=2a+2bi$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy là $M_1(2a;2b)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1}=2\overrightarrow{OM}$ suy ra $M_1\equiv E$.

Câu 83. **(Mã 101 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1-i$ và $z_2=1+2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1+z_2$ có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(4;-1)$.

Lời giải

Chọn D

$3z_1+z_2=3(1-i)+(1+2i)=4-i$. Suy ra: Tọa độ điểm biểu diễn là: $(4;-1)$.

Câu 84. **(Mã 102 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=-2+i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(2;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2z_1+z_2=-4+2i+1+i=-3+3i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là $(-3;3)$.

Câu 85. Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\overline{z}=3+i$. **B.** $\overline{z}=-3-i$. **C.** $\overline{z}=3-i$. **D.** $\overline{z}=-3+i$.

Lời giải

Chọn B

$z=i(3i+1)=-3+i$ nên suy ra $\overline{z}=-3-i$.

Câu 86. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $z(1+2i)=4-3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.

A. $\overline{z}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$. **B.** $\overline{z}=\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i$. **C.** $\overline{z}=\frac{-2}{5}+\frac{11}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Vì $z(1+2i)=4-3i$ nên $z=\frac{4-3i}{1+2i}=\frac{(4-3i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{-2-11i}{5}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$.

Vậy nên $\overline{z}=\frac{-2}{5}+\frac{11}{5}i$.

Câu 87. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i)=3-5i$. Tính môđun của z

A. $|z|=\sqrt{17}$. **B.** $|z|=16$. **C.** $|z|=17$. **D.** $|z|=4$.

Lời giải

$z(1+i)=3-5i\Leftrightarrow z=\frac{3-5i}{1+i}=-1-4i\Rightarrow|z|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}$.

Câu 88. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức $z=(1-2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\frac{1}{z}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Ta có $z=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{-3-4i}=-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$.

Do đó $\left|\frac{1}{z}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{4}{25}\right)^2}=\frac{1}{5}$.

Câu 89. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Cho số phức $z=(1-i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=(1-i)^2(1+2i)=(1-2i+i^2)(1+2i)=-2i(1+2i)=-2i-4i^2=4-2i$.

Suy ra số phức z có phần ảo là: -2.

Câu 90. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức $z=1-\frac{1}{3}i$. Tìm số phức $\mathrm{w}=i\bar{z}+3z$.

A. $\mathrm{w}=\frac{8}{3}$. **B.** $\mathrm{w}=\frac{8}{3}+i$. **C.** $\mathrm{w}=\frac{10}{3}$. **D.** $\mathrm{w}=\frac{10}{3}+i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=1-\frac{1}{3}i\Rightarrow\bar{z}=1+\frac{1}{3}i$

Khi đó: $\mathrm{w}=i\bar{z}+3z=i(1+\frac{1}{3}i)+3(1-\frac{1}{3}i)=\frac{8}{3}$

Câu 91. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức $z=-2+i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng toạ độ?

A. $M(-1;-2)$. **B.** $P(-2;1)$. **C.** $N(2;1)$. **D.** $Q(1;2)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w=iz=i(-2+i)=-1-2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $w=iz$ là điểm $M(-1;-2)$.

Câu 92. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức $z=1+2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=2z+\bar{z}$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=1+2i\Rightarrow\bar{z}=1-2i$

$w=2z+\bar{z}=2(1+2i)+1-2i=3+2i$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức w là 5

Câu 93. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. **B.** $z.\bar{z}$ là số thực. **C.** $z+\bar{z}$ là số thực. **D.** $z-\bar{z}$ là số ảo.

Lời giải

Đặt $z=a+bi,\ (a_1,b_1\in\mathbb{R})\Rightarrow\bar{z}=a-bi$.

$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{(a^2-b^2)+2ab.i}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}.i$ chỉ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow a=\pm b$.

Câu 94. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=3-4i$. Số phức $2z_1+3z_2-z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

A. $10i$. **B.** $-10i$. **C.** $11+8i$. **D.** $11-10i$.

Lời giải

Ta có $2z_1+3z_2-z_1z_2=2(1+2i)+3(3-4i)-(1+2i)(3-4i)=11-8i-(11+2i)=-10i$.

Câu 95. **(THPT Gia Lộc Hải Dương Năm 2019)** Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\overline{z}=3-5i$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;4)$. **D.** $M(1;-4)$.

Lời giải

Ta có $(1+i)\overline{z}=3-5i \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{3-5i}{1+i} \Leftrightarrow \overline{z}=-1-4i$.

Suy ra $z=-1+4i$. Vậy $M(-1;4)$.

Câu 96. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z-5=7i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{z}=\dfrac{13}{5}-\dfrac{4}{5}i$. **B.** $\overline{z}=-\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i$. **C.** $\overline{z}=-\dfrac{13}{5}-\dfrac{4}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

Lời giải

$(1+3i)z-5=7i \Leftrightarrow z=\dfrac{5+7i}{1+3i} \Leftrightarrow z=\dfrac{13}{5}-\dfrac{4}{5}i \Rightarrow \overline{z}=\dfrac{13}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

Câu 97. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(1;-4)$.

Lời giải

Ta có $z=\dfrac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}=\dfrac{(8-3)-(2+12)i}{3+2i}=\dfrac{5-14i}{3+2i}=\dfrac{(5-14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\dfrac{(15-28)-(10+42)i}{9+4}=\dfrac{-13-52i}{13}=-1-4i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng Oxy là $M(-1;-4)$.

Câu 98. **(Chuyên Hạ Long 2019)**Cho $z_1=2+4i$, $z_2=3-5i$. Xác định phần thực của $w=z_1.\overline{z_2}^2$

A. -120. **B.** -32. **C.** 88. **D.** -152.

Lời giải

Ta có $\overline{z_2}=3+5i \Rightarrow \overline{z_2}^2=-16+30i \Rightarrow w=z_1.\overline{z_2}^2=(2+4i)(-16+30i)=-152-4i$.

Vậy phần thực của w là -152.

Câu 99. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(-1;1)$ **B.** $M(-1;-1)$ **C.** $M(1;1)$ **D.** $M(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $z=\dfrac{4+i-(2-i)^2}{3+2i}=1+i$ nên $M(1;1)$.

Câu 100. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Cho số phức z thỏa mãn $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 z=4-3i$. Môđun của z bằng

A. $\dfrac{5}{4}$ **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** $\dfrac{2}{5}$ **D.** $\dfrac{4}{5}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=\dfrac{4-3i}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}\Rightarrow |z|=\dfrac{|4-3i|}{|1-\sqrt{3}i|^2}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 101. (THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018) Cho $z=\dfrac{3+i}{x+i}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

A. $\dfrac{2x-4}{2}$. **B.** $\dfrac{4x+2}{2}$. **C.** $\dfrac{4x-2}{x^2+1}$. **D.** $\dfrac{2x+6}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có: $z=\dfrac{3+i}{x+i}=\dfrac{(3+i)(x-i)}{(x+i)(x-i)}=\dfrac{3x-3i+xi+1}{x^2+1}=\dfrac{3x+1}{x^2+1}+\dfrac{(x-3)i}{x^2+1}$.

Suy ra tổng phần thực và phần ảo của số phức z là: $\dfrac{3x+1}{x^2+1}+\dfrac{x-3}{x^2+1}=\dfrac{4x-2}{x^2+1}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ 7-8 ĐIỂM

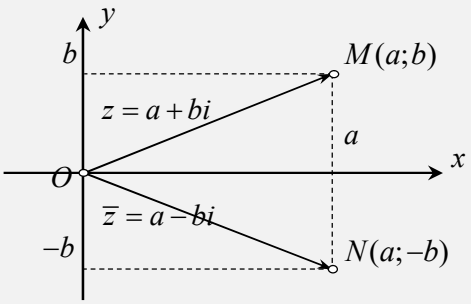
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$ ◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dạng toán. **Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K ?**

— **Bước 1**. Gọi số phức cần tìm là $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

— **Bước 2**. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\overline{z},|z|,...$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x,y$.

Lưu ý

Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z=x+y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x,y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó, ta cần nhớ:

— Môđun của số phức $z=x+y.i$ là $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\text{thực})^2+(\text{ảo})^2}$.

— Số phức liên hợp của $z=x+y.i$ là $\overline{z}=x-y.i$ (ngược dấu ảo).

— Hai số phức $z_1=x_1+y_1.i$ và $z_2=x_2+y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo).

Câu 1. **(Mã 104 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1;y=-1$. **B.** $x=-1;y=1$. **C.** $x=1;y=-1$. **D.** $x=1;y=1$.

Lời giải

Chọn D

$(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i \Leftrightarrow (2x+3)-(3y+1)i=5x-4i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3=5x\\3y+1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Câu 2. **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=\sqrt{2},\ y=2$ **B.** $x=-\sqrt{2},\ y=2$ **C.** $x=0,\ y=2$ **D.** $x=\sqrt{2},\ y=-2$

Lời giải

Chọn C

Từ $x^2-1+yi=-1+2i \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=-1\\y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$

Câu 3. **(Mã 101 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1; y=-1$ **B.** $x=1; y=-3$ **C.** $x=-1; y=-3$ **D.** $x=-1; y=-1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i \Leftrightarrow x+1+(-3y-9)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=0\\-3y-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$.

Câu 4. **(Mã 104 - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$.

$(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$

$\Leftrightarrow (2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i)$

$\Leftrightarrow 2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+3=2x\\2y-x+16=-2y+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y+3=0\\-x+4y=-14\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2019)** Cho số z thỏa mãn $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$; $\overline{z}=a-bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$(2+i)z-4(\bar{z}-i)=-8+19i$

$\Leftrightarrow (2+i)(a+bi)-4(a-bi-i)=-8+19i$

$\Leftrightarrow -2a-b+(a+6b+4)=-8+19i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2a-b=-8\\ a+6b+4=19\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$

Vậy $z=3+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{13}$.

Câu 6. **(Mã 102 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2;y=-2$ **B.** $x=2;y=-1$ **C.** $x=-2;y=-2$ **D.** $x=-2;y=-1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$

$\Leftrightarrow 3x+2+(2y+1)=2x-3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+2=2x\\ 2y+1=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$.

Câu 7. **(Đề Tham Khảo -2019)** Tìm các số thực a,b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0,b=1.$ **B.** $a=1,b=2.$ **C.** $a=0,b=2.$ **D.** $a=\frac{1}{2},b=1.$

Lời giải

Chọn B

$2a+(b+i)i=1+2i \Leftrightarrow 2a+bi+i^2=1+2i$

$\Leftrightarrow (2a-1)+bi=1+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-1=1\\ b=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}$

Câu 8. **(Mã 103 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2;\ y=4$ **B.** $x=-2;\ y=0$ **C.** $x=2;\ y=0$ **D.** $x=-2;\ y=4$

Lời giải

Chọn A

$(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i \Leftrightarrow 2x-4+(4-y)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4=0\\ 4-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Cho số phức z thoả mãn $3(\bar{z}-i)-(2+3i)z=7-16i$. Môđun của z bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi\ (a;b\in\mathbb{R})$.

Theo đề ta có

$3(a-bi-i)-(2+3i)(a+bi)=7-16i \Leftrightarrow 3a-3bi-3i-2a-2bi-3ai+3b=7-16i$

$\Leftrightarrow (a+3b)+(-3a-5b-3)=7-16i \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b-3=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 10. **(Mã 101 - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $3\left(\overline{z}+i\right)-\left(2-i\right)z=3+10i$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

$3\left(\overline{z}+i\right)-\left(2-i\right)z=3+10i$

$\Leftrightarrow 3\left(x-yi+i\right)-\left(2-i\right)\left(x+yi\right)=3+10i$

$\Leftrightarrow x-y+\left(x-5y+3\right)i=3+10i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-5y+3=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

$z=2-i$

Vậy $|z|=\sqrt{5}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. **(THPT Cẩm Giàng 2 Năm 2019)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $\left(2x-3yi\right)+\left(1-3i\right)=-1+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;\ y=-3$. **B.** $x=-1;\ y=-3$. **C.** $x=-1;\ y=-1$. **D.** $x=1;\ y=-1$.

Lời giải

Ta có: $\left(2x-3yi\right)+\left(1-3i\right)=-1+6i \Leftrightarrow 2x+1-\left(3y+3\right)i=-1+6i$.

Suy ra $\begin{cases} 2x+1=-1 \\ -3y-3=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$.

Câu 12. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $\left(2x-3yi\right)+\left(3-i\right)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1, y=-1$ **B.** $x=1, y=1$ **C.** $x=-1, y=1$ **D.** $x=1, y=-1$

Lời giải

Chọn B

Từ $\left(2x-3yi\right)+\left(3-i\right)=5x-4i \Leftrightarrow \left(2x+3\right)-\left(3y+1\right)i=5x-4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=5 \\ 3y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ Vậy $x=1, y=1$.

Câu 13. **(Chuyên Sơn La 2019)** Tìm các số thực x và y thỏa mãn $\left(3x-2\right)+\left(2y+1\right)i=\left(x+1\right)-\left(y-5\right)i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x=\frac{3}{2}, y=-2$. **B.** $x=-\frac{3}{2}, y=-\frac{4}{3}$. **C.** $x=1, y=\frac{4}{3}$. **D.** $x=\frac{3}{2}, y=\frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)-(y-5)i \Leftrightarrow (3x-2)+(2y+1)i=(x+1)+(5-y)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=x+1 \\ 2y+1=5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 14. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$ **B.** $P=-\frac{1}{2}$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=-1$

Lời giải

Ta có

$(1+i)z+2\bar{z}=3+2i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow 3a-b+(a+b)i=3+2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=3 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $P=a+b=-1$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 15. **(Chuyên KHTN -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Môđun của z bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

$(2+3i)z+4-3i=13+4i \Leftrightarrow (2+3i)z=9+7i \Leftrightarrow z=\frac{9+7i}{2+3i}$

$\Leftrightarrow z=\frac{(9+7i)(2-3i)}{4+9} \Leftrightarrow z=\frac{39-13i}{13} \Leftrightarrow z=3-i$.

Vậy $|z|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

Câu 16. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho số phức $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+2i)\bar{z}+z=3-4i$. Tính giá trị của biểu thức $S=3x-2y$.

A. $S=-12$ **B.** $S=-11$ **C.** $S=-13$ **D.** $S=-10$

Lời giải

Có $(1+2i)\bar{z}+z=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=3 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow S=-13$.

Câu 17. **(Sở Bình Phước 2019)** Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz+(1-i)\bar{z}=-2i$ bằng

A. 6 **B.** –2 **C.** 2 **D.** –6

Lời giải

Chọn A

Giả sử số phức z có dạng: $z=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $iz+(1-i)\overline{z}=-2i \Leftrightarrow i(x+yi)+(1-i)(x-yi)=-2i \Leftrightarrow x-2y-yi=-2i$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ -y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow x+y=6$.

Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng 6.

Câu 18. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $a,b\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a+bi)i-2a=1+3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a-b$ bằng

A. 4 **B.** -10 **C.** -4 **D.** 10

Lời giải

Chọn D

Ta có $(a+bi)i-2a=1+3i \Leftrightarrow -b-2a+ai=1+3i \Leftrightarrow \begin{cases} -b-2a=1 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-7 \end{cases}$

Vậy $a-b=10$.

Câu 19. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$. **B.** $P=-\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=-1$

Lời giải

$(1+i)z+2\overline{z}=3+2i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i \Leftrightarrow (3a-b)+(a-b)i=3+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b=3 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$. Suy ra: $P=a+b=-1$.

Câu 20. **(Chuyên Hạ Long -2019)** Tìm số phức z biết $4z+5\overline{z}=27-7i$.

A. $z=-3+7i$. **B.** $z=-3-7i$. **C.** $z=3-7i$. **D.** $z=3+7i$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in R)$, khi đó $4(a+bi)+5(a-bi)=27-7i \Leftrightarrow 9a-bi=27-7i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a=27 \\ -b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow z=3+7i$.

Câu 21. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Mô đun của số phức $w=(z+1)\overline{z}$ bằng.

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i \Leftrightarrow (3+2i)z=1+5i \Leftrightarrow z=1+i$.

Do đó: $w=(z+1)\overline{z}=z\overline{z}+\overline{z}=(1+i)(1-i)+1-i=2+1-i=3-i$.

$\Rightarrow |w|=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$.

Câu 22. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tìm các số thực a,b thỏa mãn $(a-2b)+(a+b+4)i=(2a+b)+2bi$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=-3,b=1$. **B.** $a=3,b=-1$. **C.** $a=-3,b=-1$. **D.** $a=3,b=1$.

Lời giải

Ta có: $(a-2b)+(a+b+4)i=(2a+b)+2bi$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=2a+b \\ a+b+4=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=0 \\ a-b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \end{cases}$.

Câu 23. Cho hai số phức $z_1=m+1-2i$ và $z_1=2-(m+1)i$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $z_1.z_2-8+8i$ là một số thực.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $z_1.z_2-8+8i=(m+1-2i)\left[2-(m+1)i\right]-8+8i=-8+\left(-m^2-2m+3\right)i$.

Để $z_1.z_2-8+i$ là một số thực thì $-m^2-2m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị của tham số m để $z_1.z_2-8+i$ là một số thực.

Câu 24. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm mô đun của số phức z biết $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi$

Do đó $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow (2a+2bi-1)(1+i)+(a-bi+1)(1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow (2a-2b-1)+(2a+2b-1)i+(a-b+1)-(a+b+1)i=2-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-2b-1)+(a-b+1)=2 \\ (2a+2b-1)-(a+b+1)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$

Khi đó $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 25. Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i)+\bar{z}(1-i)+4-i=0$ với i là đơn vị ảo.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Giả sử: $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $z(1+2i)+\bar{z}(1-i)+4-i=0 \Leftrightarrow (x+yi)(1+2i)+(x-yi)(1-i)+4-i=0$

$\Leftrightarrow (2x-3y+4)+(x-1)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$

$\Rightarrow z=1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$.

Câu 26. **(Chuyên Trần Đại Nghĩa - TPHCM - 2018)** Tìm số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$.

A. $z=-2+i$. **B.** $z=-2-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $2+i$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có:

$$z-(2+3i)\overline{z}=1-9i \Leftrightarrow a+bi-(2+3i)(a-bi)=1-9i \Leftrightarrow -a-3b+(-3a+3b)i=1-9i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a-3b=1\\-3a+3b=-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}.$$

Vậy $z=2-i$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 33 XÁC ĐỊNH SỐ PHỨC - CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

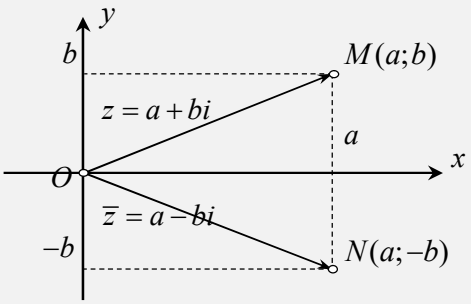
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



• $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$;

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

• $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

• $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$ ◆ **Phép trừ hai số phức**

$z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dạng toán. **Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K ?**

— **Bước 1**. Gọi số phức cần tìm là $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

— **Bước 2**. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\overline{z},|z|,...$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x,y$.

Lưu ý

Trong trường phức $\mathbb{C}$, cho số phức $z=x+y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x,y\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$. Khi đó, ta cần nhớ:

— Môđun của số phức $z=x+y.i$ là $|z|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\text{thực})^2+(\text{ảo})^2}$.

— Số phức liên hợp của $z=x+y.i$ là $\overline{z}=x-y.i$ (ngược dấu ảo).

— Hai số phức $z_1=x_1+y_1.i$ và $z_2=x_2+y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo).

Dạng 1. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Vì $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+(b-1)^2=25\\a^2-b^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a=b\\b^2+(b-1)^2=25\\\begin{cases}a=-b\\b^2+(b-1)^2=25\end{cases}\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=4\\a=b=-3\\b=-a=4\\b=-a=-3\end{array}\right.$$

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=-4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=4$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z+2+i=|z|\Leftrightarrow(a+2)+(b+1)i=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+b^2} & (1)\\b+1=0 & (2)\end{cases}$

Từ (2) ta có: $b=-1$. Thay vào (1): $\sqrt{a^2+1}=a+2\Leftrightarrow\begin{cases}a+2\ge0\\a^2+1=(a+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{-3}{4}$

Vậy $S=4a+b=-4$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (1)\\b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0\Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\a^2+4a+4=2a^2+2a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\a^2-2a-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\quad(tm)\\a=-1\quad(tm)\end{array}\right.$$

Với $a=3\Rightarrow b=4$; $a=-1\Rightarrow b=0$.

Vì $|z|>1\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 4. **(Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$, vì $(z-1)^2=\left[(x-1)^2-y^2\right]+2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=8 & (1)\\ (x-1)^2=y^2 & (2)\end{cases}$

Từ (2) suy ra: $y=\pm(x-1)$

• Với $y=x-1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2+(x-2)^2=8\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0.$

Suy ra: $z=-i$.

• Với $y=-(x-1)$, thay vào (1), ta được:

$(x+2)^2+(-x)^2=8\Leftrightarrow 2x^2+4x-4=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$

Suy ra: $z=\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i$; $z=\left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 5. **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z\Leftrightarrow(|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i\ \ (1)$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$\sqrt{(|z|-6)^2+1}.|z|=\sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$

Bình phương và rút gọn ta được:

$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0\Leftrightarrow(|z|-1)\left(|z|^3-11|z|^2+4\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|^3-11|z|^2+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|=10,9667...\\ |z|=0,62...\\ |z|=-0,587...\end{array}\right.$$

Do $|z|\geq 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 6. **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Đặt $|z|=a\geq 0, a\in\mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z\Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z\Leftrightarrow(a-7+i)z=6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow(a-7+i)z=6a+(a-2)i\Leftrightarrow|(a-7+i)||z|=|6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2 = 36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0$

$\Leftrightarrow (a-1)\left(a^3-13a^2+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^3-12a^2+4=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a)=a^3-13a^2\,(a\ge 0)$, có bảng biến thiên là

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\ne 0$). Mỗi giá trị của a cho ta một số phức z.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 7. **(Mã 102 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z \Leftrightarrow (|z|-4+i)z=3|z|+(|z|-2)i$ (*)

$\Rightarrow \sqrt{(|z|-4)^2+1}.|z| = \sqrt{9|z|^2+(|z|-2)^2}$ (1).

Đặt $m=|z|\ge 0$ ta có

$(1)\Leftrightarrow \left((m-4)^2+1\right).m^2 = 9m^2+(m-2)^2 \Leftrightarrow m^4-8m^3+7m^2+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\left(m^3-7m^2+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m^3-7m^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m\approx 6,91638 \\ m\approx 0.80344 \\ m\approx -0.71982 \quad (\text{L}) \end{array}\right.$.

Từ (*) ta suy ra ứng với mỗi $|z|=m$ sẽ có một số phức $z=\dfrac{3m+(m-2)i}{m-4+i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi; x,y\in\mathbb{R}$

Theo bài ra ta có $\left\{\begin{array}{l} (x+3)^2+y^2=25 \\ x^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+3)^2+y^2=25 \\ -4x+4=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 3 \\ x = 1 \end{cases}$. Vậy $|z| = \sqrt{10}$

Câu 9. **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i| = \sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z = a+bi, (a,b \in \mathbb{R})$

Ta có $|z+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |a+bi+3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow a^2 + (b+3)^2 = 13$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 6b - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4 - 6b (1)$

$$\frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{a+2+bi} = 1 - \frac{2(a+2-bi)}{(a+2)^2 + b^2}.$$

$$= \frac{(a+2)^2 + b^2 - 2a - 4}{(a+2)^2 + b^2} + \frac{2b}{(a+2)^2 + b^2} i = \frac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+2)^2 + b^2} + \frac{2b}{(a+2)^2 + b^2} i$$

Do $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo nên $\dfrac{a^2 + b^2 + 2a}{(a+2)^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a = 0 (2) \\ a \neq -2 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

Thay (1) vào (2) ta có $4 - 6b + 2a = 0 \Leftrightarrow a = 3b - 2$ thay vào (1) ta có

$$(3b-2)^2 + b^2 - 4 + 6b = 0 \Leftrightarrow 10b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 (L) \\ b = \dfrac{3}{5} \Rightarrow a = \dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

Vậy có một số phức cần tìm.

Câu 10. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z.\bar{z} + z| = 2$ và $|z| = 2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ $(x;\ y \in \mathbb{R};\ i^2 = -1)$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} |x^2 + y^2 + x + yi| = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4 + x + yi| = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (4+x)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy có 1 số phức thỏa yêu cầu bài toán là $z = -2$.

Câu 11. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\right)$

Ta có

$$\begin{cases}\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6\\ |z|=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+\left(b+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{a^2+\left(b-\sqrt{5}\right)^2}=6\\ \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}36a^2+16b^2=144\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{16}{5}\\ b^2=\dfrac{9}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\ b=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn.

Câu 12. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z_1=a+bi$, (a, $b\in\mathbb{R}$); $z_2=c+di$, (c, $d\in\mathbb{R}$).

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z_1|=2\\ |z_2|=2\\ |z_1+2z_2|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\ c^2+d^2=4\\ (a+2c)^2+(b+2d)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4 & (1)\\ c^2+d^2=4 & (2)\\ a^2+b^2+4\left(c^2+d^2\right)+4(ac+bd)=16 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=-1$ (4).

Ta có $|2z_1-z_2|=\sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2}=\sqrt{4\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)-4(ac+bd)}$ (5).

Thay $(1),(2),(4)$ vào (5) ta có $|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$.

Câu 13. Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Môđun của số phức $w=1-z+z^2$ bằng

A. $|w|=\sqrt{445}$. **B.** $|w|=\sqrt{425}$. **C.** $|w|=\sqrt{37}$. **D.** $|w|=\sqrt{457}$

Lời giải

Đặt $z=a+bi$ $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2a+2bi=-7+3i+a+bi$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-3a+7\right)+(b-3)i=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=3\\a=\dfrac{5}{4}\end{cases}\ \left(a\ge\dfrac{7}{3}\right).\\\begin{cases}b=3\\a=4\end{cases}\end{array}\right.$$

Do $a\in\mathbb{Z}$ nên $a=4\Rightarrow z=4+3i\Rightarrow w=4+21i\Rightarrow|w|=\sqrt{457}$

Câu 14. Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

$$|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i)\Leftrightarrow|a+bi-4|i+|a+bi-2i|=\sqrt{5}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a-4+bi|=\sqrt{5} & (1)\\|a+(b-2)i|=\sqrt{5} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $|a-4+bi|=|a+(b-2)i|\Leftrightarrow(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\Rightarrow b=2a-3$.

Kết hợp với (1), ta được: $\begin{cases}(a-4)^2+b^2=5\\b=2a-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$

Vậy $T=a+b=3$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 15. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

$$z^3+2i|z|^2=0\Leftrightarrow z^3+2iz\overline{z}=0\Leftrightarrow z\left(z^2+2i\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\z^2+2i\overline{z}=0\end{array}\right.\quad(2)$$

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thay vào (2) có:

$$x^2-y^2+2y+2x(y+1)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\2x(y+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-y^2+2y=0\\x=0\\y=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\-y^2+2y=0\end{cases}\\\begin{cases}y=-1\\x^2-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0\\\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\z=2i\\z=-\sqrt{3}-i\\z=\sqrt{3}-i\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm

Câu 16. Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{\overline{z+i}}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

Theo bài ra ta có

$|x+1+(y-2)i|=|x+3+(4-y)i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow y=x+5$

Số phức $\mathrm{w}=\frac{z-2i}{\overline{z+i}}=\frac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i}=\frac{x^2-(y-2)(y-1)+x(2y-3)i}{x^2+(y-1)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-(y-2)(y-1)=0\\ x^2+(y-1)^2>0\\ y=x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{12}{7}\\ y=\frac{23}{7}\end{cases}$

Vậy $z=-\frac{12}{7}+\frac{23}{7}i$.Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn.

Câu 17. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Gọi số phức cần tìm là $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z.\overline{z}=|z|^2=a^2+b^2=25\quad(1)$.

Lại có: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}\Leftrightarrow|a-2+(b-1)i|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2=10$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-4a-2b+5=10\quad(2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $25-4a-2b+5=10\Leftrightarrow b=-2a+10$.

Nên $a^2+b^2=25\Leftrightarrow a^2+(-2a+10)^2=25$

$\Leftrightarrow 5a^2-40a+75=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=4\end{array}\right.$

Vậy Vậy có 2 số phức z thoả mãn là $z=5$ và $z=3+4i$.

Câu 18. **(THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\overline{z}|i+(z+\overline{z})i^{2019}=1$?

A. 4 **B.** **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi;\ (a,b\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=a-bi$.

Ta có: $|z-1|^2=|a+bi-1|^2=(a-1)^2+b^2$, $|z-\overline{z}|i=|a+bi-a+bi|i=\sqrt{(2b)^2}i=2|b|i$,

$i^{2019}=-i$, $(z+\overline{z})i^{2019}=-i(a+bi+a-bi)=-2ai$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với: $(a-1)^2+b^2+2|b|i-2ai=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=1\\ 2|b|-2a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-2a+b^2=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2|b|^2-2|b|=0\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}|b|=0\\ |b|=1\end{array}\right.\\ a=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 19. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|$ và z^2 là số thuần ảo

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z|^2=|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}| \Leftrightarrow a^2+b^2=|2a|+|2bi|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=2|a|+2|b|$ (1).

Lại có $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ là số thuần ảo, suy ra $a^2-b^2=0\Leftrightarrow a=\pm b$

Trường hợp 1: $a=b$ thay vào (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 2a^2=4|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|a|=0\\ |a|=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\pm 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=b=0\\ a=b=\pm 2\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $a=-b$ thay vào (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 2a^2=4|a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|a|=0\\ |a|=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\pm 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\mp 2\end{array}\right.$$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn bài toán là $z=0$, $z=2\pm 2i$, $z=-2\pm 2i$.

Câu 20. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

$$z^3+2i|z|^2=0\Leftrightarrow z^3+2iz\bar{z}=0\Leftrightarrow z\left(z^2+2i\bar{z}\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=0\\ z^2+2i\bar{z}=0\end{array}\right. \quad (2)$$

Gọi $z=x+yi\Rightarrow \bar{z}=x-yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thay vào (2) có:

$$x^2-y^2+2y+2x(y+1)i=0\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ 2x(y+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ y=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ -y^2+2y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1\\ x^2-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2i \\ z=-\sqrt{3}-i \\ z=\sqrt{3}-i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3|=|z-1|$ và $(z+2)(\bar{z}-i)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $z=a+bi\ \ (a,b\in\mathbb{R})$.

+)

$|z-3|=|z-1| \Leftrightarrow |a-3+bi|=|a-1+bi| \Leftrightarrow \sqrt{(a-3)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+b^2=(a-1)^2+b^2 \Leftrightarrow -4a+8=0 \Leftrightarrow a=2$.

+) $(z+2)(\bar{z}-i)=(a+bi+2)(a-bi-i)=\left[(a+2)+bi\right]\left[a-(b+1)i\right]$

$=a(a+2)+b(b+1)-(a+2b+2)i$.

$(z+2)(\bar{z}-i)$ là số thực $\Leftrightarrow a+2b+2=0$.

Thay $a=2$ tìm được $b=-2$. Vậy $a+b=0$.

Câu 22. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Ta có $z+1+3i-|z|i=0 \Leftrightarrow (a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \end{cases} \quad (*).$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -3 \\ 1+b^2=(b+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -3 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow b=-\frac{4}{3}.$$

Vậy $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S=2a+3b=-6$.

Câu 23. Cho ba số phức $z_1;\ z_2;\ z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

$z_1+z_2+z_3=0\Rightarrow\begin{cases}z_1+z_2=-z_3\\z_1+z_3=-z_2\\z_3+z_2=-z_1\end{cases}$.

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|-z_1|^2+|-z_2|^2+|-z_3|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=3.\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{8}{3}$.

Câu 24. **(THPT Chuyên Hạ Long - Lần 2 - 2018)** Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z.\bar{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10. **B.** -8. **C.** -35. **D.** -7.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\sqrt{(a+2)^2+(b+5)^2}=5\\a^2+b^2=82\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-5b-43}{2}\ (1)\\a^2+b^2=82\ (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $29b^2+430b+1521=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-9\\b=\frac{-169}{29}\end{array}\right.$

Vì $b\in\mathbb{Z}$ nên $b=-9\Rightarrow a=1$. Do đó $P=a+b=-8$.

Câu 25. **(Đồng Tháp - 2018)** Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=\sqrt{2}$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|2z-i|=|2+iz|\Leftrightarrow|2x+(2y-1)i|=|2-y+xi|\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là đường tròn $(O;1)\Rightarrow|z_1|=|z_2|=1$.

Ta có: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow P^2=3\Rightarrow P=\sqrt{3}$.

Cho số phức z thoả mãn $\dfrac{1+i}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$.

Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Đặt: $w=\dfrac{1+i}{z}=\dfrac{1+i}{a+bi}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2\Leftrightarrow 2a^2-4a+4-m^2=0\ (3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm a duy nhất.

$\Leftrightarrow\Delta'=0\Leftrightarrow 4-2(4-m^2)=0\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\sqrt{2}\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ (Vì m là mô-đun).

Trình bày lại

Giả sử $z=a+bi$, vì $z\neq 0$ nên $a^2+b^2>0\ (*)$.

Đặt: $w=\dfrac{1+i}{z}=\dfrac{1+i}{a+bi}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.Kết hợp $(*)$ suy ra $a=b\neq 0$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m\Leftrightarrow(a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.(Vì m là mô-đun nên $m\geq 0$).

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2\Leftrightarrow g(a)=2a^2-4a+4-m^2=0\ (3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a\neq 0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a\neq 0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'=0\\ g(0)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2=0\\ 4-m^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow m=\sqrt{2}$.

KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a=0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2>0\\ 4-m^2=0\end{cases}\Rightarrow m=2$.

Từ đó suy ra $\exists m_0=\sqrt{2}\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{x+iy}{x-4+iy}=\dfrac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{x(x-4)+y^2-4iy}{(x-4)^2+y^2}$

là số thuần ảo khi $x(x-4)+y^2=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=4$

Mà $|z-m|=6\Leftrightarrow(x-m)^2+y^2=36$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4-2m)x=36-m^2\\y^2=4-(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{36-m^2}{4-2m}\\y^2=4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2\end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow 4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2=0\Leftrightarrow 2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$ hoặc $-2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$

$\Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-2$ hoặc $m=\pm6$

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Câu 28. **(Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i\Leftrightarrow z(1+3i)-4+4i=(1+i)|z|$

$\Leftrightarrow(a+bi)(1+3i)-4+4i=(1+i)\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a-3b-4+(3a+b+4)i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2}\\3a+b+4=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2}\\a=-2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5b-8=\sqrt{5b^2+16b+16}\\a=-2b-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-5b-8\ge0\\20b^2+64b+48=0\\a=-2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\le-\dfrac{8}{5}\\\left[\begin{array}{l}b=-2(N)\\b=-\dfrac{6}{5}(L)\end{array}\right.\\a=-2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\a=0\end{cases}.$$

Vậy $|z|=2$.

Câu 29. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải

Ta có:

$z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i \Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+2bi=13-10i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 \\ 2b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+25-12\sqrt{a^2+25}=13 \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+25}=13 \\ \sqrt{a^2+25}=-1 (VN) \end{array}\right. \\ b=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 12 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=-5 \end{cases}$, vì $a>0$.

Vậy $S=a+b=7$.

Câu 30. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)** Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\dfrac{13}{3}iz$ có môđun bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$. **D.** 13.

Lời giải

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2 \Leftrightarrow \dfrac{i(a+bi)-(3i+1)(a-bi)}{1+i}=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow ai-b-3ai-3b-a+bi=a^2+b^2+a^2i+b^2i$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2+2a-b)i+(a^2+b^2+4b+a)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2a-b=0 \\ a^2+b^2+a+4b=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 26b^2+9b=0 \\ a=5b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0, a=0 \\ b=\dfrac{-9}{26}, a=\dfrac{-45}{26} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26} \end{array}\right. \Rightarrow z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26}$ (Vì $z\neq 0$).

Với $z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26} \Rightarrow \mathrm{w}=\dfrac{15}{2}-\dfrac{3}{2}i \Rightarrow |\mathrm{w}|=\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1$, $|z_2|=2$ và $|z_1+z_2|=3$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** một giá trị khác.

Lời giải

Giả sử $z_1=a_1+b_1i,\ (a_1,b_1\in\mathbb{R}),\ z_2=a_2+b_2i,\ (a_2,b_2\in\mathbb{R})$.

Theo bài ra ta có:

$\begin{cases} |z_1|=1 \\ |z_2|=2 \\ |z_1+z_2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+b_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2=4 \\ (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+b_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2=4 \\ 2a_1a_2+2b_1b_2=4 \end{cases}$.

Khi đó, ta có:

$|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)-(2a_1a_2+2b_1b_2)}=1$.

Vậy $|z_1-z_2|=1$.

Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho số phức $z=a+bi(a,b\in R)$ thỏa mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính $P=a+b$.

A. 5. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 7. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

$a+7+(b+1)i-2\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2}i=0$

$\begin{cases}a+7=2\sqrt{a^2+b^2} & (1)\\ \sqrt{a^2+b^2}=b+1 & (2)\end{cases}$

$\Rightarrow a+7=2(b+1)\Rightarrow a=2b-5$ thế vào (2).

$\sqrt{(2b-5)^2+b^2}=b+1\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge -1\\ 4b^2-22b+24=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge -1\\ \left[\begin{array}{l}b=4\\ b=\frac{3}{2}\end{array}\right.\end{cases}$

TH1: $b=4\Rightarrow a=3\Rightarrow|z|=5>3$. (loại)

TH2: $b=\frac{3}{2}\Rightarrow a=-2\Rightarrow|z|=\frac{5}{2}<3$. (nhận).

$P=a+b=-\frac{1}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 33. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1|=2\sqrt{3}$, $|z_2|=3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. $P=60$. **B.** $P=20\sqrt{3}$. **C.** $P=30\sqrt{2}$. **D.** $P=50$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$

Theo đề: $\begin{cases}|z_1|=2\sqrt{3}\\ |z_2|=3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=12\\ c^2+d^2=18\end{cases}$

Vậy

$P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$

$=(a-c)^2+(b-d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2=2(a^2+b^2+c^2+d^2)=60$

Câu 34. **(Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - 2018)** Cho số phức $w=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|w^2+4|=2|w|$. Đặt $P=8(x^2-y^2)+12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=-\left(|\overline{w}|^2-2\right)^2$. **B.** $P=-\left(|w|^2-2\right)^2$. **C.** $P=-(|w|-4)^2$. **D.** $P=-\left(|w|^2-4\right)^2$.

