Chương 4

GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0.

1. Định nghĩa. Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mọi số dương nhỏ bao nhiêu tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Bằng cách sử dụng các kí hiệu toán học, định nghĩa trên có thể viết như sau:

$$\boxed{\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon\right)}.$$

Kí hiệu: $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$

Ví dụ 1. Chứng minh dãy số $u_n = \dfrac{(-1)^n}{4n+5}$ sau đây có giới hạn là 0.

Lời giải

....

....

....

....

....

2. Nhận xét

- $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0.$
- Nếu (u_n) có $u_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\lim u_n = \lim 0 = 0$.
- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $\begin{cases} |u_n| \le v_n \\ \lim(v_n) = 0 \end{cases}$ thì $\lim u_n = 0$.

‖ Đây là một nhận xét quan trọng để chứng minh giới hạn bằng 0 bằng định nghĩa.(*giới hạn kẹp*).

3. Các dãy số có giới hạn 0 thường gặp.

$\lim \dfrac{1}{n} = 0$	$\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0\ (\alpha > 0)$	$\lim \dfrac{C}{n} = 0$ **với** C **là hằng số**
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0\ \left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$	$\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0\ (k \ge 2,\ k \in \mathbb{Z})$	$\lim q^n = 0\ \left(|q| < 1\right)$.

4. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0

a). $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$. b). $u_n = \dfrac{n\sin 2n}{n^3+2}$. c).$u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$. d.) $u_n = \dfrac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2+1}$.

Lời giải

....

....

....

....

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.

1. Định nghĩa. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\boxed{\lim(u_n - L) = 0}$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = L$, viết tắt là $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$.

Nhận xét:

- Để chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L ta chuyển về việc đi chứng minh $\boxed{\lim(u_n - L) = 0}$.
- $\lim u_n = a \Leftrightarrow |u_n - a|$ nhỏ bao nhiêu cũng được với n đủ lớn.
- Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

a). $\lim\left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b). $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ví dụ 3. Chứng minh rằng

a). $\lim\left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$.

b). $\lim\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Một số định lý.

Định lý 1. *(tìm giới hạn của hàm trị tuyệt đối hoặc căn thức)* Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

- $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.
- Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lý 2. Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và C là một hằng số. Khi đó

$\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$.	$\lim(u_n.v_n) = L.M$	$\lim(Cu_n) = CL$.
$\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{L}{M}$ **với** $M \ne 0$.	$\lim c = c$ (c là hằng số).	

Nhận xét.

- Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$ (gọi định lí kẹp).
- Điều kiện để một dãy số tăng hoặc dãy số giảm có giới hạn hữu hạn:
  - ✧ Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.
  - ✧ Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $|q| < 1$.

Khi đó tổng $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ được gọi là tổng vô hạn của cấp số nhân và

$$\boxed{S = \lim S_n = \lim \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q}}.$$

Vậy cấp số nhân (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ thì $\boxed{S = u_1 + u_2 + ... = \dfrac{u_1}{1-q}}$.

📖Ví dụ 4. Tính các tổng sau

a). $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{3^n} + ...$ **b).** $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \cdots + (-1)^n.\dfrac{1}{2^n} + \cdots$ **c).** $S = 16 - 8 + 4 - 2 + ...$

Lời giải

Ví dụ 5. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số

a). $A = 0,353535\ldots$. **b).** $B = 5,231231\ldots$.

Lời giải

III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Định nghĩa. Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, **đều lớn hơn số dương** đó.

Khi đó ta viết

$$\boxed{\lim(u_n) = +\infty} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{\lim u_n = +\infty}.$$

Từ định nghĩa, ta có các kết quả

$$\boxed{\lim n = +\infty; \quad \lim \sqrt{n} = +\infty; \quad \lim \sqrt[3]{n} = +\infty}.$$

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Định nghĩa. Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ số hạng nào đó trở đi, **đều nhỏ hơn số âm** đó.

Khi đó ta viết

$$\boxed{\lim(u_n) = -\infty} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{\lim u_n = -\infty}.$$

Nhận xét.

- Nếu $\lim(u_n) = -\infty$ thì $\lim(-u_n) = +\infty$.

- Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
- Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\dfrac{1}{u_n} = 0$.

3. Các quy tắc tìm giới hạn vô cực

• **Quy tắc nhân:**

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$		$\lim u_n$	$\lim v_n = L \neq 0$	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-$	$+\infty$

• **Quy tắc chia**

$\lim u_n = L \neq 0$ **có dấu**	$\lim v_n = 0, v_n \neq 0$ **có dấu**	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

4. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 6. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = 3n^3 + 2n^2 - 2$ **b).** $u_n = -2n^4 + 3n^3 + n$ **c).** $u_n = \sqrt{\dfrac{4n^4 + 2n^3 + 1}{n^2 + 1}}$

d). $u_n = 4^n + 2.(-3)^{n+1}$ **e).** $u_n = n\cos\dfrac{n^2\pi}{10} - 4n^2$ **f).** $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4 + 4n^2 - 1} - 2n^2}{\sqrt{n^3 + 3n} - 2n}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. Chứng minh dãy số có giới hạn là 0.

1. Phương pháp.

① **Cách 1**: Áp dụng định nghĩa.

② **Cách 2:** Sử dụng các định lí sau:

- Nếu k là số thực dương thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.
- Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn là 0.

a). $u_n = \frac{\cos 4n}{n+3}$ b). $u_n = \frac{1+\cos n^3}{2n+3}$ c). $u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}$

Lời giải

Bài tập 2. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0

a). $u_n = \sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1}$.

b). $u_n = \dfrac{3^n \sin 2n + 4^n}{2^n + 4.5^n}$.

c). $u_n = \dfrac{n+\sin 2n}{n^2+n}$.

d). $u_n = \dfrac{n+\cos\dfrac{n\pi}{5}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}}$.

Lời giải

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

a). Chứng minh rằng $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{2}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b). Bằng phương pháp quy nạp chứng minh rằng $0 < u_n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}*$.

c). Dãy (u_n) có giới hạn 0.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim \dfrac{n-2\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim\left(5-\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ bằng:

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 5. **D.** -4.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim\left(n^2\sin\dfrac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n = \frac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim(u_n + v_n)$ có giá trị bằng:

A. 3.   **B.** 0.   **C.** 2.   **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Dạng 2. Dùng định nghĩa chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn L.

1. Phương pháp.

- Ta biến đổi $\lim u_n = L$ về dạng tìm lim có giới hạn bằng 0 tức là chứng minh $\lim|u_n - L| = 0$.
- Kết luận $\lim u_n = L$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 4. Chứng minh:

a). $\lim\frac{2n+3}{4n+5} = \frac{1}{2}$ b). $\lim\frac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} = \frac{2}{3}$ c). $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = 1$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Tìm giới hạn của dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn bằng quy tắc, định lý.

Bài toán 1. Dãy (u_n) là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (với $P(n), Q(n)$ là hai đa thức).

1. Phương pháp:

- Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.
- Nếu k là số thực dương thì $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 5. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{5n^2 + 3}$ b). $u_n = \dfrac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n}$ c). $u_n = \dfrac{2n^4 + 3n^2 - n}{(2n+1)(1-3n)(2n^2+1)}$

d). $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 2n} - \dfrac{1}{2n^2 + 3}$ e). $u_n = \dfrac{(2n-1)^2(3-4n^3)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$ f). $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2\sqrt{n} - 3}$

Lời giải

Bài tập 6. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim \frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$. **b).** $\lim(2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n}-\frac{1}{n^2+3n-1}\right)$.

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Lời giải.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng:

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 12. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{1}{n+1}$ và $v_n=\dfrac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\dfrac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=10$. **B.** $a=8$. **C.** $a=6$. **D.** $a=4$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là:

A. b là một số thực tùy ý. **B.** $b=2$.

C. không tồn tại b. **D.** $b=5$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 15. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

A. $L=\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=2$. **D.** $L=1$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=-4$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 17. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{5}$. **C.** $L=\dfrac{1}{2}$. **D.** $L=0$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0$.

A. $a\le 0; a\ge 1$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a<0;\ a>1$. **D.** $0\le a<1$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 19. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$.   **B.** $L=1$.   **C.** $L=3$.   **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 20. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{\left(n^2+2n\right)\left(2n^3+1\right)\left(4n+5\right)}{\left(n^4-3n-1\right)\left(3n^2-7\right)}$.

A. $L=0$.   **B.** $L=1$.   **C.** $L=\dfrac{8}{3}$.   **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 21. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}$.

A. $L=\dfrac{1}{2}$.   **B.** $L=1$.   **C.** $L=\dfrac{1}{8}$.   **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Bài Toán 2. Dãy u_n là một phân thức dạng $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (với $P(n),Q(n)$ là các biểu thức chứa căn của n).

1. Phương pháp.

① **Bước 1.** Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.

