

LÊ BÁ BẢO

TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

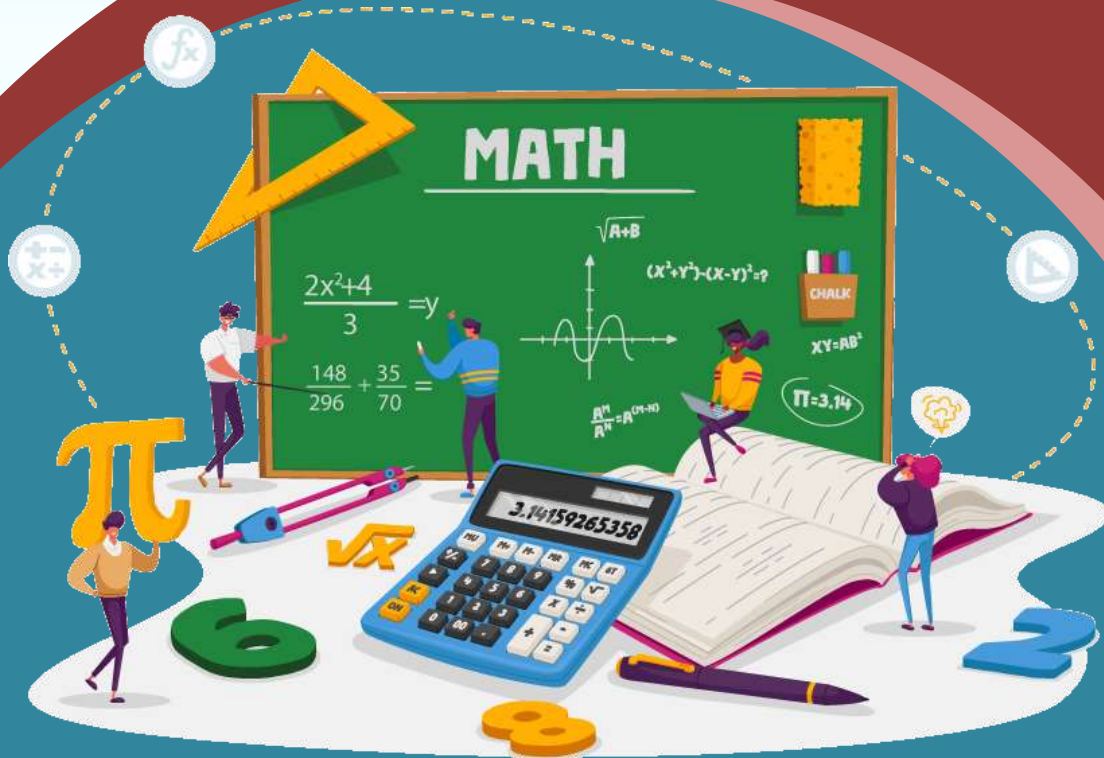
NGÂN HÀNG CÂU HỎI

TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍNH

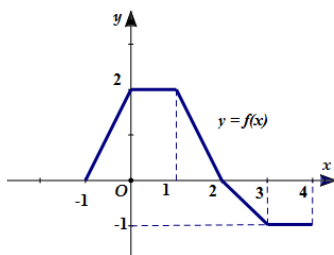
DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

- ✎ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- ✎ CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



Ngân hàng câu hỏi:
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC (1)
NỘI DUNG ĐỀ BÀI

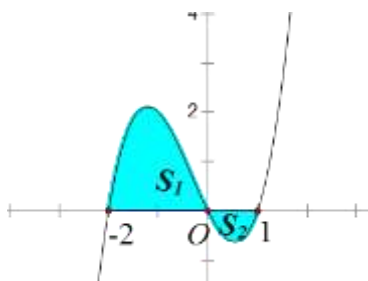
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới:



Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$.

- A. $I = 5$. B. $I = \frac{11}{2}$. C. $I = \frac{5}{2}$. D. $I = 3$.

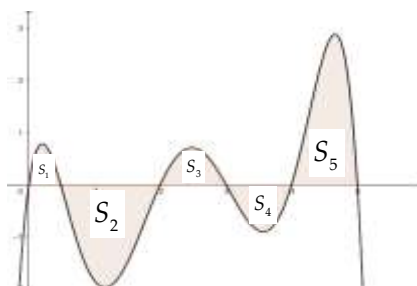
Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích $S_1 = \frac{8}{3}$ và phần nằm phía dưới trục hoành có diện tích $S_2 = \frac{5}{12}$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính $I = \int_{-1}^0 f(3x+1)dx$.

- A. $I = \frac{5}{3}$. B. $I = \frac{3}{4}$. C. $I = \frac{37}{36}$. D. $I = \frac{27}{4}$.

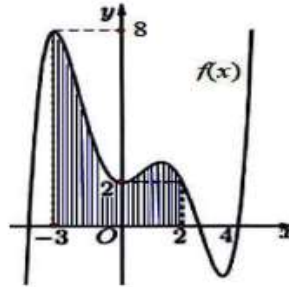
Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết diện tích $S_1 = 2$, $S_2 = 11$, $S_3 = 3$, $S_4 = 4$, $S_5 = 12$ (tham khảo hình vẽ)



Tích phân $\int_{-6}^1 [f(|x+1|) + x + 1]dx$ bằng

- A. $\frac{35}{2}$. B. $-\frac{35}{2}$. C. 18. D. -18.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giả sử diện tích phần kẻ dọc trên hình vẽ có diện tích bằng a . Tính theo a giá trị của

$$I = \int_{-3}^2 (2x+1) f'(x) dx.$$

- A.** $I = 50 - 2a$. **B.** $I = 50 - a$. **C.** $I = -30 - 2a$. **D.** $I = -30 + 2a$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1; 2]$ và thỏa mãn