Lời giải

Ta có $w^2+4=(x+yi)^2+4=x^2-y^2+2xyi+4\Rightarrow|w^2+4|=\sqrt{(x^2-y^2+4)^2+4x^2y^2}$.

Do đó

$|w^2+4|=2|w| \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2}=2\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4-2x^2y^2+8\left(x^2-y^2\right)+16+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-4\left(x^2+y^2\right)+4+8\left(x^2-y^2\right)+12=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+4+8\left(x^2-y^2\right)+12=0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2\right)^2+8\left(x^2-y^2\right)+12=0$

$\Leftrightarrow 8\left(x^2-y^2\right)+12=-\left(x^2+y^2-2\right)^2 \Leftrightarrow P=-\left(|w|^2-2\right)^2.$

Câu 35. Số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=14$. **C.** $P=2$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i) \Leftrightarrow |a+bi-8|i+|a+bi-6i|=5(1+i)$.

$\Leftrightarrow |a-8+bi|i+|a+(b-6)i|=5(1+i)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-8)^2+b^2}.i+\sqrt{a^2+(b-6)^2}=5.i+5$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(a-8)^2+b^2}=5\\ \sqrt{a^2+(b-6)^2}=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-16a+64+b^2=25\\ a^2+b^2-12b+36=25\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2-16a=-39\ (1)\\ a^2+b^2-12b=-11\ (2)\end{cases}.$

Lấy $(1)-(2)$ ta được: $-16a+12b+28=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{3b+7}{4}\ (3)$.

Thế (3) vào (2) ta được: $\left(\dfrac{3b+7}{4}\right)^2+b^2-12b=-11 \Leftrightarrow 25b^2-150b+225=0 \Leftrightarrow b=3 \Rightarrow a=4.$

Vậy $P=a+b=7$.

Câu 36. **(Chuyên Đại học Vinh 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\bar{z}|\mathrm{i}+(z+\bar{z})\mathrm{i}^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+b\mathrm{i}$ ta được

$|z-1|^2+|z-\bar{z}|\mathrm{i}+(z+\bar{z})\mathrm{i}^{2019}=1$

$\Leftrightarrow |a+b\mathrm{i}-1|^2+|a+b\mathrm{i}-a+b\mathrm{i}|\mathrm{i}+(a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i})\mathrm{i}^{2019}=1$ (ta có $\mathrm{i}^{2019}=\mathrm{i}^{2016+3}=(\mathrm{i}^4)^{504}.\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$).

$\Leftrightarrow (a-1)^2+b^2+2|b|\mathrm{i}-2a\mathrm{i}=1$

$\Leftrightarrow a^2-2a+b^2+2|b|\mathrm{i}-2a\mathrm{i}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ 2|b|-2a=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ a\ge 0 \\ b^2=a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+a^2=0 \\ a\ge 0 \\ b^2=a^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,\ b=0 \\ a=1,\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

Suy ra có ba số phức thỏa mãn phương trình $z_1=0,\ z_2=1+\mathrm{i},\ z_3=1-\mathrm{i}$.

Câu 37. **(Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}\,(1+i)=0$.

$\Leftrightarrow \left(a+2-\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 \ (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 \ (2) \end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)$ ta được $a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0\Leftrightarrow \sqrt{2a^2+2a+1}=a+2\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ 2a^2+2a+1=(a+2)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$.

+ Với $a=-1\Rightarrow b=0\Rightarrow z=-1\Rightarrow |z|=1$ (loại)

+ Với $a=3\Rightarrow b=4\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow |z|=5$ (thỏa mãn).

Vậy $P=a+b=7$.

Câu 38. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2(z+\bar{z})=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in R)$. Ta có

$|z-2+3i|=|z+1-i|\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+3)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$

$\Leftrightarrow 6a-8b-11=0\Leftrightarrow b=\dfrac{6a-11}{8}$ (1); $|z|^2+2\left(z+\bar{z}\right)=5\Leftrightarrow a^2+b^2+4a=5$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có: $a^2+\dfrac{(6a-11)^2}{64}+4a=5\Leftrightarrow 100a^2+124a-199=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{-31+4\sqrt{371}}{50} \\ a=\dfrac{-31-4\sqrt{371}}{50}\end{array}\right.$

Suy ra có hai số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa mãn $z.\bar{z}-12|z|+\left(z-\bar{z}\right)=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $z.\bar{z}-12|z|+\left(z-\bar{z}\right)=13-10i\Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+\left(a+bi-a+bi\right)=13-10i$

$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}\right)+2bi=13-10i\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 & (1)\\ 2b=-10 & (2)\end{cases}$.

Từ (2) suy ra $b=-5$ thay vào (1) ta được $a^2+25-12\sqrt{a^2+25}=13$.

Đặt $t=\sqrt{a^2+25}>0$ khi đó ta có phương trình $t^2-12t-13=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (\text{loại}) \\ t=13\ (\text{thoả mãn})\end{array}\right.$.

Với $t=13\Rightarrow\sqrt{a^2+25}=13\Leftrightarrow a^2=144\Leftrightarrow a=12$ (vì $a>0$). Vậy $S=a+b=12-5=7$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 9. **C.** 25. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ \ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết: $\begin{cases}|z-3-4i|=\sqrt{5}\\ |z+2|^2-|z-i|^2=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{5}\\ (x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=33\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=5\\ 4x+2y+3=33\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(15-2x-4)^2=5\\ y=15-2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-50x+125=0\\ y=15-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=5\end{cases}\Leftrightarrow z=5+5i$.

Vậy $|z-2-i|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 41. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(z+1+i)(\overline{z}-i)+3i=9$ và $|\overline{z}|>2$. Tính $P=a+b$.

A. 2. **B.** 1. **C.** −3. **D.** −1.

Lời giải

Chọn B

$z=a+bi\Rightarrow\overline{z}=a-bi$; $|\overline{z}|=a^2+b^2$.

Theo bài ra ta có: $|\overline{z}|>2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}>2$ (*).

$(z+1+i)(\overline{z}-i)+3i=9\Leftrightarrow[a+1+(b+1)i][a-(b+1)i]+3i=9$

$\Leftrightarrow a(a+1)+(b+1)^2-(b+1)i=9-3i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+1)+(b+1)^2=9\\ -(b+1)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ a^2+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0;b=2.\\ a=-1;b=2.\end{array}\right.$

TH $a=0$; $b=2$ loại do không thỏa mãn (*).

TH $a=-1$; $b=2$ thỏa mãn nên $P=a+b=1$.

Câu 42. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ và $|z_1-iz_2|=6$. Biết $|z_2|>|z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|z_1 - z_2|}{|z_1|} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|1 - \dfrac{z_2}{z_1}\right| = \sqrt{2}$ (1).

Ta lại có: $|z_1 - iz_2| = 6 \Leftrightarrow \left|1 - i\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 2$ (2). Ta gọi $\dfrac{z_2}{z_1} = x + yi;\ x,\ y \in \mathbb{R}$.

Từ (1), (2) suy ra: $\left|1 - \dfrac{z_2}{z_1}\right| = 2 \Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 = 2$.

$\left|1 - i\dfrac{z_2}{z_1}\right| = 2 \Leftrightarrow (1+y)^2 + x^2 = 4$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(1-x)^2 + y^2 = 2\\ (1+y)^2 + x^2 = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y = 1\\ x = 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}y = -1\\ x = 2\end{cases}$.

Vậy: $\dfrac{z_2}{z_1} = 0 + i \Rightarrow |z_2| = |z_1|$ (loại).

$\dfrac{z_2}{z_1} = 2 - i \Rightarrow |z_2| = |z_1|.\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ (nhận).

Câu 43. Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \dfrac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.

A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Đặt $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết $\left(z + \dfrac{5}{|z|}\right)i = 7 - z \Leftrightarrow |z|(a+bi)i + 5i - 7|z| + (a+bi)|z| = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}(a - b - 7) + \left((a+b)\sqrt{a^2+b^2} + 5\right)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}a - b - 7 = 0\\ (a+b)\sqrt{a^2+b^2} + 5 = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a = b + 7\\ (2b+7)\sqrt{2b^2+14b+49} = -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = b + 7\\ (2b+7)^2(2b^2+14b+49) = 25\\ 2b + 7 \le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a = b + 7\\ 2b + 7 \le 0\\ (4b^2 + 28b + 98 - 49)(2b^2 + 14b + 49) - 25 = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a = b + 7\\ b \le -\dfrac{7}{2}\\ 2b^2 + 14b + 49 = 25\\ 2b^2 + 14b + 49 = -\dfrac{1}{2}\ (\text{loai})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b = -4\\ a = 3\end{cases}$.

Vậy có một số phức thỏa mãn điều kiện là $z=3-4i$ có phần thực là 3.

Vậy tổng phần thực của tất cả các số phức z là 3.

Dạng 2. Một số bài toán liên quan đến số phức có lũy thừa bậc cao, chứa tham số

Câu 44. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức $z=(1+i)^{2019}$. Phần thực của z bằng

A. -2^{1009}. **B.** 2^{2019}. **C.** -2^{2019}. **D.** 2^{1009}.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp lượng giác

Xét số phức $z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có số phức $z={z_1}^{2019}=(1+i)^{2019}=\sqrt{2}^{2019}\left(cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}^{2019}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{2019}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2^{1009}+2^{1009}i$

Phần thực của z bằng -2^{1009}.

Cách 2:

Ta có $z=(1+i)^{2019}=\frac{(1+i)^{2020}}{1+i}=\frac{(-4)^{505}}{(1+i)}=(-4)^{505}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)=-2^{1009}+2^{1009}i$

Phần thực của z bằng -2^{1009}.

Câu 45. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Số phức $z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}+1$. **B.** $1-2^{1009}$. **C.** $2^{1009}-1$. **D.** $-\left(2^{1009}+1\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

$z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$

$=(1+i)\frac{(1+i)^{2018}-1}{(1+i)-1}=(1+i)\frac{2^{1009}i-1}{i}$

$=(1+i)\left(2^{1009}+i\right)=2^{1009}-1+\left(2^{1009}+1\right)i$.

$\Rightarrow z$ có phần ảo bằng $2^{1009}+1$.

Câu 46. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Gọi T là tổng phần thực, phần ảo của số phức $w=i+2i^2+3i^3+...+2018i^{2018}$. Tính giá trị của T.

A. $T=0$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

$w=i\left(1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}\right)$

Xét $f(x)=x+x^2+x^3+...+x^{2018}=x\frac{x^{2018}-1}{x-1}=\frac{x^{2019}-x}{x-1}$

$f'(x)=1+2x+3x^2+...+2018x^{2017}=\frac{\left(2019x^{2018}-1\right)(x-1)-\left(x^{2019}-x\right)}{(x-1)^2}$

$w=i\left(1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}\right)=i.f(i)=i\frac{\left(2019i^{2018}-1\right)(i-1)-\left(i^{2019}-i\right)}{(i-1)^2}$

$= i\dfrac{-2020(i-1)+2i}{-2i} = -1010+1009i$

$T = -1010+1009 = -1$.

Câu 47. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $S = z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019}$.

A. $S = -1$. **B.** $S = 2^{2019}$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2^{-2019}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $(1): |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $(2): z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3.

Từ $(1) \Rightarrow OA = OB = OC = 1 \Rightarrow$ Đường tròn (C) tâm O, bán kính $R = 1$ ngoại tiếp ΔABC.

Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm ΔABC.

Vì G là điểm biểu diễn số phức $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$ mà $\overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OG}$ nên từ $(2) \Rightarrow H(1;0)$.

Dễ thấy $H \in (C)$ nên ΔABC vuông.

Giả sử ΔABC vuông tại $C \Rightarrow C(1;0) \Rightarrow z_3 = 1$.

$\Rightarrow z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = -z_2 \Rightarrow z_1^{2019} = -z_2^{2019} \Rightarrow z_1^{2019} + z_2^{2019} = 0$.

Vậy $S = 1$.

Câu 48. Tính $S = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2019i^{2019}$

A. $S = -1010 - 1010i$. **B.** $S = 1010 - 1010i$. **C.** $S = 2019i$. **D.** $S = 1010 + 1010i$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} S &= i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2019i^{2019} \\ &= i - 2 - 3i + 4 + ... + 2016 + 2017i - 2018 - 2019i \\ &= (4 + 8 + ... + 2016) + (-2 - 6 - ... - 2018) + (i + 5i + ... + 2017i) + (-3i - 7i - ... - 2019i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (4 + 8 + ... + 2016) + (-2 - 6 - ... - 2018) + (i + 5i + ... + 2017i) + (-3i - 7i - ... - 2019i) \\ &= \frac{4 + 2016}{2}\left(\frac{2016 - 4}{4} + 1\right) - \frac{2 + 2018}{2}\left(\frac{2018 - 2}{4} + 1\right) \\ &+ \frac{1 + 2017}{2}\left(\frac{2017 - 1}{4} + 1\right)i - \frac{3 + 2019}{2}\left(\frac{2019 - 3}{4} + 1\right)i \\ &= -1010 - 1010i. \end{aligned}$$

Câu 49. Cho số phức z thỏa mãn $z^2 + z + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 + ... + \left(z^{2019} + \frac{1}{z^{2019}}\right)^2.$$

A. $P = 4038$. **B.** $P = 2019$. **C.** $P = 673$. **D.** $P = 6073$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2+z+1=0 \Rightarrow (z-1)\left(z^2+z+1\right)=0 \Rightarrow z^3=1 \Rightarrow \begin{cases} z^{3n}=1 \\ z^{3n+1}=z \\ z^{3n+2}=z^2 \end{cases}$.

Mà $P=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)^2=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}+2\right)=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}\right)+2.2019$

Ta có $z^2+z+1=z^2+z^4+z^6=\ldots=z^{4034}+z^{4036}+z^{4038}=0$,

$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}=\frac{z^2+z^4+z^6}{z^6}=\frac{z^2+z+1}{z^6}=0$

Tương tự $\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{12}}=\ldots=\frac{1}{z^{4034}}+\frac{1}{z^{4036}}+\frac{1}{z^{4038}}=0$

Vậy $P=4038$.

Câu 50. **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Khai triển của biểu thức $\left(x^2+x+1\right)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** -2^{1009}. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

$\left(x^2+x+1\right)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{4036}x^{4036}$.

Thay $x=i$ với $i^2=-1$ ta được:

$(-1)^{1009}=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+\ldots+a_{4034}i^{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}i^{4036}$.

Đối chiếu phần thực ở hai vế ta được: $-1=a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots-a_{4034}+a_{4036}$.

Nhận xét: Ngoài cách trên ta có thể thay 2018 bằng 2, 4 để tính trực tiếp S.

Câu 51. Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4=|z|$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thì $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ và

$z^4=(a+bi)^4=\left(a^2-b^2+2abi\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2+4ab\left(a^2-b^2\right)i$.

Ta có $z^4=|z| \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2+4ab\left(a^2-b^2\right)i=\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $\begin{cases} 4ab\left(a^2-b^2\right)=0,(1) \\ \left(a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2=\sqrt{a^2+b^2},(2) \end{cases}$

Xét $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\\a^2=b^2\end{array}\right.$.

Với $a=0$ thì từ $(2)\Rightarrow b^4=|b|\Rightarrow b=0,b=1,b=-1$ ta được $z=0;z=i;z=-i$.

Với $b=0$ thì từ $(2)\Rightarrow a^4=|a|\Rightarrow a=0,a=1,a=-1$ ta được $z=0;z=1;z=-1$.

Với $a^2=b^2$ thì từ $(2)\Rightarrow -4a^4=\sqrt{2a^2}=|a|\sqrt{2}\Rightarrow a=0,b=0$ $z=0$ ta được $z=0$.

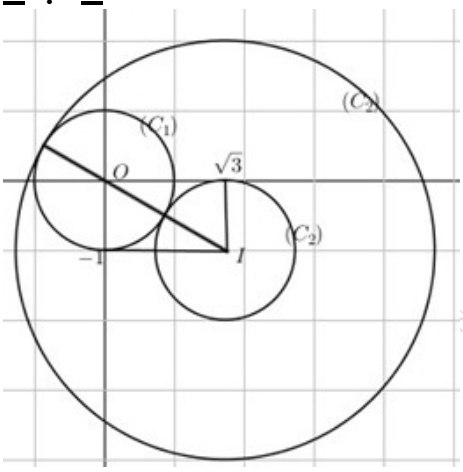
Vậy $S=\{0;1;-1;i;-i\}$.

Câu 52. **(Mã 104 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases}x^2+y^2=1\ (1)\\(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=m^2\ \ (m\geq 0)\end{cases}$

Ta thấy $m=0\Rightarrow z=\sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ suy ra $m>0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0),R_1=1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I(\sqrt{3};-1),R_2=m$, ta thấy $OI=2>R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi $OI=R_1+R_2\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1$ hoặc $R_2=R_1+OI\Leftrightarrow m=1+2=3$

Câu 53. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z=\dfrac{m+2i}{m-2i}$ có phần thực dương

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>2\end{array}\right.$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

$z=\dfrac{m+2i}{m-2i}=\dfrac{(m+2i)(m+2i)}{m^2+4}=\dfrac{m^2-4}{m^2+4}+\dfrac{4m}{m^2+4}i$.

Vì z có phần thực dương $\Rightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$.

Câu 54. **(Kon Tum - 2019)** Cho hai số phức $z=3-4i$ và $z'=(2+m)+mi(m\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'|=|iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$. **C.** 0. **D.** -2.

lời giải:

Chọn D

Ta có $|z'|=\sqrt{(2+m)^2+m^2}$ và $|iz|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

vậy ta có phương trình $(2+m)^2+m^2=25\Leftrightarrow 2m^2+4m-21=0\Rightarrow m_1+m_2=-\dfrac{4}{2}=-2$

Câu 55. Biết rằng $z=m^2-3m+3+(m-2)i$, với $m\in\mathbb{R}$, là một số thực. Giá trị của biểu thức $P=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$ bằng

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=m^2-3m+3+(m-2)i$ là một số thực khi $m-2=0\Leftrightarrow m=2$.

Với $m=2\Rightarrow z=1$, thay vào biểu thức P, ta được: $P=1+1+1^2+1^3+\cdots+1^{2019}=2020$.

Nguyễn Bảo Vương

$\dfrac{+}{z}$ là số thực và $|z-2|=m$ với $m\in\mathbb{R}$.

Gọi m_0 là một giá trị của m để có đúng một số phức thoả mãn bài toán. Khi đó:

A. $m_0\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $m_0\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $m_0\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Đặt: $w=\dfrac{1+i}{z}=\dfrac{1+i}{a+bi}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2 \Leftrightarrow 2a^2-4a+4-m^2=0\ (3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm a duy nhất.

$\Leftrightarrow \Delta'=0 \Leftrightarrow 4-2(4-m^2)=0 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\sqrt{2}\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$ (Vì m là mô-đun).

Trình bày lại

Giả sử $z=a+bi$, vì $z\neq 0$ nên $a^2+b^2>0\ (*)$.

Đặt: $w=\frac{1+i}{z}=\frac{1+i}{a+bi}=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a+b+(a-b)i\right]=\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}i$.

w là số thực nên: $a=b\ (1)$.Kết hợp $(*)$ suy ra $a=b\neq 0$.

Mặt khác: $|a-2+bi|=m \Leftrightarrow (a-2)^2+b^2=m^2\ (2)$.(Vì m là mô-đun nên $m\geq 0$).

Thay (1) vào (2) được: $(a-2)^2+a^2=m^2 \Leftrightarrow g(a)=2a^2-4a+4-m^2=0\ (3)$.

Để có đúng một số phức thoả mãn bài toán thì PT (3) phải có nghiệm $a\neq 0$ duy nhất.

Có các khả năng sau :

KN1 : PT (3) có nghiệm kép $a\neq 0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'=0\\ g(0)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2=0\\ 4-m^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow m=\sqrt{2}$.

KN2: PT (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $a=0$

ĐK: $\begin{cases}\Delta'>0\\ g(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2>0\\ 4-m^2=0\end{cases}\Rightarrow m=2$.

Từ đó suy ra $\exists m_0=\sqrt{2}\in\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 57. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\frac{z}{z-4}=\frac{x+iy}{x-4+iy}=\frac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4)^2+y^2}=\frac{x(x-4)+y^2-4iy}{(x-4)^2+y^2}$

là số thuần ảo khi $x(x-4)+y^2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4$

Mà $|z-m|=6 \Leftrightarrow (x-m)^2+y^2=36$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\ (x-2)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4-2m)x=36-m^2\\ y^2=4-(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{36-m^2}{4-2m}\\ y^2=4-\left(\frac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2\end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow 4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow 2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$ hoặc $-2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$

$\Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-2$ hoặc $m=\pm 6$

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Cách 2:

Để có một số phức thỏa mãn ycbt thì hpt $\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}$ có đúng một nghiệm

Nghĩa là hai đường tròn $(C_1):(x-m)^2+y^2=36$ và $(C_2):(x-2)^2+y^2=4$ tiếp xúc nhau.

Xét (C_1) có tâm $I_1(2;0)$ bán kính $R_1=2$, (C_2) có tâm $I_2(m;0)$ bán kính $R_2=6$

Cần có: $\left[\begin{array}{l}I_1I_2=|R_1-R_2|\\I_1I_2=R_1+R_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|m-2|=4\\|m-2|=6\end{array}\right. \Rightarrow m\in\{-6;6;10;-2\}$.

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Câu 58. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=2$ và $z(\bar{z}+2)-(z+\bar{z})-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

*) $z=x+yi$, $\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow |z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=2 \Leftrightarrow |2x|+|2yi|=2 \Leftrightarrow |x|+|y|=1$.

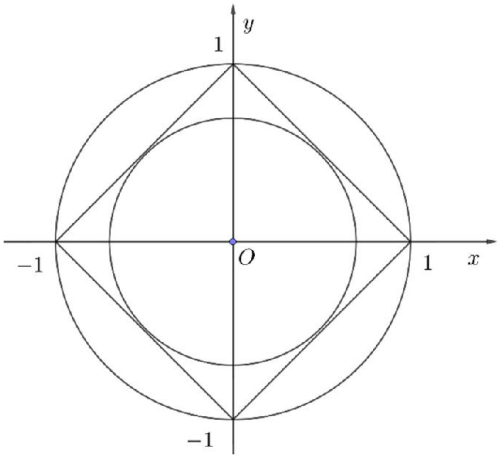
*) $z(\bar{z}+2)-(z+\bar{z})-m=x^2+y^2+2yi-m$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2=m\ (m>0)$.

Để tồn tại 4 số phức z thì hệ phương trình $\begin{cases}|x|+|y|=1\\x^2+y^2=m\end{cases}$ (*) có 4 nghiệm phân biệt.

Hệ (*) có 4 nghiệm thì đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{m}$ phải cắt các đường thẳng $|x|+|y|=1$ tại 4 điểm phân biệt.

Các đường thẳng $|x|+|y|=1$ đôi một cắt nhau tạo thành 1 hình vuông như trên đồ thị.

Để đường tròn (C): $x^2+y^2=m$ cắt các đường thẳng $|x|+|y|=1$ tại 4 điểm thì đường tròn sẽ là đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông với các bán kính tương ứng $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và bán kính $R=1$. Hay $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\m=1\end{array}\right.$. Suy ra tổng các giá trị m cần tìm là $\dfrac{3}{2}$.



Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 34 TẬP HỢP ĐIỂM SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Dạng toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

— Bước 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

— Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x,y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$Ax+By+C=0.$	Là đường thẳng $d: Ax+By+C=0$.
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$	Là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0.$	Là hình tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$R_1^2\le(x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2.$	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
$y=ax^2+bx+c,\ (a\ne 0).$	Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right).$
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ với $MF_1+MF_2=2a$ và $F_1F_2=2c<2a$.	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2},(a>b>0)$.
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ với $\lvert MF_1-MF_2\rvert=2a$ và $F_1F_2=2c>2a$.	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b>0$.
$MA=MB$.	Là đường trung trực đoạng thẳng AB.

Lưu ý

Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

— **Trực tiếp**, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn tính chất K.

— **Gián tiếp**, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f\left(z,\bar{z},|z|\right)=0,...$

Dạng 1. Tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn

Câu 1. **(Mã 102 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 2. **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Câu 3. **(Mã 104 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 44. **B.** 52. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=22$ **B.** $r=4$ **C.** $r=5$ **D.** $r=20$

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;-1)$ **D.** $(1;-1)$

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 8. **(Mã 101 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Mã 103 - 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\frac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Câu 11. **(THPT Gia Lộc Hải Dương -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Câu 12. **(ĐỀ MẪU KSNL ĐHQG TPHCM 2019)** Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $z.\bar{z}=1$ là

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một elip. **D.** một điểm.

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z thỏa $|z-1+2i|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=2z+i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(2;-3)$. **B.** $I(1;1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 15. **(Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{i+2}\right|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=1$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=2$.. **D.** $r=\sqrt{3}$..

Câu 16. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=3$ là

A. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=9$. **B.** đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.
C. đường tròn tâm $I(-1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** đường thẳng có phương trình $x+2y-3=0$.

Câu 17. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

A. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(2;1)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2;0);B(0;1)$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$.

A. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. **B.** Đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. **D.** Đường tròn tâm $I(0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z-i\right|=4$ là đường cong có phương trình

A. $\left(x-1\right)^2+y^2=4$ **B.** $x^2+\left(y-1\right)^2=4$ **C.** $\left(x-1\right)^2+y^2=16$ **D.** $x^2+\left(y-1\right)^2=16$

Câu 20. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I\left(2;-1\right);\ R=4$. **B.** $I\left(2;-1\right);\ R=2$. **C.** $I\left(-2;-1\right);\ R=4$. **D.** $I\left(-2;-1\right);\ R=2$.

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z-1+i\right|=2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

A. $I\left(-1;1\right),R=4$. **B.** $I\left(-1;1\right),R=2$. **C.** $I\left(1;-1\right),R=2$. **D.** $I\left(1;-1\right),R=4$.

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\left(1+i\right)z-5+i\right|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I\left(2;-3\right),R=\sqrt{2}$. **B.** $I\left(2;-3\right),R=2$. **C.** $I\left(-2;3\right),R=\sqrt{2}$. **D.** $I\left(-2;3\right),R=2$.

Câu 23. **(Chuyên KHTN -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn đồng thời $\left|z\right|=m$ và $\left|z-4m+3mi\right|=m^2$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 25. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn: $\left|z+2-i\right|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$ biểu diễn số phức $w=1+\overline{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I\left(-2;1\right)$ bán kính $R=3$.

B. Đường tròn tâm $I\left(2;-1\right)$ bán kính $R=3$.

C. Đường tròn tâm $I\left(-1;-1\right)$ bán kính $R=9$.

D. Đường tròn tâm $I\left(-1;-1\right)$ bán kính $R=3$.

Câu 26. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=2\sqrt{5}$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w=i+\left(2-i\right)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=20$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Câu 27. Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{11}$ **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1+i\sqrt{8})z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 9. **B.** 36. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 29. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$. **D.** $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$.

Câu 30. **(Chuyên KHTN - 2018)**. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|\overline{z}+2-i|=4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(-2;-1); R=4$. **B.** $I(-2;-1); R=2$. **C.** $I(2;-1); R=4$. **D.** $I(2;-1); I(2;-1)$.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1-i)\overline{z}+2i$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng.
C. Một Elip. **D.** Một parabol hoặc hyperbol.

Câu 32. **(Đồng Tháp 2018)** Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của đường tròn (C)

A. $R=\frac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\frac{7}{3}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 33. **(SGD - Hà Tĩnh - 2018)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z-i|=6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

A. 3. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 34. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z-3i+5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R=2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R=10$.

C. $I(6;4), R=2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R=2\sqrt{5}$.

Câu 35. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

A. 7. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 36. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

C. $(x-10)^2+(y-6)^2=16$. **D.** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

Câu 37. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Xét số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\bar{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$. **B.** $r=39$. **C.** $r=17$ **D.** $r=3$.

Câu 38. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=1$. **C.** $r=4$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Câu 39. **(THPT Lệ Thủy-Quảng Bình 2017)** Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy.

A. $m=-5;\ m=3$. **B.** $m=5;\ m=-3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Câu 40. **(Cụm 4 HCM 2017** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1-i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=4$. **C.** $r=\sqrt{2}$. **D.** $r=2\sqrt{2}$.

Câu 41. **(Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội –2018)** Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Câu 42. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Câu 43. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i+1|=|\overline{z}-2i|$ và $|z|=1$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 44. **(SGD Điện Biên - 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z-4i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Câu 45. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}+1+2i|=1$ là

A. đường tròn $I(1;2)$, bán kính $R=1$. **B.** đường tròn $I(-1;-2)$, bán kính $R=1$.

C. đường tròn $I(-1;2)$, bán kính $R=1$. **D.** đường tròn $I(1;-2)$, bán kính $R=1$.

Câu 46. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho số phức z thảo mãn $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 47. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=(1+\sqrt{3}i)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Câu 48. Cho số phức z thoả mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $5\sqrt{17}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Câu 49. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=\sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=5$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 51. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z|=3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=\overline{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng

Câu 52. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Câu 53. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|z+2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z.

A. là đường thẳng $3x+y+1=0$. **B.** là đường thẳng $3x-y+1=0$.
C. là đường thẳng $3x+y-1=0$. **D.** là đường thẳng $3x-y-1=0$.

Câu 54. Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2+i|=|\bar{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=-x-1$. **D.** $y=x-1$.

Câu 55. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\bar{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Câu 56. Xét các số phức z thỏa mãn $z(\bar{z}-2+i)+4i-1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d. Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 10.

Câu 57. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Câu 58. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1|=|z-2+3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$.
B. Đường thẳng có phương trình $2x-6y+12=0$.
C. Đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.
D. Đường thẳng có phương trình $x-5y-6=0$.

Câu 59. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left|\dfrac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$.

A. $d:6x+4y-3=0$. **B.** $d:x+2y-1=0$.
C. $(C):x^2+y^2-2x+2y+1=0$. **D.** $(C):x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

Câu 60. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Cho số phức $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2-i-|z|(1-i)=0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x-y+5=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Câu 61. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2+(\bar{z})^2+2|z|^2\right|=16$ là hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 là bao nhiêu?

A. $d\left(d_1,d_2\right)=1$. **B.** $d\left(d_1,d_2\right)=6$. **C.** $d\left(d_1,d_2\right)=2$. **D.** $d\left(d_1,d_2\right)=4$.

Câu 62. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là?

A. Parabol $y^2=4x$. **B.** Đường thẳng $6x+8y-25=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$. **D.** Elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Câu 63. Cho số phức z thỏa: $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

A. Một đường thẳng có phương trình: $-20x+32y+47=0$.

B. Một đường có phương trình: $3y^2+20x+2y-20=0$.

C. Một đường thẳng có phương trình: $20x+16y+47=0$.

D. Một đường thẳng có phương trình: $20x-16y-47=0$.

Câu 64. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

A. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

B. Trục Ox.

C. Trục Oy.

D. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$, bỏ đi điểm $O(0;0)$.

Câu 65. **(SGD Bến Tre 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\overline{z}+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $4x-2y-1=0$. **B.** $4x-6y-1=0$. **C.** $4x+2y-1=0$. **D.** $4x-2y+1=0$.

Câu 66. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2+z|=|z-i|$.

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$. **B.** Điểm $M(-1;1/2)$.

C. Đường thẳng $2x+y+3=0$. **D.** Đường thẳng $4x+2y-3=0$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

A. $20x-16y-47=0$. **B.** $20x+6y-47=0$. **C.** $20x+16y+47=0$. **D.** $20x+16y-47=0$.

Câu 68. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho số phức thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x+7y+9=0$. **B.** $x+7y-9=0$. **C.** $x-7y-9=0$. **D.** $x-7y+9=0$.

Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn là đường conic

Câu 69. **(Sở Bình Phước 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$ là

A. Một điểm **B.** Một đường tròn **C.** Một đường thẳng **D.** Một Parabol

Câu 70. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip. **B.** Một đường parabol.
C. Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Câu 71. Xét các số phức z thoả mãn $\dfrac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là

parabol có toạ độ đỉnh

A. $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 72. **(Chuyên KHTN 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Câu 73. **(CHUYÊN VINH 2017)** Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z+i|=|2\bar{z}+-z+3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

A. Một đường thẳng. **B.** Một parabol. **C.** Một elip. **D.** Một đường tròn.

Câu 74. **(Sở Bình Phước 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

A. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=64$. **B.** $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

C. $(E):\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **D.** $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

Câu 75. **(THPT Nguyễn Trãi 2017)** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i|=\left|z-\bar{z}+2i\right|$ là hình gì?

A. Một đường tròn. **B.** Một đường Parabol.
C. Một đường Elip. **D.** Một đường thẳng.

Câu 76. **(THPT Hai Bà Trưng- Huế 2017)** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$..

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M\left(x;y\right)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{\left(x+4\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=12$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O\left(0;0\right)$ và có bán kính $R=4$.

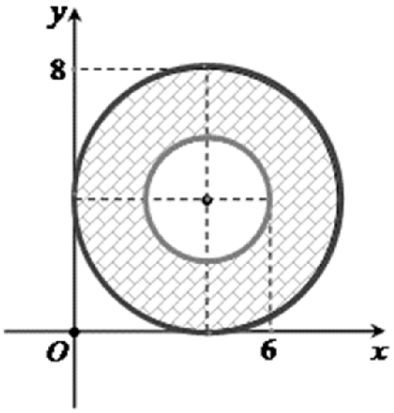
D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Câu 77. **(Chuyên Bến Tre 2017)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn là một miền

Câu 78. Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6\le|z|\le 8$. **B.** $2\le|z+4+4i|\le 4$. **C.** $2\le|z-4-4i|\le 4$. **D.** $4\le|z-4-4i|\le 16$.

Câu 79. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường Elip.

Câu 80. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i|\le 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=4$. **B.** Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=2$.

C. Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$. **D.** Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=4$.

Câu 81. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

A. $S=25\pi$. **B.** $S=8\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Câu 82. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w=\frac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

A. Cung (IV). **B.** Cung (II). **C.** Cung (III). **D.** Cung (I).

Câu 83. **(Sở Nam Định - 2018)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H)

A. $S=32(6-\pi)$. **B.** $S=16(4-\pi)$. **C.** $S=256$.. **D.** $S=64\pi$..

Câu 84. **(Sở Yên Bái - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S=4\pi$. **B.** $S=25\pi$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Câu 85. **(Sở Hà Tĩnh 2017)** Biết số phức z thỏa mãn $|z-1|\le 1$ và $z-\overline{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

A. 2π. **B.** π^2. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Câu 86. **(Chuyên Võ Nguyên Giáp 2017)** Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho $|2z-\overline{z}|\le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

A. $\frac{3\pi}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** 6π. **D.** 3π.

Câu 87. **(Chuyên Thái Nguyên 2017)** Tập hợp các số phức $w=(1+i)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1|\le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 2π. **B.** π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Câu 88. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi=\frac{z+2\overline{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i)=3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON})=2\varphi$, trong đó $\varphi=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (IV). **B.** Góc phần tư thứ (I).
C. Góc phần tư thứ (II). **D.** Góc phần tư thứ (III).

Câu 89. **(TRẦN HƯNG ĐẠO – NB-2017)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Câu 90. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa – 2017)**Biết số phức z thỏa điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

A. 9π. **B.** 16π. **C.** 25. **D.** 4π.

Câu 91. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường Parabol. **B.** Một đường Elip. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Câu 92. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=25\pi$ **B.** $S=9\pi$ **C.** $S=12\pi$ **D.** $S=16\pi$

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z+\overline{z}|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $4\pi-4$. **B.** $8\pi-8$. **C.** $2\pi-4$. **D.** $8\pi-4$.

Dạng 5. Một số dạng toán khác

Câu 94. Các điểm A,B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy, G là trọng tâm tam giác OAB, biết $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=12$. Độ dài đoạn OG bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Câu 96. Cho hai điểm *A, B* là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Hỏi ba điểm *O, A, B* tạo thành tam giác gì? (*O* là gốc tọa độ) Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Vuông cân tại *O*. **B.** Vuông tại *O*. **C.** Đều. **D.** Cân tại *O*.

Câu 97. **(Sở Kon Tum 2019)** Cho các số phức $z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $2\sqrt{17}$. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** 9.

Câu 98. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ, (3 điểm O,M,N không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây luôn **đúng**?

A. $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$. **B.** $|z_1+z_2|=OI$.

C. $|z_1-z_2|=OM+ON$. **D.** $|z_1+z_2|=2OI$.

Câu 99. Cho số phức $z=m-2+(m^2-1)i$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 100. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+2i$; $1+\sqrt{3}+i$; $1+\sqrt{3}-i$; $1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diện số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Câu 101. (Chu Văn An - Hà Nội - 2019) Xét hai điểm A,B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 102. (THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$ và $|z|=m$?

A. $\{2;2\sqrt{2}\}$. **B.** $[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $\{2\}$. **D.** $(2;2\sqrt{2})$.

Câu 103. (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019) Có bao nhiêu số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\le 10$.

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 104. Cho hai số phức $z_1;z_2$ thoả mãn: $|z_1|=6,|z_2|=2$. Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1,iz_2. Biết $\widehat{MON}=60^0$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2+9z_2^2|$ bằng

A. 18. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{2}$.

Câu 105. (SP Đồng Nai - 2019) Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=3,|z_2|=4,|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$

A. $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\dfrac{3}{8}$. **D.** $|b|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Chuyên đề 34 TẬP HỢP ĐIỂM SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI

Dạng toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

— Bước 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

— Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x,y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$Ax+By+C=0.$	Là đường thẳng $d: Ax+By+C=0$.
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$	Là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0.$	Là hình tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$R_1^2\le(x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2.$	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
$y=ax^2+bx+c,\ (a\ne 0).$	Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right).$
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ với $MF_1+MF_2=2a$ và $F_1F_2=2c<2a$.	Là một elip có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2},(a>b>0)$.
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ với $\lvert MF_1-MF_2\rvert=2a$ và $F_1F_2=2c>2a$.	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b>0$.
$MA=MB$.	Là đường trung trực đoạng thẳng AB.

Lưu ý

Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

— **Trực tiếp**, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn tính chất K.

— **Gián tiếp**, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f(z,\bar{z},|z|)=0,...$

Dạng 1. Tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn

Câu 1. **(Mã 102 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+y\text{i}$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $(\overline{z}+3\text{i})(z-3)=|z|^2-3\overline{z}+3\text{i}z-9\text{i}$ là số thuần ảo khi

$x^2+y^2-3x-3y=0$. Đây là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Vì $(\overline{z}+2i)(z-2)=\left[x+(2-y)i\right]\left[(x-2)+yi\right]=\left[x(x-2)-y(2-y)\right]+\left[xy+(x-2)(2-y)\right]i$ là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó $x(x-2)-y(2-y)=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 3. **(Mã 104 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 44. **B.** 52. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $w=x+yi$ với x,y là các số thực.