② **Bước 2.** Khi đó ta có các kết quả sau

- Nếu $\lim u_n = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = C \Rightarrow$ giới hạn của dãy số là C.
- Nếu $\lim u_n = \lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \left[\begin{array}{l} 0\times\infty \\ \infty\times\infty \\ \frac{\infty}{\infty} \end{array}\right.$ thì ta nói giới hạn đó có dạng vô định.

Khi đó để tính tiếp giới hạn ta phải khử dạng vô định bằng các kỹ thuật sau:

☞ **Đối với căn thức:** nhân lượng liên hợp của bậc hai và bậc ba(thêm đuôi)

- $\sqrt{a} - b = \frac{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)}{(\sqrt{a}-b)} = \frac{a-b^2}{(\sqrt{a}-b)}$
- $\sqrt{a} + b = \frac{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)}{(\sqrt{a}+b)} = \frac{a-b^2}{(\sqrt{a}+b)}$
- $\sqrt[3]{a} - b = \frac{(\sqrt[3]{a}-b)\left[(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2} = \frac{a-b^3}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a} + b = \frac{(\sqrt[3]{a}+b)\left[(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2} = \frac{a+b^3}{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a - \sqrt[3]{b} = \frac{(a-\sqrt[3]{b})\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$
- $a + \sqrt[3]{b} = \frac{(a+\sqrt[3]{b})\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$
- $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\left[(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right]}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a-b}{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$.
- $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left[(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right]}{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a+b}{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$

☞ **Đối với hàm đa thức:** ta đặt nhân tử chung bằng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

- Thừa số chung.
- Hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Nhóm, tách và thêm bớt hạng tử.

☞ **Nhớ:**

- Nếu ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}$
- Nếu bậc ba ax^3+bx^2+cx+d thì ta đoán nghiệm $x = x_0$ rồi chia đa thức để đưa về $\boxed{ax^3+bx^2+cx+d = (x-x_0)f(x)}$, với $f(x)$ là hàm bậc hai.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 7. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}$ b). $u_n=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$

c). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$ d). $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt[3]{n^3+3n}}{\sqrt[4]{16n^4+1}}$

Lời giải

Bài tập 8. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2$

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n$ d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

e). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}$ f). $u_n=\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$

Lời giải

Bài tập 9. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$

b). $u_n = \dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}$

c). $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)$

d). $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)$

Lời giải

Bài tập 10. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2+2n}-3n}{4n+3}$.

b). $\lim \dfrac{3\sqrt[4]{n^5}+4n-2}{2\sqrt[4]{n^5}-3n}$.

c). $\lim \left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)$.

d). $\lim \left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$.

e). $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$

f). $\lim \left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt[3]{n^2+n^3}\right)$

Lời giải

5. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ bằng:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ bằng:

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n}+5}$ là:

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 25. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 26. Biết rằng $\lim \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2} = a\sin\dfrac{\pi}{4}+b$. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=1$. **B.** $S=8$. **C.** $S=0$. **D.** $S=-1$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 27. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 10. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 28. Kết quả của giới hạn $\lim (n+1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 29. Biết rằng $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3}+c$ với $a,\, b,\, c$ là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a+c}{b^3}$.

A. $P = 3$. **B.** $P = \dfrac{1}{3}$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 30. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 31. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 32. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

Câu 36. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 37. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là:

A. -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 40. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 41. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 42. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n\right)$ là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 43. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 44. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Câu 45. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Câu 46. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Câu 47. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ là:

A. $\sqrt{7}-1$. **B.** 3. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

Câu 48. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 49. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Bài Toán 3. Dãy (u_n) là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n),Q(n)$ là các biểu thức chứa hàm mũ a^n,b^n,c^n,...

1. Phương pháp.

- Chia cả tử và mẫu cho a^n với a là cơ số lớn nhất.
- Rồi áp dụng kết quả của giới hạn $\lim q^n=0\ \left(|q|<1\right)$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 11. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}$ **b).** $u_n=\dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}$ **c).** $u_n=\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}$

d). $u_n=\dfrac{\sqrt{2}^{n+2}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}$ **e).** $u_n=\dfrac{(-3)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}$ **f).** $u_n=\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$

g). $\lim\dfrac{2^n+3^n-4^n}{2^n+3^{n+1}+4^{n+1}}$ **h).** $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 51. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

A. $-\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Câu 52. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$ bằng:

A. -15. **B.** -10. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải.

Câu 53. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 54. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

A. -1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 55. Biết rằng $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $S=26$. **B.** $S=30$. **C.** $S=21$. **D.** $S=31$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 56. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 57. Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]$ là:

A. 3. **B.** $-\sqrt{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 58. Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 59. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 60. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 61. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\le\dfrac{1}{1024}$.

A. 2007. **B.** 2008. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải.

Câu 62. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Câu 63. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** -1.

Lời giải.

Câu 64. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Câu 65. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Dạng 4. Tính giới hạn mà dãy (u_n) cho dưới dạng công thức truy hồi.

1. Phương pháp.

- Đưa dãy số (u_n) về dạng tổng quát rồi làm giống như ba dạng trên.
- Từ dãy cho dưới dạng truy hồi ta công thức tuy hồi ta đưa về công thức tổng quát.
- Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn (có nghĩa chứng minh dãy số tăng và bị chặn trên hoặc dãy số giảm và bị chặn dưới) sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để tìm giới hạn.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 12. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ **b).** $u_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n(n+1)(n+2)}$

c). $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ **d).** $u_n = \frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$

e). $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ **f).** $\lim \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4 + 4n^3 + 1}$

g). $\lim \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$ **h).** $\lim \left(\frac{2.1^2 + 3.2^2 + \cdots + (n+1)n^2 + n(n+1)^2}{n^4}\right)$

k). $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

Lời giải

Bài tập 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 6 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm $\lim \dfrac{u_n}{3.2^n}$.

Lời giải

Bài tập 15. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim \dfrac{u_n}{n^2}$.

Lời giải

....

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 66. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+...+\dfrac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

....

Câu 67. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

....

Câu 68. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.

Câu 69. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 70. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Câu 71. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right]$ bằng:

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Câu 72. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n\left(n^2+1\right)}$ bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Câu 73. Cho dãy số có giới hạn $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} u_n=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n},\ n\ge 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=-1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **D.** $\lim u_n=1$.

Lời giải.

Câu 74. Cho dãy số có giới hạn $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2},\ n\ge 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=2$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Lời giải.

Dạng 5. Tính giới hạn dựa vào định lý kẹp.

1. Phương pháp.

Dựa vào định lí: Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n).

Nếu $u_n \le v_n \le w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 16. Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$

b). $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

c). $u_n = \frac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6...2\,n}, \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

d). $u_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

e). $u_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}1$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 6. Giới hạn có kết quả là vô cực ($+\infty$ hoặc $-\infty$)

1. Phương pháp.

- Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các quy tắc nhân và quy tắc chia).
- Nếu gặp dạng vô định thì ta khử nhé.
- Nếu gặp dạng $\frac{L}{0}$, là bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì ta tách cùng bậc đưa về tích.
- **Quy tắc nhân:**

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n.v_n)$		$\lim u_n$	$\lim v_n = L \neq 0$	$\lim(u_n.v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$-$	$+\infty$

- **Quy tắc chia**

$\lim u_n = L \neq 0$ **có dấu**	$\lim v_n = 0, v_n \neq 0$ **có dấu**	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 17. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim \frac{n^5+n^4-n^3-2n}{4n^3+6n^2+9}$. **b).** $\lim \frac{-\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$ **c).** $\lim\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$

d). $\lim \frac{(n^2+1)(2n+3)}{\sqrt{n^4-n^2+1}}$ **e).** $\lim\left(\sqrt{n^4+1}+n-1\right)$. **f).** $\lim\left(\frac{1}{3}n^3+2\sin 2n+3\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Bài tập 18. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\left(5^n - 3^{n+1}\right)$. **b).** $\lim\dfrac{(-3)^n - 6^n}{(-3)^{n+1} - 5^{n+1}}$.

Lời giải

5. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 75. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 76. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải.

Câu 77. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Câu 78. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

Câu 79. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là:

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 80. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0 **D.** $\dfrac{5}{7}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 81. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 82. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Lời giải.

....

Câu 83. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n=\frac{n^2-2n}{3n^2+5}$. **B.** $u_n=\frac{-n^4+2n^3-1}{3n^3+2n^2-1}$. **C.** $u_n=\frac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}$. **D.** $u_n=\frac{-n^2+2n-5}{3n^3+4n-2}$.

Lời giải.

Câu 84. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n=\frac{1+n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2}{5n+5n^3}$. **C.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Lời giải.

Câu 85. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. **C.** $u_n=\frac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+1}$.

Lời giải.

Câu 86. Tính giới hạn $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)$.

A. $L=3$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=5$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

Câu 87. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $L=\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=-\infty$.

A. 19. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải.

Câu 88. Tính giới hạn $\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)$.

A. $L=7$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải.

Câu 89. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{2}\right)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\lim u_n=-\infty$. **B.** $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

C. $\lim u_n=+\infty$. **D.** Không tồn tại $\lim u_n$.

Lời giải.

Câu 90. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\dfrac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

A. $u_1=3$. **B.** $u_1=4$. **C.** $u_1=\dfrac{9}{2}$. **D.** $u_1=5$.

Lời giải.

Câu 91. Tính tổng $S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots$.

A. $S=\frac{27}{2}$. **B.** $S=14$. **C.** $S=16$. **D.** $S=15$.

Lời giải.

Câu 92. Tính tổng $S=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)$.

A. $S=\sqrt{2}+1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=2\sqrt{2}$. **D.** $S=\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 93. Tính tổng $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải.

Câu 94. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{18},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}},\ldots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

Câu 95. Tính tổng $S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+....$

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 96. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}\left(|a|<1,|b|<1\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1-b}{1-a}$. **C.** $\frac{1-a}{1-b}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 97. Rút gọn $S=1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots$ với $\cos x\neq\pm1$.

A. $S=\sin^2 x.$ **B.** $S=\cos^2 x.$ **C.** $S=\frac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $S=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 98. Rút gọn $S=1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots$ với $\sin x\neq\pm1$.

A. $S=\sin^2 x.$ **B.** $S=\cos^2 x.$ **C.** $S=\frac{1}{1+\sin^2 x}$. **D.** $S=\tan^2 x.$

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 99. Thu gọn $S=1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

A. $S=\frac{1}{1-\tan\alpha}$. **B.** $S=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. **C.** $S=\frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$. **D.** $S=\tan^2\alpha$.

Lời giải.

Câu 100. Cho $m,\ n$ là các số thực thuộc $(-1;1)$ và các biểu thức:

$$M=1+m+m^2+m^3+\cdots$$
$$N=1+n+n^2+n^3+\cdots$$
$$A=1+mn+m^2n^2+m^3n^3+\cdots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A=\frac{MN}{M+N-1}$. **B.** $A=\frac{MN}{M+N+1}$.

C. $A=\frac{1}{M}+\frac{1}{N}-\frac{1}{MN}$. **D.** $A=\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{1}{MN}$.

Lời giải.

Câu 101. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T=a+b$.

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Lời giải.

Câu 102. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Lời giải.

Câu 103. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = a - b$.

A. 1409. **B.** 1490. **C.** 1049. **D.** 1940.

Lời giải.

Câu 104. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$. **B.** $a - b > 2^{14}$. **C.** $a - b > 2^{13}$. **D.** $a - b > 2^{12}$.

Lời giải.

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. Giới hạn của hàm số tại một điểm $x \to x_0$.

1. Giới hạn hữu hạn: Cho $x_0 \in (a;b)$, $f(x)$ là hàm số xác định trên tập hợp: $D = (a;b) \setminus \{x_0\}$, nếu với mọi dãy số $x_n \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi dần đến x_0 và được kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Chú ý: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} C = C}$, ($C$: hằng số).

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x \to -1} (3x^2 - 2x + 1)$.

b). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^3 - 3x)(x+1)}{x^2 + 3}$.

c). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

d). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

e). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$.

f). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$.

h). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x}$.

g). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x-2} - \sqrt[3]{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}$.

k). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

l). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$.

m). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - 1 - x\sqrt{1-x}}{x^3 + x^2}$.

n). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. Giới hạn vô cực:

Cho $x_0 \in (a;b)$, $f(x)$ là hàm số xác định trên tập hợp:

- Nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a;b)\setminus\{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = +\infty$ thì ta nói $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.
- Nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a;b)\setminus\{x_0\}$ sao cho $\lim x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = -\infty$ thì ta nói $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

II. Giới hạn của hàm số tại vô cực $x \to \pm\infty$

1. Các định nghĩa:

- Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên $(a;+\infty)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a;+\infty)$ và $\lim x_n = +\infty$, ta đều có: $\boxed{\lim f(x_n) = L}$ thì ta nói $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L}$

- Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

2. Các giới hạn đặc biệt:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & khi\ k=2n\\ -\infty & khi\ k=2n+1\end{cases}$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} C=C$, ($C$ là hằng số)	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{C}{x^k}=0$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3+x+1}{x^3+3x-1}$.

b). $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

c). $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1}+x\right)$

d). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x+1}{2-6x^2-6x^3}$.

e). $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x^3+x^2}}$.

f). $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{9x^2+2x-1}}$

g). $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+3\sqrt{1-x}}{1-x}$.

h). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

k). $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

l). $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$.

m). $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$.

n). $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$

Lời giải

3. Một số định lí về giới hạn

Định lí 1: Nếu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} f(x) = L$ và $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} g(x) = M$ thì:

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \left[f(x) - g(x) \right] = L - M$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \left[f(x).g(x) \right] = L.M$	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \left[C.f(x) \right] = C.L$, (C là hằng số);
$\lim\limits_{x \to x_0} C.x^k = C.x_0^k$,(C là hằng số, $k \in \mathbb{Z}^+$	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} \left(khi\ M \neq 0 \right)$

Định lí 2: Giả sử $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} f(x) = L$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \left| f(x) \right| = \left| L \right|$;	$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \pm\infty)}} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;
Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in \left(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon \right) \setminus \left\{ x_0 \right\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$	

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x^2}{x^3 - x - 6}}$.

b). $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{2x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + 2}}$.

c). $\lim\limits_{x \to 2} \left| \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \right|$

d). $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2\sqrt{2x + 5}}{x + 2}$.

e). $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| \dfrac{x^3 - 3x + 1}{2x^2 - x^3} \right|$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định lí 3: Cho 3 hàm số $f(x), g(x), h(x)$ xác định trên tập: $D = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}, (\varepsilon > 0)$

Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x), \forall x \in D$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì: $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.

Từ đó ta chứng minh được:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1 \ khi \ \lim_{x \to x_0} u(x) = 0}.$$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

b). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{3x}$.

c). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

d). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

e). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x.\sin 3x.\sin x}{45x^3}$.

f). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin 5x}{\sin x}$.

g). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$.

h). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 2x}{x.\sin x}$.

k). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x.\sin ax}{1 - \cos ax}$

Lời giải

....

....

3. Các quy tắc tìm giới hạn vô cực:

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x).g(x)=\begin{cases}+\infty \text{ khi } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ cùng dấu}\\ -\infty \text{ khi } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ trái dấu}\end{cases}$
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ cùng dấu}\\ -\infty \text{ khi } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ trái dấu}\end{cases}$

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+x+1}{x^2+3x-1}$. b). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1-2x)\left(3-\sqrt{\dfrac{x^2+7x}{x^2-1}}\right)\right]$. c). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x-1)(x+3)-x}{4-x+2|x|}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. Tìm giới hạn của hàm số bằng định nghĩa.

1. Phương pháp.

a). Để tìm $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ ta làm như sau:

- Xét dãy số (x_n) bất kỳ thuộc tập xác định D với $x_n\neq x_0$ mà $\lim x_n=x_0$
- Tìm $\lim f(x_n)$:
  - ★ Nếu ta có $\lim f(x_n)=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$.
  - ★ Nếu ta có $\lim f(x_n)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$.

b). Để tìm $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ta làm như sau :

- Xét dãy số (x_n) bất kỳ thuộc tập xác định mà $\lim x_n = +\infty$.
- Tìm $\lim f(x_n)$:
  - ★ Nếu ta có $\lim f(x_n) = L$ thì $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.
  - ★ Nếu ta có $\lim f(x_n) = \pm\infty$ thì $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$.
  - ★ Hoàn toàn tương tự khi tính $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c). Để chứng minh hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to x_0$ ta thường làm như sau :

- Chọn hai dãy số (u_n) và (v_n) cùng thuộc tập xác định của hàm số sao cho $u_n \ge x_0, v_n \ge x_0$ và có $\lim u_n = \lim v_n = x_0$.
- Chứng minh $\lim f(u_n) \ne \lim f(v_n)$ hoặc một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Khi đó theo định nghĩa ta suy ra hàm số không có giới hạn khi $x \to x_0$.

Đối với các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to -\infty, x \to +\infty$ ta cũng làm tương tự.

2. Bài tập minh họa

Bài tập 1. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a). $\lim_{x\to-1} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$.

b). $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-4}{(x-1)^2}$.

c). $\lim_{x\to-\infty} \left(x - \sqrt{9x^2+2}\right)$.

d). $\lim_{x\to2} (x-2)\sin\dfrac{x}{x^2-4}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 2. Dùng định nghĩa tìm giới hạn của hàm số

a). $\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right)$. **b).** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x+1}{x-1}$. **c).** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$.