Ta có $w=\frac{5+iz}{1+z}\Leftrightarrow z=\frac{w-5}{i-w}$.

Lại có $|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{w-5}{i-w}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow|w-5|=\sqrt{2}|w-i|\Leftrightarrow(x-5)^2+y^2=2\left[x^2+(y-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow(x+5)^2+(y-4)^2=52$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

Ta có: $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)=\left(a-bi-2i\right)\left(a+bi+2\right)=a^2+2a+b^2+2b-2\left(a+b+2\right)i$

Vì $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo nên ta có $a^2+2a+b^2+2b=0\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2=2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=22$ **B.** $r=4$ **C.** $r=5$ **D.** $r=20$

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=a+bi;w=x+yi;\left(a,b,x,y\in\mathbb{R}\right)$

Theo đề $w=\left(3+4i\right)z+i\Rightarrow x+yi=\left(3+4i\right)\left(a+bi\right)+i$

$\Leftrightarrow x+yi=\left(3a-4b\right)+\left(3b+4a+1\right)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a-4b\\y=3b+4a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a-4b\\y-1=3b+4a\end{cases}$ Ta có

$x^2+\left(y-1\right)^2=\left(3a-4b\right)^2+\left(4a+3b\right)^2=25a^2+25b^2=25\left(a^2+b^2\right)$

Mà $\left|z\right|=4\Leftrightarrow a^2+b^2=16$. Vậy $x^2+\left(y-1\right)^2=25.16=400$

Bán kính đường tròn là $r=\sqrt{400}=20$.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$ **B.** $\left(-1;1\right)$ **C.** $\left(-1;-1\right)$ **D.** $\left(1;-1\right)$

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$

$\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$

$=z.\overline{z}+2z+2i\overline{z}+4i$

$=x^2+y^2+2\left(x+yi\right)+2i\left(x-yi\right)+4i$

$=x^2+y^2+2x+2y+\left(2x+2y+4\right)i$

$\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+2y=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm là $I\left(-1;-1\right)$.

Câu 7. **(Mã 101 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

$(\bar{z}+i)(z+2)=[x+(1-y)i][(x+2)+yi]$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x+2)+y(y-1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(-1;\frac{1}{2}\right), R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8. **(Mã 101 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Lời giải

Chọn B

$w=\frac{4+iz}{1+z}\Leftrightarrow(1+z)w=4+iz\Leftrightarrow z(w-i)=4-w$

$\Leftrightarrow|z|.|w-i|=|4-w|\Leftrightarrow\sqrt{2}.|w-i|=|4-w|$ (*)

Gọi $w=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$ khi đó thay vào (*) ta có:

$\sqrt{2}.|x+yi-i|=|4-x-yi|\Leftrightarrow 2\left[x^2+(y-1)^2\right]=(x-4)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-4y-14=0\Leftrightarrow(x+4)^2+(y-2)^2=34$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Câu 9. **(Mã 102 - 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w=\frac{3+iz}{1+z}\Leftrightarrow w+wz=3+iz\Leftrightarrow w-3=(i-w)z$.

$\Rightarrow|w-3|=|(i-w)z|\Leftrightarrow|w-3|=|(i-w)||z|$.

Gọi $w=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Do đó, $|w-3|=|(i-w)||z|\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(1-y)^2}.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(x-3)^2+y^2=2x^2+2(1-y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-4y-7=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 10. **(Mã 103 - 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $w=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$w=\dfrac{2+iz}{1+z}\Leftrightarrow w(1+z)=2+iz\Leftrightarrow w-2=z(i-w)\Rightarrow|w-2|=|z(i-w)|\Leftrightarrow|w-2|=|z|\cdot|z(i-w)|$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=2\left(x^2+(1-y)^2\right)\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-2)^2=10(*)$

Từ $(*)$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Câu 11. **(THPT Gia Lộc Hải Dương -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $\mathrm{w}=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Lời giải

Cách 1.

Đặt $\mathrm{w}=x+yi$. Ta có $\mathrm{w}=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow x+yi=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow(2-i)z=(x-3)+(y+2)i$.

$\Leftrightarrow(4-i^2)z=[(x-3)+(y+2)i].(2+i)$.

$\Leftrightarrow z=\dfrac{2x-y-8}{5}+\dfrac{x+2y+1}{5}i$.

Vì $|z|=2$ nên $\left(\dfrac{2x-y-8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{x+2y+1}{5}\right)^2=4$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y+13=20$.

$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=20$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Cách 2.

Đặt $z=a+bi;\mathrm{w}=x+yi$.

Vì $|z|=2$ nên $a^2+b^2=4$.

Ta có $\mathrm{w}=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow x+yi+2i-3=(2-i)(a+bi)$.

$\Leftrightarrow(x-3)+(y+2)i=(2a+b)+(2b-a)i$.

$\Rightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=(2a+b)^2+(2b-a)^2$.

$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=5(a^2+b^2)$.

Nguyễn Bảo Vương

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=20$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Câu 12. **(ĐỀ MẪU KSNL ĐHQG TPHCM 2019)** Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $z.\overline{z}=1$ là

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một elip. **D.** một điểm.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z}=x-yi$.

Vì $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z cần tìm là đường tròn đơn vị.

Câu 13. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho số phức z thỏa $|z-1+2i|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=2z+i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(2;-3)$. **B.** $I(1;1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w.

Ta có $w=2z+i\Leftrightarrow z=\dfrac{w-i}{2}$.

Do đó $|z-1+2i|=3\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-i}{2}-1+2i\right|=3\Leftrightarrow|w-2+3i|=6\Leftrightarrow MI=6$, với $I(2;-3)$.

Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=6$.

Câu 14. **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-i|=|(1+i)z|$.

$\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(1+i)(x+yi)|\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $(0;-1)$.

Câu 15. **(Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{i+2}\right|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=1$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=2$.. **D.** $r=\sqrt{3}$..

Lời giải

Ta có: $\left|\frac{z}{i+2}\right|=1\Leftrightarrow|z|=|i+2|=\sqrt{5}$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{5}$.

Câu 16. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=3$ là

A. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=9$. **B.** đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

C. đường tròn tâm $I(-1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** đường thẳng có phương trình $x+2y-3=0$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử điểm $\mathrm{M(x;y)}$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có:

$|z-1-2i|=3\Leftrightarrow|(x-1)+(y-2)\mathrm{i}|=3\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=9$

Vậy điểm $\mathrm{M(x;y)}$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Câu 17. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

A. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(2;1)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2;0);B(0;1)$.

Lời giải

Gọi số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\bar{z}=x-yi.$

Thay vào điều kiện ta được:

$(2-z)(\bar{z}+i).$

$=(2-x-yi)(x-yi+i).$

$=\left[(2-x)-yi\right]\left[x+(1-y)i\right].$

$=(2-x)x+y(1-y)+\left[(2-x)(1-y)-xy\right]i.$

$(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$(2-x)x+y(1-y)=0$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y=0$.

Vậy số phức $z=x+yi$ thuộc đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$.

A. Đường tròn tâm $I(0;\ 1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. **B.** Đường tròn tâm $I(1;\ 0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;\ 0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$. **D.** Đường tròn tâm $I(0;\ -1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$|z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2=2$ nên tập điểm M là Đường tròn tâm $I(0;\ -1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z-i|=4$ là đường cong có phương trình

A. $(x-1)^2+y^2=4$ **B.** $x^2+(y-1)^2=4$ **C.** $(x-1)^2+y^2=16$ **D.** $x^2+(y-1)^2=16$

lời giải:

Ta có $|z-i|=4\Rightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4\Rightarrow x^2+(y-1)^2=16$

Câu 20. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\bar{z}+2-i|=4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(2;-1);\ R=4$. **B.** $I(2;-1);\ R=2$. **C.** $I(-2;-1);\ R=4$. **D.** $I(-2;-1);\ R=2$.

Lời giải

Giả sử số phức thỏa mãn bài toán có dạng $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Suy ra $\bar{z}+2-i=x-yi+2-i=x+2-(y+1)i$.

Do đó: $|\bar{z}+2-i|=4\Leftrightarrow|x+2-(y+1)i|=4\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+1)^2=16$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R=4$.

Câu 21. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

A. $I(-1;1),R=4$. **B.** $I(-1;1),R=2$. **C.** $I(1;-1),R=2$. **D.** $I(1;-1),R=4$.

Lời giải

Gọi $z=a+bi$, với $x,y\in\mathbb{R}$, ta có:

$|z-1+i|=2\ \Leftrightarrow|x+yi-1+i|=2\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=2\ \Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2$.

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z-5+i|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(2;-3),R=\sqrt{2}$. **B.** $I(2;-3),R=2$. **C.** $I(-2;3),R=\sqrt{2}$. **D.** $I(-2;3),R=2$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có:

$|(1+i)z-5+i|=2\Rightarrow|(1+i)(x+yi)-5+i|=2\Leftrightarrow|(x-y-5)+(x+y+1)i|=2$

$\Leftrightarrow(x-y-5)^2+(x+y+1)^2=4\Leftrightarrow2x^2+2y^2-8x+12y+22=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y+11=0$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(2;-3)$ và $R=\sqrt{2}$.

Câu 23. **(Chuyên KHTN -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$. Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Có $\text{w}=\dfrac{z+2}{z-2i}=\dfrac{a+2+bi}{a+(b-2)i}=\dfrac{(a+2+bi)\left[a-(b-2)i\right]}{a^2+(b-2)^2}$

$=\dfrac{a(a+2)+b(b-2)+\left[-(a+2)(b-2)+ab\right]i}{a^2+(b-2)^2}$

w là số thuần ảo $\Leftrightarrow\begin{cases}a(a+2)+b(b-2)=0 \ (1)\\ a^2+(b-2)^2\neq 0\end{cases}$

Có $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2+2a-2b=0$.

Suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $z=x+yi \ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có điểm biểu diễn z là $M(x;\ y)$.

Với $m=0$, ta có $z=0$, thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>0$, ta có:

+ $|z|=m\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;0)$, bán kính $R=m$

+ $|z-4m+3mi|=m^2\Leftrightarrow(x-4m)^2+(y+3m)^2=m^4$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R'=m^2$.

+) Có duy nhất một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}II'=R+R'\\ II'=|R-R'|\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5m=m^2+m\\ 5m=|m^2-m|\end{array}\right.\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=6\end{array}\right.$.

Kết hợp với $m=0$, suy ra $m\in\{0;4;6\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Câu 25. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2-i|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $w=1+\bar{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2;1)$ bán kính $R=3$.

B. Đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=9$.

D. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$. Số phức w được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

Từ $w=1+\bar{z}$ suy ra $x+yi=1+\bar{z}\Leftrightarrow\bar{z}=(x-1)+yi\Rightarrow z=(x-1)-yi$.

Mà $|z+2-i|=3$ nên ta có:

$$|(x-1)-yi+2-i|=3\Leftrightarrow|(x+1)-(y+1)i|=3\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=3\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+1)^2=3^2$$

.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Câu 26. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2\sqrt{5}$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w=i+(2-i)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=20$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=i+(2-i)z\Leftrightarrow w-i=(2-i)z$. Suy ra $|w-i|=|(2-i)z|=|2-i|.|z|=10$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w trên mặt phẳng tọa độ nằm trên đường tròn có bán kính $r=10$.

Câu 27. **Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}-2i)(z+3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng**

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{11}$ **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó:

$$w=(\bar{z}-2i)(z+3)=[x+(-y-2)i][(x+3)+yi]=x(x+3)+y(y+2)+[xy+(x+3)(-y-2)]i$$

Do w là số thuần ảo

$$\Leftrightarrow x(x+3)+y(y+2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+3x+2y=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(-\frac{3}{2};-1\right)$, bán kính

$$R=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 9. **B.** 36. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Gọi $w=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$

Theo đề bài ta có:

$w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i\Leftrightarrow w-i=\left(1+i\sqrt{8}\right)z\Leftrightarrow w-i=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)-\left(1+i\sqrt{8}\right)$

$\Leftrightarrow w-i+1+i\sqrt{8}=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)\Leftrightarrow (x+1)+\left(y-1+\sqrt{8}\right)i=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)$

$\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+\left(y-1+\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}.2\Leftrightarrow(x+1)^2+\left(y-1+\sqrt{8}\right)^2=36$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn có bán kính $r=6$.

Câu 29. Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$. **D.** $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$.

Lời giải

+)Đặt $z=x+yi$

Khi đó $|z-5-3i|=5\Leftrightarrow|x-5+(y-3)i|=5\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-3)^2=25\ (C)$

Gọi A, B lần lượt là 2 điểm biểu diễn số phức z_1,z_2

$\Rightarrow$ A, B thuộc đường tròn (C) có tâm I (5; 3), bán kính R = 5 và $|z_1-z_2|=8\Rightarrow AB=8$

+) Gọi H là điểm biểu diễn số phức $w'=\frac{z_1+z_2}{2}$

$\Rightarrow$ H là trung điểm AB $\Rightarrow AH=\frac{AB}{2}=4$

Xét tam giác AIH vuông tại H có AH = 4, AI = 5 nên $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\Rightarrow$ H thuộc đường tròn (C') có tâm I (5; 3), bán kính $R'=3$ **(*)**

+) Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$

$\Rightarrow\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow$ M là ảnh của H qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2 với O là gốc tọa độ (**)

Từ **(*)**và (**) $\Rightarrow$ tập hợp M là đường tròn (C'') là ảnh của (C') phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2

+) Giả sử đường tròn (C'') có tâm J (a; b) và bán kính R''

$\Rightarrow\begin{cases}a=2.5=10\\b=2.3=6\\R''=2.R'=6\end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C'') là $(x-10)^2+(y-6)^2=36$

Câu 30. **(Chuyên KHTN - 2018)**. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I\left(-2;-1\right);R=4$. **B.** $I\left(-2;-1\right);R=2$. **C.** $I\left(2;-1\right);R=4$. **D.** $I\left(2;-1\right);I\left(2;-1\right)$.

Lời giải

Gọi số phức $z=x+iy\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có:

$\left|\overline{z}+2-i\right|=4\Leftrightarrow\left|\left(x+2\right)+\left(-y-1\right)i\right|=4\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y+1\right)^2=16$

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm $I\left(-2;-1\right)$ và có bán kính $R=4$.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\left(1-i\right)\overline{z}+2i$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng.
C. Một Elip. **D.** Một parabol hoặc hyperbol.

Lời giải

Ta có: $w=\left(1-i\right)\overline{z}+2i\Leftrightarrow w-2i=\left(1-i\right)\overline{z}\Leftrightarrow\left|w-2i\right|=\left|\left(1-i\right)\right|\left|\overline{z}\right|\Leftrightarrow\left|w-2i\right|=2\sqrt{2}$.

Do đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I\left(0;2\right)$ và bán kính $2\sqrt{2}$.

Câu 32. **(Đồng Tháp 2018)** Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left|z+1\right|=\left|1-i-2z\right|$ là đường tròn $\left(C\right)$. Tính bán kính R của đường tròn $\left(C\right)$

A. $R=\dfrac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\dfrac{7}{3}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$

$\left|a+bi+1\right|=\left|1-i-2\left(a+bi\right)\right|\Leftrightarrow\sqrt{\left(a+1\right)^2+b^2}=\sqrt{\left(1-2a\right)^2+\left(-1-2b\right)^2}$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2=1-4a+4a^2+1+4b+4b^2\Leftrightarrow a^2+b^2-2a+\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}=0$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(1;-\dfrac{2}{3}\right)$,

Bán kính $R=\sqrt{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 33. **(SGD - Hà Tĩnh - 2018)** Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|2z-i\right|=6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

A. 3. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=a+bi$ ta có $|2z-i|=6 \Leftrightarrow |2a+2bi-i|=6 \Leftrightarrow \sqrt{4a^2+(2b-1)^2}=6$.

$4a^2+4b^2-4b-35=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-b-\frac{35}{4}=0 \Leftrightarrow a^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=9$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=3$.

Cách 2: $|2z-i|=6 \Leftrightarrow \left|z-\left(0+\frac{1}{2}i\right)\right|=3$. Gọi I là điểm biểu diễn số phức $0+\frac{1}{2}i$, M là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $MI=3$. Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=3$.

Câu 34. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z-3i+5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R=2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R=10$.

C. $I(6;4), R=2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $w=(2-i)z-3i+5 \Leftrightarrow w=(2-i)(z+1-3i)+6+4i$

$\Leftrightarrow w-6-4i=(2-i)(z+1-3i)$

$\Rightarrow |w-6-4i|=|(2-i)(z+1-3i)|=2\sqrt{5}$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$

$|w-6-4i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-6)+(y-4)i|=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số w là đường tròn tâm $I(6;4)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 35. (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

A. 7. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Ta có $w=3-2i+(2-i)z \Leftrightarrow z=\frac{w-3+2i}{2-i}$. Đặt $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $z=\frac{x+yi-3+2i}{2-i}$.

Ta có $|z|=2 \Rightarrow \left|\frac{x+yi-3+2i}{2-i}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2 \Leftrightarrow \frac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2$

$\Leftrightarrow |x-3+(y+2)i|=2|2-i| \Leftrightarrow |x-3+(y+2)i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 36. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

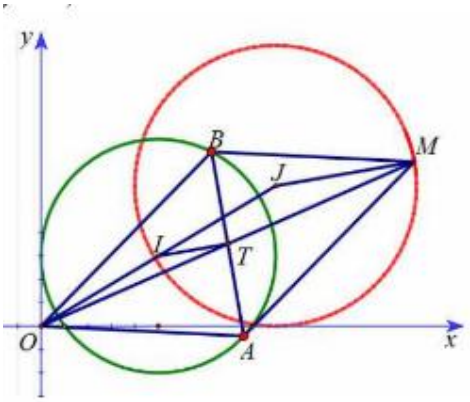
A. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$.

B. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

C. $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

D. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

Lời giải



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w. Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C):(x-5)^2+(y-3)^2=25$ và $AB=|z_1-z_2|=8$.

(C) có tâm $I(5;3)$ và bán kính $R=5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT=\sqrt{IA^2-TA^2}=3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10;6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM, do đó $JM=2IT=6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

Câu 37. **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Xét số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\bar{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$.

B. $r=39$.

C. $r=17$

D. $r=3$.

Lời giải

Gọi số phức $w=x+yi$, với $x,y\in R$, biểu diễn bởi $M(x;y)$

$w=(12-5i)\bar{z}+4i \Leftrightarrow x+yi=(12-5i)\bar{z}+4i \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{x+(y-4)i}{12-5i}$

$\Rightarrow z=\frac{x-(y-4)i}{12+5i}$

Ta có : $|z-3i+4|=3 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-(y-4)i}{12+5i}-3i+4\right|=3$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{x+63-(y+12)i}{12+5i}\right|=3 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{(x+63)^2+(y+12)^2}}{\sqrt{12^2+5^2}}=3 \Leftrightarrow (x+63)^2+(y+12)^2=39^2$

Vậy $r=39$.

Câu 38. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=1$. **C.** $r=4$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$.

$w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i \Leftrightarrow x+yi=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{x-1+(y+2)i}{1-\sqrt{3}i}$

$\Leftrightarrow z=\left[x-1+(y+2)i\right]\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\dfrac{(x-1)-\sqrt{3}(y+2)}{4}+\dfrac{(y+2)+(x-1)\sqrt{3}}{4}i$

$\Rightarrow z-3=\dfrac{(x-13)-\sqrt{3}(y+2)}{4}+\dfrac{(y+2)+(x-1)\sqrt{3}}{4}i$

$|z-3|=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{(x-13)-\sqrt{3}(y+2)}{4}\right)^2+\left(\dfrac{(y+2)+(x-1)\sqrt{3}}{4}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow (x-13)^2-2\sqrt{3}(x-13)(y+2)+3(y+2)^2+(y+2)^2+2(y+2)(x-1)\sqrt{3}+3(x-1)^2=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x+\left(4+6\sqrt{3}\right)y+12\sqrt{3}+43=0$

Bán kính $r=\sqrt{4^2+\left(-2-3\sqrt{3}\right)^2-12\sqrt{3}-43}=2$.

Câu 39. **(THPT Lệ Thủy-Quảng Bình 2017)** Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy.

A. $m=-5;\ m=3$. **B.** $m=5;\ m=-3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó.

$\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4 \Leftrightarrow \left|x+yi+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$.

$\Leftrightarrow \left|(x+m-1)+\left(y+\sqrt{3}\right)i\right|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+m-1)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=4$.

$\Leftrightarrow (x+m-1)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=16$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I\left(1-m;-\sqrt{3}\right)$ và bán kính $R=4$. Để đường tròn này tiếp xúc với trục Oy thì $|1-m|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-m=4\\1-m=-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$.

Vậy $m=5; m=-3$.

Câu 40. **(Cụm 4 HCM 2017** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(1-i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=4$. **C.** $r=\sqrt{2}$. **D.** $r=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$w=(1-i)z+i \Leftrightarrow z=\dfrac{w-i}{1-i}$; đặt $w=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow z=\dfrac{x+yi-i}{1-i}$. Ta có $|z-2|=2 \Leftrightarrow \Rightarrow \left|\dfrac{x+yi-i}{1-i}-2\right|=2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right|=2$.

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{(x+yi-i)(1+i)}{2}-2\right|=2 \Leftrightarrow |x+xi+yi-y-i+1-4|=4 \Leftrightarrow |x-y-3+(x+y-1)i|=4$

$\Leftrightarrow (x-y-3)^2+(x+y-1)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+9-2xy+6y-6x+x^2+y^2+1+2xy-2y-2x=16$.

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+4y-6=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y-3=0$

Đường tròn có bán kính là $R=\sqrt{2^2+1^2+3}=2\sqrt{2}$.

Câu 41. **(Chuyên Lương Thế Vinh – Hà Nội –2018)** Cho số phức z thỏa mãn $(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\bar{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. 18. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$(z-2+i)(\bar{z}-2-i)=25 \Leftrightarrow [a-2+(b+1)i][a-2-(b+1)i]=25$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2=25$ (1)

Theo giả thiết: $w=2\bar{z}-2+3i \Leftrightarrow x+yi=2(a-bi)-2+3i \Leftrightarrow x+yi=2a-2+(3-2b)i$.

$\Rightarrow \begin{cases} x=2a-2 \\ y=3-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x+2}{2} \\ b=\dfrac{3-y}{2} \end{cases}$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\dfrac{x+2}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{3-y}{2}+1\right)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=100$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R=10$.

Vậy $a+b+c=17$.

Câu 42. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi;\ x, y \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết $|z-(2-3i)| \le 2 \Leftrightarrow |x+yi-(2-3i)| \le 2$.

$\Leftrightarrow |(x-2)+(y+3)i| \le 2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 \le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một hình tròn.

Câu 43. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i+1| = |\overline{z}-2i|$ và $|z| = 1$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x+yi; x, y \in \mathbb{R}$ và $M(z) = M(x;y)$

$$\begin{cases} |z+i+1| = |\overline{z}-2i| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2 = x^2+(y+2)^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+1 = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng $\Delta: -x+y+1=0$ và đường tròn $x^2+y^2=1$ có tâm $O(0;0), R=1$

Ta có $d(O,\Delta) = \dfrac{|-0+0+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1 = R$

Suy ra đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm hay có hai số phức z thỏa mãn.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 44. **(SGD Điện Biên - 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z-4i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $(z-4i)(\overline{z}+2) = x^2+y^2+2x-4y+(2y-4x-8)i$.

$(z-4i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2 = 5$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là mộ đường tròn có tâm $I(-1;2)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 45. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\overline{z}+1+2i| = 1$ là

A. đường tròn $I(1;2)$, bán kính $R=1$. **B.** đường tròn $I(-1;-2)$, bán kính $R=1$.

C. đường tròn $I(-1;2)$, bán kính $R=1$. **D.** đường tròn $I(1;-2)$, bán kính $R=1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;(x,y\in R)$

Khi đó: $\left|\overline{z}+1+2i\right|=1\Leftrightarrow\left|(x+1)+(-y+2)i\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(-y+2)^2}=1$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=1$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $I(-1;2)$, bán kính $R=1$.

Câu 46. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho số phức z thảo mãn $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25\Leftrightarrow z.\overline{z}+(z+\overline{z})+(z-\overline{z})3i=15\ (*)$.

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ khi đó $\begin{cases}z.\overline{z}=x^2+y^2\\z+\overline{z}=2x\\z-\overline{z}=2yi\end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=5\end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Cách 2:

Đặt $z_0=-1+3i$ và $R=5$.

Ta có $\left|z-z_0\right|\left|\overline{z}-\overline{z}_0\right|=\left|z-z_0\right|\left|\overline{z-z_0}\right|=\left|z-z_0\right|^2$.

Suy ra $\left|z-z_0\right|\left|\overline{z}-\overline{z}_0\right|=R^2\Leftrightarrow\left|z-z_0\right|^2=R^2\Leftrightarrow\left|z-z_0\right|=R$, với $R>0$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=5\end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Câu 47. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $w=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$.

$w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$

$\Rightarrow x+yi=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2\Leftrightarrow x+yi=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)+1+\sqrt{3}i+2$

$\Leftrightarrow x-3+\left(y-\sqrt{3}\right)i=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)$

$\Rightarrow\left|x-3+\left(y-\sqrt{3}\right)i\right|=\left|\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{3}i\right||z-1|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}=4$

$\Leftrightarrow(x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=16.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$, bán kính bằng $R=4$..

Câu 48. Cho số phức z thoả mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $5\sqrt{17}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z-1|=\left|\overline{z-1}\right|=|\overline{z}-1|=5$.

Khi đó: $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i\Leftrightarrow w=(2+3i)(\overline{z}-1)+3+4i-2-3i\Leftrightarrow w-1-i=(2+3i)(\overline{z}-1)$

$\Leftrightarrow|w-1-i|=|2+3i|.|\overline{z}-1|=5\sqrt{13}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn bán kính $R=5\sqrt{13}$.

Câu 49. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=\sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=5$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$w=(1+2i)z+i\Leftrightarrow w-i=(1+2i)z\Rightarrow|w-i|=|(1+2i)z|$

$\Rightarrow|w-i|=|(1+2i)|.|z|\Rightarrow|w-i|=5$. Gọi $w=x+yi;\ x, y\in\mathbb{R}$.

Khi đó

$|w - i| = 5 \Leftrightarrow |x + yi - i| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 25.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính $r = 5$.

Câu 50. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1-i)(z+1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a + b + R$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đặt $w = a + bi$ với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow a + bi = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow a + (b+1)i = (1-i)z + 1 - i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{a - 1 + (b+2)i}{1-i} = \dfrac{\left[(a-1) + (b+2)i\right](1+i)}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{a - b - 3 + (a+b+1)i}{2}.$

Vì $|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(a-b-3)^2}{4} + \dfrac{(a+b+1)^2}{4}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-b-3)^2 + (a+b+1)^2 = 32$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a + 4b - 11 = 0.$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 4$.

Từ đó suy ra $a = 1, b = -2, R = 4 \Rightarrow a + b + R = 1 + (-2) + 4 = 3$.

Cách 2: Đặt $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w = (1-i)(z+1) - i \Leftrightarrow w + i = (1-i)(z+1) \Leftrightarrow w + i = (1-i)z + 1 - i$

$\Leftrightarrow w - 1 + 2i = (1-i)z.$

Lấy môđun hai vế ta được $|w - 1 + 2i| = |(1-i)z| \Leftrightarrow |x + yi - 1 + 2i| = |1-i||z|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 4$.

Từ đó suy ra $a = 1, b = -2, R = 4 \Rightarrow a + b + R = 1 + (-2) + 4 = 3$.

Câu 51. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \overline{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\overline{z}| = |z| = 3$.

Từ $w = \overline{z} + i \Rightarrow w - i = \overline{z} \Rightarrow |w - i| = |\overline{z}| \Rightarrow |w - i| = 3$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng

Câu 52. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $|z+2|=|z-i| \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 4x+4=-2y+1 \Leftrightarrow 4x+2y+3=0$

Do đó ta chọn đáp án **A.**

Câu 53. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|z+2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z.

A. là đường thẳng $3x+y+1=0$. **B.** là đường thẳng $3x-y+1=0$.

C. là đường thẳng $3x+y-1=0$. **D.** là đường thẳng $3x-y-1=0$.

Lời giải

Giả sử số phức z có dạng: $z=x+yi \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Ta có: $|z-1+i|=|z+2| \Leftrightarrow |x+yi-1+i|=|x+yi+2| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+2)+yi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow 6x-2y+2=0 \Leftrightarrow 3x-y+1=0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $3x-y+1=0$.

Câu 54. Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2+i|=|\bar{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=-x-1$. **D.** $y=x-1$.

Lời giải

$|z+2+i|=|\bar{z}-3i| \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=x^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 4x-4y-4=0 \Leftrightarrow y=x-1$.

Câu 55. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\bar{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z}=x-yi$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có: $|z-1+2i|=|\bar{z}+1+2i| \Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=|x-yi+1+2i|$

$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|$

Nguyễn Bảo Vương

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4 \Leftrightarrow 4x-8y=0 \Leftrightarrow x-2y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0$.

Câu 56. Xét các số phức z thỏa mãn $z\left(\bar{z}-2+i\right)+4i-1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d. Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in R)$.

Khi đó $z\left(\bar{z}-2+i\right)+4i-1=(a+bi)(a-bi-2+i)+4i-1=(a+bi).\left[(a-2)+(1-b)i\right]+4i-1$

$=a(a-2)-b(1-b)+\left[a(1-b)+b(a-2)\right]i+4i-1$

$=a(a-2)-b(1-b)-1+(a-2b+4)i$.

+ $z\left(\bar{z}-2+i\right)+4i-1$ là số thực suy ra $a-2b+4=0$.

+ Số phức z có điểm biểu diễn $M(a;b)\to M\in d: x-2y+4=0$.

+ Đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại $A(-4;0)$ và $B(0;2)\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB=4$.

Câu 57. **(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, với a,b thuộc $\mathbb{R}$. Khi đó, $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z+2|=|z-i| \Leftrightarrow |a+2+bi|=|a+(b-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$

$\Leftrightarrow (a+2)^2+b^2=a^2+(b-1)^2 \Leftrightarrow 4a+2b+3=0 \Leftrightarrow$ điểm $M(a;b)$ thuộc đường thẳng $4x+2y+3=0$

Vậy, tập hợp các điểm M thỏa mãn bài ra là đường thẳng $4x+2y+3=0$.

Câu 58. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1|=|z-2+3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$.

B. Đường thẳng có phương trình $2x-6y+12=0$.

C. Đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

D. Đường thẳng có phương trình $x-5y-6=0$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$; (x, $y\in\mathbb{R}$).

Ta có: $|z-1|=|z-2+3i| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow x-3y-6=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

Câu 59. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$.

A. $d:6x+4y-3=0$. **B.** $d:x+2y-1=0$.

C. $(C):x^2+y^2-2x+2y+1=0$. **D.** $(C):x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} z=x+yi(x,y\in\mathbb{R}) \\ z\neq 2+i \end{cases}$, ta có: $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13 \Leftrightarrow \left|(12-5i)z+17+7i\right|=13\left|z-2-i\right|$

$\Leftrightarrow \left|(12-5i)(z+1+i)\right|=13\left|z-2-i\right| \Leftrightarrow \left|12-5i\right|\left|z+1+i\right|=13\left|z-2-i\right| \Leftrightarrow 13\left|z+1+i\right|=13\left|z-2-i\right|$

$\Leftrightarrow \left|z+1+i\right|=\left|z-2-i\right| \Leftrightarrow \left|x+yi+1+i\right|=\left|x+yi-2-i\right| \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow 6x+4y-3=0$.(thỏa điều kiện $z\neq 2+i$)

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $6x+4y-3=0$.

Câu 60. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2-i-\left|z\right|(1-i)=0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x-y+5=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Lời giải

Ta có $z+2-i-\left|z\right|(1-i)=0 \Leftrightarrow x+yi+2-i-(1-i)\sqrt{x^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+\left(y-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x+y+1=0$.

Do đó M thuộc đường thẳng $x+y+1=0$.

Câu 61. Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2+\left(\bar{z}\right)^2+2\left|z\right|^2\right|=16$ là hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 là bao nhiêu?

A. $d(d_1,d_2)=1$. **B.** $d(d_1,d_2)=6$. **C.** $d(d_1,d_2)=2$. **D.** $d(d_1,d_2)=4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi(x,y\in R)$

Ta có: $\left|z^2+\left(\bar{z}\right)^2+2\left|z\right|^2\right|=16 \Leftrightarrow \left|x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2+2x^2+2y^2\right|=16$

$\Leftrightarrow \left|4x^2\right|=16 \Leftrightarrow x=\pm 2 \Rightarrow d(d_1,d_2)=4$

Ở đây lưu ý hai đường thẳng x = 2 và x = -2 song song với nhau.

Câu 62. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là?

A. Parabol $y^2=4x$. **B.** Đường thẳng $6x+8y-25=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$. **D.** Elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z.

Ta có $\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \overline{z}-3+4i=x-iy-3+4i=\left(x-3\right)\left(-y+4\right)i\end{cases}$.

$\Rightarrow|\overline{z}-3+4i|=\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(-y+4\right)^2}$.

Vậy $|z|=|\overline{z}-3+4i|\Leftrightarrow x^2+y^2=\left(x-3\right)^2+\left(-y+4\right)^2\Leftrightarrow 6x+8y-25=0$.

Câu 63. Cho số phức z thỏa: $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

A. Một đường thẳng có phương trình: $-20x+32y+47=0$.

B. Một đường có phương trình: $3y^2+20x+2y-20=0$.

C. Một đường thẳng có phương trình: $20x+16y+47=0$.

D. Một đường thẳng có phương trình: $20x-16y-47=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Ta có.

$2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$

$\Leftrightarrow 2|\left(x-2\right)+\left(y+3\right)i|=|\left(-1-2x\right)+\left(2y+2\right)i|$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2}=\sqrt{\left(-1-2x\right)^2+\left(2y+2\right)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left(x^2+y^2-4x+6y+13\right)=4x^2+4y^2+4x+8y+5$.

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0$

Vậy tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$ là đường thẳng $20x-16y-47=0$.

Câu 64. **(SGD Hưng Yên 2019)** Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

A. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

B. Trục Ox.

C. Trục Oy.

D. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$, bỏ đi điểm $O\left(0;0\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$. Số phức z được biểu diễn bởi $M\left(x;y\right)$.

Ta có: $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$.

Vì z^2 là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0, tức là $x^2-y^2=0\Leftrightarrow y^2=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\y=-x\end{array}\right.$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

Câu 65. **(SGD Bến Tre 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\overline{z}+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $4x-2y-1=0$. **B.** $4x-6y-1=0$. **C.** $4x+2y-1=0$. **D.** $4x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$.

$\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

$|z-2-i|=|\overline{z}+2i|\Rightarrow|x+yi-2-i|=|x-yi+2i|$

$\Leftrightarrow|x-2+(y-1)i|=|x+(2-y)i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow-4x+4-2y+1=-4y+4\Leftrightarrow4x-2y-1=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $4x-2y-1=0$.

Câu 66. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2+z|=|z-i|$.

Nguyễn Bảo Vương

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$. **B.** Điểm $M(-1;1/2)$.

C. Đường thẳng $2x+y+3=0$. **D.** Đường thẳng $4x+2y-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$, $x,y\in\mathbb{R}$ là điểm biểu diễn số phức z. Suy ra $z=x+iy$.

$|2+z|=|z-i|\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow4x+2y+3=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $4x+2y+3=0$.

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

A. $20x-16y-47=0$. **B.** $20x+6y-47=0$. **C.** $20x+16y+47=0$. **D.** $20x+16y-47=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi,x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

$2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|\Rightarrow2|x+yi-2+3i|=|2i-1-2(x-yi)|$

$\Leftrightarrow 2\left|x-2+(y+3)i\right|=\left|-2x-1+(2y+2)i\right|$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(-2x-1)^2+(2y+2)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left[(x-2)^2+(y+3)^2\right]=(-2x-1)^2+(2y+2)^2$

$\Leftrightarrow -16x+24y+16+36=4x+8y+1+4$

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0$.

Câu 68. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Cho số phức thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x+7y+9=0$. **B.** $x+7y-9=0$. **C.** $x-7y-9=0$. **D.** $x-7y+9=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\omega=(2-i)z+1\Leftrightarrow z=\dfrac{\omega-1}{2-i}$.

Gọi $\omega=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-i|=|z-1+2i|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\omega-1}{2-i}-i\right|=\left|\dfrac{\omega-1}{2-i}-1+2i\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{(x-2)+(y-2)i}{2-i}\right|=\left|\dfrac{(x-1)+(y+5)i}{2-i}\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2}\Leftrightarrow x+7y+9=0.$

Kết luận: Tập hợp điểm biểu diễn số phức ω trên mặt phẳng phức là một đường thẳng có phương trình $x+7y+9=0$.

Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn là đường conic

Câu 69. **(Sở Bình Phước 2019)** Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ là

A. Một điểm **B.** Một đường tròn **C.** Một đường thẳng **D.** Một Parabol

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R})\Rightarrow\bar{z}=x-yi$.

Khi đó $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|\Leftrightarrow 2\left|x+(y-1)i\right|=\left|(2y+2)i\right|$

$\Leftrightarrow 4\left[x^2+(y-1)^2\right]=(2y+2)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-8y+4=4y^2+8y+4$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$ là một Parabol.

Câu 70. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip. **B.** Một đường parabol.
C. Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Xét hai điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$, khi đó theo giả thiết:

$|z+2|+|z-2|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=4$.

Mà $F_1F_2=4$, nên $MF_1+MF_2=F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z chính là đoạn thẳng F_1F_2.

Câu 71. Xét các số phức z thoả mãn $\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là

parabol có toạ độ đỉnh

A. $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in R)$.

Khi đó $\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}=\dfrac{a-1+(b+1)i}{1+2ai}=\dfrac{[a-1+(b+1)i](1-2ai)}{1+4a^2}$

$=\dfrac{a-1+2a(b+1)+[-2a(a-1)+b+1]i}{1+4a^2}$.

$\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực suy ra $-2a(a-1)+b+1=0 \Leftrightarrow b=2a^2-2a-1 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2}=4.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-2.\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Số phức $\dfrac{z}{2}$ có điểm biểu diễn $M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right) \Rightarrow$ quỹ tích M là parabol có phương trình

$y=4x^2-2x-\dfrac{1}{2}$

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là parabol có toạ độ đỉnh $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 72. **(Chuyên KHTN 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-i|=10 \Leftrightarrow |x+2+(y-1)i|+|x-4+(y-1)i|=10.$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$ (*)

Đặt $A(-2;1), B(4;1) \Rightarrow AB=\sqrt{(4+2)^2+0^2}=6.$

Khi đó phương trình (*) trở thành: $MA+MB=10.$

Khi đó tập hợp những điểm M thỏa mãn phương trình (*) là một elip với.