Lời giải

Bài tập 3. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to -1}\sin\dfrac{3}{x+1}$ không tồn tại.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Tìm giới hạn của hàm số tại một điểm $x \to x_0$ bằng quy tắc, định lý: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

1. Phương pháp chung.

- Thay $x \to x_0$ vào $f(x)$ nếu kết quả bằng một số C thì ta kết luận giới hạn đó bằng C, tức là:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0) = C$$

- Thay $x \to x_0$ vào $f(x)$ nếu kết quả bằng $\frac{0}{0}$ thì ta kết luận giới hạn vô định, để khử nó ta xét 3 bài toán sau.

Bài toán 1. Hàm số $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là đa thức theo biến x.

- Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to x_0} Q(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ được gọi là có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.
- Ta biến đổi về dạng $= \dfrac{(x - x_0)^m . P_1(x)}{(x - x_0)^n . Q_1(x)}$ rồi giản ước các thừa số có dạng $(x - x_0)^k$

; $k = \max(m, n)$ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- Các cách biến đổi :
  - Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn biểu thức làm cả tử và mẫu bằng 0.
    Phân tích đa thức thành nhân tử có các phương pháp sau
    - ★ Sử dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
  - Nếu tam thức bậc hai thì sử dụng $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), (a \neq 0)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
  - Sử dụng phương pháp Hoocner .
  - Phép chia đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cho $(x - x_0)$ theo sơ đồ Hoocner:

	a	b	c	d	e
x_0	a	$b_1 = ax_0 + b$	$c_1 = ax_0^2 + bx_0 + c$	$d_1 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$	0

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 4. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}$

b). $L = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

c). $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

d). $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{12}{x^3 - 8} \right)$

e). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3}$

f). $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$

Lời giải

Bài toán 2. Hàm số $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x),Q(x)$ là các biểu thức có chứa căn thức theo x.

1. Phương pháp.

Bước 1. Nếu biểu thức dưới dấu giới hạn có chứa dấu căn: ta nhân và chia biểu thức liên hợp của biểu thức chứa căn tiến về 0, rồi làm tương tự như dạng trên ta sẽ khử được dạng vô định.

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\to\left[\begin{array}{l} a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\end{array}\right.$
- $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- **Bước 2:** Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn hạng tử chung của cả tử và mẫu.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 5. Tìm các giới hạn sau *(khử căn bậc hai):*

a). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ b). $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ c). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

d). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ e). $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}$ f). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$.

g). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+3}-2}$ h). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$ k). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}$

l). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x-1}$ m). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$ n). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$

Lời giải

....

Bài tập 6. Tìm các giới hạn sau *(khử căn bậc 3):*

a). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$ **b).** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{10+2x^3}+x-1}{x^2+3x+2}$ **c).** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x+1-\sqrt[3]{4x^2+28}}$

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}$ **e).** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$ **f).** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$.

g). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ **h).** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-\sqrt{3x+58}}{x-2}$ **k).** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài toán 3: Thêm bớt số hạng hoặc một biểu thức vắng để khử được dạng vô định:
(khử căn bậc hai và bậc ba)

1. Một số dạng thường gặp.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[k]{g(x)}+c}{x-x_0} \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{x-x_0} \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{(x-x_0)^n}.$$

Trong đó $k,m,n\in N^*$ và $n\le \min(k,m)$.

2. Phương pháp:

Bài toán 1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{x}$

- Ta tách về tổng hoặc hiệu của hai lim : việc tách hằng số C (biến số) được làm như sau. Giả sử ta tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{x}$.

  ☞ Ta tiến hành tách ra: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-c+c-\sqrt[m]{g(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-c}{x}+\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c-\sqrt[m]{g(x)}}{x}=I_1+I_2$.

  ☞ Tìm C bằng cách: thế $x\to x_0$ vào: $\begin{cases}\sqrt[n]{f(x_0)}+c=0\\ \sqrt[m]{f(x_0)}+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-\sqrt[n]{f(x_0)}\\ c=-\sqrt[m]{f(x_0)}\end{cases}\Leftrightarrow c$

- Nếu giới hạn có dạng tổng quát : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{ax^n+bx^{n-1}+....+c}$.

  ☞ Ta tiến hành tách ra: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[n]{f(x)}-(\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+...+\partial)+(\alpha x^{n-1}+\beta x^{n-2}+...+\partial)-\sqrt[m]{g(x)}}{ax^n+bx^{n-1}+....+c}$

  ☞ Sử dụng phương pháp đồng nhất thức.

3. Bài tập minh họa.

Bài tập 7. Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}$

b). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$

c). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$

d). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

e). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}+3\sqrt{x^2+x-1}-5\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$

f). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

g). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

h). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-\sqrt{5x+4}}{x}$

k). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$

l). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{2x^2-5x+2}$

Lời giải

Bài tập 8. Tính các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$

b). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}$

c). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}$

e). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2+4x+19}-\sqrt{3x^2+46}}{x^2-1}$

f). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3\sqrt[3]{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$

Lời giải

Bài tập 9. Tìm các giới hạn sau

a) . $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

b). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$.

c) . $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{x+2}-1}{\sqrt[3]{x+2}-1}$

d) . $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[4]{7x+2}}{x-2}$

Lời giải

Bài toán 2. Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)\sqrt[n]{1+ax}+Q(x)}{x-x_0}$ bằng cách thêm bớt $P(x)$ rồi đặt nhân tử chung.

- Tách $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)\sqrt[n]{1+ax}+Q(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)\sqrt[n]{1+ax}-P(x)+\left[Q(x)+P(x)\right]}{x-x_0}$

$$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)\sqrt[n]{1+ax}-P(x)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\left[Q(x)+\mathrm{P}(x)\right]}{x-x_0}=I_1+I_2$$

- Tính hai I_1 và I_2.

Bài tập 10. Tính các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}.\sqrt{1+6x}-1}{x}$ **b).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}.\sqrt[3]{1+2x}-2}{x}$

c). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}\sqrt[3]{2-x}-2}{x-1}$ **d).** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}\sqrt[3]{8+3x}-4}{x^2+x}$

e). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1.2x+1}\sqrt[3]{2.3x+1}\sqrt[4]{3.4x+1}-1}{x}$ **f).**

Lời giải

4. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là:

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Lời giải.

....

....

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

....

....

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{2}$ là:

A. $\sin\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải.

....

....

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

....

....

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

....

....

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là:

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

....

....

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

....

....

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Lời giải.

....

....

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

....

....

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** Không xác định.

Lời giải.

....

....

Câu 12. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

A. $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

....

....

Câu 13. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 14.(Sở Quảng Ninh Lần1) $\lim\limits_{x \to 2^{2018}} \frac{x^2 - 4^{2018}}{x - 2^{2018}}$

A. 2^{2019} **B.** 2^{2018} **C.** 2 **D.** $+\infty$.

Lời giải

....

....

....

Câu 15. Biết rằng $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 16. **(THPT Lý Thái Tổ)** Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{2x^2 + x + 3} - 3}{4 - x^2}$.

A. $L = -\frac{2}{7}$. **B.** $L = -\frac{7}{24}$. **C.** $L = -\frac{9}{31}$. **D.** $L = 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Câu 17. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(x^2 + \pi^{21}\right)\sqrt[7]{1 - 2x} - \pi^{21}}{x}$ là:

A. $-\frac{2\pi^{21}}{7}$. **B.** $-\frac{2\pi^{21}}{9}$. **C.** $-\frac{2\pi^{21}}{5}$. **D.** $\frac{1 - 2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải.

....

....

Câu 18.(THPT Hoàng Hoa Thám) Tính $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}$.

A. -3. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** -6. **D.** 8.

Lời giải

Câu 19.(Tạp Chí Toán Học)Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (Phân số tối giản). Giá trị thực của $a-b$ là

A. 1 . **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải

Câu 20. (Tạp Chí Toán Học)Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2-\sqrt{7x+2}}{x-\sqrt{5x-4}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (Phân số tối giản).

Giá trị thực của $a+b$ là

A. 10 . **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** -8. **D.** $\dfrac{10}{9}$.

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Câu 22. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $-\dfrac{13}{12}$.

Lời giải.

Câu 23. Biết rằng $b>0$, $a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $1<a<3$. **B.** $b>1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b<0$.

Lời giải.

Câu 24. **(THPT Lý Thái Tổ)** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B>2$ với $B=\lim\limits_{x\to1}\left(x^3-2x+2m^2-5m+5\right)$.

A. $m\in\{0;3\}$. **B.** $m<\dfrac{1}{2}$ hoặc $m>2$. **C.** $\dfrac{1}{2}<m<2$. **D.** $-2<m<3$.

Lời giải

Câu 25. **(THPT Lý Thái Tổ)** Nếu $\lim\limits_{x\to2}f(x)=5$ thì $\lim\limits_{x\to2}\left[3-4f(x)\right]$ bằng bao nhiêu?

A. -18. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -17.

Lời giải

Câu 26. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn: $f\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)=\dfrac{3x+5}{2x-1}$ $\left(x\neq-2;x\neq\dfrac{1}{2}\right)$. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$?

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Câu 27. **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0=2$. Tính $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2f(x)-xf(2)}{x-2}$.

A. $f(2)-2f'(2)$. **B.** 0. **C.** $f'(2)$. **D.** $2f'(2)-f(2)$.

Lời giải

Câu 28.(THPT Lý Thái Tổ) Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}=-1$. Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x)f(x)+2}{x-1}$

A. $I=5$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=4$. **D.** $I=-5$.

Lời giải

Câu 29. (HSG Lớp 12 Bắc Giang) Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=8$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=5$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $a\in(2;4)$. **B.** $a\in(3;8)$. **C.** $b\in(3;5)$. **D.** $b\in(4;9)$.

Lời giải

Câu 30. (Kênh truyền Hình GD Quốc Gia 2019) Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+mx+n}{x-1}=3$ thì $m.n$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Câu 31. (Sở GD Và Đào Tạo Vĩnh Phúc) Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$.

A. $\dfrac{2-a}{3}$ **B.** $\dfrac{-2-a}{3}$ **C.** $\dfrac{-a}{3}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Lời giải

...

Câu 32. Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải.

...

Câu 33. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

...

Câu 34. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** π. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

...

Câu 35. (THPT Chuyên Bắc Giang) Cho biết $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{1+ax^2}-bx-2}{4x^3-3x+1}=c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Tập nghiệm của phương trình $ax^4-2bx^2+c+2=0$ trên $\mathbb{R}$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Câu 36.(Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f\left(x\right)-16}-4}{x^2+2x-8}$.

A. $\dfrac{5}{24}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Câu 37. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^{2018}+\left(x^2+2\right)^{2018}-2.3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}$

A. 5.3^{2017}. **B.** 3^{2017}. **C.** 8.3^{2017}. **D.** 2.3^{2017}.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Tìm giới hạn của hàm số khi $x\to\pm\infty$

1. Phương pháp.

Để tìm $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ ta làm như sau:

- Chia tử và mẫu cho x^k với x^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của tử và mẫu, (hoặc rút x^k làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn hữu hạn hoặc các quy tắc về giới hạn vô cực.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=C$ thì kết luận hàm số đó có giới hạn là C.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x).Q(x)$ với $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=L$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}Q(x)=\pm\infty$ thì ta dựa vào quy tắc dấu để kết luận kết quả của giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$.
  - Nếu $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ với đa thức $P(x),Q(x)$ có bậc lần lượt mà m,n và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}P(x)=L$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}Q(x)=0$ ta đặt mũ cao nhất của tử và mẫu rồi tách ra cùng bậc đưa về $\lim$ của tích.
- Nếu gặp dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$; $\infty-\infty$ thì ta khử dạng vô định:
  - Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$: Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ được gọi là có dạng vô định.
  - Dạng $0\times\infty$: Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=\pm\infty$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left[f(x).g(x)\right]$ được gọi là có dạng vô định.
  - Dạng $\infty-\infty$: Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}g(x)=+\infty$ thì $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left[f(x)-g(x)\right]$ được gọi là có dạng vô định $\infty-\infty$.
- Khử dạng vô định bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

2. Bài tập minh họa

Bài toán 1. Giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x).Q(x)$ **với** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=L,\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} Q(x)=\pm\infty$

Phương pháp:
Đặt mũ cao nhất rồi dựa vào quy tắc dấu để kết luận kết quả của giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$.

Bài tập 11. Tính giới các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-3x)$ **b).** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-3x+4}$ **c).** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+x\right)$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài toán 2. Giới hạn hữu hạn hữu tỉ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *(bậc tử bé hơn hoặc bằng bậc mẫu)*

Phương pháp. ta đặt mũ cao nhất của tử và mẫu rồi rút gọn nhân tử chung.

Bài tập 12. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3x+6}{4x^3-3x+5}$. **b).** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^4(5x+3)^6(6x+2)^7}{(3-2x)^5(6-3x)^9(7-2x)^3}$. **c).** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$

d). $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$. **e).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$. **f).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

g). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$. **h).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5x^3-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}+x}$. **k).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x^5+x^3-1}{(2x^2-1)(x^3+x)}}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 13. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\left(2x^2-1\right)}{(5x-1)\left(x^2+2x\right)}$ **b).** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x^2+1}}$ **c).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

d). $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$ **e).** $\lim\limits_{x\to-\infty}x.\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$ **f).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$.

Lời giải

Bài tập 14. Tính các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$

b). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$

c). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$

d). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$

e). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}{3x^2-2x}$

f). $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$

g). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\dfrac{4x^4+1}{x+2x^4}}-\dfrac{\sqrt{2x^2-4}}{x}\right]$

Lời giải

Bài toán 3. Giới hạn vô cực *(bậc tử lớn hơn bậc mẫu:* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\left(\dfrac{L}{0}\right)$*)*

Phương pháp.

Ta đặt mũ cao nhất của tử và mẫu rồi tách ra cùng bậc đưa về lim của tích $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\pm\infty)}}\left[f(x).g(x)\right]$

Bài tập 15. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$.

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$.

Lời giải

Bài toán 4. Giới hạn vô cực dạng vô định $\infty-\infty$ $0\times\infty$

1. Phương pháp.

- Khi ta đặt mũ cao nhất của tử và mẫu thì xuất hiện $\frac{\infty}{\infty}$; $0\times\infty$; $\infty-\infty$
- Khử dạng vô định bằng phương pháp nhân lượng liên hợp rồi làm bình thường bài toán 1,2.

2. Bài tập minh họa

Bài tập 16. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

b). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$.

c). $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

d). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x)$.

e). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x)$.

f). $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$

g). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$.

h). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$.

k). $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^4+3x^2+1}-2x^2\right)$

l). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+1}-2x+1\right)$

m).

Lời giải

Bài tập 17. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2}\right)$. **b).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}-\sqrt{3x}\right)$. **c).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$

d). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ **e).** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)$ **f).**

Lời giải

Bài toán 5. Giới hạn vô cực dạng vô định $0\times\infty$

1. Phương pháp.

Giả sử cần tìm giới hạn của hàm số $h(x)=f(x).g(x)$ khi $x\to x_0$ hoặc $x\to\pm\infty$ trong đó $f(x)\to 0$ và $g(x)\to\pm\infty$. Ta thường biến đổi theo các hướng sau:

- Nếu $x\to x_0$ thì ta thường viết $f(x).g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ sẽ đưa về dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.
- Nếu $x\to\pm\infty$ thì ta thường viết $f(x).g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ sẽ đưa về về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- Tuy nhiên ở nhiều bài toán giới hạn loại này ta chỉ cần thực hiện một số biến đổi như đưa thừa số vào trong dấu căn thức, quy đồng mẫu số,... ta có thể đưa về giới hạn quen thuộc.

2. Bài tập minh họa

Bài tập 18. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{(x-3)^3}$.

b). $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.

Lời giải

Dạng 4. Tìm giới hạn của hàm số các hàm đặc biệt.

1. Phương pháp.

- $\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}=n$
- $a^3-b^3=(a-b)\left(\underbrace{a^2+ab+b^3}_{\text{3 so hang}}\right)$
- $a^n-b^n=(a-b)\left(\underbrace{a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}}_{n\text{ so hang}}\right)$

2. Bài tập minh họa

Bài tập 19. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$.

b). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$.

c). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$.

d). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{x}$.

e). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ $(ab\neq 0)$

f). $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[m]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$

Lời giải

Bài tập 20. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a). $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$.

b). $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x+x^2+x^3+\cdots+x^m-m}$.

c). $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

d). $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$.

e). $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right),(m,n\in\mathbb{N}^*)$

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm

Mức độ 1. Nhận biết

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^3+1\right)$ là:

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 40. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 41. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 42. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ là:

A. 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải.

....

....

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải.

....

....

Câu 45. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

Câu 46. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 47. (THPT Lý Thái Tổ) Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)=\dfrac{-1}{2}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-2}{2x+3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

C. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=+\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{2-x}=-3$.

Lời giải

....

....

....

....

Mức độ 2. Thông Hiểu

Câu 48. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

A. -2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 49. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 50. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 54.(THPT Đoàn Thượng) Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Câu 55.(THPT Lý Thái Tổ) Giá trị $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+6}+2x}{2x-3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{17}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Mức độ 3. Vận dụng

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 57. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 58. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 59. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 60. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ là:

A. $\dfrac{5}{6}$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 61. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2019) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)$

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0 . **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

A. $a>\sqrt{2}.$ **B.** $a<\sqrt{2}.$ **C.** $a>2.$ **D.** $a<2.$

Lời giải.

Câu 63. Biết rằng $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ là hữu hạn (với a,b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

A. $a\geq 0.$ **B.** $L=-\dfrac{3}{a+b}.$ **C.** $L=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}.$ **D.** $b>0.$

Lời giải.

Câu 64. Biết rằng $\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4.$

A. $P_{\min}=1.$ **B.** $P_{\min}=3.$ **C.** $P_{\min}=4.$ **D.** $P_{\min}=5.$

Lời giải.