+ Độ dài trục lớn $2a=10 \Rightarrow a=\dfrac{10}{2}=5.$

+ Tiêu cự $2c=AB=6 \Rightarrow c=\dfrac{6}{2}=3.$

+ Độ dài trục bé $2b$ với $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16 \Rightarrow b=4.$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$ là diện tích Elip trên: $S=\pi ab=\pi 4.5=20\pi$.

Câu 73. **(CHUYÊN VINH 2017)** Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z+i|=|2\bar{z}+-z+3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

A. Một đường thẳng. **B.** Một parabol. **C.** Một elip. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn là $M(x,y)$ trên mặt phẳng tọa độ:

Theo đề bài ta có: $3|z+i|=|2\bar{z}-z+3i| \Leftrightarrow |3(x+yi)+3i|=|2(x-yi)-(x+yi)+3i| \Leftrightarrow .$

$|3x+(3y+3)i|=|x+(3-3y)| \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+(3y+3)^2}=\sqrt{x^2+(3-3y)^2} \Leftrightarrow .$

$9x^2+(3y+3)^2=x^2+(3-3y)^2 \Leftrightarrow 8x^2+36y=0 \Rightarrow y=-\dfrac{2}{9}x^2.$

Vậy tập hợp các điểm $M(x,y)$ biểu diễn số phức z theo yêu cầu của đề bài là Một parabol

$y=-\dfrac{2}{9}x^2.$

Câu 74. **(Sở Bình Phước 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

A. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=64$. **B.** $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

C. $(E):\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **D.** $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$.

Ta có $|z+2|+|z-2|=8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=8 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=8.$

Do đó điểm $M(x;y)$ nằm trên elip (E) có $2a=8 \Leftrightarrow a=4$, ta có $F_1F_2=2c \Leftrightarrow 4=2c \Leftrightarrow c=2$.

Ta có $b^2=a^2-c^2=16-4=12$. Vậy tập hợp các điểm M là elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

Câu 75. **(THPT Nguyễn Trãi 2017)** Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ là hình gì?

A. Một đường tròn. **B.** Một đường Parabol.
C. Một đường Elip. **D.** Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B

☑ Đặt $z=x+yi\Rightarrow \bar{z}=x-yi$ điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$. Ta có:

$2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|\Leftrightarrow 2|x+yi-i|=|(x+yi)-(x-yi)+2i|$

$\Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=|2(y+1)i|\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2|y+1|\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol.

Câu 76. **(THPT Hai Bà Trưng- Huế 2017)** Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$..

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=12$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R=4$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$..

Gọi $A(4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=4$..

Gọi $B(-4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-4$..

Khi đó: $|z+4|+|z-4|=10\Leftrightarrow MA+MB=10.(*)$.

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A,B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0,a^2=b^2+c^2)$.

Từ (*) ta có: $2a=10\Leftrightarrow a=5$..

$AB=2c\Leftrightarrow 8=2c\Leftrightarrow c=4\Rightarrow b^2=a^2-c^2=9$.

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 77. **(Chuyên Bến Tre 2017)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn B

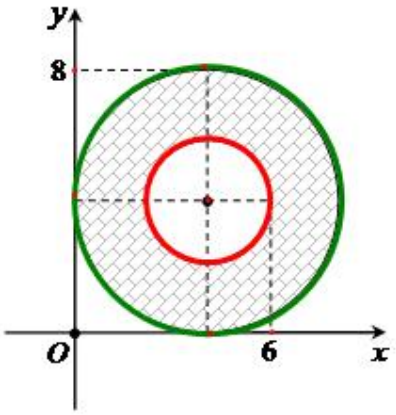
Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$.

Từ giả thiết ta có $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$ với $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn là một miền

Câu 78. Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6\le|z|\le 8$. **B.** $2\le|z+4+4i|\le 4$. **C.** $2\le|z-4-4i|\le 4$. **D.** $4\le|z-4-4i|\le 16$.

Lời giải

Dễ thấy điểm $I(4;4)$ là tâm của hai đường tròn.

Đường tròn nhỏ có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=4$.

Đường tròn to có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn đề bài là $2\le|z-4-4i|\le 4$.

Câu 79. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường Elip.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo bài ra: $|z-(2-3i)|\le 2\Leftrightarrow|x+yi-(2-3i)|\le 2$

$\Leftrightarrow|x-2+(y+3)i|\le 2\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\le 2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2\le 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là hình tròn tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=2$.

Câu 80. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i|\le 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=4$. **B.** Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=2$.

C. Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$. **D.** Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=4$.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi;\ (x;y\in\mathbb{R})$.

$|z+4-4i|\le 2$.

$\Rightarrow |x+yi+4-4i|\le 2$

$\Leftrightarrow |x+4+(y-4)i|\le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}\le 2$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-4)^2\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i|\le 2$ là hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$.

Câu 81. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

A. $S=25\pi$. **B.** $S=8\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Lời giải

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z;

$A(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức $-1+3i$.

Khi đó, $AM=|z-3i+1|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}$

$\Rightarrow 3^2\le(a+1)^2+(b-3)^2\le 25$, tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(A;3)$ và $(A;5)$, kể cả các điểm nằm trên hai đường tròn này.

$S=25\pi-9\pi=16\pi(dvdt)$.

Câu 82. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

A. Cung (IV). **B.** Cung (II). **C.** Cung (III). **D.** Cung (I).

Lời giải

Vì số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I) nên gọi $z=a+bi,(a>0,b>0)$.

$\Rightarrow w=\dfrac{1}{iz}=\dfrac{1}{i(a+bi)}=\dfrac{1}{-b+ai}=\dfrac{-b-ai}{a^2+b^2}=\dfrac{-b}{a^2+b^2}-\dfrac{a}{a^2+b^2}i$

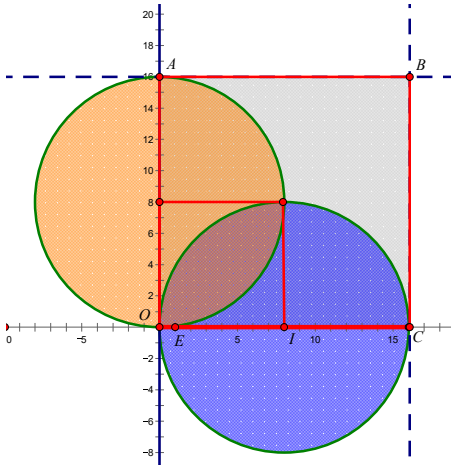
Do $a>0,b>0\Rightarrow \dfrac{-b}{a^2+b^2}<0,-\dfrac{a}{a^2+b^2}<0$.

Vậy điểm biểu diễn w nằm trong cung phần tư thứ (III).

Câu 83. **(Sở Nam Định - 2018)** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H)

A. $S=32(6-\pi)$. **B.** $S=16(4-\pi)$. **C.** $S=256$.. **D.** $S=64\pi$..

Lời giải.



Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R$ khi đó điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$.

$\frac{z}{16}=\frac{x+yi}{16}=\frac{x}{16}+\frac{y}{16}i$ theo giả thiết $\begin{cases}0\le\frac{x}{16}\le 1\\0\le\frac{y}{16}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 16\\0\le y\le 16\end{cases}$ (I)

$\frac{16}{\overline{z}}=\frac{16}{x-yi}=\frac{16(x+yi)}{x^2+y^2}=\frac{16x}{x^2+y^2}+\frac{16y}{x^2+y^2}i$

Theo giả thiết $\begin{cases}0\le\frac{16x}{x^2+y^2}\le 1\\0\le\frac{16y}{x^2+y^2}\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le 16x\le x^2+y^2\\0\le 16y\le x^2+y^2\end{cases}$ S_3

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,y\ge 0\\x^2+y^2-16x\ge 0\\x^2+y^2-16y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,y\le 0\\(x-8)^2+y^2\ge 64\\x^2+(y-8)^2\ge 64\end{cases}$ (II)

Gọi S_1 là diện tích hình vuông OABC có cạnh bằng 16, $S_1=16^2=256$.

S_2 là diện tích hình tròn có bán kính bằng 8.

S_3 là diện tích phần giao của hai nửa đường tròn như hình vẽ.

$S=S_1-S_2+S_3=256-64\pi+2\left(\frac{1}{4}\pi 8^2-\frac{1}{2}8^2\right)$

Vậy $S = 256 - 64\pi + 32\pi - 64 = 32(6 - \pi)$.

Câu 84. **(Sở Yên Bái - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \le |z - 3i + 1| \le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S = 4\pi$. **B.** $S = 25\pi$. **C.** $S = 8\pi$. **D.** $S = 16\pi$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi\ (a; b \in \mathbb{R})$.

Ta có $3 \le |z - 3i + 1| \le 5 \Leftrightarrow 3 \le |a + bi - 3i + 1| \le 5 \Leftrightarrow 9 \le (a-3)^2 + (b+1)^2 \le 25$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn có tâm $I(3; -1)$ bán kính lần lượt là 3 và 5.

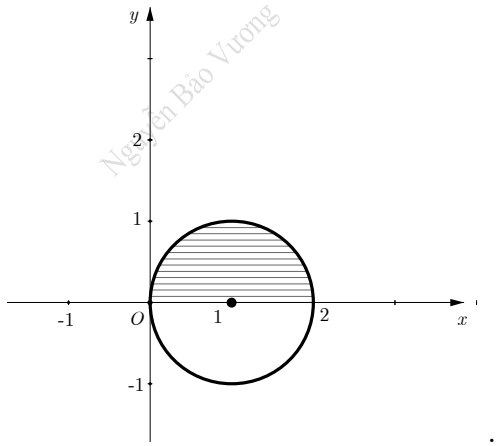
Vì vậy $S = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi$.

Câu 85. **(Sở Hà Tĩnh 2017)** Biết số phức z thỏa mãn $|z - 1| \le 1$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

A. 2π. **B.** π^2. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Lời giải

Chọn C



Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x + yi$ khi đó ta có:

$|z - 1| \le 1 \Leftrightarrow |(x + yi) - 1| \le 1$.

$\Leftrightarrow |(x-1) + yi| \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1\ (1)$.

$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$ có phần ảo không âm suy ra $y \ge 0\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta suy ra phần mặt phẳng biểu diễn số phức z là nửa hình tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $r = 1$, diện tích của nó bằng $\frac{1}{2} \cdot r^2\pi = \frac{\pi}{2}$ (đvdt).

Câu 86. **(Chuyên Võ Nguyên Giáp 2017)** Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho $|2z - \bar{z}| \le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

A. $\frac{3\pi}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** 6π. **D.** 3π.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $\left|2\left(x+yi\right)-\left(x-yi\right)\right|\le 3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9y^2}\le 3\Leftrightarrow x^2+9y^2\le 9\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}\le 1$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền trong của Elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}\le 1$.

Ta có $a=3,\ b=1$, nên diện tích hình H cần tìm bằng $\frac{1}{4}$ diện tích Elip.

Vậy $S=\frac{1}{4}.\pi.a.b=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 87. **(Chuyên Thái Nguyên 2017)** Tập hợp các số phức $w=\left(1+i\right)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $\left|z-1\right|\le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 2π. **B.** π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn A

Gọi $w=x+yi;x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $w=\left(1+i\right)z+1\Leftrightarrow z=\frac{w-1}{1+i}$.

Do đó $\left|z-1\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{w-1}{1+i}-1\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{w-2-i}{1+i}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{\left(x-2\right)+\left(y-1\right)i}{1+i}\right|\le 1$.

$\Leftrightarrow\left|\frac{\left(x-2\right)+\left(y-1\right)i}{1+i}\right|\le 1\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 2$.

Vậy diện tích hình tròn đó là $S=2\pi$.

Câu 88. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi=\frac{z+2\overline{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $\left(2+i\right)\left(z+i\right)=3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON}\right)=2\varphi$, trong đó $\varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ (IV). **B.** Góc phần tư thứ (I).
C. Góc phần tư thứ (II). **D.** Góc phần tư thứ (III).

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2+i\right)\left(z+i\right)=3-i+z\Rightarrow z=1-i\Rightarrow w=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}i\Rightarrow M\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)\Rightarrow\tan\varphi=\frac{1}{5}$.

Lúc đó: $\sin 2\varphi=\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\frac{5}{13}>0;\ \cos 2\varphi=\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\frac{12}{13}>0$.

Câu 89. **(TRẦN HƯNG ĐẠO – NB-2017)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-3+4i\right|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Lời giải

Chọn C

$w=2z+1-i \Rightarrow z=\dfrac{w-1+i}{2}$

$|z-3+4i|\le 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1+i}{2}-3+4i\right|\le 2 \Leftrightarrow |w-1+i-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |w-7+9i|\le 4\ (1)$

Giả sử $w=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $(1)\Leftrightarrow (x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $r=4$.

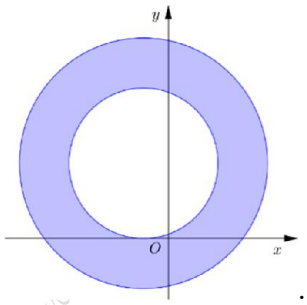
Vậy diện tích cần tìm là $S=\pi.4^2=16\pi$.

Câu 90. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Khánh Hòa – 2017)**Biết số phức z thỏa điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

A. 9π. **B.** 16π. **C.** 25. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn B



Gọi $z=x+yi$.

(với $x,y\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow 3\le|z-3i+1|\le 5 \Leftrightarrow 9\le(x+1)^2+(y-3)^2\le 25$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $R=5$ và $r=3$. Diện tích $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=16\pi$.

Câu 91. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường Parabol. **B.** Một đường Elip. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z+2|+|z-2|=4 \Leftrightarrow |(x+2)+yi|+|(x-2)+yi|=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$

Xét $F_1(-2;0), F_2(2;0) \Rightarrow F_1F_2=4$.

$MF_1+MF_2=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

Suy ra $MF_1+MF_2=F_1F_2 \Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng F_1F_2

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z là một đoạn thẳng F_1F_2.

Câu 92. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=25\pi$ **B.** $S=9\pi$ **C.** $S=12\pi$ **D.** $S=16\pi$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $w=2z+1-i\Leftrightarrow 2z=w-1+i$.

Ta có: $|z-3+4i|\le 2\Leftrightarrow |2z-6+8i|\le 4\Leftrightarrow |w-1+i-6+8i|\le 4\Leftrightarrow |w-7+9i|\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $R=4$.

Do đó diện tích hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính là $S=16\pi$.

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z+\overline{z}|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $4\pi-4$. **B.** $8\pi-8$. **C.** $2\pi-4$. **D.** $8\pi-4$.

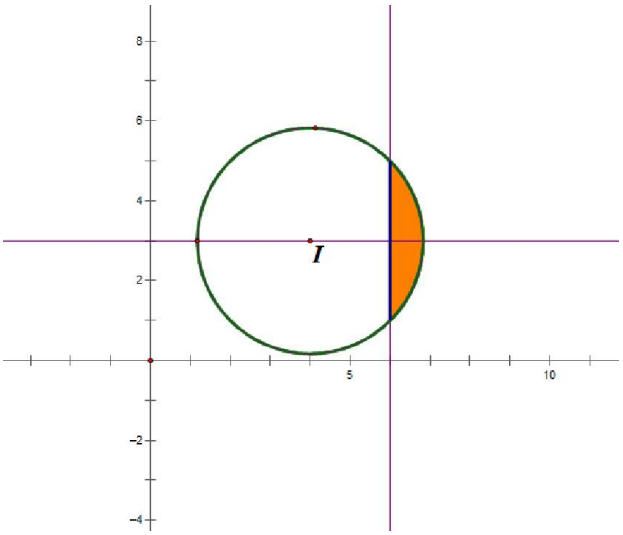
Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$; $(x,y\in\mathbb{R})$; $\Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có $\begin{cases}|z+\overline{z}|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2|x|\ge 12\\ (x-4)^2+(y-3)^2\le 8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\ge 6\\ (x-4)^2+(y-3)^2\le 8\end{cases}(H)$.

(H) là phần tô đậm trong hình vẽ.



Giải hệ : $\begin{cases}y=3\\ (x-4)^2+(y-3)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3\\ x=4\pm 2\sqrt{2}\end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y=3$ cắt đường tròn (C) tại $E(4-2\sqrt{2};3)$ và $F(4+2\sqrt{2};3)$.

Vậy diện tích của hình phẳng (H) là: $2.\int_{6}^{4+2\sqrt{2}}\left(3+\sqrt{8-(x-4)^2}-3\right)dx=2\pi-4$.

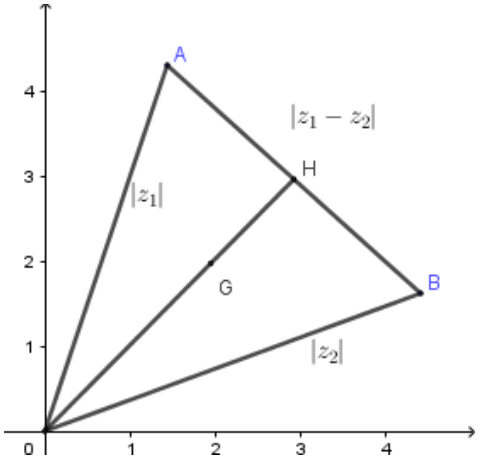
Dạng 5. Một số dạng toán khác

Câu 94. Các điểm A,B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy, G là trọng tâm tam giác OAB, biết $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=12$. Độ dài đoạn OG bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $OA=OB=AB=12\Rightarrow \Delta OAB$ đều.

$\Rightarrow OG=\dfrac{2}{3}AH=4\sqrt{3}$ (do $AH=6\sqrt{3}$ đường cao trong tam giác đều).

Kết luận: $OG=4\sqrt{3}$.

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π . **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi(x;y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-i|=10\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2-2y+1+4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-2y+1+16-8x}=10$.

Đặt $\begin{cases}c=x^2+y^2-2y+1\\ d=4x+4\Rightarrow 16-8x=24-2d\end{cases}$.

Thay vào ta có: $\sqrt{c+d}+\sqrt{c+24-2d}=10\Leftrightarrow 9d^2-400c+56d+5776=0$.

$\Rightarrow 9(4x+4)^2-400(x^2+y^2-2y+1)+56(4x+4)+5776=0\Leftrightarrow 256(x-1)^2+400(y-1)^2=6400$.

Đặt $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y-1\end{cases}$ ta thu được tập hợp số phức z là một Elip có phương trình: $\dfrac{X^2}{25}+\dfrac{Y^2}{16}=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức chính là diện tích của Elip trên. Áp dụng công thức tính diện tích Elip với $a=5, b=4$ ta được: $S=\pi.a.b=20\pi$.

Câu 96. Cho hai điểm *A, B* là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Hỏi ba điểm *O, A, B* tạo thành tam giác gì? (*O* là gốc tọa độ) Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Vuông cân tại *O*. **B.** Vuông tại *O*. **C.** Đều. **D.** Cân tại *O*.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+1=0$.

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2| \Rightarrow OA=OB$.

(1) $\Leftrightarrow (z_1-z_2)^2=-z_1z_2$.

Lấy modul 2 vế: $|z_1-z_2|^2=|-z_1z_2|=|z_1|^2$.

$\Rightarrow AB^2=OA^2 \Rightarrow OA=OB=AB$.

Vậy tam giác OAB là tam giác đều.

Câu 97. **(Sở Kon Tum 2019)** Cho các số phức $z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $2\sqrt{17}$. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

$z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm $A,B,C \Rightarrow A(3;-2), B(1;4), C(-1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(x_1;y_1), \overrightarrow{AC}=(x_2;y_2) \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

$\overrightarrow{AB}=(-2;6), \overrightarrow{AC}=(-4;3)$

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}|(-2).3-(-4).6|=9$.

Câu 98. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ, (3 điểm O,M,N không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây luôn **đúng**?

A. $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$. **B.** $|z_1+z_2|=OI$.

C. $|z_1-z_2|=OM+ON$. **D.** $|z_1+z_2|=2OI$.

Lời giải

Chọn D

Vì M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ và 3 điểm O,M,N không thẳng hàng.

Nên ta có $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{NM}|=NM$ loại đáp án $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$ và $|z_1-z_2|=OM+ON$

Mặt khác $|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}|=|2\overrightarrow{OI}|=2|\overrightarrow{OI}|=2OI$ (theo quy tắc đường trung tuyến của tam giác) loại đáp án $|z_1+z_2|=OI$.

Câu 99. Cho số phức $z=m-2+(m^2-1)i$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết, $z=m-2+(m^2-1)i$ nên: $\begin{cases}x=m-2\\y=m^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x+2\\y=(x+2)^2-1\end{cases}\Rightarrow y=x^2+4x+3$.

$\Rightarrow (C): y=x^2+4x+3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành:

$$S=\int_{-3}^{-1}\left|x^2+4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-3}^{-1}\left(x^2+4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{-1}\right|=\left|-\frac{4}{3}-0\right|=\frac{4}{3}.$$

Vậy $S=\frac{4}{3}$.

Câu 100. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+2i$; $1+\sqrt{3}+i$; $1+\sqrt{3}-i$; $1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diện số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $A(1;2);B(1+\sqrt{3};1);C(1+\sqrt{3};-1);D(1;-2)$

Có $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC};AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$ nên tứ giác $ABCD$ là nửa lục giác đều

Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác là trung điểm của AD và $I(1;0)$ nên biểu diễn số phức là $z=1+0i\Leftrightarrow z=1$, có phần thực là 1

Câu 101. (Chu Văn An - Hà Nội - 2019) Xét hai điểm A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $OA=|z|$, $OB=|(1+3i)z|=\sqrt{10}|z|$, $AB=|z(1+3i-1)|=|3iz|=3|z|$.

Ta thấy $OB^2=AB^2+OA^2=10|z|^2\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại A.

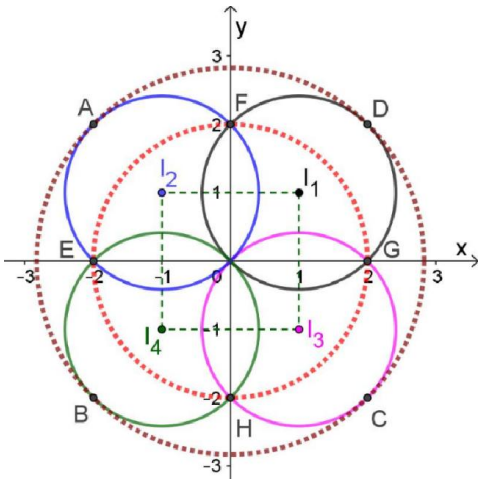
Do đó $S_{OAB}=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB.OA=\frac{1}{2}3|z|.|z|=6\Rightarrow|z|=2.$

Câu 102. (THPT Phan Bội Châu - Nghệ An - 2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$ và $|z|=m$?

A. $\{2;2\sqrt{2}\}$. **B.** $[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $\{2\}$. **D.** $(2;2\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $z=x+yi(x,y\in R)$

$$\begin{cases}|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|\\|z|=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x^2}+\sqrt{4y^2}=x^2+y^2\\\sqrt{x^2+y^2}=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2|x|-2|y|=0(1)\\x^2+y^2-m^2=0(2)\end{cases}$$

Điều kiện (1) cho ta bốn đường tròn:

+ (C_1) có tâm $I_1(1;1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

+ (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{2}$.

+ (C_3) có tâm $I_3(1;-1)$ và bán kính $R_3=\sqrt{2}$.

+ (C_4) có tâm $I_4(-1;-1)$ và bán kính $R_4=\sqrt{2}$.

Điều kiện (2) là đường tròn (C) tâm O và bán kính $R=|m|$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy điều kiện để có đúng 4 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn (C) tiếp xúc với 4 đường tròn (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) tại D, A, B, C **hoặc** đi qua các giao điểm E, F, G, H của bốn đường tròn đó.

Suy ra $m=2\sqrt{2}$ hoặc $m=2$.

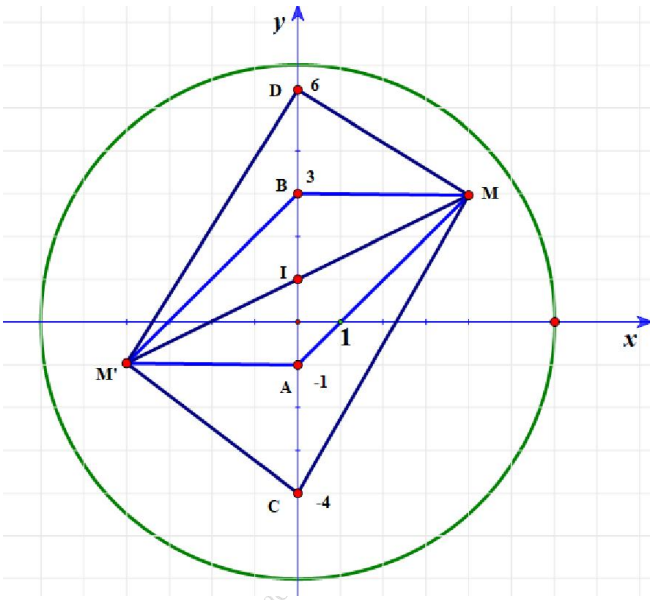
Cách 2: dùng điều kiện trên rồi thử các đáp án.

Câu 103. (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019) Có bao nhiêu số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\le 10$.

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;b)$, $A(0;-1)$, $B(0;3)$, $C(0;-4)$, $D(0;6)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi$, $-i$, $3i$, $-4i$, $6i$.

Trường hợp 1: Xét trường hợp M không thuộc Oy. Gọi I là trung điểm AB khi đó I cũng là trung điểm CD. Do (M, A, B), (M, C, D) không thẳng hàng. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua I.

Theo tính chất hình bình hành ta có $MA+MB=MB+M'B$; $MC+MD=MD+M'D$.

Dễ thấy $MD+M'D>MB+M'B$ vậy trường hợp này không có điểm M thỏa mãn.

Trường hợp 2: Xét trường hợp M thuộc $Oy\Rightarrow M(0;m)$, $(|m|\le 10)$.

$$MA+MB=MC+MD\Leftrightarrow |m+1|+|m-3|=|m+4|+|m-6|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 6 \\ m\le -4 \end{array}\right.$$

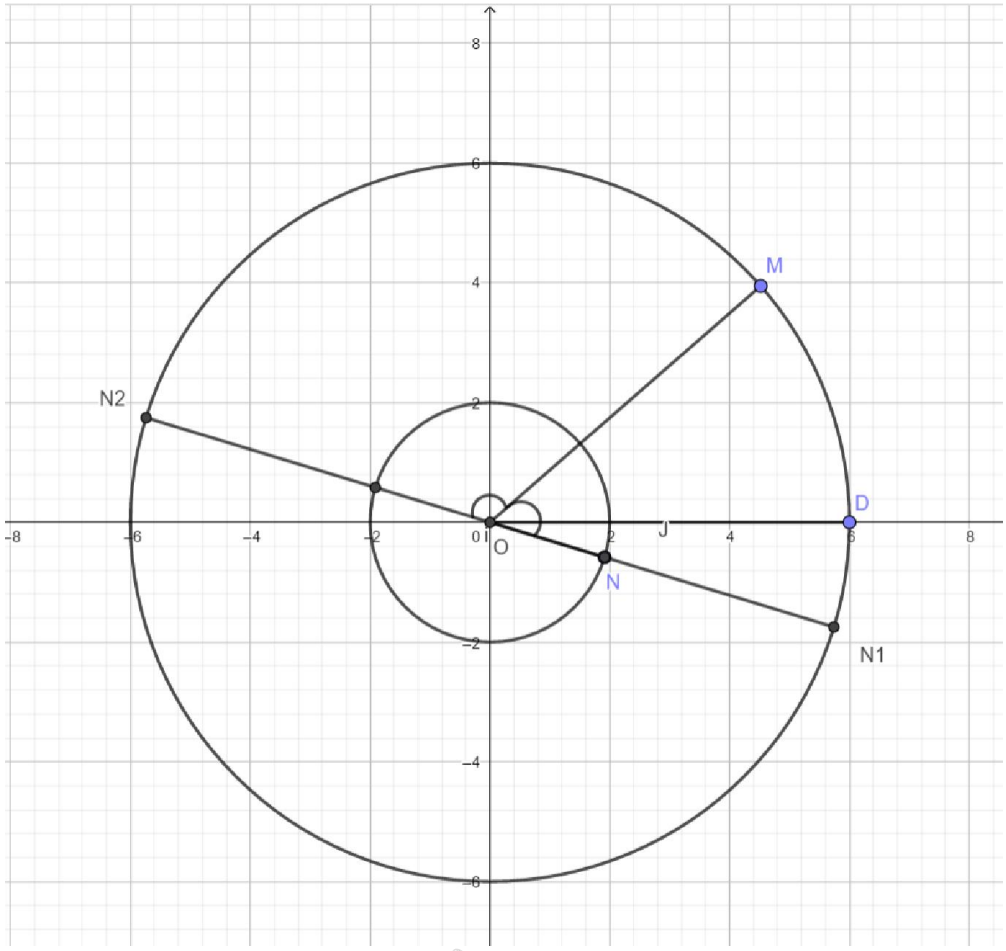
Kết hợp điều kiện $\Rightarrow m\in[-10;-4]\cup[6;10]$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 12 giá trị.

Câu 104. Cho hai số phức $z_1;z_2$ thoả mãn: $|z_1|=6,|z_2|=2$. Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1,iz_2. Biết $\widehat{MON}=60^0$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2+9z_2^2|$ bằng

A. 18. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$|z_1|=6$ nên điểm biểu diễn của số phức z_1 là điểm M nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 6.

$|3iz_2|=|3||iz_2|=6$ nên điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$ là điểm N_1 (N_1 là giao điểm của tia ON với đường tròn (C), N là điểm biểu diễn của số phức iz_2), điểm biểu diễn của số phức $-3iz_2$ là điểm N_2 đối xứng với điểm N_1 qua O.

Theo giả thiết: $\widehat{MON}=60^0 \Rightarrow \widehat{MON_1}=60^0; \widehat{MON_2}=120^0$

Ta có:

$$\left|z_1^2+9z_2^2\right|=\left|z_1^2-(3iz_2)^2\right|=|z_1-3iz_2||z_1+3iz_2|=|z_1-3iz_2||z_1-(-3iz_2)|$$
$$=MN_1.MN_2=6.6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$$

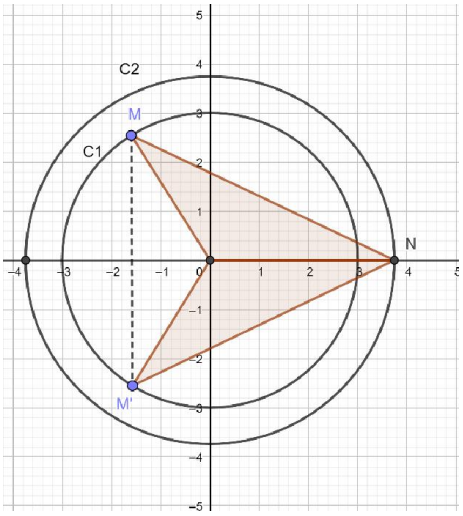
Câu 105. (SP Đồng Nai - 2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3, |z_2|=4, |z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$

A. $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\dfrac{3}{8}$. **D.** $|b|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Giả sử $z_1 = x_1 + y_1 i \leftrightarrow M(x_1; y_1)$ và $z_2 = x_2 + y_2 i \leftrightarrow N(x_2; y_2)$

Theo giả thiết ta có: $OM = 3, ON = 4, MN = \sqrt{37}$

Suy ra: tập hợp các điểm biểu diễn z_1 là đường tròn (C_1) có tâm $O, R_1 = 3$

tập hợp các điểm biểu diễn z_2 là đường tròn (C_2) có tâm $O, R_2 = 4$

Xét tam giác OMN có $\cos\left(\widehat{MON}\right) = \dfrac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2.OM.ON} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MON} = 120^0$ (không đổi)

Suy ra M là ảnh của N qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{\left(O,\frac{3}{4}\right)}$

và phép quay $Q_{(O,120^0)}$ hoặc phép quay $Q_{(O,-120^0)}$

Như vậy ứng với mỗi điểm N ta có 2 điểm M đối xứng nhau qua ON thỏa yêu cầu bài toán

Không mất tính tổng quát của bài toán ta chọn $N(4;0)$ khi đó M, M' đối xứng qua Ox

Vì $\begin{cases} \widehat{MON} = 120^0 \\ \widehat{NOy} = 90^0 \end{cases}$ suy ra $\widehat{yOM} = 30^0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = -OM.\sin 30^0 = -\dfrac{3}{2} \\ y_M = OM.\cos 30^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M'\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Khi đó $z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i, z_2 = 4$ suy ra $z = \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{3}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8} i$

Và $z_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i, z_2 = 4$ suy ra $z = \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8} i$

Vậy $|b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Cách 2

$|z_1| = 3\ (1)$

Ta có: $|z_2| = 4\ (2)$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{37}\ (3)$

Mặt khác $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow z_1 = z.z_2\ (4)$

Thay (4) vào (1) và (3) ta được: $\begin{cases} |z|.|z_2| = 3 \\ |z-1|.|z_2| = \sqrt{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \dfrac{3}{4} \\ |z-1| = \dfrac{\sqrt{37}}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{9}{16} \\ (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{37}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = \dfrac{28}{16} \\ b^2 = \dfrac{9}{16} - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{8} \\ b^2 = \dfrac{27}{64} \end{cases} \Rightarrow |b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 35 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - BẬC CAO SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

— Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

— Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}\ \vee\ z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Lưu ý

— Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

— Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

+ $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

+ Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

Câu 1. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An -2019)** Gọi $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Câu 2. **(SGD và ĐT Đà Nẵng 2019)** Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+5=0$ là:

A. $1+2i$. **B.** $-1+2i$. **C.** $-1-2i$. **D.** $1-2i$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $M(-2;2)$. **B.** $Q(4;-2)$. **C.** $N(4;2)$. **D.** $P(-2;-2)$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$ **D.** $N(-1;-3)$.

Câu 7. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Câu 11. **(Mã104 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=8$ **B.** 4 **C.** $T=\sqrt{2}$ **D.** $T=2$

Câu 12. **(Mã 123 2017)** Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm.

A. $z^2+2z+3=0$ **B.** $z^2-2z+3=0$ **C.** $z^2+2z-3=0$ **D.** $z^2-2z-3=0$

Câu 13. **(Mã 110 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\dfrac{2}{3}$ **B.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $P=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. **(Mã 102 - 2019)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Câu 15. **(Mã 104 - 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+7=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 10.

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2017)** Kí hiệu z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$.

A. $P=2$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=1$

Câu 17. **(Đề Tham Khảo 2019)** Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10 **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 18. **(Mã 105 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+6=0$. Tính $P=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{1}{6}$ **C.** 6 **D.** $\frac{1}{12}$

Câu 19. **(Đề Tham Khảo 2018)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Câu 20. **(Mã 103 - 2019)** Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 26. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 21. **(Mã 101 - 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng:

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Câu 22. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Câu 23. **(Chuyên Sơn La 2019)** Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của $|z_1|.|z_2|$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 20.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 24. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2=-3$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 25. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-8z+25=0$. Giá trị $|z_1-z_2|$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 26. Biết z là số phức có phần ảo âm và là nghiệm của phương trình $z^2-6z+10=0$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $\mathrm{w}=\frac{z}{z}$.

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính

$w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+i\left(z_1{}^2z_2+z_2{}^2z_1\right)$.

A. $w=-\frac{4}{5}+20i$. **B.** $w=\frac{4}{5}+20i$. **C.** $w=4+20i$. **D.** $w=20+\frac{4}{5}i$.

Câu 28. Với các số thực a,b biết phương trình $z^2+8az+64b=0$ có nghiệm phức $z_0=8+16i$. Tính môđun của số phức $\mathrm{w}=a+bi$

A. $|\mathrm{w}|=\sqrt{19}$ **B.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{3}$ **C.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{7}$ **D.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{29}$

Câu 29. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Phương trình $z^2+a.z+b=0$, với a,b là các số thực nhận số phức $1+i$ là một nghiệm.

Tính $a-b$?.

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 30. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+7=0$. Số phức $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_2}.z_1$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $2i$ **D.** $10i$

Câu 31. Gọi $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_2|z_1|$ bằng:

A. 2 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Câu 32. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+29=0$.Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^4+|z_2|^4$.

A. 841. **B.** 1682. **C.** 1282. **D.** 58.

Câu 33. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Kí hiệu $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+2=0$. Tính giá trị biểu thức $T=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{8}{3}$. **C.** $T=\frac{4}{3}$. **D.** $T=-\frac{11}{9}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 35 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - BẬC CAO SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

— Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

— Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}\ \vee\ z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Lưu ý

— Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

— Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

+ $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

+ Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu z_1,z_2,z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. $T=2+2\sqrt{3}$ **B.** $T=4$ **C.** $T=2\sqrt{3}$ **D.** $T=4+2\sqrt{3}$

Câu 2. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tính modun của số phức $w=b+ci$, $b,c\in\mathbb{R}$ biết số phức $\dfrac{i^8-1-2i}{1-i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 3. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

A. Là tam giác đều. **B.** Là tam giác vuông.

C. Là tam giác cân, không đều. **D.** Là tam giác tù.

Câu 4. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho phương trình $az^2+bz+c=0$, với $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực. Tính $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$ theo a,b,c.

A. $P=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$. **B.** $P=\dfrac{2c}{a}$. **C.** $P=\dfrac{4c}{a}$. **D.** $P=\dfrac{2b^2-4ac}{a^2}$.

Câu 5. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh -2019)** Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=7$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\, b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Câu 7. Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 8. **(Sở GD Kon Tum 2019)** Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2-z+1=0$. Giá trị của biểu thức $M=z^{2019}+z^{2018}+\dfrac{1}{z^{2019}}+\dfrac{1}{z^{2018}}+5$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 7. **D.** -1.

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng?

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Câu 10. Cho phương trình $z^2+bz+c=0$, có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 11. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $-\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 12. Số phức $z=a+bi$, $a, b\in\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{z}}=i$. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. 4. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 13. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 14. **(SGD và ĐT Đà Nẵng 2019)** Cho phương trình $x^2-4x+\dfrac{c}{d}=0$ (với phân số $\dfrac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ), tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Câu 15. **(Đề thử nghiệm 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0|=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 35 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - BẬC CAO SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

— Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

— Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}\ \vee\ z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Lưu ý

— Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

— Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

+ $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

+ Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

Câu 1. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An -2019)** Gọi $z_1;\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

$z^2+2z+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-1+3i\\z_2=-1-3i\end{array}\right.$.

Do đó: $A=|z_1|^2+|z_2|^2=|-1+3i|^2+|-1-3i|^2=20$.

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Vậy $P=\dfrac{4}{3}$.