Câu 65. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b.$ Tính $S=5a+b.$

A. $S=1.$ **B.** $S=-1.$ **C.** $S=5.$ **D.** $S=-5.$

Lời giải.

....

....

....

....

....

Câu 66.(THPT Lý Thái Tổ) Cho biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{4x^2-x+5}}{a|x|+2}=\dfrac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. 3. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** -3. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Câu 67.(Sở GD và Đào Tạo Cần Thơ 2018) Cho biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17}=\dfrac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

....

....

....

....

....

Câu 68.(THPT Lý Thái Tổ) Cho $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{2x^3+5x+1}}{x^2-1}\right)=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a, b là số nguyên). Tính tổng $L=a^2+b^2$.

A. 150. **B.** 143. **C.** 140. **D.** 145.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 69.(THPT Lý Thái Tổ Bắc Ninh) Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+2)(m-3x^2)=-\infty$

A.21. **B.**22. **C.**20. **D.**41.

Lời giải

Câu 70. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội) Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Câu 71. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội) Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$, ($a$ là số nguyên, b là số nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 72. **(HSG Bắc Ninh)** Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Khi đó giá trị a là

A. 10. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -10.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 73. **(THPT Nghèn Hà Tĩnh 2018)** Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Câu 74. **(Sở GD và Đào Tạo Cần Thơ 2018)** Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Khi đó giá trị a là

A. -6. **B.** 10. **C.** -10. **D.** 6.

Lời giải

....
....
....

Câu 75.(THPT Chuyên Thái Bình) Cho hai số thực a và b thoả mãn $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{2x+1}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+2b$ bằng:

A. -4. **B.** -5. **C.** 4. **D.** -3.

Lời giải

Câu 76. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2018) Cho $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$ thì giá trị của a là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $x^2-11x+10=0$. **B.** $x^2-5x+6=0$. **C.** $x^2-8x+15=0$. **D.** $x^2+9x-10=0$.

Lời giải

Câu 77.(Chuyên Lương Thế Vinh 2019) Giá trị của số thực m sao cho $\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-1)(mx+3)}{x^3+4x+7}=6$ là

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Câu 78.(THPT Quãng Xương 2019) Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2017}{x+2018}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Tính $P=4a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Câu 79.(THPT Xuân Trường 2018) Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Câu 80.(Tạp chí Toán Học) Tìm giá trị dương của k để $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{(3k+1)x^2+1}}{x}=9f'(2)$ với $f(x)=\ln\left(x^2+5\right)$:

A. $k=12$. **B.** $k=2$. **C.** $k=5$. **D.** $k=9$.

Lời giải

Câu 81.(THPT Lý Thái Tổ) Cho a,b là các số dương. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\dfrac{7}{27}$. Tìm giá trị lớn nhất của ab.

A. $\dfrac{49}{18}$. **B.** $\dfrac{59}{34}$. **C.** $\dfrac{43}{58}$. **D.** $\dfrac{75}{68}$.

Lời giải

Câu 82.(THPT Triệu Thị Trinh) Biết $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}=\dfrac{a\sqrt{2}}{b}+c$ với a, b, c $\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 5. **B.** 37. **C.** 13. **D.** 51.

Lời giải

Câu 83.(THPT Yên Định 2018) Cho $f\left(x\right)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-16}{x-1}=24$.

Tính $I=\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-16}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{2f\left(x\right)+4}+6\right)}$

A. 24. **B.** $I=+\infty$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Lời giải

Câu 84.(THPT Chuyên Lương Thế Vinh 2018) Cho $\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-10}{x-1}=5$.

Giới hạn $\lim_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-10}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{4f\left(x\right)+9}+3\right)}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 10. **D.** $\frac{5}{3}$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....

BÀI 3: GIỚI HẠN MỘT BÊN

A. LÝ THUYẾT

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA:

1. Giới hạn bên phải:

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(x_0;b)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n > x_0$ và lim $x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là số thực L khi dần đến x_0 và được

Kí hiệu: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L}$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2-3x+1}{\sqrt{x+2}}$.

b). $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1+3x-2x^2}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

2. Giới hạn bên trái:

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a;x_0)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n < x_0$ và lim $x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = L$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên trái là số thực L khi dần đến x_0 và được

Kí hiệu: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L}$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$.

b). $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$.

c). $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{|x-5|}{x^2-25}$.

d). $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{|x-5|}{x^2-25}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. Giới hạn vô cực:

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(x_0;b)$, nếu với mọi dãy số (x_n) với $x_n > x_0$ và $\lim x_n = x_0$, ta đều có: $\lim f(x_n) = +\infty$, thì lúc đó ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn bên phải là vô cực khi dần đến x_0 và được

Kí hiệu: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty}$

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, được phát biểu tương tự trên.

II. ĐỊNH LÝ VỀ SỰ TỒN TẠI CỦA GIỚI HẠN.

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0.

  và $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L}$

- Ngược lại, nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

- Tương tự, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 2x & x \ge 1 \\ x^3 - 3x & x < 1 \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x); \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ không? Vì sao?

Lời giải

....

....

....

....

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

Dạng 1. Tìm giới hạn của hàm số bằng định nghĩa.

1. Phương pháp.

- Khi $x \to x_0^+$ thì $x > x_0$ suy ra $\left[\begin{array}{l} x - x_0 > 0 \\ \sqrt{x^2} = |x| = x \\ |x - x_0| = x - x_0 \end{array}\right.$

- Khi $x \to x_0^-$ thì $x < x_0$ suy ra $\left[\begin{array}{l} x - x_0 < 0 \\ \sqrt{x^2} = |x| = -x \\ |x - x_0| = -(x - x_0) \end{array}\right.$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}$ b). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$. c). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

d). $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}$ e). $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{4-4x^3}{3x^2+5x}}$ f). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 2. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$ b). $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$ c). $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

d). $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$ e). $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ f). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x-2}$

g). $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1+3x-2x^2}{x-3}$ h). $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$ k). $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 3. Tìm các giới hạn sau *(đưa ra đa thứckhỏi căn hoặc đưa vào căn)*

a). $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]$

b). $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x.\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}\right]$

c). $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$

d). $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

e). $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{x^2-\frac{1}{4}}$

f). $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-x\right)\sqrt{\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

Câu 2.(THPT Lê Quý Đôn) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

....

....

....

Câu 3.(THPT Chuyên Biên Hòa 2018) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

....

....

....

Câu 4.(THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}$

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Lời giải

....

....

....

Câu 5.(THPT Chuyên Lương Thế Vinh) Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)^4}$ là

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

....

....

....

....

Câu 6.(THPT Chuyên Biên Hòa 2018) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

....

....

....

Câu 7. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** Không xác định.

Lời giải.

....

....

....

Câu 8. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** Không xác định.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 9. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 10. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)\left(x^2+5\right)}}$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$.   **B.** 0.   **C.** $\dfrac{5}{3}$.   **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 12. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là:

A. 0.   **B.** $-\infty$.   **C.** 1.   **D.** $+\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 13. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là:

A. $-\infty$.   **B.** $+\infty$.   **C.** 0.   **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 14. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ là:

A. 1.   **B.** $+\infty$.   **C.** 0.   **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 15. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ là:

A. 3.   **B.** $+\infty$.   **C.** 0.   **D.** $-\infty$.

Lời giải.

Câu 16.(Chuyên KHTN) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=-\dfrac{3}{2}$.

B. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=+\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x-2}{x+1}=-\infty$.

Lời giải

Câu 17.(THPT Hoàng Hoa Thám 2018) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

B. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Lời giải

Câu 18. (THPT Trần Nhân Tông 2018) Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=\dfrac{-3}{2}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

Lời giải

Dạng 2. Chứng minh sự tồn tại của giới hạn.

1. Phương pháp.

- Hàm số có giới hạn là L thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$
- Hàm số có giới hạn là $+\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$
- Hàm số có giới hạn là $-\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x^4-6x^2-x & x\ge 1\\ x^3-3x & x<1\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x);\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ không? Vì sao?

Lời giải

....

....

....

....

Bài tập 5. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & x\ne 1\\ \dfrac{1}{8} & x=1\end{cases}$

a). Tìm $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. So sánh $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ và $f(1)$

b). Tìm $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$. So sánh $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$ và $f(-3)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2-3 & |x|<2\\ 5 & |x|=2\\ 3x-1 & |x|>2\end{cases}$

a). Tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x);\ \lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$.

b). Hàm số có giới hạn tại $x=2$ không? Tại sao?

Lời giải

....

....

....

Bài tập 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x} & x\ge 0\\ ax+b-1 & -2<x<0\\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & x\le -2\end{cases}$

Tìm a, b để hàm số cùng có giới hạn tại $x=-2$ và $x=0$.