Câu 2. **(SGD và ĐT Đà Nẵng 2019)** Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+5=0$ là:

A. $1+2i$. **B.** $-1+2i$. **C.** $-1-2i$. **D.** $1-2i$.

Lời giải

Chọn A

$z^2-2z+5=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1+2i\\z=1-2i\end{array}\right.$. Vậy nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình là $z=1+2i$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2+6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-3+2i \\ z=-3-2i \end{array}\right.$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình đã cho nên $z_0=-3+2i$.

Từ đó suy ra điểm biểu diễn số phức $1-z_0=4-2i$ là điểm $P(4;-2)$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $M(-2;2)$. **B.** $Q(4;-2)$. **C.** $N(4;2)$. **D.** $P(-2;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-6z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+2i(TM) \\ z=3-2i(L) \end{array}\right.$.

Suy ra $1-z_0=1-(3+2i)=-2-2i$. Điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $P(-2;-2)$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2+4z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2+3i \\ z=-2-3i \end{array}\right.$. Do z_0 có phần ảo dương nên suy ra $z_0=-2+3i$

Khi đó $1-z_0=1-(-2+3i)=3-3i$. Vậy điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $N(3;-3)$

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$ **D.** $N(-1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-4z+13=0 \Leftrightarrow z=2\pm 3i$. Vậy $z_0=2+3i \Rightarrow 1-z_0=-1-3i$.

Điểm biểu diễn của $1-z_0$ trên mặt phẳng tọa độ là: $N(-1;-3)$.

Câu 7. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình $z^2-z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$.

Khi đó: $|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|+\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right|=2\sqrt{3}$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2-z+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \\ z=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$

Không mất tính tổng quát giả sử $z_1=\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ và $z_2=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$

Khi đó $|z_1|+|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z^2+z+3=0\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$. Suy ra $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{3}$

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2-2z+5=0\Leftrightarrow z^2-2z+1=-4\Leftrightarrow(z-1)^2=4i^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z-1=-2i \\ z-1=2 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=1-2i \\ z=1+2i \end{array}\right.$.

Vì z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_0=1-2i\Rightarrow z_0+i=1-2i+i=1-i$.

Suy ra: $|z_0+i|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Câu 11. **(Mã104 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=8$ **B.** 4 **C.** $T=\sqrt{2}$ **D.** $T=2$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z_1=-2i \\ z_2=2i \end{array}\right.$.

Suy ra $M(0;-2); N(0;2)$ nên $T = OM + ON = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{2^2} = 4$.

Câu 12. **(Mã 123 2017)** Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm.

A. $z^2+2z+3=0$ **B.** $z^2-2z+3=0$ **C.** $z^2+2z-3=0$ **D.** $z^2-2z-3=0$

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} z_1+z_2=2 \\ z_1.z_2=3 \end{cases}$, do đó z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$

Câu 13. **(Mã 110 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{2}{3}$ **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $3z^2-z+1=0$ có $\Delta=(-1)^2-4.3.1=-11<0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i; \quad z_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$$

Suy ra

$$P=|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|+\left|\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Câu 14. **(Mã 102 - 2019)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Ta có : $z^2-6z+14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+\sqrt{5}i \\ z=3-\sqrt{5}i \end{array}\right. \Rightarrow z_1^2+z_2^2=\left(3+\sqrt{5}i\right)^2+\left(3-\sqrt{5}i\right)^2=8.$

Câu 15. **(Mã 104 - 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+7=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta'=4-7=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=2+\sqrt{3}i, z_2=2-\sqrt{3}i$.

Suy ra $z_1^2+z_2^2=\left(2+\sqrt{3}i\right)^2+\left(2-\sqrt{3}i\right)^2=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2.$

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2017)** Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$.

A. $P=2$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=1$

Lời giải

Chọn C

Cách 1

$$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

$$P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$$

Cách 2: Theo định lí Vi-et: $z_1+z_2=-1$; $z_1.z_2=1$.

Khi đó $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+z_1z_2=1^2-1=0$.

Câu 17. **(Đề Tham Khảo 2019)** Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10 **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $z^2-3z+5=0$ ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{5} \Rightarrow |z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 18. **(Mã 105 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+6=0$. Tính $P=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{1}{6}$ **C.** 6 **D.** $\frac{1}{12}$

Lời giải

Chọn A

Theo định lí Vi-et, ta có $\begin{cases} z_1+z_2=1 \\ z_1z_2=6 \end{cases}$ nên $P=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1.z_2}=\frac{1}{6}$

Câu 19. **(Đề Tham Khảo 2018)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $4z^2-4z+3=0$ ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = \sqrt{3}$

Câu 20. **(Mã 103 - 2019)** Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 26. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 5 = -1$

Phương trình có 2 nghiệm phức $z_1 = -2 + i, z_2 = -2 - i$

nên $z_1^2 + z_2^2 = (-2+i)^2 + (-2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 + 4 + 4i + i^2 = 8 + 2i^2 = 8 - 2 = 6$

Câu 21. **(Mã 101 - 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng:

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý Viet áp dụng cho phương trình trên ta được: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 6 \\ z_1 z_2 = 10 \end{cases}$.

Khi đó ta có $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 36 - 20 = 16$.

Câu 22. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Lời giải

$z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -1 + 3i \\ z_2 = -1 - 3i \end{array}\right.$.

Do đó: $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = |-1 + 3i|^2 + |-1 - 3i|^2 = 20$.

Câu 23. **(Chuyên Sơn La 2019)** Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1|.|z_2|$ bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + 3i \\ z = -1 - 3i \end{array}\right.$. Vậy $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = -1 - 3i$.

Suy ra $|z_1|.|z_2| = \sqrt{10}.\sqrt{10} = 10$.

Câu 24. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 = -3$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $z^2=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=i\sqrt{3}\\z=-i\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow|z_1|+|z_2|=|i\sqrt{3}|+|-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$.

Câu 25. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-8z+25=0$. Giá trị $|z_1-z_2|$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Phương trình $z^2-8z+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=4-3i\\z_2=4+3i\end{array}\right.$.

Suy ra: $|z_1-z_2|=|-6i|=6$.

Câu 26. Biết z là số phức có phần ảo âm và là nghiệm của phương trình $z^2-6z+10=0$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $\mathrm{w}=\frac{z}{z}$.

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có: $z^2-6z+10=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=3-i\\z=3+i\end{array}\right.$. Vì z là số phức có phần ảo âm nên $\Leftrightarrow z=3-i$

Suy ra $\mathrm{w}=\frac{z}{z}=\frac{3-i}{3+i}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

Tổng phần thực và phần ảo: $\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính

$w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+i\left(z_1^{\,2}z_2+z_2^{\,2}z_1\right)$.

A. $w=-\frac{4}{5}+20i$. **B.** $w=\frac{4}{5}+20i$. **C.** $w=4+20i$. **D.** $w=20+\frac{4}{5}i$.

Lời giải

Theo hệ thức Vi-et, ta có $\left\{\begin{array}{l}z_1+z_2=4\\z_1z_2=5\end{array}\right.$.

Suy ra $w=\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}+i\left(z_1+z_2\right)z_1z_2=\frac{4}{5}+20i$.

Câu 28. Với các số thực a,b biết phương trình $z^2+8az+64b=0$ có nghiệm phức $z_0=8+16i$. Tính môđun của số phức $\mathrm{w}=a+bi$

A. $|\mathrm{w}|=\sqrt{19}$ **B.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{3}$ **C.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{7}$ **D.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{29}$

Lời giải

Chọn D

Theo Viet ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-8a=16 \\ z_1.z_2=64b=64.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$. Vậy $|w|=\sqrt{29}$.

Câu 29. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Phương trình $z^2+a.z+b=0$, với a,b là các số thực nhận số phức $1+i$ là một nghiệm.

Tính $a-b$?.

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Do số phức $1+i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+a.z+b=0$.

Nên ta có: $(1+i)^2+a(1+i)+b=0 \Leftrightarrow a+b+(a+2)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy: $a-b=-4$.

Câu 30. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+7=0$. Số phức $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_2}.z_1$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $2i$ **D.** $10i$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{bmatrix} z_1=-2+\sqrt{3}i \\ z_2=-2-\sqrt{3}i \end{bmatrix} \Rightarrow z_1.\overline{z_2}+\overline{z_2}.z_1=\left(-2+\sqrt{3}i\right)^2+\left(-2-\sqrt{3}i\right)^2=2$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 31. Gọi $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_2|z_1|$ bằng:

A. 2 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Lờigiải

Chọn A

$3z^2-2z+27=0$

$z_1=\dfrac{1+\sqrt{80}i}{3}; z_2=\dfrac{1-\sqrt{80}i}{3}$ vậy $z_1|z_2|+z_2|z_1|=2$

Câu 32. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+29=0$.Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^4+|z_2|^4$.

A. 841. **B.** 1682. **C.** 1282. **D.** 58.

Lời giải

Phương trình $z^2+4z+29=0 \Leftrightarrow (z+2)^2=-25 \Leftrightarrow (z+2)^2=(5i)^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1=-2-5i \\ z_2=-2+5i \end{bmatrix}$.

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Vậy $|z_1|^4+|z_2|^4=\left(\sqrt{29}\right)^4+\left(\sqrt{29}\right)^4=1682$.

Câu 33. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Kí hiệu $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $3z^2-z+1=0\Leftrightarrow z^2-\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=-\frac{11}{36}$

$$\Leftrightarrow\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{11}{36}i^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i\\ z=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\end{array}\right.$$

Khi đó $P=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Theo tính chất phương trình bậc 2 với hệ số thực, ta có $z_1;z_2$ là hai số phức liên hợp nên $z_1.z_2=\left|z_1^2\right|=\left|z_2^2\right|$. Mà $z_1.z_2=\frac{1}{3}$ suy ra $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $P=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+2=0$. Tính giá trị biểu thức $T=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$.

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{8}{3}$. **C.** $T=\frac{4}{3}$. **D.** $T=-\frac{11}{9}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Phương trình $3z^2-z+2=0$ có $\Delta=(-1)^2-4.3.2=-23\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=\frac{1-\sqrt{23}i}{6}\\ z_2=\frac{1+\sqrt{23}i}{6}\end{array}\right.$.

$\left|z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2=\frac{2}{3}\Rightarrow T=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

Chuyên đề 35 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - BẬC CAO SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

— Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

— Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}\ \vee\ z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Lưu ý

— Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

— Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

+ $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

+ Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu z_1,z_2,z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. $T=2+2\sqrt{3}$ **B.** $T=4$ **C.** $T=2\sqrt{3}$ **D.** $T=4+2\sqrt{3}$

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn D

$$z^4-z^2-12=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}z^2=-3\\z^2=4\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}z=\pm i\sqrt{3}\\z=\pm 2\end{bmatrix}$$

$$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=|i\sqrt{3}|+|i\sqrt{3}|+|-2|+|2|=2\sqrt{3}+4$$

Câu 2. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tính modun của số phức $w=b+ci$, $b,c\in\mathbb{R}$ biết số phức $\dfrac{i^8-1-2i}{1-i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

+) Đặt $z_o=\dfrac{i^8-1-2i}{1-i^7}$, ta có $\begin{cases}i^8=(i^2)^4=(-1)^4=1\\i^7=(i^2)^3.i=-i\end{cases}$

$$\Rightarrow z_o=\frac{1-1-2i}{1+i}=\frac{-2i}{1+i}=\frac{-2i(1-i)}{1-i^2}=-1-i.$$

+) z_o là nghiệm của đa thức $P(z)=z^2+bz+c\Rightarrow\overline{z}_o$ là nghiệm còn lại của $P(z)$.

+) Ta có: $z_o+\overline{z}_o=-\dfrac{b}{a}=-b=-2\Rightarrow b=2$.

$z_o.\overline{z}_o = \dfrac{c}{a} \Rightarrow (-1-i)(-1+i) = c \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow w = 2+2i \Rightarrow |w| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$.

Câu 3. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

A. Là tam giác đều. **B.** Là tam giác vuông.

C. Là tam giác cân, không đều. **D.** Là tam giác tù.

Lời giải

Cách 1:

+ Gọi $z_1 = a+bi \quad (a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \neq 0)$. $A(a;b)$.

Khi đó z_2 là nghiệm phương trình: $z_2^2 - (a+bi)z_2 + (a+bi)^2 = 0$

+ Ta có: $\Delta = (a+bi)^2 - 4(a+bi)^2 = -3(a+bi)^2 = \left[\sqrt{3}(a+bi)i\right]^2 = \left[\sqrt{3}(-b+ai)\right]^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$z_2 = \dfrac{a-\sqrt{3}b}{2} + \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}i$ nên $B\left(\dfrac{a-\sqrt{3}b}{2}; \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$.

Hoặc $z_2 = \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} + \dfrac{-\sqrt{3}a+b}{2}i$ nên $B\left(\dfrac{a+\sqrt{3}b}{2}; \dfrac{-\sqrt{3}a+b}{2}\right)$.

+ Tính $OA^2 = a^2 + b^2$, $OB^2 = a^2 + b^2$, $AB^2 = a^2 + b^2$. Vậy tam giác OAB đều.

Cách 2:

Theo giả thiết: $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0 \Rightarrow (z_1 + z_2)(z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2) = 0$

$\Leftrightarrow {z_1}^3 + {z^3}_2 = 0 \Leftrightarrow {z_1}^3 = -{z_2}^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \rightarrow OA = OB$.

Mặt khác: $z_2^1 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2$

$\Rightarrow \left|(z_1 - z_2)^2\right| = |-z_1 z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1||z_2| \Rightarrow AB^2 = OA.OB$.

Mà $OA = OB$ nên $AB = OA = OB$.

Vậy tam giác OAB đều.

Cách 3:

+ $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 - \dfrac{z_1}{z_2} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 - \dfrac{z_1}{z_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

Vậy $OA = OB$.

Mặt khác: $|z_1 - z_2| = \left|\dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} z_2 - z_2\right| = |z_2| \Rightarrow AB = OB$

Vậy tam giác OAB đều.

Câu 4. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho phương trình $az^2 + bz + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ có các nghiệm z_1, z_2 đều không là số thực. Tính $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ theo a, b, c.

A. $P=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$. **B.** $P=\dfrac{2c}{a}$. **C.** $P=\dfrac{4c}{a}$. **D.** $P=\dfrac{2b^2-4ac}{a^2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận.

Ta có phương trình $az^2+bz+c=0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực, do đó $\Delta=b^2-4ac<0$. Ta có $\Delta=i^2\left(4ac-b^2\right)$.

$$* \begin{cases} z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \\ z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} \left|z_1+z_2\right|^2=\dfrac{b^2}{a^2} \\ \left|z_1-z_2\right|^2=\dfrac{4ac-b^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow P=\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\dfrac{4c}{a}$. Vậy $P=\dfrac{4c}{a}$.

Cách 2: Trắc nghệm.

Cho $a=1,b=0,c=1$, ta có phương trình $z^2+1=0$ có 2 nghệm phức là $z_1=i,z_2=-i$. Khi đó $P=\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=4$.

Thế $a=1,b=0,c=1$ lên các đáp án, ta thấy chỉ có đáp án C cho kết quả giống.

Câu 5. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh -2019)** Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2-2z+1-m=0\Leftrightarrow(z-1)^2=m\ \ (1)$

+) Với $m\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{m}$. Do $|z|=2\Leftrightarrow\left|1\pm\sqrt{m}\right|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=9 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

+) Với $m<0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{-m}$.

Do $|z|=2\Leftrightarrow\left|1\pm i\sqrt{-m}\right|=2\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Vậy $S=1+9-3=7$.

Câu 6. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Ta có $z+1+3i-|z|i=0\Leftrightarrow(a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \end{cases}\quad (*).$$

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge -3\\ 1+b^2=(b+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge -3\\ b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow b=-\dfrac{4}{3}.$

Vậy $\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow S=2a+3b=-6.$

Câu 7. Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

$9z^2+6z+1-m=0\ (*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow 9-9(1-m)\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$.

$|z|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-1\end{array}\right.$.

- $z=1\Rightarrow m=16$ (thỏa mãn).
- $z=-1\Rightarrow m=4$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi(b\ne 0)\Leftrightarrow \Delta'<0\Leftrightarrow 9-9(1-m)<0\Leftrightarrow m<1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\bar{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=1\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow z.\bar{z}=1\Leftrightarrow \dfrac{c}{a}=1\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{9}=1\Leftrightarrow m=-8$ (thỏa mãn).

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Câu 8. **(Sở GD Kon Tum 2019)** Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2-z+1=0$. Giá trị của biểu thức $M=z^{2019}+z^{2018}+\dfrac{1}{z^{2019}}+\dfrac{1}{z^{2018}}+5$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 7. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2-z+1=0$ có hai nghiệm $z=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Áp dụng công thức *Moivre*: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\ \forall n\in\mathbb{N}$, ta được:

$z^{2019}=\cos\dfrac{2019\pi}{3}+i\sin\dfrac{2019\pi}{3}=-1\Rightarrow\dfrac{1}{z^{2019}}=-1$.

$z^{2018}=\cos\dfrac{2018\pi}{3}+i\sin\dfrac{2018\pi}{3}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{z^{2018}}=\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Do đó, $M=-1-1+\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}+\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}+5=2$.

Vậy $M=2$.

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng?

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=2-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z-1=1+i \\ z-1=1-i \end{array}\right.$.

Mà $i^2=-1; i^4=1; (1+i)^2=2i; (1+i)^4=-4; (1-i)^2=-2i; (1-i)^4=-4;$

Suy ra $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}=\left((1-i)^4\right)^{504}.(1-i)^2(1-i)+\left((1+i)^2\right)^{504}.(1+i)^2.(1+i)$

$=(-4)^{504}.(-2i).(1-i)+(-4)^{504}.(2i).(1+i)=4^{504}.2i.(-1+i+1+i)=4^{504}.2i.2i=-2^{1010}$.

Câu 10. Cho phương trình $z^2+bz+c=0$, có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải:

Chọn C

$z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$

Xét $z_2-z_1=4+2i \Rightarrow (z_2+z_1)^2-4z_1z_2=(4+2i)^2 \Rightarrow b^2-4c=(4+2i)^2$

Khi đó phương trình $z^2-2bz+4c=0$

có $\Delta'=b^2-4c=(4+2i)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_A=b-4-2i \Rightarrow A(b-4;-2) \\ z_B=b+4+2i \Rightarrow B(b+4;2) \end{array}\right. (b=m+ni, m, n\in\mathbb{R})$

Vậy $AB=\sqrt{(b+4-b+4)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$.

Câu 11. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $-\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w=x+yi$ $(x, y\in\mathbb{R})$. Vì $a, b\in\mathbb{R}$ và phương trình $z^2+az+b=0$ có hai nghiệm là $z_1=w+i$, $z_2=2w-1$ nên $z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow w+i=\overline{2w-1} \Leftrightarrow x+yi+i=\overline{2(x+yi)-1}$

$\Leftrightarrow x+(y+1)i=(2x-1)-2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-1 \\ y+1=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$.

$\Rightarrow w=1-\frac{1}{3}i \Rightarrow \begin{cases} z_1=w+i=1+\frac{2}{3}i \\ z_2=2w-1=1-\frac{2}{3}i \end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_2.z_2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=-a \\ 1+\frac{4}{9}=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=\frac{13}{9} \end{cases}$.

Vậy $S=a+b=-\frac{5}{9}$.

Câu 12. Số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{\bar{z}}}=i$. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. 4. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $z\neq 0; z\neq 1$.

Ta có $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{\bar{z}}}=i \Leftrightarrow (|z|-1)(\bar{z}+i|z|^2)=(|z|^2-1)i$

$\Leftrightarrow \bar{z}+i|z|^2=(|z|+1)i \Leftrightarrow \bar{z}=(-|z|^2+|z|+1)i$

$\Leftrightarrow |\bar{z}|=\pm(-|z|^2+|z|+1) \Leftrightarrow |z|^2=1$ hoặc $|z|^2-2|z|-1=0 \Leftrightarrow |z|=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2=3+2\sqrt{2}$.

Vậy $T=a^2+b^2=3+2\sqrt{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$ và $\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\frac{z}{w}\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{6}{z+w} \Leftrightarrow \frac{w+3z}{zw}=\frac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w)=6zw \Leftrightarrow 3z^2-2zw+w^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2-2\frac{z}{w}+1=0 \Leftrightarrow \frac{z}{w}=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i \Rightarrow \left|\frac{z}{w}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 14. **(SGD và ĐT Đà Nẵng 2019)** Cho phương trình $x^2-4x+\frac{c}{d}=0$ (với phân số $\frac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ), tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2-4x+\frac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức $\Leftrightarrow \Delta'=4-\frac{c}{d}<0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $x_1 = 2+\sqrt{|\Delta'|}\,i$; $x_2 = 2-\sqrt{|\Delta'|}\,i$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của x_1; x_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:

$A\left(2;\sqrt{|\Delta'|}\right)$; $B\left(2;-\sqrt{|\Delta'|}\right)$.

Ta có: $AB = 2\sqrt{|\Delta'|}$; $OA = OB = \sqrt{4+|\Delta'|}$.

Tam giác OAB đều khi và chỉ khi $AB = OA = OB \Leftrightarrow 2\sqrt{|\Delta'|} = \sqrt{4+|\Delta'|} \Leftrightarrow 4|\Delta'| = 4+|\Delta'|$

$\Leftrightarrow |\Delta'| = \frac{4}{3}$. Vì $\Delta' < 0$ nên $\Delta' = -\frac{4}{3}$ hay $4-\frac{c}{d} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{16}{3}$.

Từ đó ta có $c = 16$; $d = 3$.

Vậy: $P = c+2d = 22$.

Câu 15. **(Đề thử nghiệm 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. **B.** $|z| > 2$. **C.** $|z| < \frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chon D

Ta có $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

Vậy $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$

$\Leftrightarrow (|z|+2)+(2|z|-1)i = \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\overline{z} \Rightarrow \left|(|z|+2)+(2|z|-1)i\right| = \left|\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\overline{z}\right|$

$\Rightarrow (|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2 = \left(\frac{10}{|z|^4}\right).|z|^2 = \frac{10}{|z|^2}$. Đặt $|z| = a > 0$.

$\Rightarrow (a+2)^2 + (2a-1)^2 = \left(\frac{10}{a^2}\right) \Leftrightarrow a^4 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow a = 1 \Rightarrow |z| = 1.$

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = 3-4(a^2-2a) = 3-4a^2+8a$.

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức khi và chỉ khi

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 3-4a^2+8a < 0 \Leftrightarrow 4a^2-8a-3 > 0 \quad (*)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và $|z_1| = |z_2|$.

Ta có

$$z_1.z_2 = a^2 - 2a \Rightarrow |z_1.z_2| = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow |z_1|.|z_2| = |a^2 - 2a| \Rightarrow |z_0|^2 = |a^2 - 2a|.$$

Theo giả thiết có $\left(\sqrt{3}\right)^2 = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2a = 3 \\ a^2 - 2a = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$ (t/m ĐK(*)).

Các giá trị của a thỏa mãn điều kiện $(*)$. Vậy có 1 giá trị dương a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 36 CỰC TRỊ SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Một số tính chất cần nhớ.

1. Môđun của số phức:

- Số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$
- Tính chất

- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}=|\overrightarrow{OM}|$
- $|z|\geq 0, \forall z\in\mathbb{C}, |z|=0\Leftrightarrow z=0$
- $|z.z'|=|z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}, (z'\neq 0)$
- $||z|-|z'||\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$
- $|kz|=|k|.|z|, k\in\mathbb{R}$

★ Chú ý: $|z^2|=|a^2-b^2+2abi|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=a^2+b^2=|z|^2=|\bar{z}|^2=z.\bar{z}$.

Lưu ý:

- $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\geq 0)$
- $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\leq 0)$.
- $|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\leq 0)$
- $|z_1-z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\geq 0)$
- $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$
- $|z|^2=|\bar{z}||z|=|\bar{z}|^2 \qquad \forall z\in\mathbb{C}$

Nguyễn Bảo Vương

2.Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x, y	**Quỹ tích điểm M**
$ax+by+c=0$ (1) $\|z-a-bi\|=\|z-c-di\|$ (2)	(1)Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $(A(a,b), B(c,d))$
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|=R$	Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|\leq R$	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$r^2\leq(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ hoặc $r\leq\|z-a-bi\|\leq R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồn tâm $I(a;b)$, bán kính lần lượt là r, R
$\left[\begin{array}{l} y=ax^2+bx+c \\ x=ay^2+by+c \end{array}\right. (c\neq 0)$	Parabol
$\frac{(x+a)^2}{b^2}+\frac{(y+c)^2}{d^2}=1$ (1) hoặc $\|z-a_1-b_1i\|+\|z-a_2-b_2i\|=2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a>AB$, $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2)$ Đoạn AB nếu $2a=AB$
$\frac{(x+a)^2}{b^2}-\frac{(y+c)^2}{d^2}=1$	Hypebol

Một số dạng đặc biệt cần lưu ý:

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-a-bi|=|z|$, tìm $|z|_{Min}$. Khi đó ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a;b)$
- ✓ $\begin{cases} |z|_{Min}=\dfrac{1}{2}|z_0|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \\ z=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}i \end{cases}$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=|z-c-di|$. Tìm $|z|_{\min}$. Ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a;b),B(c;d)$
- ✓ $|z|_{Min}=d(O,AB)=\dfrac{\left|a^2+b^2-c^2-d^2\right|}{2\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

- ✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|\bar{z}-a-bi|=|z-c-di|\Leftrightarrow|z-a+bi|=|z-c-di|.$$

- ✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|iz-a-bi|=|iz-c-di|\Leftrightarrow\left|z+\frac{-a-bi}{i}\right|=\left|z+\frac{-c-di}{i}\right|\Leftrightarrow|z+b+ai|=|z+d+ci|.$$

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=R>0\left(|z-z_0|=R\right)$. Tìm $|z|_{Max},|z|_{Min}$. Ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R
- ✓ $\begin{cases} |z|_{Max}=OI+R=\sqrt{a^2+b^2}+R=|z_0|+R \\ |z|_{Min}=|OI-R|=\left|\sqrt{a^2+b^2}-R\right|=\left||z_0|-R\right| \end{cases}$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=R\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\dfrac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$)

$$\Leftrightarrow|z+b+ai|=R$$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}-a-bi|=R\Leftrightarrow|z-a+bi|=R$ (Lấy liên hợp 2 vế)

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$$|(c+di)z-a-bi|=R\Leftrightarrow\left|z+\frac{-a-bi}{c+di}\right|=\frac{R}{|c+di|}=\frac{R}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

Hay viết gọn $|z_0z-z_1|=R\Leftrightarrow\left|z-\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\dfrac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)

Dạng 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-c|+|z+c|=2a,(a>c)$ Khi đó ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

✓ $\begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$

TQ2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $|z-z_1|+|z-z_2|=2a, (|z_1-z_2|<2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$). Tìm Max, Min của $P=|z-z_0|$. Đặt $\begin{cases} |z_1-z_2|=2c \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$	
Nếu $\left|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| = 0$	$\begin{cases} P_{Max} = a \\ P_{Min} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)
Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\begin{cases} P_{Max} = \left|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| + a \\ P_{Min} = \left|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| - a \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$P_{Max} = \left|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| + a$
Nếu $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$	$P_{Min} = \left\|z_0 - \dfrac{z_1+z_2}{2}\right| - b\right\|$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z = a + bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 8$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 4$ **D.** $P = 6$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **C.** $P = \dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$ **D.** $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

Câu 3. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1| = \sqrt{34}, |z+1+mi| = |z+m+2i|$ (trong đó m là số thực) và sao cho $|z_1 - z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i| = 1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Câu 5. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Câu 6. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

Câu 7. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Câu 8. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left(4;3\sqrt{3}\right)$.

Câu 9. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Câu 10. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $4+\sqrt{74}$. **B.** $2+\sqrt{130}$. **C.** $4+\sqrt{130}$. **D.** $16+\sqrt{74}$.

Câu 11. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\dfrac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 12. Biết số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $-\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Câu 13. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

Câu 14. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left[4;3\sqrt{3}\right)$.

Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z-1+i\right|=\left|\overline{z}+1-2i\right|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|\frac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1;\left|\frac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1-z_2\right|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 17. **(Sở Bình Phước 2019)** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|=\sqrt{34}$ và $\left|z+1+mi\right|=\left|z+m+2i\right|$, (trong đó $m\in\mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $\left|z_1-z_2\right|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $\left|z_1+z_2\right|$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Câu 18. Cho hai số phức z,w thỏa mãn $\left|z-3\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$, $\left|w-4\sqrt{2}i\right|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $\left|z-w\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $\left|3z_0-w_0\right|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 19. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $\left|z-w\right|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z\right|+\left|w\right|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 20. Cho số phức z thoả mãn $\left|z\right|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+1\right|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 21. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hai số phức z và $\omega=a+bi$ thỏa mãn $\left|z+\sqrt{5}\right|+\left|z-\sqrt{5}\right|=6$; $5a-4b-20=0$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z-\omega\right|$ là

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{41}}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{41}}$. **D.** $\frac{3}{41}$.

Câu 22. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Gọi $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ là số phức thỏa mãn điều kiện $\left|z-1-2i\right|+\left|z+2-3i\right|=\sqrt{10}$ và

có mô đun nhỏ nhất. Tính $S=7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Câu 23. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+2\left|z-\overline{z}\right|=8$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-3-3i\right|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Câu 24. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{11}{4}$

Câu 25. **(Chuyên Đại Học Vinh -2019)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Câu 26. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10 **B.** $-4-3\sqrt{5}$ **C.** -5 **D.** $-6-2\sqrt{5}$

Câu 27. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 29. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng

A. 15. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 30. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 31. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Câu 32. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Câu 33. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=\sqrt{2}-1$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

Câu 34. **(SGD Bắc Giang - 2018)** Hcho hai số phức z,w thỏa mãn $\begin{cases}|z-3-2i|\le 1\\ |\mathrm{w}+1+2i|\le|\mathrm{w}-2-i|\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=|z-\mathrm{w}|$.

A. $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $P_{\min}=\sqrt{2}+1$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 35. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Cho số phức z thỏa $|z|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^5+\bar{z}^3+6z|-2|z^4+1|$. Tính $M-m$.

A. $m=-4$, $n=3$. **B.** $m=4$, $n=3$ **C.** $m=-4$, $n=4$. **D.** $m=4$, $n=-4$.

Câu 36. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+\mathrm{i}|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 37. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Câu 38. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4\mathrm{i}|=1$ và $|z_2-3-4\mathrm{i}|=\dfrac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên - 2019)** Trong các số phức thỏa mãn: $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{10}$.

Câu 40. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất của $P=|z^5+\bar{z}^3+6z|-2|z^4+1|$. Tính $M-m$.

A. $M-m=1$. **B.** $M-m=7$. **C.** $M-m=6$. **D.** $M-m=3$.

Câu 41. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 42. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Câu 43. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn : $|\bar{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 44. **(SGD Bến Tre 2019)** Cho các số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt gí trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Câu 45. **(SGD Cần Thơ 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 46. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z-(2+i)\bar{z}=2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 47. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Số phức z có môđun nhỏ nhất thoả mãn $|-2-3i+\bar{z}|=|z-i|$ là

A. $\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$. **B.** $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$. **C.** $\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$. **D.** $\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i$.

Câu 48. **(Sở GD Nam Định - 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 49. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\frac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

Câu 50. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$. **B.** $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=\sqrt{2}$.

C. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$. **D.** $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=\sqrt{3}$.

Câu 51. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

Câu 52. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz+2i+4|=3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

A. 9. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 53. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 54. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa –2019)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1-i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a+b-5|$ là

A. $3-\sqrt{2}$. **B.** $2-\sqrt{2}$. **C.** $3-2\sqrt{2}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Câu 55. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ (a, $b\in\mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|$.

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** 7.

Câu 56. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ (khi a thay đổi) là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức a^2-b^2 bằng

A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 58. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-3+\sqrt{3}i|=2$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Câu 59. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Câu 60. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019)**Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 61. **(SGD Đà Nẵng 2119)** Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z-2-8i|=\sqrt{17}$. Biết $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$, tính $m=2a^2-3b$

A. $m=-18$. **B.** $m=54$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=14$.

Câu 62. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Xét các số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z+2-3i\right|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $\left|z+1+6i\right|+\left|z-7-2i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Câu 63. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z+2+i\right|+\sqrt{6}\left|z-2-3i\right|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}\left(1+\sqrt{6}\right)$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Câu 64. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z+1-i\right|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|$ bằng $a\sqrt{b}$ (với a,b là các số nguyên tố). Tính $S=a+b$?

A. 20. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 17.

Câu 65. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $\left|6-3i+iz\right|=\left|2z-6-9i\right|$ và thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=\frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1+z_2\right|$ bằng

A. $\frac{56}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 66. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)\left|z\right|=\frac{z}{w-1}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T=\left|w+i\right|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 67. Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-\sqrt{2}\right|+\left|z+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+2\sqrt{3}+i\right|+\left|z-3\sqrt{3}+2i\right|+\left|z-3i\right|$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 68. Cho số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|z\right|^2+3y^2=16$. Biểu thức $P=\left|\left|z-i\right|-\left|z-2\right|\right|$ đạt giá trị lớn nhất tại $\left(x_0;y_0\right)$ với $x_0<0,y_0>0$. Khi đó: $x_0^2+y_0^2$ bằng

A. $\frac{20-3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{20+3\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{20+3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{20-3\sqrt{7}}{2}$.

Câu 69. Cho số phức $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z+4\right|+\left|z-4\right|=10$ và $\left|z-6\right|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$.

A. $S=11$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Câu 70. Cho số phức $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa $\left|z+4\right|+\left|z-4\right|=10$ và $\left|z-6\right|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$?

A. $S=-3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=11$.

Câu 71. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$, M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left|1+z\right|+2\left|1-z\right|$. Giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{5}+2$. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{5}+4$. **D.** 7.

Câu 72. Xét tập hợp S các số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn điều kiện $\left|3z-\bar{z}\right|=\left|(1+i)(2+2i)\right|$. Biểu thức $Q=\left|z-\bar{z}\right|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0=x_0+y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T=M.x_0y_0^2$.

A. $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 73. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Câu 74. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1+2-i\right|+\left|z_1-4-7i\right|=6\sqrt{2}$ và $\left|iz_2-1+2i\right|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|z_1+z_2\right|$.

A. $2\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}+1$.

Câu 75. **(Trường Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức z,z_1,z_2 thỏa mãn $\left|z_1-4-5i\right|=\left|z_2-1\right|=1$ và $\left|\bar{z}+4i\right|=\left|z-8+4i\right|$. Tính $\left|z_1-z_2\right|$ khi $P=\left|z-z_1\right|+\left|z-z_2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8 **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 76. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)\left|z\right|=\dfrac{z}{\omega}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=\left|\omega+1-i\right|$

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 77. Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$ (z_1 có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-z_1\right|+\left|z_2-z\right|+\left|\bar{z}+2z_1+\dfrac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$ (trong đó $n,p\in\mathbb{N}$; m, q là các số nguyên tố). Tổng $m+n-p-q$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2\left|z\right|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 79. **(Sở Nam Định - 2019)** Xét các số phức w, z thỏa mãn $\left|\mathrm{w}+i\right|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z-2i\right|+\left|z-6-2i\right|$.

A. 7. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $2\sqrt{58}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 80. Cho hai số phức $z_1;z_2$ đều khác 1 và -1 sao cho $z_1^{44}=z_2^{58}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left|z_1-z_2\right|$ gần nhất với giá trị nào sau đây.

A. $\dfrac{11}{100}$. **B.** $\dfrac{7}{205}$. **C.** $\dfrac{7}{200}$. **D.** $\dfrac{1}{200}$.

Câu 81. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $3|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|\le 12$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 36 CỰC TRỊ SỐ PHỨC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Một số tính chất cần nhớ.

1. Môđun của số phức:

▪ Số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của vécto $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

▪ Tính chất

- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}=|\overrightarrow{OM}|$
- $|z|\geq 0, \forall z\in\mathbb{C}, |z|=0\Leftrightarrow z=0$
- $|z.z'|=|z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|},(z'\neq 0)$
- $||z|-|z'||\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$
- $|kz|=|k|.|z|, k\in\mathbb{R}$

★ Chú ý: $|z^2|=|a^2-b^2+2abi|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=a^2+b^2=|z|^2=|\bar{z}|^2=z.\bar{z}$.

Lưu ý:

- $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2(k\geq 0)$
- $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2(k\leq 0)$.
- $|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2(k\leq 0)$
- $|z_1-z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2(k\geq 0)$
- $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$
- $|z|^2=|\bar{z}||z|=|\bar{z}|^2 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

Nguyễn Bảo Vương

2.Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x,y	**Quỹ tích điểm M**
$ax+by+c=0$ (1) $\|z-a-bi\|=\|z-c-di\|$ (2)	(1)Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $(A(a,b),B(c,d))$
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|=R$	Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|\leq R$	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$r^2\leq(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ hoặc $r\leq\|z-a-bi\|\leq R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồn tâm $I(a;b)$, bán kính lần lượt là r,R
$\left[\begin{array}{l}y=ax^2+bx+c\\x=ay^2+by+c\end{array}\right.(c\neq 0)$	Parabol
$\frac{(x+a)^2}{b^2}+\frac{(y+c)^2}{d^2}=1(1)$ hoặc $\|z-a_1-b_1i\|+\|z-a_2-b_2i\|=2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a>AB$, $A(a_1,b_1),B(a_2,b_2)$ Đoạn AB nếu $2a=AB$
$\frac{(x+a)^2}{b^2}-\frac{(y+c)^2}{d^2}=1$	Hypebol

Một số dạng đặc biệt cần lưu ý:

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-a-bi|=|z|$, tìm $|z|_{Min}$. Khi đó ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a;b)$
- ✓ $\begin{cases} |z|_{Min}=\dfrac{1}{2}|z_0|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \\ z=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}i \end{cases}$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=|z-c-di|$. Tìm $|z|_{\min}$. Ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a;b),B(c;d)$
- ✓ $|z|_{Min}=d(O,AB)=\dfrac{\left|a^2+b^2-c^2-d^2\right|}{2\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

- ✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|\bar{z}-a-bi|=|z-c-di|\Leftrightarrow|z-a+bi|=|z-c-di|.$$

- ✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=|z-c-di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|iz-a-bi|=|iz-c-di|\Leftrightarrow\left|z+\frac{-a-bi}{i}\right|=\left|z+\frac{-c-di}{i}\right|\Leftrightarrow|z+b+ai|=|z+d+ci|.$$

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=R>0\left(|z-z_0|=R\right)$. Tìm $|z|_{Max},|z|_{Min}$. Ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R
- ✓ $\begin{cases} |z|_{Max}=OI+R=\sqrt{a^2+b^2}+R=|z_0|+R \\ |z|_{Min}=|OI-R|=\left|\sqrt{a^2+b^2}-R\right|=\left||z_0|-R\right| \end{cases}$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=R\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\dfrac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$)

$$\Leftrightarrow|z+b+ai|=R$$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z}-a-bi|=R\Leftrightarrow|z-a+bi|=R$ (Lấy liên hợp 2 vế)

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$$\left|(c+di)z-a-bi\right|=R\Leftrightarrow\left|z+\frac{-a-bi}{c+di}\right|=\frac{R}{|c+di|}=\frac{R}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

Hay viết gọn $|z_0z-z_1|=R\Leftrightarrow\left|z-\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\dfrac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)

Dạng 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-c|+|z+c|=2a,(a>c)$ Khi đó ta có

- ✓ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

✓ $\begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$

TQ2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, (|z_1 - z_2| < 2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$). Tìm Max, Min của $P = |z - z_0|$. Đặt $\begin{cases} |z_1 - z_2| = 2c \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$	
Nếu $\left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| = 0$	$\begin{cases} P_{Max} = a \\ P_{Min} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)
Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\begin{cases} P_{Max} = \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| + a \\ P_{Min} = \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| - a \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$P_{Max} = \left|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| + a$
Nếu $|z_0 - z_1| = |z_0 - z_2|$	$P_{Min} = \left\|z_0 - \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| - b\|$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

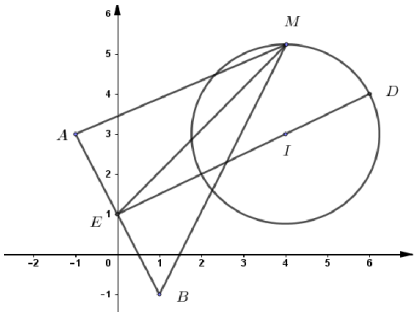
A. $P = 8$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 4$ **D.** $P = 6$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b - 3)^2 = 5 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(4; 3)$ bán kính $R = \sqrt{5}$



Gọi: $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(1;-1) \end{cases} \Rightarrow Q = |z+1-3i| + |z-1+i| = MA + MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2 \le MA^2 + MB^2 + MA^2 + MB^2 = 2\left(MA^2 + MB^2\right)$

Vì ME là trung tuyến trong

$\Delta MAB \Rightarrow ME^2 = \dfrac{MA^2 + MB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow Q^2 \le 2\left(2ME^2 + \dfrac{AB^2}{2}\right) = 4ME^2 + AB^2$. Mặt khác $ME \le DE = EI + ID = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$\Rightarrow Q^2 \le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2 + 20 = 200$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ M \equiv D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2(x_D - 4) \\ 2 = 2(y_D - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = 4 \end{cases} \Leftrightarrow\Rightarrow M(6;4) \Rightarrow P = a + b = 10$

Cách 2: Đặt $z = a + bi$. Theo giả thiết ta có: $(a-4)^2 + (b-5)^2 = 5$.

Đặt $\begin{cases} a - 4 = \sqrt{5}\sin t \\ b - 3 = \sqrt{5}\cos t \end{cases}$. Khi đó:

$Q = |z+1-3i| + |z-1+i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t + 5\right)^2 + 5\cos^2 t} + \sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t + 3\right)^2 + \left(\sqrt{5}\cos t + 4\right)^2}$

$= \sqrt{30 + 10\sqrt{5}\sin t} + \sqrt{30 + 2\sqrt{5}(3\sin t + 4\cos t)}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$Q \le \sqrt{2\left(60 + 8\sqrt{5}(2\sin t + \cos t)\right)} \le \sqrt{2\left(60 + 8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2}$

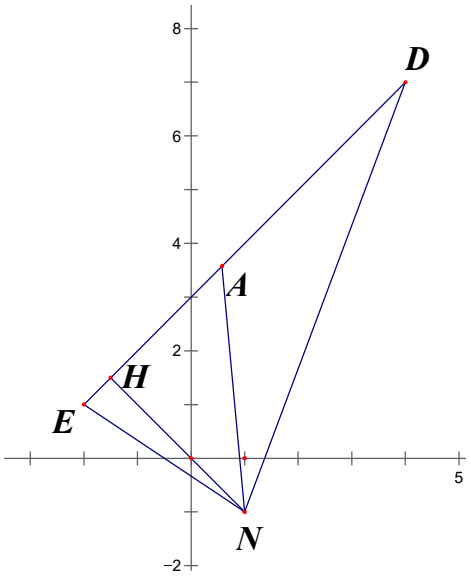
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10.$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i| + |z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \dfrac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P = 5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **C.** $P = \dfrac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$ **D.** $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$

Lời giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn số phức z, $E(-2;1)$, $F(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $AE+AF=|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $EF=6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF. Gọi H là hình chiếu của N lên EF, ta có $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Suy ra $P=NH+NF=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

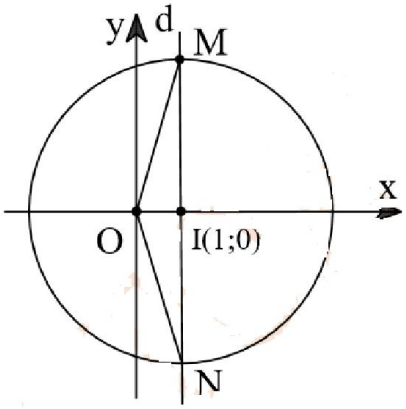
Câu 3. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1|=\sqrt{34},|z+1+mi|=|z+m+2i|$ (trong đó m là số thực) và sao cho $|z_1-z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C



Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1,z_2

Gọi $z=x+iy,(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có $|z-1|=\sqrt{34}\Rightarrow M,N$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{34}$

Mà $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow|x+yi+1+mi|=|x+yi+m+2i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+m)^2}=\sqrt{(x+m)^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Suy ra M,N thuộc đường thẳng $d:2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Do đó M,N là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C)

Ta có $|z_1-z_2|=MN$ nên $|z_1-z_2|$ lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất

$\Leftrightarrow MN$ đường kính của (C). Khi đó $|z_1+z_2|=2OI=2$

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Lời giải

Cách 1:

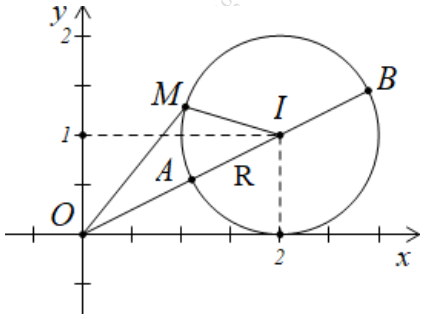
Đặt $w=z-i\Rightarrow z=w+i$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w.

Từ giả thiết $|z-2-2i|=1$ ta được:

$|w+i-2-2i|=1\Leftrightarrow|w-2-i|=1\Leftrightarrow|(x-2)+(y-1)i|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra tập hợp những điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$.



Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A,B với A nằm trong đoạn thẳng OI.

Ta có $|w|=OM$

Mà $OM+MI\geq OI\Leftrightarrow OM+MI\geq OA+AI\Leftrightarrow OM\geq OA$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA=OI-IA=\sqrt{5}-1$ khi $M\equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z-2-2i|=1\Rightarrow(a-2)^2+(b-2)^2=1$ với $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$

$a-2=\sin x;\ b-2=\cos x\Rightarrow a=2+\sin x,\ b=2+\cos x$

Khi đó: $|z-i|=|2+\sin x+(2+\cos x)i-i|=\sqrt{(2+\sin x)^2+(1+\cos x)^2}=\sqrt{6+(4\sin x+2\cos x)}$

$\geq\sqrt{6-\sqrt{(4^2+2^2)(\sin^2x+\cos^2x)}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$

Nên $|z-i|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}-1$ khi $\begin{cases}4\cos x=2\sin x\\4\sin x+2\cos x=-2\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\\cos x=\dfrac{-\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

Ta được $z=\left(2-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\left(2-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)i$

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

$|z-i|=\left|(z-2-2i)+(2+i)\right|\ge\left||z-2-2i|-|2+i|\right|=\sqrt{5}-1$

Câu 5. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tính tỉ số $\frac{M}{m}$.

A. $\frac{M}{m}=3$. **B.** $\frac{M}{m}=\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{M}{m}=2$.

Lời giải

Ta có $P=\left|\frac{2z+i}{z}\right|=\frac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow\frac{|2z|-|i|}{|z|}\le P\le\frac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\frac{1}{|z|}\le P\le 2+\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le P\le\frac{5}{2}$.

Vậy $\frac{M}{m}=\frac{5}{3}$.

Câu 6. Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

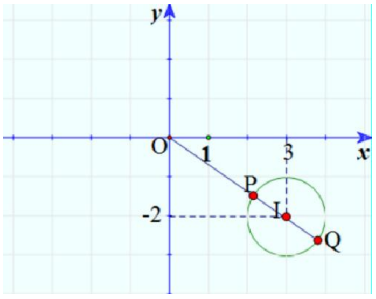
Lời giải

Chọn C

Ta có $1=|z-2-3i|^2=(z-2-3i).\overline{(z-2-3i)}=(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)$

$\Leftrightarrow 1=\left|(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)\right|\Leftrightarrow|\overline{z}-2+3i|=1\Leftrightarrow|\overline{z}+1+i-3+2i|=1(*)$.

+Đặt $w=\overline{z}+1+i$, khi đó $\Leftrightarrow|w-3+2i|=1$.



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\overline{z}+1+i$ là đường tròn $(I;1)$ và $|w|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến 1 điểm trên đường tròn. Do đó giá trị lớn nhất của $|w|$ chính là đoạn OQ.

$\Rightarrow|w|_{\max}=1+\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{13}$.

Câu 7. Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $1=|z-3i+4|\ge\left||z|-|3i-4|\right|=\left||z|-5\right|\Rightarrow-1\le|z|-5\le 1\Rightarrow 4\le|z|\le 6$.

Đặt $z_0=4-3i\Rightarrow|z_0|=5, z_0^{\,2}=7-24i$.

Ta có $A=\left|z^2+7-24i\right|^2=\left|z^2+z_o{}^2\right|^2=\left(z^2+z_o{}^2\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_o}^2\right)=|z|^4+|z_o|^4+\left(z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}\right)^2-2|z.z_o|^2$

Mà $\left(z+z_o\right)\left(\overline{z}+\overline{z_o}\right)=1\Rightarrow z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}=1-|z|^2-|z_o|^2$

Suy ra $A=|z|^4+|z_o|^4+\left(1-|z|^2-\left|\overline{z_o}\right|^2\right)^2-2|z.z_o|^2=2|z|^4-2|z|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $[4;6]$ nên $A\geq 2.4^4-2.4^2+1201=1681$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|z|=4\\|z+4-3i|=1\end{cases}$.

Do đó $\left|z^2+7-24i\right|$ nằm trong khoảng $(1009;2018)$.

Câu 8. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left(4;3\sqrt{3}\right)$.

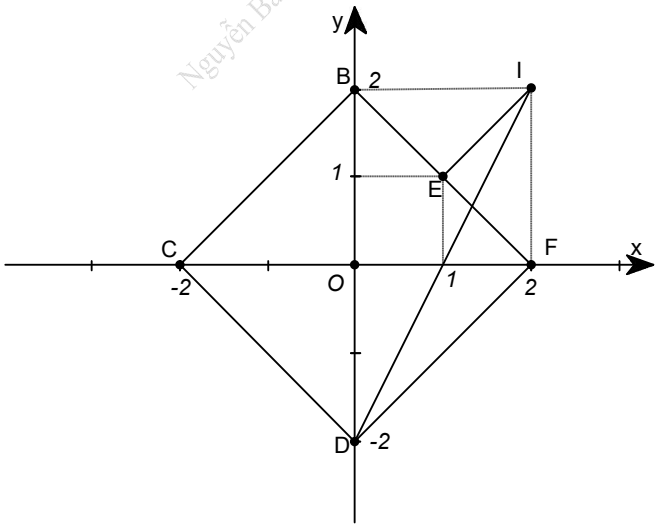
Lời giải

Giả sử: $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow N\left(x;y\right)$: điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Ta có:

• $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=4\Leftrightarrow|x|+|y|=2\Rightarrow N$ thuộc các cạnh của hình vuông $BCDF$ (hình vẽ).

Nguyễn Bảo Vương



• $P=|z-2-2i|\Rightarrow P=\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2}\Rightarrow P=d\left(I;N\right)$ với $I\left(2;2\right)$

Từ hình ta có: $E\left(1;1\right)$

$M=P_{\max}=ID=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ và $m=P_{\min}=IE=\sqrt{\left(2-1\right)^2+\left(2-1\right)^2}=\sqrt{2}$

Vậy, $A=M+m=2+2\sqrt{5}\in\left(\sqrt{34};6\right)$.

Câu 9. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z-6|+|z+6|=20$.

$\Leftrightarrow |x-6+yi|+|x+6+yi|=20 \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{(x+6)^2+y^2}=20 \quad (*)$.

Gọi $M(x;y)$, $F_1(6;0)$ và $F_2(-6;0)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=20>F_1F_2=12$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Và độ dài trục lớn bằng 20.

Ta có $c=6$; $2a=20\Leftrightarrow a=10$ và $b^2=a^2-c^2=64\Rightarrow b=8$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

Suy ra $\max|z|=OA=OA'=10$ khi $z=\pm 10$ và $\min|z|=OB=OB'=8$ khi $z=\pm 8i$.

Vậy $M-n=2$.

Câu 10. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $4+\sqrt{74}$. **B.** $2+\sqrt{130}$. **C.** $4+\sqrt{130}$. **D.** $16+\sqrt{74}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

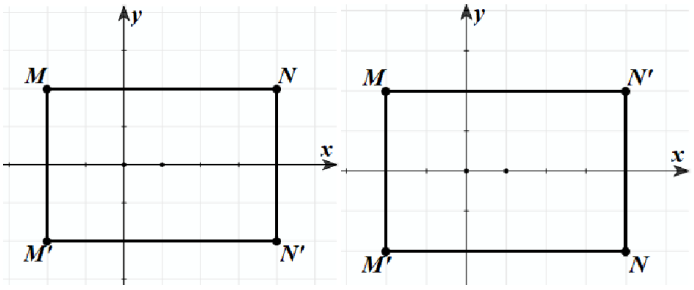
$|w|=|2z+1-i|=|(2z-6+8i)+(7-9i)|\le |2z-6+8i|+|7-9i|=4+\sqrt{130}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|w|$ là $4+\sqrt{130}$.

Câu 11. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải



Gọi $z=x+yi$, trong đó $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z}=x-yi$, $M(x;y)$, $M'(x;-y)$.

Ta đặt $w=z(4+3i)=(x+yi)(4+3i)=(4x-3y)+(3x+4y)i\Rightarrow N(4x-3y;3x+4y)$. Khi đó $\bar{w}=\overline{z(4+3i)}=(4x-3y)-(3x+4y)i\Rightarrow N'(4x-3y;-3x-4y)$.

Ta có M và M'; N và N' từng cặp đối xứng nhau qua trục Ox. Do đó, để chúng tạo thành một hình chữ nhật thì $y_M=y_N$ hoặc $y_M=y_{N'}$. Suy ra $y=3x+4y$ hoặc $y=-3x-4y$. Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng: $d_1: x+y=0$ và $d_2: 3x+5y=0$.

Đặt $P=|z+4i-5|=\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$. Ta có $P=MA$ với $A(5;-4)$.

$P_{\min} \Leftrightarrow MA_{\min} \Leftrightarrow MA=d(A;d_1)$ hoặc $MA=d(A;d_2)$. Mà $d(A;d_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $d(A;d_2)=\frac{5}{\sqrt{34}}$, vậy

$P_{\min}=d(A;d_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 12. Biết số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{2}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R})$.

Khi đó

$|iz-3|=|z-2-i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(-y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x+2y+1=0 \Leftrightarrow x=-2y-1\ (1)$.

Lại có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2y-1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\geq\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $y+\frac{2}{5}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{5}$.

Thay $y=-\frac{2}{5}$ vào (1) suy ra $x=-\frac{1}{5}$.

Vậy phần thực của số phức z là $-\frac{1}{5}$.

Câu 13. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

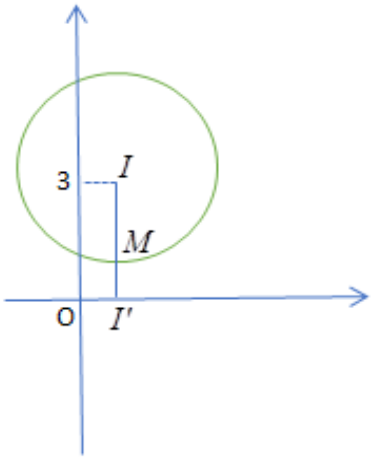
Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo bài ra ta có $|z-1-3i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1;3)$ bán kính $R=2$.

Khi đó $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=I'M$ với $I'(1;0)$.



$|z-1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I'.

Phương trình đường thẳng II' là $x=1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R=2$ là $M_1(1;1)$ và $M_1(1;5)$.

Thử lại ta thấy $M_1(1;1)$ thỏa mãn. Vậy $z=1+i$.

Câu 14. **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $A\in(\sqrt{34};6)$. **B.** $A\in(6;\sqrt{42})$. **C.** $A\in(2\sqrt{7};\sqrt{33})$. **D.** $A\in[4;3\sqrt{3})$.

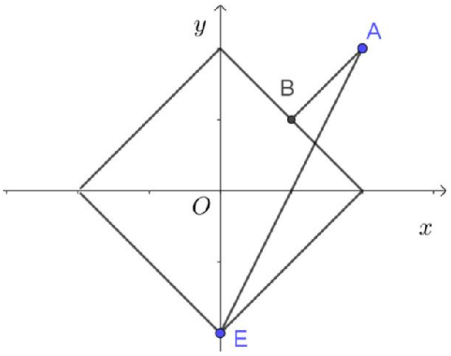
Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Đặt $z=x+iy$ và gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của $z=x+iy$

ta có: $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4\Leftrightarrow|x|+|y|=2$

Gọi $A(2;2)$ và $P=MA$



* Theo hình vẽ, $\min P=d(A,\Delta)$, với $\Delta: x+y=2$

và $\min P=\dfrac{|2+2-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\max P=AE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, với $E(0;-2)$

Vậy $M+m=\sqrt{2}+2\sqrt{5}\simeq 5{,}88$

Câu 15. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i| \Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x+1)-(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow 4x+2y+3=0 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$.

Cách 1:

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5x^2+6x+\frac{9}{4}}=\sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\geq\frac{3\sqrt{5}}{10},\forall x$.

Suy ra $min|z|=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x=-\frac{3}{5};y=-\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x+2y+3=0$.

Ta có $|z|=OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x-2y=0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=-\frac{3}{10}\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{10}\right)$.

Hay $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i| \Leftrightarrow |z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ $(*)$

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MA=MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x+2y+3=0$.

Câu 16. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|\frac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1;\left|\frac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ với $x_1;y_1\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$\left|\dfrac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1\Leftrightarrow|z_1-i|=|z_1+2-3i|\Leftrightarrow|x_1+(y_1-1)i|=|(x_1+2)+(y_1-3)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}=\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-3)^2}\Leftrightarrow x_1-y_2+3=0$.

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng $\Delta: x-y+3=0$.

Giả sử $z_2=x_2+y_2i$ với $x_2;y_2\in\mathbb{R}$. Ta có:

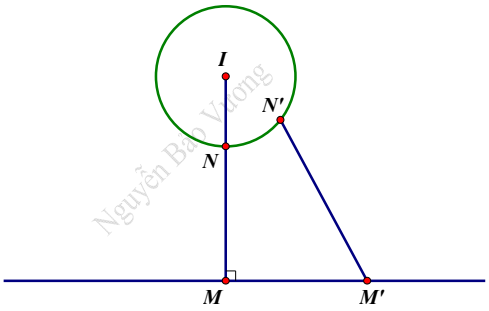
$\left|\dfrac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z_2+i|=\sqrt{2}|z_2-1+i|\Leftrightarrow|x_2+(y_2+1)i|=\sqrt{2}|(x_2-1)+(y_2+1)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_2^2+(y_2+1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2+1)^2}\Leftrightarrow x_2^2+y_2^2-4x_2+2y_2+3=0$.

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y+3=0$ có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2-3}=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ I đến Δ là: $d(I;\Delta)=\dfrac{|2-(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}>R$ $\Rightarrow$ đường thẳng Δ và đường tròn C không có điểm chung.

Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z_1-z_2 là đoạn thẳng MN. $\Rightarrow|z_1-z_2|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất.



Dễ thấy $MN_{\min}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 17. **(Sở Bình Phước 2019)** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$, (trong đó $m\in\mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$|z-1|=\sqrt{34}\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=34$; $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=34$ và đường thẳng $d: 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1 và z_2. Suy ra $(C)\cap d=\{A,B\}$.

Mặt khác $|z_1-z_2|=AB\le 2R=2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1-z_2|=2\sqrt{34}\Leftrightarrow AB=2R\Leftrightarrow I(1;0)\in d$.

Từ đó ta có $m=-\dfrac{1}{2}$ nên $d:3x-5y-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=6+3i\\z_2=-4-3i\end{array}\right.$.

Vậy $|z_1+z_2|=2$.

Câu 18. Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

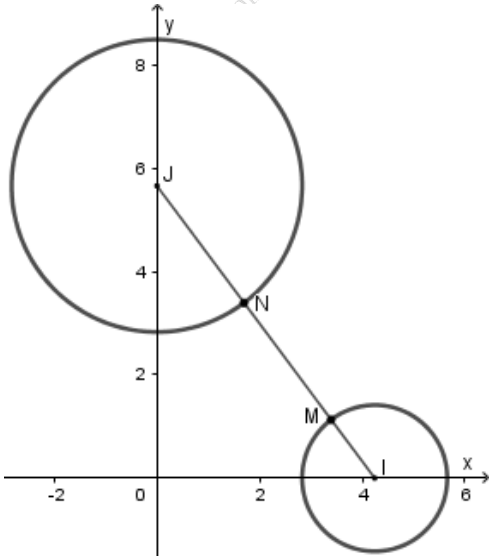
Lời giải

Ta có: + $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(3\sqrt{2};0)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.

+ $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J(0;4\sqrt{2})$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z-w|=\min MN$.

+ $IJ=5\sqrt{2};IM=r=\sqrt{2};NJ=R=2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM+MN+NJ\ge IJ\Rightarrow MN\ge IJ-IM-NJ$ hay $MN\ge 5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN=2\sqrt{2}$ khi I,M,N,J thẳng hàng và M,N nằm giữa I,J (Hình vẽ).

Cách 1:

Khi đó ta có: $|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|$ và $IN=3\sqrt{2}\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM}=3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)=3\left(\overrightarrow{OI}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right)=3\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0-w_0|=|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=\left|3\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}-\left(\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right|=|2\overrightarrow{OI}|=6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IM}\Rightarrow 3\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Do đó $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2.OI=2.3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$

Cách 3:

+) $\overrightarrow{IM}=\dfrac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\\ y_M=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\end{cases}\Rightarrow z_0=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}+\dfrac{4\sqrt{2}}{5}i$.

+) $\overrightarrow{IN}=\dfrac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}\\ y_N=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\end{cases}\Rightarrow w_0=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}+\dfrac{12\sqrt{2}}{5}i$.

Suy ra $\left|3z_0-w_0\right|=\left|6\sqrt{2}\right|=6\sqrt{2}$.

Câu 19. Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $\left|z-w\right|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z\right|+\left|w\right|$ bằng

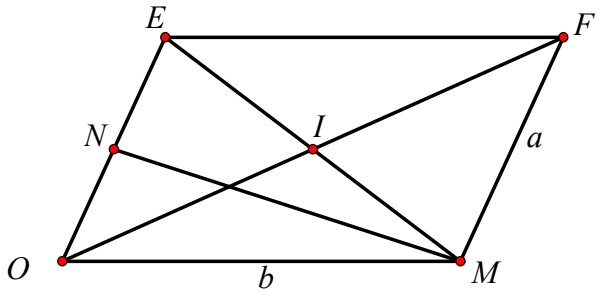
A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử M,N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Suy ra $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$, $\left|z-w\right|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $\left|z\right|=ON=\dfrac{a}{2};\left|w\right|=OM=b$. Dựng hình bình hành $OMFE$



Ta có $\begin{cases}\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{ME^2}{4}=25\\ \dfrac{b^2+ME^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=16\end{cases}\Rightarrow a^2+2b^2=\dfrac{264}{3}$

$\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2\le\left(a^2+2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=66$

Suy ra $a+b\le\sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $\left(a+b\right)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 20. Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+|z^2-z+|z|^2|=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$

$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$.

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	$+$	0	$-$	||	$+$	|
$f(t)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\sqrt{3}$	↗	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\frac{13}{4}$ tại $t=\frac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

Vậy $M.m=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 21. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hai số phức z và $\omega=a+bi$ thỏa mãn $|z+\sqrt{5}|+|z-\sqrt{5}|=6$; $5a-4b-20=0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-\omega|$ là

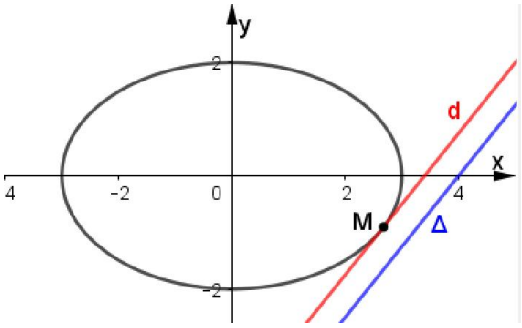
A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{41}}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{41}}$. **D.** $\frac{3}{41}$.

Lời giải

Đặt $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, vì $\sqrt{5}<3$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc elip có $\begin{cases}a=3\\c=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=4$ suy ra $(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Tập hợp các điểm N biểu diễn số phức ω thuộc đường thẳng $\Delta: 5x-4y-20=0$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điểm $M \in (E)$ và $N \in \Delta$ sao cho MN nhỏ nhất.



Đường thẳng d song song với Δ có dạng $d: 5x-4y+c=0$, $(c \neq -20)$.

d tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $c^2 = 5^2.9+(-4)^2.4 = 289 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=17 \\ c=-17 \end{array}\right.$.

Với $c=17 \Rightarrow d(d,\Delta) = \dfrac{|-20-17|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} = \dfrac{37}{\sqrt{41}}$.

Với $c=-17 \Rightarrow d(d,\Delta) = \dfrac{|-20+17|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

Vậy $\min(MN) = \dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

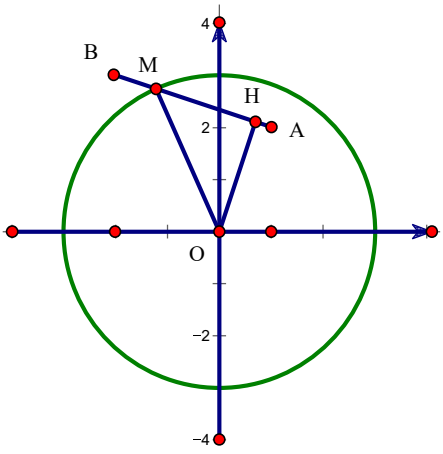
Nguyễn Bảo Vương

Câu 22. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Gọi $z=a+bi$ $(a,b \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|+|z+2-3i| = \sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S = 7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a+bi$

$A(1;2)$ là điểm biểu diễn số phức $(1+2i)$

$B(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức $(-2+3i)$, $AB=\sqrt{10}$

$|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ trở thành $MA+MB=AB$

$\Leftrightarrow M,A,B$ thẳng hàng và M ở giữa A và B

Gọi H là điểm chiếu của O lên AB, phương trình $(AB): x+3y-7=0$, $(OH): 3x-y=0$

Tọa độ điểm $H\left(\frac{7}{10};\frac{21}{10}\right)$, Có $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{3}{10};\frac{1}{10}\right)$, $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{27}{10};-\frac{9}{10}\right)$ và $\overrightarrow{BH}=-9\overrightarrow{AH}$

Nên H thuộc đoạn AB

$|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất, mà M thuộc đoạn AB

$\Leftrightarrow M\equiv H\left(\frac{7}{10};\frac{21}{10}\right)$

Lúc đó $S=7a+b=\frac{49}{10}+\frac{21}{10}=7$. Chọn A

Câu 23. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|=8$.

Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Giải:

Chọn D

Gọi $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, ta có $\left|z+\bar{z}\right|+2\left|z-\bar{z}\right|=8\Leftrightarrow|x|+2|y|=4\Rightarrow\begin{cases}|x|\le 4\\ |y|\le 2\end{cases}$, tập hợp

$K(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc cạnh các cạnh của trong hình thoi $ABCD$ như hình vẽ.

$P=|z-3-3i|$ đạt giá trị lớn nhất khi KM lớn nhất, theo hình vẽ ta có KM lớn nhất khi

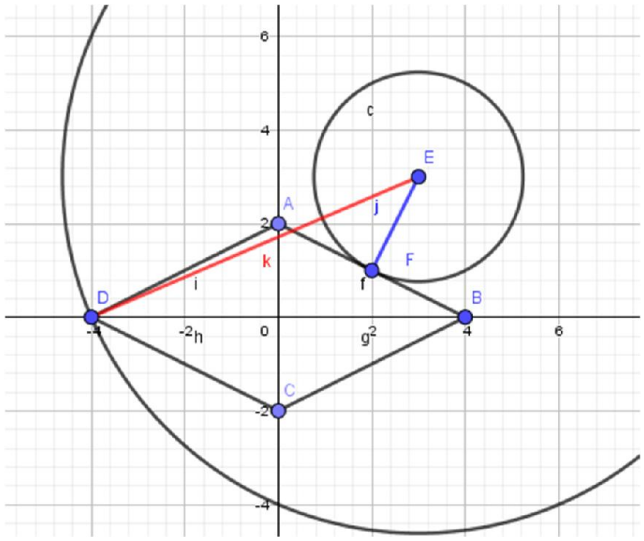
$K\equiv D$ hay $K(-4;0)$ suy ra $M=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$

$P=|z-3-3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi KM nhỏ nhất, theo hình vẽ ta có KM nhỏ nhất khi

$K\equiv F$ (F là hình chiếu của E trên AB.

Suy ra $F(2;1)$ do $AE=AB$ nên F là trung điểm của AB.

Suy ra $m=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Vậy $M+m=\sqrt{58}+\sqrt{5}$



Câu 24. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{11}{4}$

Lời giải

Chọn A

$P=|z^2-z|+|z^2+z+1|=|z||z-1|+|z^2+z+1|=|z-1|+|z^2+z+1|$

Do $|z|=1$ nên ta đặt $z=\cos x+i.\sin x$. Khi đó

$P=|z-1|+|z^2+z+1|=|\cos x+i.\sin x-1|+|\cos 2x+i\sin 2x+\cos x+i\sin x+1|$

$=\sqrt{(\cos x-1)^2+\sin^2 x}+\sqrt{(\cos 2x+\cos x+1)^2+(\sin 2x+\sin x)^2}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{3+4\cos x+2\cos 2x}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+1}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+|2\cos x+1|$

Đặt $t=\cos x,\ t\in[-1;1]$. Xét hàm $y=\sqrt{2-2t}+|2t+1|$

Với $t\geq -\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}+2t+1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{8}$

$y(1)=3; y\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{13}{4}; y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

Với $t<-\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}-2t-1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{2-2t}=\frac{-1}{2}$ (phương trình vô nghiệm)

$y(-1)=3; y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

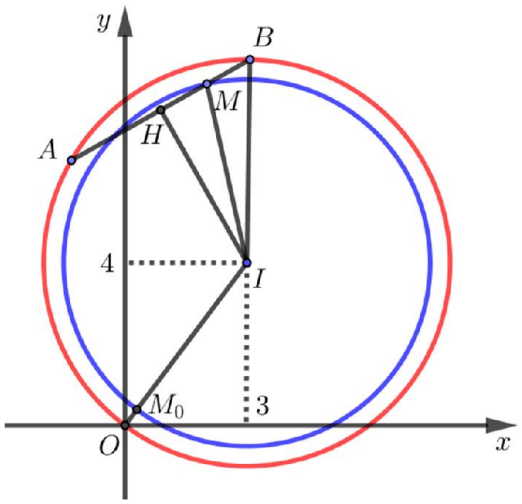
Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=\frac{13}{4}$. Do đó giá trị lớn nhất của $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$ là $\frac{13}{4}$.

Câu 25. **(Chuyên Đại Học Vinh -2019)** Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ .Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1,z_2 . Suy ra $AB=|z_1-z_2|=4$.

* Ta có $(z-6)(8+\overline{zi})=[(x-6)+yi].[(8-y)-xi]=(8x+6y-48)-(x^2+y^2-6x-8y)i$. Theo giả thiết $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y=0$. Tức là các điểm A,B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$ .Gọi H là trung điểm AB . Ta tính được $HI^2=R^2-HB^2=21; IM=\sqrt{HI^2+HM^2}=\sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|4\overrightarrow{OM}|=4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min}=OM_0=|OI-r|=5-\sqrt{22}$.

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min}=4OM_0=20-4\sqrt{22}$.

Câu 26. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10 **B.** $-4-3\sqrt{5}$ **C.** -5 **D.** $-6-2\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $z_1=x_1+y_1i,(x_1,\ y_1\in\mathbb{R})$ và $z_2=x_2+y_2i,(x_2,y_2\in\mathbb{R})$.

Khi đó $\begin{cases}(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=4\\(x_2-3)^2+(y_2-4)^2=4\end{cases}$ và $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$.

Ta có $(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=(x_2-3)^2+(y_2-3)^2\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-(x_2^2+y_2^2)=6(x_1-x_2)+8(y_1-y_2)$.

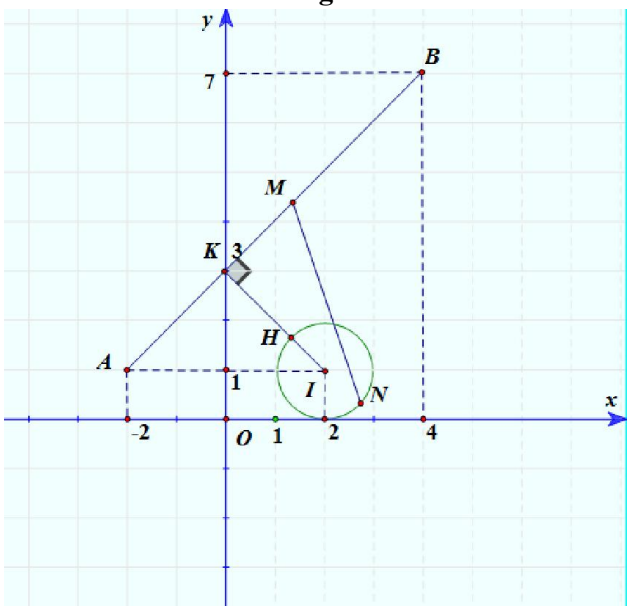
Suy ra $\left||z_1|^2-|z_2|^2\right|=2\left|3(x_1-x_2)+4(y_1-y_2)\right|\le 2.\sqrt{(3^2+4^2)\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]}=10$.

Do đó $-10\le|z_1|^2-|z_2|^2\le 10$.

Câu 27. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Lời giải



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB=6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x-y+3=0$.

+) $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB.

+) $|iz_2-1+2i|=1 \Leftrightarrow |iz_2-1+2i||i|=1 \Leftrightarrow |-z_2-2-i|=1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN=1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$d(I,AB)=2\sqrt{2}>1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2;1)$ lên AB. Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB.

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C).

Ta có $|z_1+z_2|=MN \geq KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$.

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|\overline{z}|=|z+2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow 4b+4=0 \Leftrightarrow b=-1$

$\Rightarrow z=a-i$.

Xét: $|z-1+2i|+|z+1+3i|=|a-1+i|+|a+1+2i|=\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}\ge\sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Suy ra: $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1-a)=1+a\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 29. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng

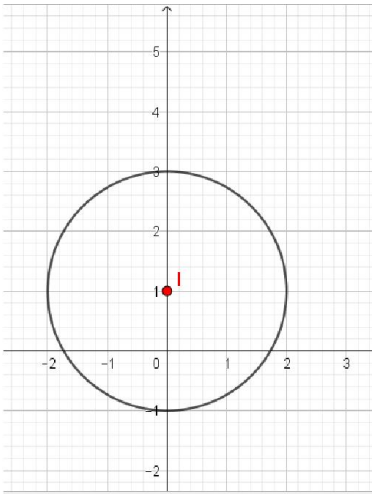
A. 15. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16\Leftrightarrow|x+yi+2-i|^2+|x+yi-2-i|^2=16\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm số phức $I(0;1)$ bán kính $R=2$.



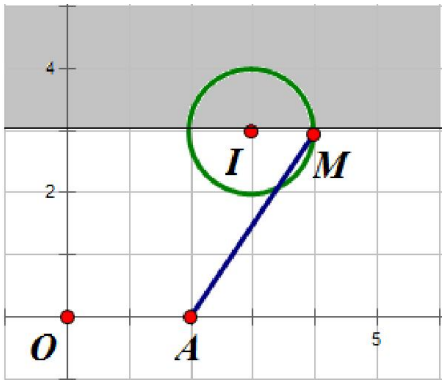
Do đó $m=1$, $M=3$.

Vậy $M^2-m^2=8$.

Câu 30. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải



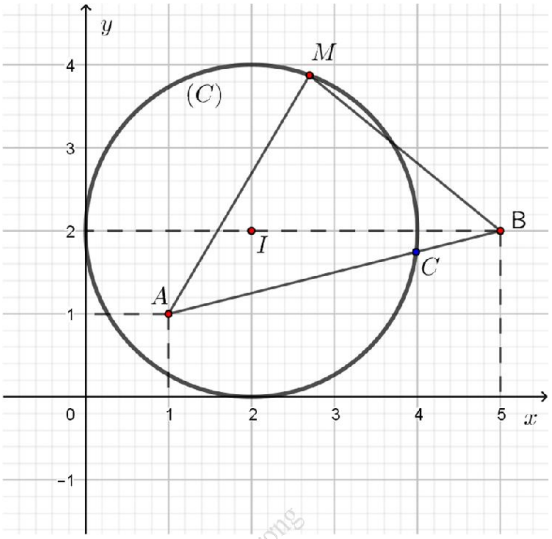
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $|z-2i|\le|z-4i|\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2\le x^2+(y-4)^2$

$\Leftrightarrow y \le 3$; $|z-3-3i|=1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P=|z-2|=AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P=|z-2|$ đạt được khi $M(4;3)$ nên $\max P=\sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 31. Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Lời giải



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Do $|z-2-2i|=2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Các điểm $A(1;1)$, $B(5;2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1+i$ và $5+2i$. Khi đó, $P=MA+MB$.