Lời giải

Bài tập 8. Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$ với $f\left(x\right)=\begin{cases}x-3, & khi\ x<1\\ x=-13, & khi\ x=1\\ 1-\sqrt{7x^2+2}, & khi\ x>1\end{cases}$

b). $\lim\limits_{x\to -2} g\left(x\right)$ với $g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x+1}, & khi\ x<-2\\ x+10, & khi\ x\ge -2\end{cases}$

Lời giải

Bài tập 9. Tìm giới hạn của hàm số $g\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3x-1}{x+1},\ khi\ x<0\\ x+10,\ khi\ x\geq 0\end{cases}$ tại $x=0$

Lời giải

Bài tập 10. Tìm m để hàm số $h\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3+1}{x+1}, & khi\ x<-1\\ mx^2-x+m^2, & khi\ x\geq -1\end{cases}$ có giới hạn tại $x=-1$.

Lời giải

Bài 11. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{2} & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Tính các giới hạn sau

a). $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$. **b).** $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)$. **c).** $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$, (nếu có).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài 12. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^3 & \text{khi } x<-1 \\ 2x^2-3 & \text{khi } x\ge -1 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)$ là:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 20. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 21. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-3 & \text{với } x\ge 2 \\ x-1 & \text{với } x<2 \end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải.

....

....

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\ge 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Lời giải.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$.

B. Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$.

D. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-15$.

Lời giải.

Câu 24.(THTT Số 4 2018) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{-1}{2}$.

Lời giải

BÀI 4. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. LÝ THUYẾT

I. Hàm số liên tục tại 1 điểm:

1. Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại x_0.

2. Nhận xét.

Để xét tính liên tục tại một điểm x_0 ta tiến hành hai bước sau.

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0.

3. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = -2$

a). $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ **b).** $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x^2 - 4} & x \neq 2 \\ -\dfrac{1}{6} & x = 2 \end{cases}$

a). Tính $\lim_{x \to 2} f(x)$.

b). Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 2$;

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

II. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn.

1. Định nghĩa:

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$.Ta nói rằng hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\boxed{\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)\end{cases}}$$

2. Các tính chất của hàm số liên tục.

Định lí 1.

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lí 2. Giả sử $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó

- Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$, $y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0
- Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

3. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 3. Chứng minh các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

a). $f(x)=x^4-x^2+2$

b). $f(x)=x^2.\sin x-2\cos^2 x+3$

c). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$

d). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x>1\\ -\sqrt{5-x} & x\leq 1\end{cases}$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

III. Chứng minh phương trình có nghiệm:

1. Định lí 2 *(định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)*

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Nếu $f(a)\neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a),f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=M$.

2. Ý nghĩa hình học của định lí

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a),f(b)$ thì đường thẳng $y=M$ cắt đồ thị của hàm số $y=f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c\in(a;b)$.

3. Hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

4. Ý nghĩa hình học của hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì đồ thị của hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c\in(a;b)$.

5. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $4x^3-8x^2+1=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;2)$

Lời giải.

Ví dụ 5. Chứng minh phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc $(-1;1)$.

Lời giải.

....

....

B. PHÂN DẠNG, PHƯƠNG PHÁP VÀ VÍ DỤ MINH HỌA.

DẠNG 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.

Ta xét dạng này gồm hai bài toán tổng quát sau.

Bài toán 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} f_1\left(x\right) & \text{khi } x\neq x_0 \\ f_2\left(x\right) & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$.

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0, ta thực hiện các bước sau

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1\left(x\right)=L$.
- **Bước 2.** Tính $f\left(x_0\right)=f_2\left(x_0\right)$.
- **Bước 3.** Đánh giá hoặc giải phương trình $L=f_2\left(x_0\right)$, từ đó đưa ra kết luận.
  - Nếu $L=f_2\left(x_0\right)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
  - Nếu $L\neq f_2\left(x_0\right)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0 hay bị gián đoạn tại x_0.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{khi } x\neq\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x=\sqrt{2} \end{cases}$ tại $x=\sqrt{2}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập 2. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} & \text{khi } x\neq 2 \\ 2 & \text{khi } x=2 \end{cases}$ tại $x=2$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập 3. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$ tại $x=2$.

Lời giải

Bài tập 4. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -\pi & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x=1$.

Lời giải

Bài tập 5. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải

Bài tập 6. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm đã chỉ ra $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

Lời giải

....

Bài tập 7. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm đã chỉ ra $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{\left(x-\pi\right)^2} & \text{khi } x\neq\pi\\ m & \text{khi } x=\pi\end{cases}$ tại $x=\pi$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 8. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2mx+\dfrac{\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x}{1+x} & \text{khi } x\neq-1\\ \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài toán 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}f_1\left(x\right) & \text{khi } x<x_0\\ f_2\left(x\right) & \text{khi } x\geq x_0\end{cases}$**. Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số** m **để hàm số liên tục tại điểm** x_0**, ta làm các bước**

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Tính $f\left(x_0\right)=f_2\left(x_0\right)$.
- **Bước 2.** ***(Liên tục trái)*** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f_1\left(x\right)=L_1$.

  Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1=f_2\left(x_0\right)$, từ đó đưa ra kết luận.
- **Bước 3.** (***Liên tục phải***) Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f_1\left(x\right)=L_2$.

  Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2=f_2\left(x_0\right)$, từ đó đưa ra kết luận.
- **Bước 4.** Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1=L_2$, từ đó đưa ra kết luận.

  ☞ Nếu $L_1=L_2=f_2\left(x_0\right)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.

☞ Nếu $L_1 \neq f_2(x_0)$ hoặc $L_2 \neq f_2(x_0)$ hoặc $L_2 \neq L_1$ kết luận hàm số không liên tục tại x_0 hay bị gián đoạn tại x_0.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 9. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x>5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x\le 5 \end{cases}$ tại $x=5$.

Lời giải

...

Bài tập 10. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0 \end{cases}$ tại $x=0$.

Lời giải

...

Bài tập 11. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{3}{2} & \text{khi } x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x>0 \end{cases}$ tại $x=0$.

Lời giải

...

....

Bài tập 12. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm đã chỉ ra $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \\ mx+1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$ tại $x=1$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 13. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x\neq 1 \\ a & \text{khi } x=1 \end{cases}$ [ ].

a). Tìm a để hàm số liên tục trái tại điểm $x=1$.
b). Tìm a để hàm số liên tục phải tại điểm $x=1$.
c). Tìm a để hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-4;3]$. **B.** $[-4;3)$. **C.** $(-4;3]$. **D.** $[-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Câu 2. Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ liên tục trên:

A. $\left[-1;1\right]$. **B.** $\left[1;5\right]$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ với mọi $x\neq 1$. Tính $f\left(1\right)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên m với $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Tính $f\left(0\right)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left(-4;+\infty\right)$ với $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x\neq 0$. Tính $f\left(0\right)$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

....

Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải.

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Lời giải.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ k+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=\dfrac{1}{2}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $k=0$.

Lời giải.

Câu 9. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m\in\left(-3;0\right)$. **B.** $m\leq -3$. **C.** $m\in\left[0;5\right)$. **D.** $m\in\left[5;+\infty\right)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ m & \text{khi } x=0 \end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m\in\left(-2;-1\right)$. **B.** $m\leq -2$. **C.** $m\in\left[-1;7\right)$. **D.** $m\in\left[7;+\infty\right)$.

Lời giải.

....

....

....

....

Câu 11. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $x=0$ **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 12. Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ m & \text{khi } x=1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-\pi$. **B.** $m=\pi$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Câu 13. Biết rằng $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{khi } x\neq\pi\\ m & \text{khi } x=\pi\end{cases}$ liên tục tại $x=\pi.$

A. $m=\frac{\pi}{2}.$ **B.** $m=-\frac{\pi}{2}.$ **C.** $m=\frac{1}{2}.$ **D.** $m=-\frac{1}{2}.$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 14. Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \frac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq-1,\ x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x=0,\ x=1.$ **B.** mọi điểm $x\in\mathbb{R}.$

C. mọi điểm trừ $x=-1.$ **D.** mọi điểm trừ $x=0.$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq-1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

DẠNG 2: Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}$.

Ta xét dạng này gồm bài toán tổng quát sau.

Bài toán 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\ge x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x<x_0 \end{cases}$. **Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm** x_0, **ta làm các bước**

1. Phương pháp.

Bước 1. Xét trên khoảng $x>x_0$.

- Nếu là đa thức, hàm lượng giác, hàm phân thức hữu tỉ thì kết luận liên tục trên khoảng $(x_0;+\infty)$.

Bước 2. Xét trên khoảng $x<x_0$.

- Nếu là đa thức, hàm lượng giác, hàm phân thức hữu tỉ thì kết luận liên tục trên khoảng $(x_0;+\infty)$.

Bước 3. Xét liên tục tại $x=x_0$.

- Đưa về dạng toán 1: xét tinh liên tục tại điểm $x=x_0$ gồm hai bài toán 1 và 2.

Bước 4. Kết luận.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 14. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & \text{khi } x\ge 3 \\ \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } -1<x<3 \end{cases}$.

Chứng minh rằng hàm số liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 15. Xác định a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$.