Nhận thấy, điểm A nằm trong đường tròn (C) còn điểm B nằm ngoài đường tròn (C), mà $MA+MB \ge AB=\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB với (C).

Ta có, phương trình đường thẳng $AB: x-4y+3=0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) là nghiệm của hệ với $1<y<5$

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\ x-4y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(4y-5)^2+(y-2)^2=4\\ x=4y-3\end{cases}$$

Ta có $(4y-5)^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow 17y^2-44y+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}(N)\\ y=\dfrac{22-\sqrt{59}}{17}(L)\end{array}\right.$

Vậy $\min P=\sqrt{17}$ khi $z=\dfrac{37+4\sqrt{59}}{17}+\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}i$

Câu 32. **(SGD Cần Thơ - 2018)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải

- Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

- Khi đó : $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$\Rightarrow 4x+2y+3-P=0$, kí hiệu là đường thẳng Δ.

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le r\Leftrightarrow\dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|P-23|\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$

Suy ra $M=33$ và $m=13\Rightarrow w=33+13i$.

Vậy $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 33. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=\sqrt{2}-1$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z_1=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow z_2=-b+ai$

$\Rightarrow z_1-z_2=(a+b)+(b-a)i$.

Nên $|z_1-z_2|=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2}.|z_1|$

Ta lại có $2=|z_1+1-i|\le|z_1|+|1-i|=|z_1|+\sqrt{2}$

$\Rightarrow|z_1|\ge 2-\sqrt{2}$. Suy ra $|z_1-z_2|=\sqrt{2}.|z_1|\ge 2\sqrt{2}-2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}<0$.

Vậy $m=\min|z_1-z_2|=2\sqrt{2}-2$.

Câu 34. **(SGD Bắc Giang - 2018)** Hcho hai số phức z,w thỏa mãn $\begin{cases}|z-3-2i|\le 1\\ |\mathrm{w}+1+2i|\le|\mathrm{w}-2-i|\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=|z-\mathrm{w}|$.

A. $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $P_{\min}=\sqrt{2}+1$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, $\mathrm{w}=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

$|z-3-2i|\le 1\Leftrightarrow(a-3)^2+(b-2)^2\le 1$ (1)

$|\mathrm{w}+1+2i|\le|\mathrm{w}-2-i|\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+2)^2\le(x-2)^2+(y-1)^2$.

Suy ra $x+y=0$.

$P=|z-\mathrm{w}|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=\sqrt{(a-x)^2+(b+x)^2}$.

Từ (1) ta có $I(3;2)$, bán kính $r=1$. Gọi H là hình chiếu của I trên $d: y=-x$.

Đường thẳng HI có PTTS $\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \end{cases}$.

$M \in HI \Rightarrow M(3+t;2+t)$

$M \in (C) \Leftrightarrow 2t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

$t=2 \Rightarrow M\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{2}};2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ MH=\dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$t=3 \Rightarrow M\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{2}};2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ MH=\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 35. **(Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2018)** Cho số phức z thỏa $|z|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z^5+\bar{z}^3+6z\right|-2\left|z^4+1\right|$. Tính $M-m$.

A. $m=-4,\ n=3$. **B.** $m=4,\ n=3$ **C.** $m=-4,\ n=4$. **D.** $m=4,\ n=-4$.

Lời giải

Vì $|z|=1$ và $z.\bar{z}=|z|^2$ nên ta có $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$.

Từ đó, $P=\left|z^5+\bar{z}^3+6z\right|-2\left|z^4+1\right|=|z|\left|z^4+\bar{z}^4+6\right|-2\left|z^4+1\right|=\left|z^4+\bar{z}^4+6\right|-2\left|z^4+1\right|$.

Đặt $z^4=x+iy$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Do $|z|=1$ nên $\left|z^4\right|=\sqrt{x^2+y^2}=1$ và $-1\le x,y\le 1$.

Khi đó $P=|x+iy+x-iy+6|-2|x+iy+1|=|2x+6|-2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$=2x+6-2\sqrt{2x+2}=\left(\sqrt{2x+2}-1\right)^2+3$.

Do đó $P\ge 3$. Lại có $-1\le x\le 1\Rightarrow 0\le\sqrt{2x+2}\le 2\Rightarrow -1\le\sqrt{2x+2}-1\le 1\Rightarrow P\le 4$.

Vậy $M=4$ khi $z^4=\pm 1$ và $m=3$ khi $z^4=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Suy ra $M-m=1$.

Câu 36. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Cho các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+\mathrm{i}|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

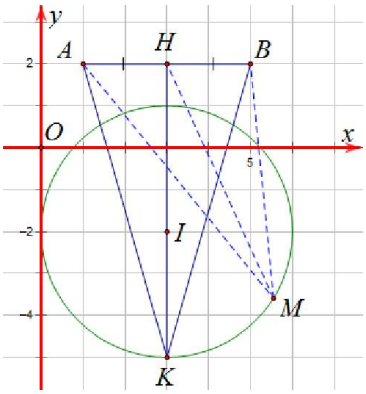
Lời giải

Gọi $z=x+y\mathrm{i}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Theo giả thiết, $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)\Leftrightarrow 5(\mathrm{w}+\mathrm{i})=(2+\mathrm{i})(z-4)+5\mathrm{i}\Leftrightarrow(2-\mathrm{i})(\mathrm{w}+\mathrm{i})=z-3+2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow|z-3+2\mathrm{i}|=3$. Suy ra $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Ta có $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|=MA+MB$, với $A(1;2)$ và $B(5;2)$.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $H(3;2)$ và khi đó:

$P=MA+MB\le\sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)}$ hay $P\le\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Mặt khác, $MH\le KH$ với mọi $M\in(C)$ nên $P\le\sqrt{4KH^2+AB^2}=\sqrt{4\left(IH+R\right)^2+AB^2}=2\sqrt{53}$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases}M\equiv K\\MA=MB\end{cases}$ hay $z=3-5\mathrm{i}$ và $\mathrm{w}=\frac{3}{5}-\frac{11}{5}\mathrm{i}$.

Câu 37. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z-3-2i=w$ với $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo bài ra ta có $|w|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Ta có $P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=|w+4|+2|w+1-3i|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$=\sqrt{20+8x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{5+2x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

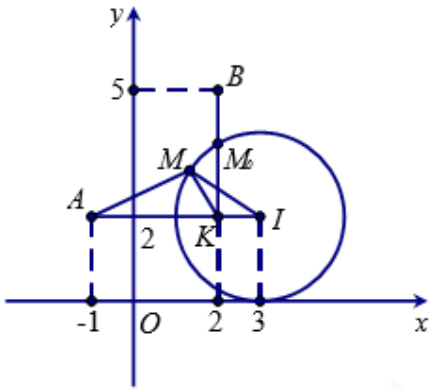
$=2\left(\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)=2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)$

$\ge 2\left(|y|+|y-3|\right)\ge 2|y+3-y|=6$.

$P=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y(3-y)\ge 0\\x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=\sqrt{3}\end{cases}$.

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z=2+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.

Cách 2:



$|z-3-2i|=2 \Rightarrow MI=2 \Rightarrow M \in (I;2)$ với $I=(3;2)$.

$P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=MA+2MB$ với $A=(1;2)$, $B=(2;5)$.

Ta có $IM=2$; $IA=4$. Chọn $K(2;2)$ thì $IK=1$. Do đó ta có $IA.IK=IM^2 \Rightarrow \dfrac{IA}{IM}=\dfrac{IM}{IK}$

$\Rightarrow \Delta IAM$ và ΔIMK đồng dạng với nhau $\Rightarrow \dfrac{AM}{MK}=\dfrac{IM}{IK}=2 \Rightarrow AM=2MK$.

Từ đó $P=MA+2MB=2(MK+MB) \geq 2BK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK.

Từ đó tìm được $M=\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

Cách 3:

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$. Đặt $I=(3;2)$, $A(-1;2)$ và $B(2;5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R=2$ sao cho biểu thức $P=MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x;y)$ sao cho $MA=2MK \ \forall M \in (C)$.

Ta có $MA=2MK \Leftrightarrow MA^2=4MK^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=4\left(MI^2+IK^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}\right)=3R^2+4IK^2-IA^2 \ (*)$.

$(*)$ luôn đúng $\forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0} \\ 3R^2+4IK^2-IA^2=0 \end{cases}$.

$\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3)=-4 \\ 4(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

Thử trực tiếp ta thấy $K(2;2)$ thỏa mãn $3R^2+4IK^2-IA^2=0$.

Vì $BI^2=1^2+3^2=10>R^2=4$ nên B nằm ngoài (C).

Vì $KI^2=1<R^2=4$ nên K nằm trong (C).

Ta có $MA+2MB=2MK+2MB=2(MK+MB) \geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK.

Do đó $MA+2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK.

Phương trình đường thẳng $BK: x=2$.

Phương trình đường tròn $(C): (x-3)^2+(y-2)^2=4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$.

Thử lại thấy $M\left(2;2+\sqrt{3}\right)$ thuộc đoạn BK.

Vậy $a=2$, $b=2+\sqrt{3} \Rightarrow a+b=4+\sqrt{3}$.

Câu 38. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4\mathrm{i}|=1$ và $|z_2-3-4\mathrm{i}|=\dfrac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$.

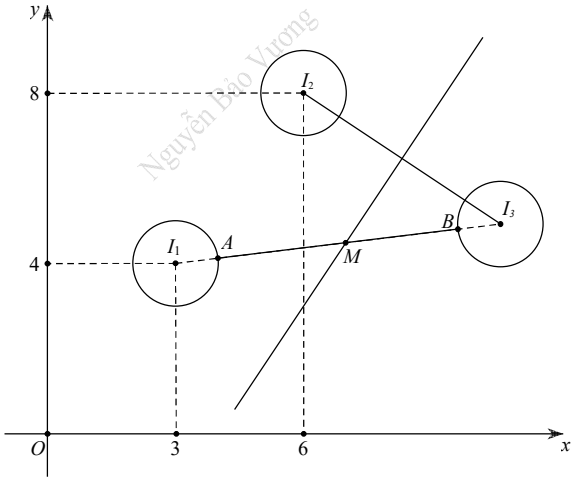
Lời giải

Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1, $2z_2$, z trên hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R=1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d:3x-2y-12=0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của MM_1+MM_2+2.



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\dfrac{138}{13};\dfrac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d. Khi đó

$\min\left(MM_1+MM_2+2\right)=\min\left(MM_1+MM_3+2\right)$ với $M_3\in(C_3)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với (C_1), (C_3). Khi đó với mọi điểm $M_1\in(C_1)$, $M_3\in(C_3)$, $M\in d$ ta có $MM_1+MM_3+2\geq AB+2$, dấu "=" xảy ra khi

$M_1\equiv A, M_3\equiv B$. Do đó $P_{\min}=AB+2=I_1I_3-2+2=I_1I_3=\dfrac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 39. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên - 2019)** Trong các số phức thỏa mãn: $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn D

+ Gọi số phức cần tìm là $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \overline{z}=a-bi$

+ $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$

$\Rightarrow |a+bi-1+i|=|a-bi+1-2i|$

$\Leftrightarrow |a-1+(b+1)i|=|a+1-(b+2)i|$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2}$

$\Leftrightarrow 4a+2b+3=0\Leftrightarrow b=-\dfrac{4a+3}{2}=-2a-\dfrac{3}{2}$

+ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(2a+\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5a^2+6a+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{5\left(a^2+\dfrac{6}{5}a+\dfrac{9}{25}\right)+\dfrac{9}{20}}$

$=\sqrt{5\left(a+\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{9}{20}}\geq\sqrt{\dfrac{9}{20}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

$|z|$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $a=-\dfrac{3}{5}\Rightarrow b=-\dfrac{3}{10}$.

Câu 40. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất của $P=|z^5+\overline{z}^3+6z|-2|z^4+1|$. Tính $M-m$.

A. $M-m=1$. **B.** $M-m=7$. **C.** $M-m=6$. **D.** $M-m=3$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z\overline{z}=|z|^2=1\Leftrightarrow\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

Suy ra $P=\left|z^5+\dfrac{1}{z^3}+6z\right|-2|z^4+1|=\dfrac{1}{|z|^3}|z^8+1+6z^4|-2|z^4+1|=|z^8+6z^4+1|-2|z^4+1|$

Đặt $w=z^4\Rightarrow|w|=1$, ta được $P=|w^2+6w+1|-|2w+2|$.

Gọi $w=x+yi$, vì $|w|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}|x|\leq 1\\|y|\leq 1\end{cases}$.

$P=|x^2+6x+1-y^2+2y(x+3)i|-2|x+1+yi|=|2x^2+6x+2y(x+3)i|-2|x+1+yi|$

$=2|(x+3)(x+yi)|-2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2|(x+3)||x+yi|-2\sqrt{2x+2}$

$=2(x+3)-2\sqrt{2x+2}$

Xét hàm số $f(x)=2(x+3)-2\sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

$f'(x)=2-2\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 2-2\dfrac{1}{\sqrt{2x+2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}=1\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $f(-1)=4; f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3; f(1)=4$

Vậy $M=4,m=3\Rightarrow M-m=1$.

Câu 41. **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi;\ (x;y\in\mathbb{R})$.

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\in(-1;1)$.

$f(1)=2;\ f(-1)=4;\ f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$ bằng $2\sqrt{5}$ khi $x=-\dfrac{3}{5},\ y=\pm\dfrac{4}{5}$.

Câu 42. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+|z^2-z+|z|^2|=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$

$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$.

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	|
$f(t)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\sqrt{3}$	↗	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\frac{13}{4}$ tại $t=\frac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

Vậy $M.m=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

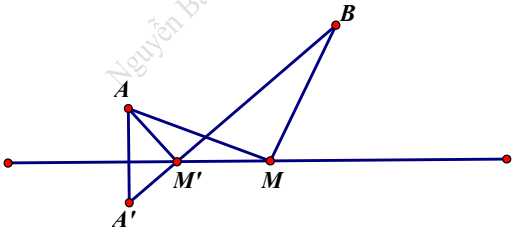
Câu 43. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn : $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $|\overline{z}|=|z+2i|\Leftrightarrow y+1=0$, tức biểu diễn hình học của số phức thỏa mãn giả thiết là đường thẳng $y+1=0$. Xét điểm $A(0;1)$ và $B(4;0)$ thì $P=|z-i|+|z-4|=MA+MB$. Dễ thấy A,B cùng phía với đường thẳng $y+1=0$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng BA' trong đó $A'(0;-3)$ đối xứng với A qua đường thẳng $y+1=0$.



Do đó $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $BA'=5$.

Câu 44. **(SGD Bến Tre 2019)** Cho các số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt gí trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Trắc nghiệm: Thay tọa độ điểm M vào vế trái phương trình đường thẳng kết quả bằng 0 thỏa ta được đáp án A

Tự luận:

Ta có $w=3z_3-z_2-2z_1=3z_3+3-3i=3(z_3+1-i)\rightarrow|w|=3|z_3+1-i|=3AM$ với $A(-1;3)$

$M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3 nằm trên đường thẳng $d:x-2y+1=0$ và $A(-1;3)\notin d$.

Khi đó $|w|=3|z_3+1-i|=3AM$ đạt giá trị nhỏ nhất khi AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM\perp d$

$AM \perp d$ nên AM có phương trình: $2x+y+1=0$.

Khi đó $M = AM \cap d$ nên $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$.. **Chọn A**

Câu 45. **(SGD Cần Thơ 2019)** Cho số phức z thoả mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

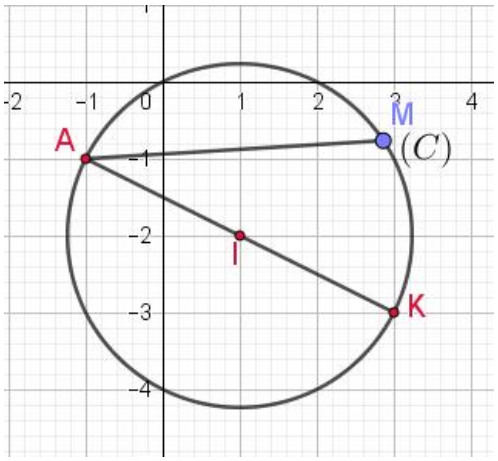
Cách 1.

Ta có $|z+1+i|=|z-1+2i+2-i|\le|z-1+2i|+|2-i|=2\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $z=3-3i$.

Vậy $\max|z+1+i|=2\sqrt{5}$.

Cách 2.



Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thì từ điều kiện ta có: $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho z và $A(-1;-1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $-1-i$, khi đó $|z+1+i|=AM$ với M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Dễ thấy $A\in(C)$, do đó $AM\le 2R=2\sqrt{5}$.

Suy ra $\max|z+1+i|=2\sqrt{5}$, đẳng thức xảy ra khi $M\equiv K$.

Cách 3.

$|z-1+2i|=\sqrt{5}$ $(*)$

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, khi ấy, ta có $(*)\Leftrightarrow|x+yi-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(x-1)+(y+2)i|=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Đặt $\begin{cases}x-1=\sqrt{5}\sin a\\ y+2=\sqrt{5}\cos a\end{cases}$. Ta có

$$|z+1+i|=|(x+1)+(y+1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(\sqrt{5}\sin a+2)^2+(\sqrt{5}\cos a-1)^2}$$

$$=\sqrt{10+4\sqrt{5}\sin a-2\sqrt{5}\cos a}$$

$=\sqrt{10+10\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin a-\frac{\sqrt{5}}{5}\cos a\right)}=\sqrt{10+10\sin\left(a-\varphi\right)}$ với $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$.

Vì $-1\le\sin\left(a-\varphi\right)\le 1$ với mọi $a;\varphi\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{10-10}\le\left|z+1+i\right|\le\sqrt{10+10}\Leftrightarrow 0\le\left|z+1+i\right|\le 2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\left|z+1+i\right|$ là $2\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi

$\sin\left(a-\varphi\right)=1\Leftrightarrow a-\varphi=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Rightarrow\begin{cases}\cos a=\cos\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi+\varphi\right)=-\sin\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}\\ \sin a=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x-1=\sqrt{5}\sin a\\ y+2=\sqrt{5}\cos a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\ y+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases}\Rightarrow z=3-3i$.

Câu 46. **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $\left(2-i\right)z-\left(2+i\right)\overline{z}=2i$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Ta có

$\left(2-i\right)z-\left(2+i\right)\overline{z}=2i\Leftrightarrow\left(2-i\right)\left(x+yi\right)-\left(2+i\right)\left(x-yi\right)=2i$

$\Leftrightarrow\left(2x+y\right)+\left(2y-x\right)i-\left[\left(2x+y\right)+\left(-2y+x\right)i\right]=2i\Leftrightarrow\left(4y-2x\right)i=2i\Leftrightarrow 4y-2x=2$

$\Leftrightarrow x=2y-1$.

Do đó $\left|z\right|^2=x^2+y^2=\left(2y-1\right)^2+y^2=5y^2-4y+1=\left(\sqrt{5}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{1}{5}\ge\frac{1}{5},\forall y\in\mathbb{R}.$

Suy ra $\min\left|z\right|=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y=\frac{2}{5}$, $x=-\frac{1}{5}$.

Câu 47. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Số phức z có môđun nhỏ nhất thoả mãn $\left|-2-3i+\overline{z}\right|=\left|z-i\right|$ là

A. $\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$. **B.** $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$. **C.** $\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$. **D.** $\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi,\left(x;y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\overline{z}=x-yi.$

Khi đó $\left|-2-3i+\overline{z}\right|=\left|z-i\right|\Leftrightarrow\left|\left(x-2\right)-\left(y+3\right)i\right|=\left|x+\left(y-1\right)i\right|$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}\Leftrightarrow x-2y-3=0$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn của z là đường thẳng $\Delta:x-2y-3=0$.

Ta có $\min\left|z\right|=\mathrm{d}\left(O,\Delta\right)$. Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với $\Delta\Rightarrow d:2x+y=0$.

Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H: \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$.

Khi đó z có môđun nhỏ nhất thoả mãn có điểm biểu diễn là H, tức là $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.

Câu 48. **(Sở GD Nam Định - 2019)** Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $z \neq 2+i$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow |12-5i|.\left|z+\frac{17+7i}{12-5i}\right|=13|z-2-i| \Leftrightarrow |z+1+i|=|z-2-i|$ (1).

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$. Vì $z \neq 2+i$ nên $M \neq N(2;1)$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 6x+4y-3=0$.

Ta thấy đường thẳng $d: 6x+4y-3=0$ không đi qua điểm $N(2;1)$ nên tập hợp điểm M là đường thẳng d.

Ngoài ra, $|z|=OM$ nên $|z|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, tức là $OM=\mathrm{d}(O,d)=\frac{3}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{26}$.

Vậy $\min|z|=\frac{3\sqrt{13}}{26}$.

Câu 49. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN-2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\frac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow |z-1+2i|.(|z-1-2i|-|z-1+3i|)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z-1+2i|=0 & (1) \\ |z-1-2i|=|z-1+3i| & (2) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow z-1+2i=0 \Leftrightarrow z=1-2i$. Khi đó, $|w|=|1-2i-2+2i|=1$ (3).

Đặt $z=x+yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$. Khi đó, $(2) \Leftrightarrow |(x-1)+(y-2)i|=|(x-1)+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow (y-2)^2=(y+3)^2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow z=x-\frac{1}{2}i$.

$\Rightarrow |w| = \left|(x-2)+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{(x-2)^2+\frac{9}{4}} \ge \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}. \ (4).$

Từ (3) và $(4) \Rightarrow \min|w| = 1.$

Câu 50. **(Kim Liên - Hà Nội 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.

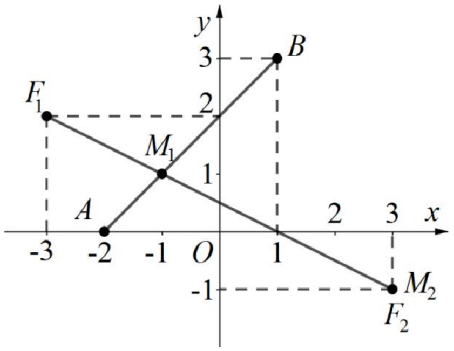
B. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = \sqrt{2}$.

C. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.

D. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$ và $F_1F_2 = 3\sqrt{5} \Rightarrow MF_1 + MF_2 = F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đoạn thẳng F_1F_2.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

+ $M = P_{\max} = M_2A + M_2B = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$.

+ $m = P_{\min} = M_1A + M_1B = AB = 3\sqrt{2}$.

Vậy $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.

Câu 51. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i| = 2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z = 1+5i$.

B. $z = 1+i$.

C. $z = 1+3i$.

D. $z = 1-i$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = x+yi \ (x;y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z-1-3i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -y^2+6y-5$

Vì $(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow -y^2+6y-5 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5$

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{6y-5}$

Vì $1 \le y \le 5 \Leftrightarrow 1 \le 6y-5 \le 25 \Leftrightarrow 1 \le |z-1| \le 5$

Vậy $|z-1|$ nhỏ nhất khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ khi đó $z = 1+i$

Câu 52. **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz+2i+4|=3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

A. 9. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$, ta có $M(z)=M(x;y)$

Khi đó: $|iz+2i+4|=3\Leftrightarrow|i(x+yi)+2i+4|=3\Leftrightarrow|(-y+4)+(x+2)i|=3$

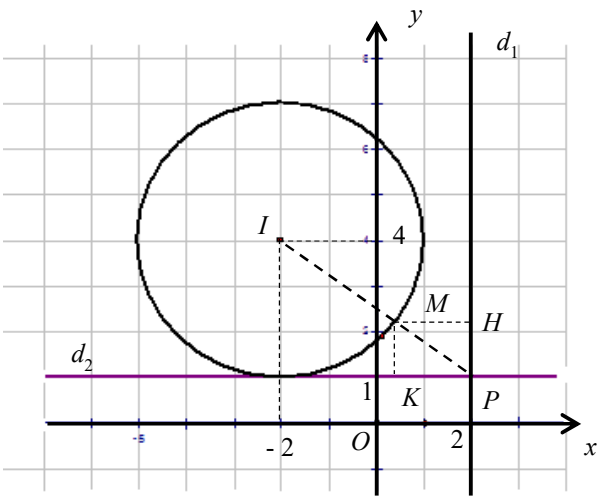
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=9$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(-2;4)$, bán kính $R=3$.

Mặt khác: $z_1=2+bi\Rightarrow A(z_1)=A(2;b)\Rightarrow$ Tập hợp điểm A là đường thẳng $d_1: x=2$.

$z_2=a+i\Rightarrow B(z_2)=B(a;1)\Rightarrow$ Tập hợp điểm B là đường thẳng $d_2: y=1$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $P(2;1)$.



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên d_1 và d_2.

Ta có: $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=MA^2+MB^2\geq MH^2+MK^2=MP^2$.

T đạt giá trị nhỏ nhất khi $A\equiv H, B\equiv K$ và I, M, P thẳng hàng (theo thứ tự đó).

Phương trình đường thẳng $IP:\begin{cases}x=2+4t\\y=1-3t\end{cases}\Rightarrow M(2+4t;1-3t)$ (vì $M\in IP$).

Mà $M\in(C)$ nên ta có $(4+4t)^2+(-3-3t)^2=9\Leftrightarrow(1+t)^2=\dfrac{9}{25}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{2}{5}\\t=-\dfrac{8}{5}\end{array}\right.$

- Với $t=-\dfrac{8}{5}\Rightarrow M\left(-\dfrac{22}{5};\dfrac{29}{5}\right)$ (loại)

- Với $t=-\dfrac{2}{5}\Rightarrow M\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{5}\right)\Rightarrow z=\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{5}i\Rightarrow z_1=2+\dfrac{11}{5}i, z_2=\dfrac{2}{5}+i.$

Suy ra $MP_{\min} = IP - IM = IP - R = \sqrt{4^2 + (-3)^2} - 3 = 2$.

Vậy $T_{\min} = 2^2 = 4$ khi $z = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i, z_1 = 2 + \frac{11}{5}i, z_2 = \frac{2}{5} + i.$

Câu 53. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

+) Ta có: $|z-3-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \quad (1)$.

+) $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = \left[(x+2)^2 + y^2\right] - \left[x^2 + (y-1)^2\right] = 4x + 2y + 3$

$= 4(x-3) + 2(y-4) + 23 \le \sqrt{(4^2 + 2^2)\left[(x-3)^2 + (y-4)^2\right]} + 23 = 33$.

$P = 33 \Leftrightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{2} \Leftrightarrow x - 3 = 2(y-4) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 33$; Với $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 13$.

Vậy số phức z thỏa mãn $|z-3-4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất là $z = 5 + 5i$. Khi đó $|z+i| = \sqrt{61}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 54. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa –2019)** Cho số phức $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1-i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |a+b-5|$ là

A. $3 - \sqrt{2}$. **B.** $2 - \sqrt{2}$. **C.** $3 - 2\sqrt{2}$. **D.** $2 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i| = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1$.

Đặt $a = 1 + \sin t$, $b = 1 + \cos t\ (0 \le t \le 2\pi)$.

Khi đó $P = |a+b-5| = |\sin t + \cos t - 3| = \left|\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 3\right| = 3 - \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Ta có: $-1 \le \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le -\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{2} \le P \le 3 + \sqrt{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $3 - \sqrt{2}$.

Cách 2:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i| = 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1 \Rightarrow a, b \in [0; 2]$.

Khi đó $P = |a+b-5| = 5 - a - b = 3 - \left[(a-1) + (b-1)\right]$.

Theo BĐT Bunhia ta có:

$$(a-1)+(b-1)\le\sqrt{(1^2+1^2).\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]}=\sqrt{2}$$

Do đó $P\ge 3-\sqrt{2}$.

Câu 55. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|$.

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z+2|^2=(a+2)^2+b^2$; $|z-2|^2=(a-2)^2+b^2$.

Suy ra: $|z+2|^2+|z-2|^2=2\left(a^2+b^2\right)+8=2|z|^2+8=10$.

Ta có: $A^2=\left(|z+2|+2|z-2|\right)^2\le\left(1^2+2^2\right)\left(|z+2|^2+|z-2|^2\right)=50$.

Vì $A\ge 0$ nên từ đó suy ra $A\le\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $5\sqrt{2}$.

Câu 56. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ (khi a thay đổi) là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

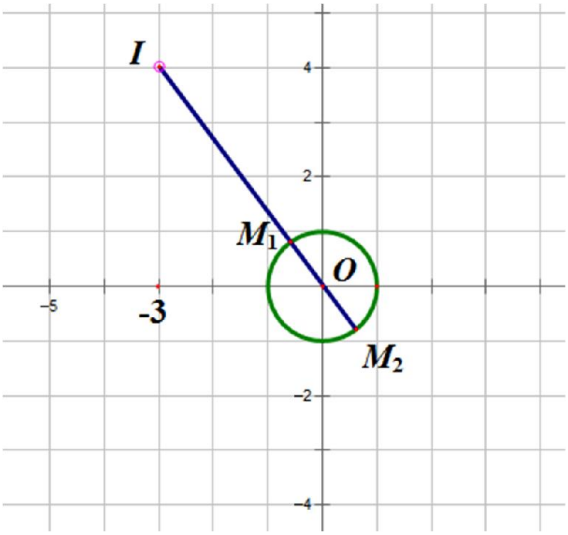
Lời giải

Chọn C

Ta có: $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}\Leftrightarrow\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{(i-a)\left(1-a^2-2ai\right)}{\left(a^2+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a^3+a+\left(a^2+1\right)i}{\left(a^2+1\right)^2}\Leftrightarrow z=\dfrac{a+i}{\sqrt{a^2+1}}\Rightarrow|z|=1.$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm O bán kính $R=1$.



Ta có: $OI=5$. Do đó: $OM_{\min}=OM_1=OI-R=5-1=4$.

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức a^2-b^2 bằng

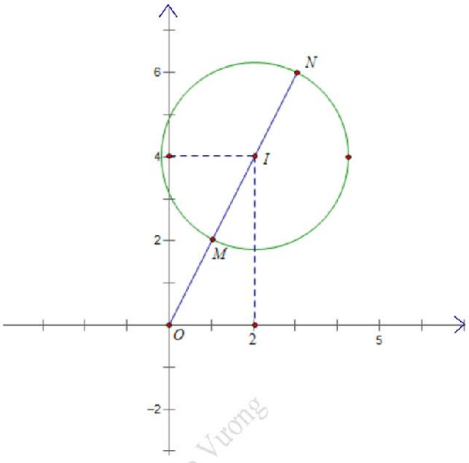
A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z-2-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=5\Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.



Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm O và I cắt đường tròn tại 2 điểm M và N như hình vẽ.

$OI=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$; $IM=IN=R=\sqrt{5}$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$|z|_{\min}=OM=OI-IM=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}=b$.

$|z|_{\max}=ON=OI+IN=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}=a$.

Vậy $a^2-b^2=40$.

Câu 58. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-3+\sqrt{3}i|=2$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

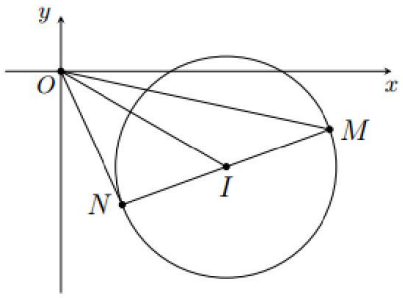
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Do $\begin{cases}|z_1-3+\sqrt{3}i|=|z_2-3+\sqrt{3}i|=2\\ |z_1-z_2|=4\end{cases}$ nên $\begin{cases}M,N\in(C):(x-3)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=2^2\\ MN=4=2.2\end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I\left(3;-\sqrt{3}\right)$, bán kính $R=2$, do đó I là trung điểm MN, $OI=\sqrt{12}$.



Ta có $|z_1|+|z_2|=OM+ON\le\sqrt{(1+1)\left(OM^2+ON^2\right)}=\sqrt{2\left(2OI^2+\dfrac{MN^2}{2}\right)}=8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON\Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 59. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Ta có:

$(z-6)(8+\overline{zi})=(x+yi-6)(8+\overline{(x+yi)i})=(x-6)(8-y)+8xy+\left[-8x(x-6)+y(8-y)\right]i$

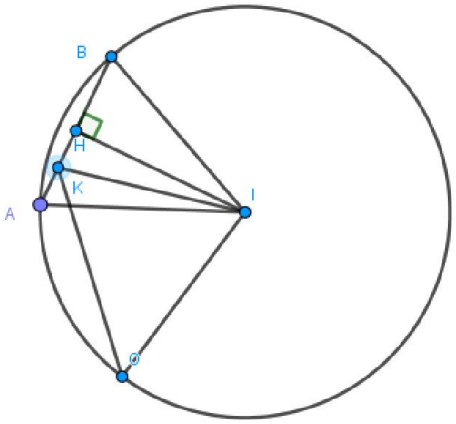
Để là $(z-6)(8+\overline{zi})$ số thực thì $-8x(x-6)+y(8-y)=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

Vậy điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 thuộc đường tròn tâm $I(3,4)$, bán kính $R=5$

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ có điểm biểu diễn $A(x_1,y_1)$; $z_2=x_2+y_2i$ có điểm biểu diễn $B(x_2,y_2)$.

Vì $|z_1-z_2|=4\Leftrightarrow\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=4\Leftrightarrow AB=4$

Ta xét $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|$



Gọi H là trung điểm AB, K là trung điểm HB, khi đó ta có:

$|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|2(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OB})|=|4\overrightarrow{OK}|=4OK$

Ta có $OI=IB=IA=5;AB=4;\text{AH}=\text{HB}=2;HK=1$ Suy ra $IH=\sqrt{21}\Rightarrow IK=\sqrt{22}$.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $OK+KI\ge OI\Leftrightarrow OK\ge OI-KI\Leftrightarrow OK\ge5-\sqrt{22}$.

Suy ra $|z_1+3z_2|=4OK\ge20-4\sqrt{22}$

Câu 60. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2019)**Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2\left|z\right|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức mô đun : $\left|z_1+z_2\right|\ge\left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right|$. Dấu bằng xảy ra $z_1=kz_2,(k\le 0)$.

Ta có: $2\left|z\right|=\left|z^2+1\right|\ge\left|\left|z^2\right|-1\right|\Leftrightarrow -2\left|z\right|\le\left|z^2\right|-1\le 2\left|z\right|$

Với $\left|z^2\right|-1\le 2\left|z\right|\Leftrightarrow\left|z^2\right|-2\left|z\right|-1\le 0\Rightarrow\left|z\right|\le 1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\left|z\right|=1+\sqrt{2}\\ z^2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3-2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)i\end{cases}\Rightarrow\left|z\right|_{\max}=1+\sqrt{2}=\left|z_2\right|$

Với $\left|z^2\right|-1\ge -2\left|z\right|\Leftrightarrow\left|z^2\right|+2\left|z\right|-1\ge 0\Rightarrow\left|z\right|\ge -1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}\left|z\right|=\sqrt{2}-1\\ z^2=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3+2\sqrt{2}\\ z=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)i\end{cases}\Rightarrow\left|z\right|_{\min}=\sqrt{2}-1=\left|z_1\right|$

Vậy $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2=6.$

Câu 61. **(SGD Đà Nẵng 2119)** Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-8i\right|=\sqrt{17}$. Biết $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, tính $m=2a^2-3b$

A. $m=-18$. **B.** $m=54$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=14$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M\left(a;b\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left|z-2-8i\right|=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-8\right)^2}=\sqrt{17}\Leftrightarrow IM=\sqrt{17}$ với $I\left(2;8\right)$.

Suy ra: M thuộc đường tròn $\left(C\right)$ có tâm I bán kính $R=\sqrt{17}$.

Lại có: $OI=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}>R$ nên O nằm ngoài $\left(C\right)$.

GTNN của môđun z là $\left|z\right|_{\min}=OM_{\min}=OI-R=\sqrt{17}\ \left(1\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi $M=OI\cap\left(C\right)$ và M nằm giữa O và $I\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta có M là trung điểm OI nên $M\left(1;4\right)$.

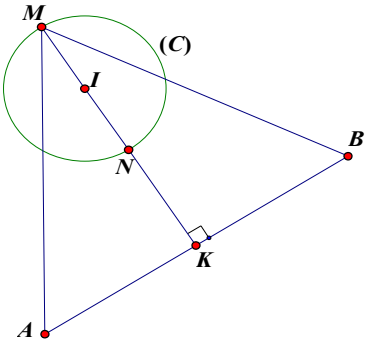
Suy ra $a=1;b=4$. Khi đó: $m=2a^2-3b=2-12=-10$.

Câu 62. **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Xét các số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z+2-3i\right|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $\left|z+1+6i\right|+\left|z-7-2i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $A(-1;-6), B(7;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (8;8)$ và trung điểm của AB là $K(3;-2)$.

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 8$.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R = \sqrt{8}$.

Ta thấy $\overrightarrow{IK} = (5;-5) \Rightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng trung trực của AB.

Xét tam giác $MAB \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MK^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

$\Rightarrow 2(MA^2 + MB^2) = 4MK^2 + AB^2 \geq (MA + MB)^2 \Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{4MK^2 + AB^2}$.

Ta có $|z+1+6i| + |z-7-2i|$ là tổng khoảng cách từ điểm M trên đường tròn (C) tới hai điểm A và B.

Vậy $MA + MB$ lớn nhất khi: $\begin{cases} MA = MB \\ MK \text{ max} \end{cases}$. Điều này xảy ra khi M là giao điểm của IK với đường tròn (C) và M nằm ngoài đoạn IK.

Ta có phương trình của đường thẳng IK: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của IK với đường tròn (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow 2t^2 = 8 \Rightarrow t = \pm 2.$$

Vậy điểm M cần tìm ứng với $t = -2$ khi đó

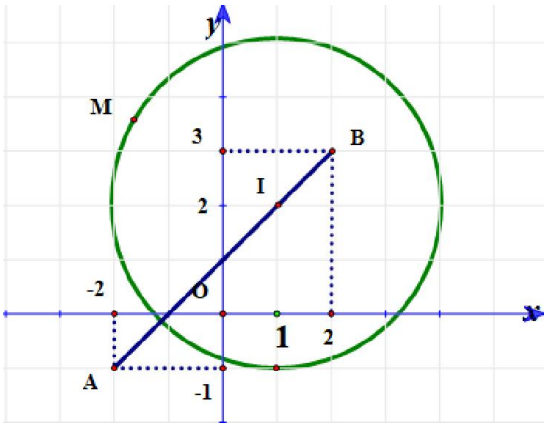
$M(-4;5) \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 2a + b = -8 + 5 = -3$

Câu 63. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+2+i| + \sqrt{6}|z-2-3i|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}(1+\sqrt{6})$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10} + 3\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1

$\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|1+i\right|\left|z+\dfrac{1-3i}{1+i}\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|z-(1+2i)\right|=3\ (1)$.