Lời giải

Bài tập 16. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\le 3\\ ax+b & 3<x<5\\ 7 & x\ge 5\end{cases}$. Xác định a, b để hàm số liên tục trên R.

Lời giải

Bài tập 17. Xét xem các hàm số sau có liên tục với $\forall x \in R$ không? Nếu không? Chỉ ra các điểm gián đoạn.

a). $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x - 1$

b). $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{x^2 - 3x + 2}$

c). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x^2+3x+1} & x \neq -\dfrac{1}{2} \\ 2 & x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+6x^2+x+3}{x+3} & x \neq -3 \\ 19 & x = -3 \end{cases}$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} & khi\ x > -2 \\ -3 & khi\ x = -2 \\ \sqrt{3+x} - 5 & khi\ -3 \le x < -2 \end{cases}$. Tìm các khoảng, nửa khoảng mà trên đó hàm số f(x) liên tục.

Lời giải

....
....
....

Bài tập 19. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$?

Lời giải

Bài tập 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & khi\ x\geq 2\end{cases}$. Xác định a để hàm số f(x) liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải

3. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ \left(1-m\right)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Câu 17. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x\in\left[0;4\right]\\ 1+m & \text{khi } x\in\left(4;6\right]\end{cases}$ tục trên $\left[0;6\right]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2\le m<3$. **C.** $3<m<5$. **D.** $m\ge 5$.

Lời giải.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị tham số a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{\left|x-1\right|} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải.

Câu 19. Biết rằng $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ.

C. $a>5$. **D.** $a<0$.

Lời giải.

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1\\ -2x & \text{khi } x\geq 1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f\left(x\right)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f\left(x\right)$ không liên tục trên $\left(0;2\right)$.

C. $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$. **D.** $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3\\ 1-a^2x & \text{khi } x\leq 3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $-\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2\\ a^2x+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $a_{\max}=3$. **B.** $a_{\max}=0$. **C.** $a_{\max}=1$. **D.** $a_{\max}=2$.

Lời giải.

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}1-\cos x & \text{khi } x\le 0\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=0$. **B.** $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải.

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau là sai?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-1)$; $(1;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

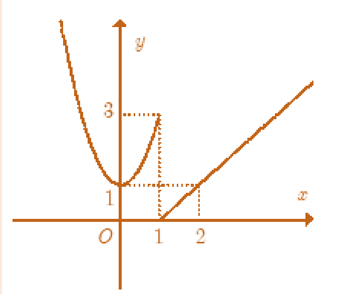
Lời giải.

....

....

Câu 25. Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?

A. $x=0$.
B. $x=1$.
C. $x=2$.
D. $x=3$.



Lời giải.

....

....

....

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1,\ x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x\geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
B. mọi điểm trừ $x=0$.
C. mọi điểm trừ $x=1$.
D. mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. Mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
B. Mọi điểm trừ $x=1$.
C. Mọi điểm trừ $x=3$.
D. Mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Lời giải.

Câu 28. Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x<0 \\ x^2+1 & \text{khi } 0\le x\le 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x>2 \end{cases}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải.

Câu 29. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \\ m^2x+1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Lời giải.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1 \\ x^3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x\in\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$; $x=1$.

Lời giải.

....

....

....

....

Dạng 3: Chứng minh phương trình có nghiệm.

Ta xét bài toán tổng quát sau.

Bài toán 1. Cho phương trình $f(x)=0$. Chứng minh phương trình có nghiệm.

1. Phương pháp.

- **Bước 1:** Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=0$.
- **Bước 2:** Hàm số liên tục và xác định trên tập xác định $\Rightarrow$ hàm số liên tục trên $[a;b]$.
- **Bước 3:** Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b)<0$.

  Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.
- **Chú ý:**
  - Nếu $f(a).f(b)\le 0$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $[a;b]$
  - Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;+\infty)$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;+\infty)$.
  - Nếu hàm số f(x) liên tục trên $(-\infty;a]$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-\infty;a)$.
  - Để chứng minh $f(x)=0$ có ít nhất n nghiệm trên $[a;b]$, ta chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ rời nhau, rồi chứng minh trên mỗi khoảng đó phương trình có ít nhất một nghiệm.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 21. Chứng minh rằng phương trình

a). $x^4-3x^2+5x-6=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

b). $x^3+x+1=0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

c). $x^2\cos x+x\sin x+1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 22. Chứng minh phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng năm nghiệm.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 23. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm

a). $x^5-3x+3=0$. **b).** $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài tập 24. Chứng minh rằng phương trình

a). $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$.

b). $x^5-5x^4+4x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;5)$.

Lời giải

Bài tập 25. Chứng minh rằng phương trình

a). $2x^2+3x-4=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;1)$.

b). $x^3-3x^2+3=0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;3)$.

c). $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$ có ba nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-7;9)$.

Lời giải

Bài toán 2. Chứng minh phương trình có chứa tham số m luôn có nghiệm với mọi m.

1. Phương pháp.

- **Bước 1.** Chọn hai số a và b thỏa mãn hai trường hợp.
  - $f(a)>0$ **thì** $f(b)<0,\forall m$ ***(đưa về bình phương thiếu khi biểu thức có chứa tham số*** m)
    $\Rightarrow f(a).f(b)<0,\forall m$ nên phương trình luôn có ít nhất một nghiệm $\forall m$.
  - $f(a)<0$ **thì** $f(b)>0,\forall m$ ***(đưa về bình phương thiếu khi biểu thức có chứa tham số*** m)
    $\Rightarrow f(a).f(b)<0,\forall m$ nên phương trình luôn có ít nhất một nghiệm $\forall m$.
- **Bước 2.** Kết luận

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 25. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm

a). $(1-m^2)(x+1)^3+x^2-x-3=0$.

b). $(m^2+m+5)x^7+x^5-1=0$.

c). $m(x+1)^4(x-2)^3-(x-1)(x-3)=0$.

d). $\cos x+m\cos 2x=0$

e). $m\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=2\sin 5x+1$.

f). $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=m$

Lời giải

Bài tập 25. Chứng minh rằng nếu $m<-3$ thì phương trình $\left(3m^2+m-1\right)x^3+\left(3m-2\right)x^2+\left(m+1\right)x-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;1\right)$.

Lời giải

Bài toán 2. Chứng minh phương trình có chứa tham số m luôn có nghiệm dương hoặc nghiệm âm với mọi m.

1. Phương pháp.

Chọn số a thỏa mãn hai trường hợp.

- **Trường hợp 1.** Nếu nghiệm dương chọn $a=0$

☞ Khi đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;+\infty)$ thỏa $\begin{cases} f(0)<0 \\ tính \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)>0 \end{cases} \Rightarrow f(a).\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$

thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm dương thuộc $(a;+\infty)$.

Trường hợp 2. Nếu nghiệm âm chọn $a=0$

☞ Thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;a]$ thỏa $\begin{cases} f(0)>0 \\ tính \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0 \end{cases} \Rightarrow f(a).\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0$ thì

phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm âm thuộc $(-\infty;a)$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 25. Chứng minh rằng phương trình

a). $x^3+mx^2-1=0$ luôn có một nghiệm dương.

b). $\left(\sqrt{x-1}\right)^3+mx=m+1$ luôn có một nghiệm lớn hơn 1.

c). $\left(m^2-m+3\right)x^{2n}-2x-4=0, \forall n\in\mathbb{N}^*$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi $\forall m$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 25. Tìm m để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2,\ x_3$ thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 25. Chứng minh phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm x_0 thỏa mãn điều kiện $x_0 > \sqrt[7]{12}$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bài tập 25. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực khác 0. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm

a). $ax^2 + bx + c = 0$ với $2a + 3b + 6c = 0$.

b). $ax^2 + bx + c = 0$ với $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ và $m > 0$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

🗁 **Bài tập 25.** Chứng minh rằng nếu $2a+3b+6c=0$ thì phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

🗁 **Bài tập 25.** Chứng minh rằng mọi phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

🗁 **Bài tập 25.** Chứng minh rằng mọi phương trình bậc bốn $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ với $a.e<0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Bài tập 25. Cho $a,\ b,\ c$ là ba số dương phân biệt.
Chứng minh rằng phương trình $a\left(x-b\right)\left(x-c\right)+b\left(x-a\right)\left(x-c\right)+c\left(x-a\right)\left(x-b\right)=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 31. Cho hàm số $f\left(x\right)=-4x^3+4x-1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f\left(x\right)=0$ không có nghiệm trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

C. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

D. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Câu 32. Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $\left(-1;1\right)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $\left(-2;0\right)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $\left(-2;1\right)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(0;2\right)$.

Lời giải.

....

....

....

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Câu 34. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;4\right]$ sao cho $f\left(-1\right)=2$, $f\left(4\right)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Lời giải.

Câu 35. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $\left(-10;10\right)$ để phương trình $x^3-3x^2+\left(2m-2\right)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.