Gọi $\overrightarrow{OM}=(x;\ y)$, $\overrightarrow{OI}=(1;\ 2)$ là vec-tơ biểu diễn cho các số phức $z=x+iy$, $w=1+2i$.

Từ (1) có $\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OI}\right|=3 \Leftrightarrow MI=3$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;2)$ bán kính $R=3$, $(C):(x-1)^2+(y-2)^3=9$

Gọi $\overrightarrow{OA}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;3)$ lần lượt là vec-tơ biểu diễn cho số phức $a=-2-i$, $b=2+3i$.

Có $\overrightarrow{IA}=(-3;-3)$, $\overrightarrow{IB}=(1;1)$. Suy ra $\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Lúc đó $P=MA+\sqrt{6}MB=MA+\sqrt{2}.\sqrt{3}MB \le \sqrt{3\left(MA^2+3MB^2\right)}$.

Có $MA^2+3MB^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+3\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=4IM^2+IA^2+3IB^2$.

Có $IM^2=9$, $IA^2=18$, $IB^2=2$, nên $MA^2+3MB^2=60$.

Suy ra $P\le\sqrt{3.60}=6\sqrt{5}$.

Có $P=6\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{MA}{1}=\dfrac{\sqrt{3}MB}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P=6\sqrt{5}$.

Cách 2.

Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z khi đó

$\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|x-y+1+(x+y-3)i\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=9$. Do đó M thuộc đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Đặt $\begin{cases}a=x-1\\ b=y-2\end{cases}$ Ta có $a^2+b^2=9$. Gọi $A=(-2;-1)$, $B=(2;3)$

$P=\left|z+2+i\right|+\sqrt{6}\left|z-2-3i\right|=MA+\sqrt{6}MB=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{6\left[(x-2)^2+(y-3)^2\right]}$

$=\sqrt{(a+3)^2+(b+3)^2}+\sqrt{6\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]}=\sqrt{6(a+b)+27}+\sqrt{6}\sqrt{(-2)(a+b)+11}$

$=\sqrt{6(a+b)+27}+\sqrt{2}\sqrt{(-6)(a+b)+33} \le \sqrt{(1+2)(27+33)}=6\sqrt{5}$.

Câu 64. **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z+1-i\right|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|$ bằng $a\sqrt{b}$ (với a, b là các số nguyên tố). Tính $S=a+b$?

A. 20 . **B.** 18 . **C.** 24 . **D.** 17 .

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có:

$\left|z+1-i\right|=3\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=9\left(C\right)$;

Suy ra, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $\left(C\right)$, có tâm là $I\left(-1;1\right)$ và bán kính $R=3$.

Ta có:

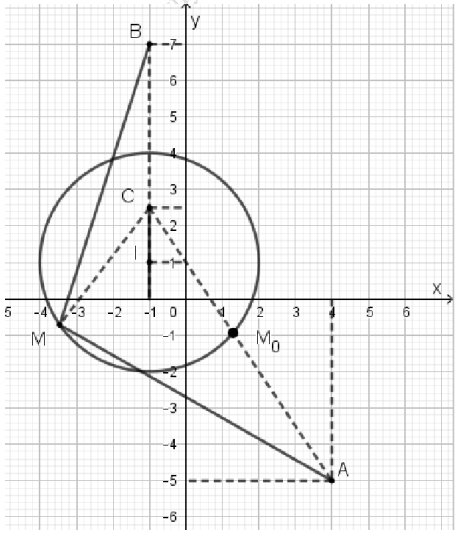
$A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|=2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-7\right)^2}$

$=2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-7\right)^2+3\left(\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2-9\right)}$

$=2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2}+\sqrt{4x^2+8x+4y^2-20y+29}$

$=2\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2}+2\sqrt{x^2+2x+y^2-10y+\frac{29}{4}}$

$=2\left(\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+5\right)^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}\right)$.



Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(C\right)$.

$\Rightarrow A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|=2MA+MB,\ A\left(4;-5\right);B\left(-1;7\right)$.

$\Rightarrow A=2MA+MB=2\left(MA+MC\right),\ C\left(-1;\frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{IC}=\left(0;\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IC}\right|=\frac{3}{2}<R_{(C)}$.

Suy ra, điểm C nằm trong đường tròn (C).

Vậy, đường thẳng AC cắt đường tròn (C) tại hai điểm.

Do đó, để $A=2(MA+MC)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải nằm giữa hai điểm A và C.

$\Rightarrow A=2(MA+MC)\geq 2AC,\ AC=\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$.

$\Rightarrow A\geq 5\sqrt{13}=a\sqrt{b}$.

Vậy, $a+b=18$.

Câu 65. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)** Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$ và thỏa mãn $|z_1-z_2|=\dfrac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\dfrac{56}{5}$. **B.** $\dfrac{28}{5}$. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z_1=x_1+y_1i,\ z_2=x_2+y_2i$, với $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$.

Do $|z_1-z_2|=\dfrac{8}{5}\Rightarrow|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|=\dfrac{8}{5}\Rightarrow\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{8}{5}$

Gọi $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)\Rightarrow M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{8}{5}$.

Mà z_1 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$

$\Rightarrow|(6-y_1)+(x_1-3)i|=|(2x_1-6)+(2y_1-9)i|\Rightarrow\sqrt{(6-y_1)^2+(x_1-3)^2}=\sqrt{(2x_1-6)^2+(2y_1-9)^2}$

$\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-6x_1-8y_1+24=0\Rightarrow M_1(x_1;y_1)\in$ đường tròn $(C):x^2+y^2-6x-8y+24=0$.

Tương tự $M_2(x_2;y_2)\in(C)$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.

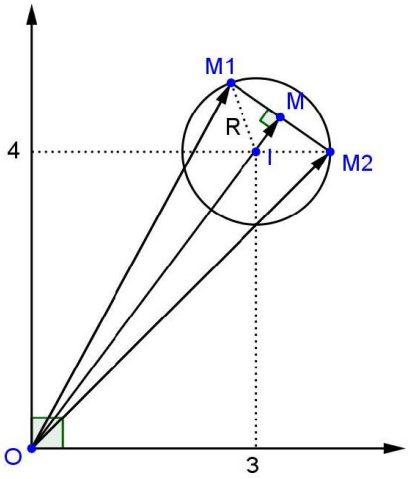
Gọi M là trung điểm $M_1M_2\Rightarrow IM\perp M_1M_2$, $IM=\sqrt{R^2-M_1M^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$, và

$|z_1+z_2|=2OM$.

Mà $OM\leq OI+IM$, dấu bằng xảy ra khi O,I,M thẳng hàng. Khi đó $OM\perp M_1M_2$, và

$OM=OI+IM=\dfrac{28}{5}$.

$\Rightarrow|z_1+z_2|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2(OI+IM)$, bằng $\dfrac{56}{5}$.



Hoặc đánh giá chọn đáp án như sau:

Gọi $N(-x_2;-y_2) \Rightarrow NM_1 = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} = |z_1+z_2|$

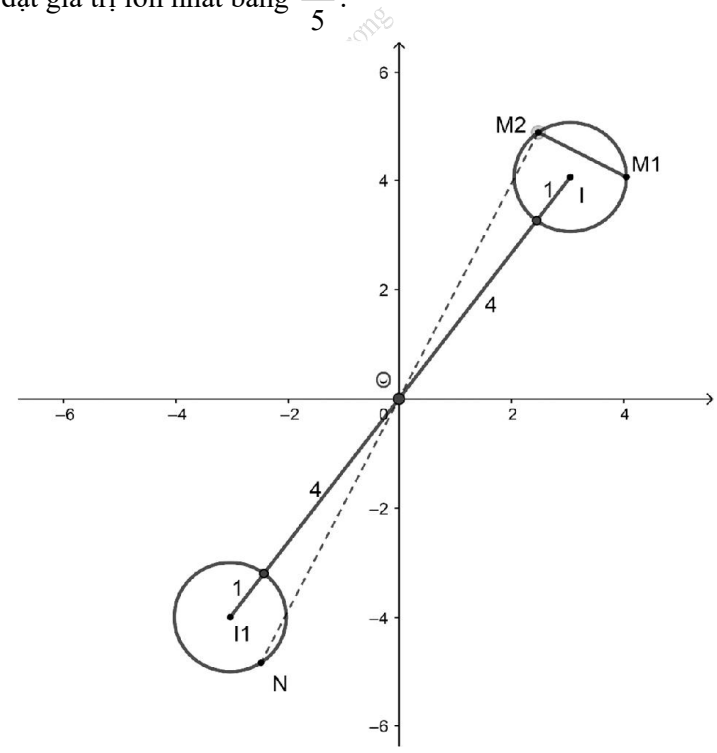
Và N đối xứng với M_2 qua gốc tọa độ O, $N \in$ đường tròn $(C_1): x^2+y^2+6x+8y+24=0$.

(C_1) có tâm $I_1(-3;-4)$, bán kính $R_1=1$, (C_1) đối xứng với (C) qua gốc tọa độ O.

Có $I_1I=10 \Rightarrow I_1I-R-R_1=8$.

Nhận xét: với mọi điểm $M_1 \in (C)$, $N \in (C_1)$ thì $M_1N \geq I_1I-R-R_1$. Loại các đáp án B,C,D

$\Rightarrow |z_1+z_2| = M_1N$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{56}{5}$.



Câu 66. Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T=|w+i|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$(3-i)|z|=\frac{z}{w-1}+1-i \Leftrightarrow \frac{z}{w-1}=3|z|-1+(1-|z|)i \Rightarrow \left|\frac{z}{w-1}\right|=\sqrt{(3|z|-1)^2+(1-|z|)^2}$..

Đặt $t=|z|$; $t>0$ (vì $|z|=0$ không thỏa phương trình trên).

(1) trở thành: $\frac{t}{|w-1|}=\sqrt{(3t-1)^2+(1-t)^2} \Leftrightarrow |w-1|=\frac{t}{\sqrt{10t^2-8t+2}}$..

$\Leftrightarrow |w-1|=\frac{1}{\sqrt{10-\frac{8}{t}+\frac{2}{t^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}};\forall t>0$..

Ta luôn có: $|w+i|\le|w-1|+|1+i|\le\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2} \Rightarrow |w+i|\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$..

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}t=|z|=\frac{1}{2}\\ w-1=k(1+i)\\ |w+i|=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{1}{2}i\\ w=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\end{cases}$.

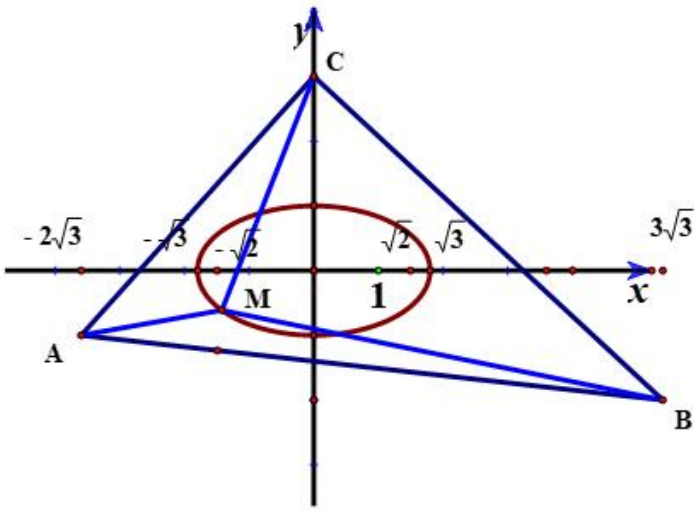
Vậy: Giá trị lớn nhất của $T=\frac{3\sqrt{2}}{2}$..

Câu 67. Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-\sqrt{2}\right|+\left|z+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+2\sqrt{3}+i\right|+\left|z-3\sqrt{3}+2i\right|+\left|z-3i\right|$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải



Chọn A

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-\sqrt{2};0)$, $F_2(\sqrt{2};0)$, lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z=x+yi$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Có $\left|z-\sqrt{2}\right|+\left|z+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2\sqrt{3}$, có $2\sqrt{3}>F_1F_2=2\sqrt{2}$.

Suy ra $M(x;y)$ chạy trên (E) có tiêu cự $2c=2\sqrt{2}$, độ dài trục lớn $2a=2\sqrt{3}$, độ dài trục nhỏ $2b=2$ và phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$.

Có $M(x;y)\in(E)\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\-1\le y\le 1\end{cases}$.

Có $P=|z+2\sqrt{3}+i|+|z-3\sqrt{3}+2i|+|z-3i|$.

$=\sqrt{(x+2\sqrt{3})^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-3\sqrt{3})^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$.

$\ge\sqrt{(x+2\sqrt{3})^2+(y+1)^2}+\sqrt{(3\sqrt{3}-x)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}$.

$\ge\sqrt{(x+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-x)^2+(2y+3)^2}+|y-3|\ (1)$ (Bất đẳng thức tam giác).

$=\sqrt{4y^2+12y+84}+3-y$.

Đặt $f(y)=2\sqrt{y^2+3y+21}+3-y$, với $-1\le y\le 1$.

Có $f'(y)=\frac{2y+3}{\sqrt{y^2+3y+21}}-1$.

$f'(y)=0\Leftrightarrow\sqrt{y^2+3y+21}=2y+3\ (1)$,

Có $-1\le y\le 1\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 3y^2+9y-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\ (\text{nhận})\\y=-4\ (\text{loại})\end{array}\right.$.

Có $f(-1)=4+2\sqrt{19}$, $f(1)=12$.

Suy ra $\underset{y\in[-1;1]}{Min}f(y)=12\Rightarrow P\ge 12$.

Đẳng thức (1) xảy ra khi $\begin{cases}x=0,y=1\\\frac{x+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-x}=\frac{y+1}{y+2}>0\end{cases}\Rightarrow x=0,y=1$.

Thử lại: Khi $x=0,y=1$ có $P=12$.

Vậy $MinP=12$ khi $x=0,y=1$.

Câu 68. Cho số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|^2+3y^2=16$. Biểu thức $P=\big||z-i|-|z-2|\big|$ đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0;y_0)$ với $x_0<0,y_0>0$. Khi đó: $x_0^2+y_0^2$ bằng

A. $\frac{20-3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{20+3\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{20+3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{20-3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z|^2+3y^2=16\Leftrightarrow x^2+4y^2=16$.

$P=\left|\sqrt{x^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right|=\left|\sqrt{x^2+(y-1)^2}-\sqrt{(2-x)^2+(-y)^2}\right|$

$\le\sqrt{(x+2-x)^2+(y-1-y)^2}=\sqrt{5}$.

$$P_{\max}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x.(-y)=(2-x)(y-1)\\x.(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x^2+4y^2=16\\x<0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-2=0\\x(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x^2+4y^2=16\\x<0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-2y\\(2-2y)^2+4y^2-16=0\\x(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x<0\\y>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\\x=1-\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1-\sqrt{7}\\y_0=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{cases}\Rightarrow x_0^2+y_0^2=\frac{20-3\sqrt{7}}{2}.$$

Nhận xét: Bài này ta dùng bất đẳng thức véc tơ như sau

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$, ta có:

$$|\vec{a}+\vec{b}|\ge\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|\Leftrightarrow\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\ge\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right|.$$

Dấu " = " xãy ra $\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2=a_2b_1\\a_1b_1<0\\a_2b_2<0\end{cases}$.

Câu 69. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$.

A. $S=11$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn B

Trong mp tọa độ Oxy, Ta gọi các điểm biểu diễn của các số phức:

$z=x+yi$ là $M(x;y)$; $z=-4+0i$ là $F_1(-4;0)$; $z=4+0i$ là $F_2(4;0)$.

Ta có: $|z+4|+|z-4|=10\Rightarrow MF_1+MF_2=10$. (1)

$$\begin{cases}MF_1^2=(x+4)^2+y^2\\MF_2^2=(x-4)^2+y^2\end{cases}\Rightarrow MF_1^2-MF_2^2=16x\Rightarrow MF_1-MF_2=\frac{8x}{5}.(2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $MF_1=5+\dfrac{4x}{5}$.

Mặt khác $MF_1^2=(x+4)^2+y^2\Rightarrow\left(5+\dfrac{4x}{5}\right)^2=(x+4)^2+y^2\Rightarrow\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ là Elip có phương trình

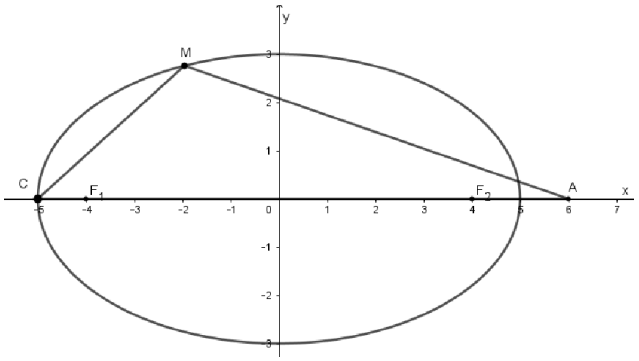
$(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Theo đề, ta cần tìm điểm thuộc (E) sau cho $|z-6|$ lớn nhất.

Ta gọi các điểm biểu diễn số phức: $z=6+0i$ là $A(6;0)$; $z=a+bi$ là $M(a;b)\in(E)$;

$z=-5+0i$ là $C(-5;0)$.

Do đó, $|z-6|$ lớn nhất khi và chỉ khi MA lớn nhất.



Dựa, vào hình vẽ trên ta thấy để MA lớn nhất khi $M \equiv C(-5;0) \Rightarrow a=-5; b=0 \Rightarrow S=-5$.

Câu 70. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$?

A. $S=-3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=11$.

Lời giải

Chọn C

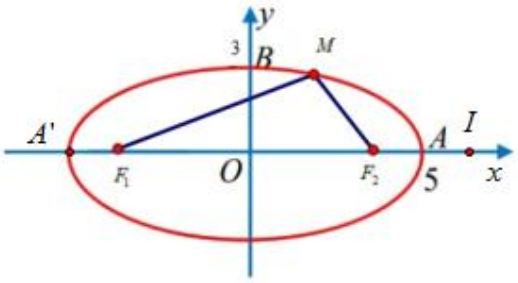
Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

$|z-4|+|z+4|=10 \Leftrightarrow |(a-4)+bi|+|(a+4)+bi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10(*)$

Xét $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$

Suy ra M thuộc Elip có $\begin{cases} c=4 \\ 2a=10 \Rightarrow a=5 \end{cases} \Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=3$



Ta có: $|z-6|=\sqrt{(a-6)^2+b^2}=IM, I(6;0)$, suy ra $\max|z-6|=IA'$ hay điểm

$M \equiv A'(-5;0) \Rightarrow z=-5+0i \Rightarrow S=-5$.

Câu 71. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$, M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|1+z|+2|1-z|$. Giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{5}+2$. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{5}+4$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow A=|1+z|+2|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2+2x}+2\sqrt{2-2x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2+2x}+2\sqrt{2-2x}$ với $x\in[-1;1]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+2x}}-\dfrac{2}{\sqrt{2-2x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}}{\sqrt{2(1-x^2)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\in[-1;1]$.

Khi đó $f(-1)=4$; $f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $f(1)=2$.

Do đó $M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=f(1)=2$. Suy ra $M+m=2\sqrt{5}+2$.

Câu 72. Xét tập hợp S các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $\left|3z-\bar{z}\right|=\left|(1+i)(2+2i)\right|$. Biểu thức $Q=\left|z-\bar{z}\right|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0=x_0+y_0i$ (khi z thay đổi trong tập S). Tính giá trị $T=M.x_0y_0^2$.

A. $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left|3z-\bar{z}\right|=\left|(1+i)(2+2i)\right|\Leftrightarrow 4x^2+16y^2=16\Leftrightarrow x^2+4y^2=4\Leftrightarrow 4y^2=4-x^2$

Do đó, $Q=\left|z-\bar{z}\right|(2-x)=\sqrt{4y^2}(2-x)=\sqrt{4-x^2}(2-x)=f(x),\ (-2\le x\le 2)$.

$f'(x)=\dfrac{2x^2-2x-4}{\sqrt{4-x^2}},(-2<x<2)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\notin(-2\,;\,2)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-1$.

Mặt khác, $f(-2)=0, f(2)=0, f(-1)=3\sqrt{3}$.

Suy ra $M=3\sqrt{3}$ tại $x_0=-1, y_0^2=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $T=\dfrac{-9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 73. **(THPT Hậu Lộc 2 2019)** Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

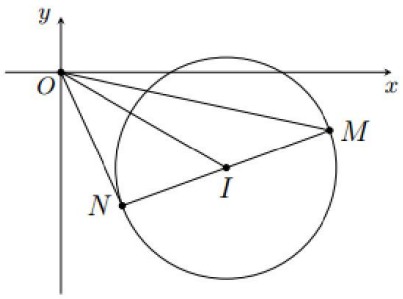
Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Do $\begin{cases}\left|z_1-3+\sqrt{3}i\right|=\left|z_2-3+\sqrt{3}i\right|=2\\\left|z_1-z_2\right|=4\end{cases}$ nên $\begin{cases}M,N\in(C):(x-3)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=2^2\\MN=4=2.2\end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I(3;-\sqrt{3})$, bán kính $R=2$, do đó I là trung điểm MN, $OI=\sqrt{12}$.



Ta có $|z_1|+|z_2|=OM+ON\le\sqrt{(1+1)(OM^2+ON^2)}=\sqrt{2\left(2OI^2+\dfrac{MN^2}{2}\right)}=8$.

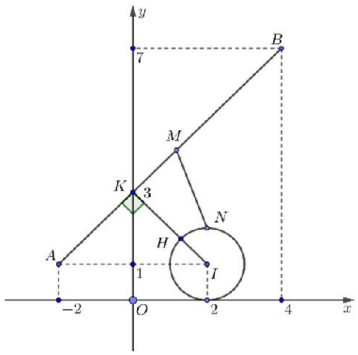
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON\Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 74. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $2\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}+1$.

Lời giải

Chọn C



Trên mặt phẳng Oxy, gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z_1; $A(-2;1)$, $B(4;7)$ lần lượt là điểm biểu cho các số phức $-2+i$ và $4+7i$ $\Rightarrow AB=6\sqrt{2}$.

Từ đó ta được $MA+MB=6\sqrt{2}=AB$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z_1 là đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $d:x-y+3=0$.

Đặt $z_3=-z_2$, khi đó

$|iz_2-1+2i|=1\Leftrightarrow|-iz_3-1+2i|=1\Leftrightarrow|z_3-2-i|=1$. Gọi $N(c;d)$ là điểm biểu diễn cho z_3; $I(2;1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $2+i$, khi đó $IN=1$ nên tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z_3 là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$|z_1+z_2|=|z_1-z_3|=MN$.

Dễ thấy hình chiếu vuông góc của điểm $I(2;1)$ trên đường thẳng (d) là điểm $K(0;3)$ thuộc đoạn AB suy ra $MN\ge KH$ với H là giao điểm của IK với (C) và thuộc đoạn IK.

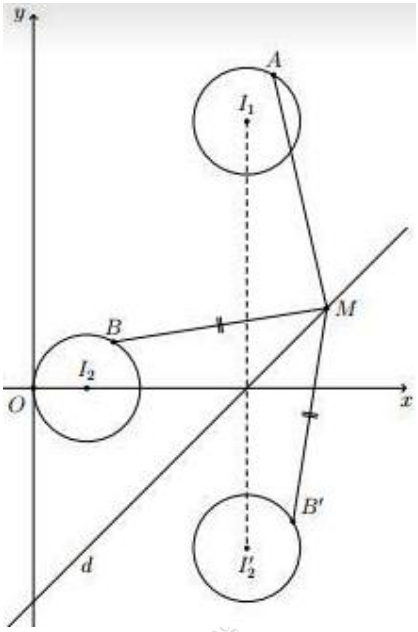
Do đó $\min MN=KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$. Vậy $\min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$

Câu 75. **(Trường Thpt Hàm Rồng 2019)** Cho số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i|=|z_2-1|=1$ và $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i|$. Tính $|z_1-z_2|$ khi $P=|z-z_1|+|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8 **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1. Suy ra A thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4;5), R=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức z_2. Suy ra B thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0), R=1$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$

Theo giả thiết $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i| \Leftrightarrow x-y=4$. Suy ra M thuộc đường thẳng (d) $x-y-4=0$

Gọi (C_2') có tâm $I_2'(4;-3), R=1$ là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0), R_2=1$ qua đường thẳng d. Gọi B' là điểm đối xứng với đối xứng với B qua đường thẳng d. Ta có $P=|z-z_1|+|z-z_2|=MA+MB=MA+MB' \geq AB'=I_1I_2'-R_1-R_2=6$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi A, B', I_1, I_2', M thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{I_1A}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_1I_2'}$ suy ra $A(4;4)$ và $\overrightarrow{I_2B'}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_2'I_1}$ suy ra $B'(4;-2) \Rightarrow B(2;0)$. $AB=2\sqrt{5}$.

Vậy $|z_1-z_2|=2\sqrt{5}$.

Câu 76. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)|z|=\frac{z}{\omega}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|\omega+1-i|$

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

$(2+i)|z|=\frac{z}{\omega}+1-i \Leftrightarrow \frac{z}{\omega}=(2+i)|z|-1+i.$

$\Leftrightarrow \frac{z}{\omega}=(2|z|-1)+(|z|+1)i \Rightarrow \left|\frac{z}{\omega}\right|=\sqrt{(2|z|-1)^2+(|z|+1)^2} \Leftrightarrow |\omega|=\sqrt{\frac{|z|^2}{5|z|^2-2|z|+2}}$

$f(t)=\frac{t^2}{5t^2-2t+2}(t\ge 0) \Rightarrow f'(t)=\frac{-2t^2+4t}{(5t^2-2t+2)^2} \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=2$

Bảng biến thiên

t	0		2		+∞
f(t)	0	+	0	-	
f(t)		↗	$\frac{2}{9}$	↘	

Ta có $T=|\omega+1-i|\le|z|+|1-i|\le\sqrt{\frac{2}{9}}+\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Câu 77. Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$ (z_1 có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\frac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$ (trong đó $n,p\in\mathbb{N}$; m, q là các số nguyên tố). Tổng $m+n-p-q$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

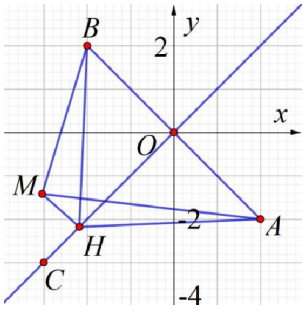
Lời giải

Chọn A

$z^2+8i=0 \Rightarrow z_1=2-2i$ và $z_2=-2+2i$.

$P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\frac{z_2}{2}\right|=|z-z_1|+|z-z_2|+\left|z+2\overline{z_1}+\frac{\overline{z_2}}{2}\right|=MA+MB+MC.$

Trong đó M, $A(2;-2)$, $B(-2;2)$, $C(-3;-3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z, z_1, z_2, $\omega=-2\overline{z_1}-\frac{\overline{z_2}}{2}=-3-3i$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên OC.

Ta có $MA+MB\ge HA+HB \Rightarrow MA+MB+MC\ge HA+HB+HC$.

Do đó $P_{\min}=(MA+MB+MC)_{\min}=HA+HB+HC \Leftrightarrow M\equiv H \Rightarrow M\in OC: y=x$.

Gỉa sử $M(x;x)\left(x\in[-3;0)\right)\Rightarrow P=MA+MB+MC=\sqrt{2}(x+3)+2\sqrt{2\left(x^2+4\right)}$

$\Rightarrow P'=\sqrt{2}+2\sqrt{2}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow P'=0\Rightarrow x=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\in[-3;0)$.

Vậy $P_{\min}=\sqrt{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+3\right)+2\sqrt{2\left[\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\right]}=2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

Suy ra $m=2$, $n=6$, $p=3$, $q=2\Rightarrow m+n-p-q=3$.

Câu 78. Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$.

$\left|z^2+1\right|=\left|a^2-b^2+1+2abi\right|=\sqrt{\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2}$; $2|z|=2\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có $\left|z^2+1\right|=2|z|\Rightarrow\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2=4\left(a^2+b^2\right)$

$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2+2\left(a^2-b^2\right)+1-4\left(a^2+b^2\right)=0\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2-6b^2+1=0$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)^2-6\left(a^2+b^2\right)+1=-4a^2$.

Vì $-4a^2\le 0,\forall a\in\mathbb{R}$ nên $\left(a^2+b^2\right)^2-6\left(a^2+b^2\right)+1\le 0\Rightarrow 3-2\sqrt{2}\le a^2+b^2\le 3+2\sqrt{2}$.

Suy ra $\sqrt{2}-1\le\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{2}+1\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{2}-1\\M=\sqrt{2}+1\end{cases}\Rightarrow m^2+M^2=6.$

$M=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a^2+b^2=3+2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)\end{cases}.$

$m=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a^2+b^2=3-2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}.$

Câu 79. **(Sở Nam Định - 2019)** Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$.

A. 7. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $2\sqrt{58}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)\Leftrightarrow 5w+5i=(2+i)(z-4)+5i$

$\Rightarrow |5w+5i|=|(2+i)(z-4)+5i|\Rightarrow 5|w+i|=|(1+2i)(z-4+1+2i)|=\sqrt{5}|z-3+2i|$

$\Rightarrow 5.\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}|z-3+2i|\Rightarrow |z-3+2i|=3$.

Ta có:

$|z+z_1|^2+|z-z_1|^2=2\left(|z|^2+|z_1|^2\right);\ \forall z,z_1$. (1)

$|z|^2+|z_1|^2\geq\dfrac{\left(|z|+|z_1|\right)^2}{2};\ \forall z,z_1$. (2)

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|$.

Áp dụng (1) và (2), ta có:

$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2=2\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2\geq\frac{\left(|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|\right)^2}{2}=\frac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}.$$

Vậy, ta có: $\dfrac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}\leq 2\left(|z-3-2i|^2+9\right)\Rightarrow\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2\leq 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

$\Rightarrow P^2\leq 4\left(|z-3-2i|^2+9\right)$.

Do $4\left(|z-3-2i|^2+9\right)=4\left(|z-3+2i-4i|^2+9\right)$ nên $P^2\leq 4\left(\left(|z-3+2i|+|-4i|\right)^2+9\right)$

$\Rightarrow P^2\leq 4\left(7^2+9\right)=232\Rightarrow P\leq 2\sqrt{58}$.

Nguyễn Bảo Vương

Cách 2.

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)$ thay $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow |z-3+2i|=3$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Gọi $M\in(C)$.

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=AM+BM$; $A(0;2),B(6;2)$.

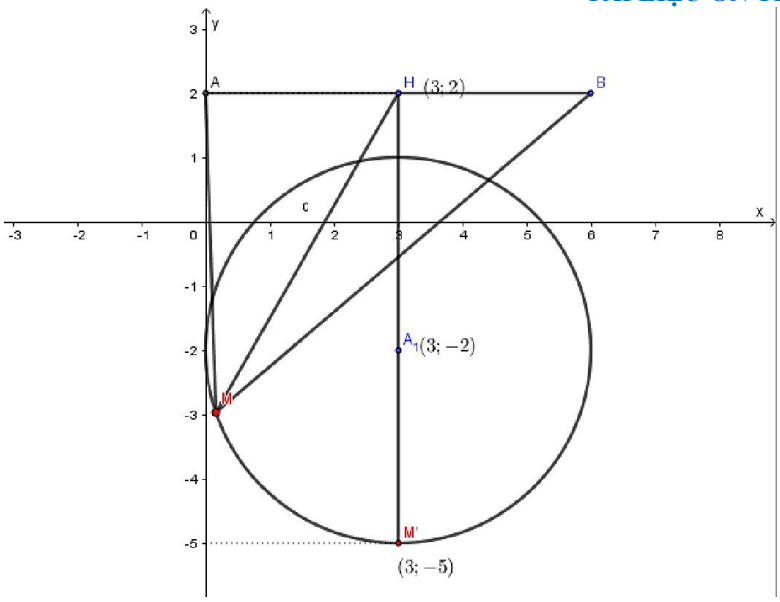
Suy ra $P\leq\sqrt{2\left(AM^2+BM^2\right)}$.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

Ta có: $P\leq\sqrt{2\left(AM^2+BM^2\right)}=\sqrt{2\left(2MH^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)}=\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Vậy, $P=|z-2i|+|z-6-2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi MH^2 đạt giá trị lớn nhất.

Dựa vào hình vẽ sau



Suy ra, MH^2 đạt giá trị lớn nhất khi $M \equiv M' \Rightarrow P^2 \le 232 \Rightarrow P = 2\sqrt{58}$.

Câu 80. Cho hai số phức $z_1; z_2$ đều khác 1 và -1 sao cho $z_1^{44} = z_2^{58} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |z_1 - z_2|$ gần nhất với giá trị nào sau đây.

A. $\frac{11}{100}$. **B.** $\frac{7}{205}$. **C.** $\frac{7}{200}$. **D.** $\frac{1}{200}$.

Lời giải

Chọn D

$z_1^{44} = z_2^{58} = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$

Gọi φ là một acgumen của z_1 và φ' là một acgumen của z_2 với $\varphi; \varphi' \in (0; 2\pi)$.

$z_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi; z_2 = \cos\varphi' + i\sin\varphi'$.

$$z_1^{44} = z_2^{58} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{44} = 1 \\ (\cos\varphi' + i\sin\varphi')^{58} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 44\varphi + i\sin 44\varphi = 1 \\ \cos 58\varphi' + i\sin 58\varphi' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 44\varphi = 1 \\ \sin 44\varphi = 0 \\ \cos 58\varphi' = 1 \\ \sin 58\varphi' = 0 \end{cases}.$$

$$\underset{z_2 \ne \pm 1}{\overset{z_1 \ne \pm 1}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \cos 44\varphi = 1 \\ \sin\varphi \ne 0 \\ \cos 58\varphi' = 1 \\ \sin\varphi' \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{k\pi}{22}; \varphi \ne k\pi \\ \varphi' = \frac{t\pi}{29}; \varphi' \ne t\pi \end{cases} (k; t \in \mathbb{Z}).$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{k\pi}{22}; \varphi \ne k\pi \\ \varphi \in (0; 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 1 \le k \le 43; \\ k \ne 22 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{t\pi}{29}; \varphi \ne t\pi \\ \varphi \in (0; 2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \mathbb{Z} \\ 1 \le t \le 57 \\ t \ne 29 \end{cases}.$$

$$T = |z_1 - z_2| = |\cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi' - i\sin\varphi'| = \sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + (\sin\varphi - \sin\varphi')^2}.$$

$$=\sqrt{2-2\left(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi'\right)}=\sqrt{2-2\cos\left(\varphi-\varphi'\right)}=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{k\pi}{22}-\frac{t\pi}{29}\right)}.$$

$$T_{\min}=\left|z_1-z_2\right|_{\min}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{k\pi}{22}-\frac{t\pi}{29}\right)_{\max}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le k\le 43;k\ne 22\\1\le t\le 57;k\ne 29\\\left|29k-22t\right|_{\min}\end{cases}.$$

Lấy $k=3;t=4$ thì $\left|29k-22t\right|_{\min}=1$; số nguyên dương nhỏ nhất.

Vậy $\min\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{2-2\cos\left(\frac{3\pi}{22}-\frac{4\pi}{29}\right)}\simeq 0.00492$.

Câu 81. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z_1-z_2\right|^2+\left|z_2-z_3\right|^2+\left|z_3-z_1\right|^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A\left(x_1;y_1\right)$; $B\left(x_2;y_2\right)$; $C\left(x_3;y_3\right)$ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z_1; z_2; z_3.

vì $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$ suy ra A; B; C thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Ta có $\left|z_1-z_2\right|=AB$; $\left|z_2-z_3\right|=BC$ $\left|z_3-z_1\right|=AC$.

Suy ra

$P=\left|z_1-z_2\right|^2+\left|z_2-z_3\right|^2+\left|z_3-z_1\right|^2=AB^2+BC^2+AC^2=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=6-2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)=9-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2=9-\left(3\overrightarrow{OG}\right)^2=9-OG^2\le 9$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Dấu " = " xảy ra khi $G\equiv O$, hay ΔABC đều.

Câu 82. Cho số phức z thỏa mãn $3\left|z+\overline{z}\right|+2\left|z-\overline{z}\right|\le 12$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $\left|z-4+3i\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

Lời giải

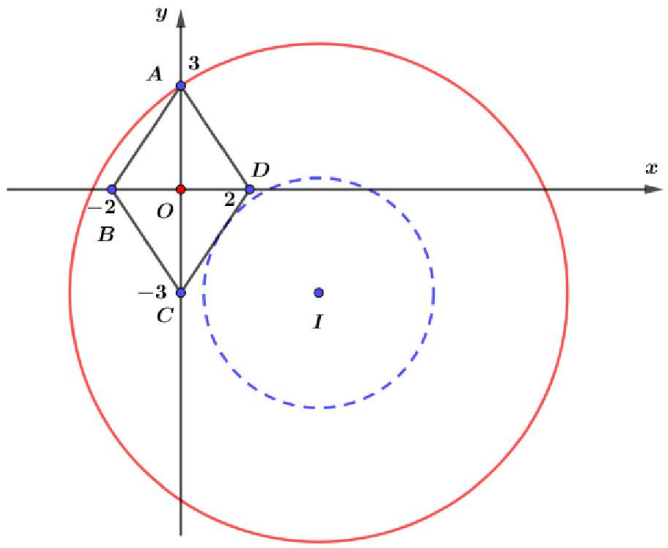
Chọn B

Gọi $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}$.

Xét $3\left|z+\overline{z}\right|+2\left|z-\overline{z}\right|\le 12\Leftrightarrow 3\left|x\right|+2\left|y\right|\le 6.$ (1)

Ta có: $P=\left|z-4+3i\right|=\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(y+3\right)^2}$ (2)

Tập hợp những điểm biểu diễn $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}.$ thỏa mãn (1) là miền trong (tính cả biên) của hình thoi $ABCD$ với $A(0;3);\ B(-2;0);\ C(0;-3);\ D(2;0)$ tạo bởi 4 đường thẳng $3|x|+2|y|=6.$ Điểm biểu diễn z thỏa mãn (2) là đường tròn tâm $I(4;-3)$ bán kính $R=P\geq 0$.



P đạt min, max khi bán kính đường tròn đạt min, max khi xét sự tương giao với miền hình thoi $ABCD$.

Ta có đường tròn giao với miền hình thoi điểm gần tâm nhất khi đường tròn tiếp xúc cạnh CD: $3x-2y-6=0$ tương ứng có $m=\dfrac{|3.4+2.3-6|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}.$ Điểm giao xa nhất là đỉnh $A(0;3)$ của hình thoi. Do đó $M=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}.$

$\Rightarrow M.m=24.$