$f(x) = f(1-x), \forall x \in [-1; 2]$. Đặt $S_1 = \int_{-1}^2 xf(x) dx$, S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $S_1 = 2S_2$. **B.** $S_1 = 3S_2$. **C.** $2S_1 = S_2$. **D.** $3S_1 = S_2$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$, trục hoành, các đường thẳng $x = -1, x = k$ ($k > 0$) bằng 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

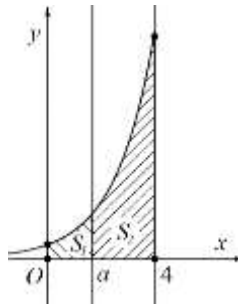
- A.** $k \in (-1; 4)$. **B.** $k \in (3; 6)$. **C.** $k \in (0; 2)$. **D.** $k \in \left(-3; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy $k \in (-1; 4)$.

Câu 7: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $\Delta: y = 2x + m$. Để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và Δ bằng $\frac{4}{3}$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-5; -3)$. **B.** $(-3; 0)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(2; 3)$.

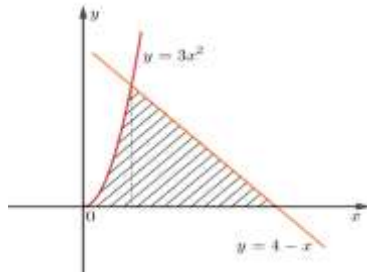
Câu 8: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = 2^x, y = 0, x = 0, x = 4$. Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên dưới:



Tìm a để $S_2 = 4S_1$.

- A.** $a = 3$. **B.** $a = \log_2 13$. **C.** $a = 2$. **D.** $a = \log_2 \frac{16}{5}$.

Câu 9: Gọi (H) là phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x^2$, $y = 4 - x$ và trục hoành (tham khảo hình vẽ)



Diện tích của (H) là bằng

- A. $\frac{11}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

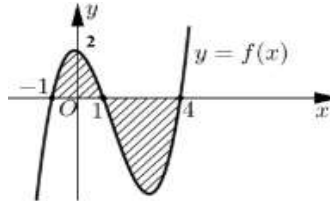
Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$ và hai tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(3; -2)$ là

- A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{11}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{13}{3}$.

Câu 11: Cho parabol $(P): y = x^2 + 2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1; 3)$ và $N(2; 6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{21}{4}$.

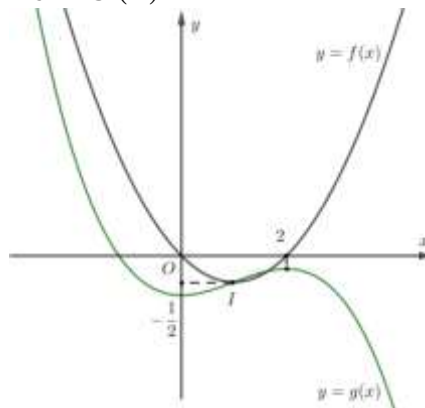
Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm số bậc ba. Gọi S là diện tích giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (tham khảo hình vẽ).



Khi đó diện tích S có giá trị bằng

- A. $\frac{253}{12}$. B. $\frac{253}{24}$. C. $\frac{235}{24}$. D. $\frac{235}{12}$.

Câu 13: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ bên dưới:



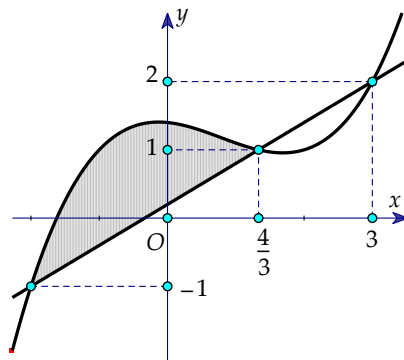
Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và $y = g(x)$ là một hàm số bậc ba. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 6. B. 8. C. 5. D. 7.

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2, (a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{316}{15}$. B. $\frac{191}{9}$. C. $\frac{253}{12}$. D. $\frac{97}{6}$.

Câu 15: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình S (được tô đậm) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

- A. $\frac{19}{15}$. B. $\frac{11}{9}$. C. $\frac{34}{15}$. D. $\frac{23}{6}$.

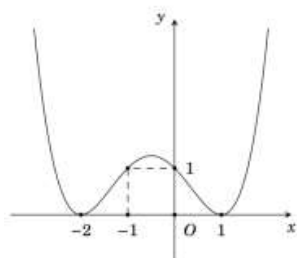
Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x + c$ ($a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$) có hai điểm cực trị là -6 và 2 . Gọi $y = g(x)$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

- A. 160. B. 128. C. 64. D. 672.

Câu 17: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 3$ và 4 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

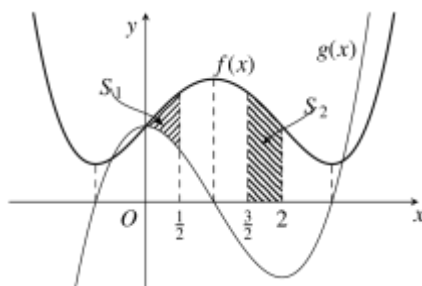
- A. $\frac{32}{3}$. B. $\frac{64}{9}$. C. $\frac{125}{12}$. D. $\frac{131}{12}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ có diện tích bằng



- A. $\frac{127}{40}$. B. $\frac{107}{5}$. C. $\frac{87}{40}$. D. $\frac{127}{10}$.

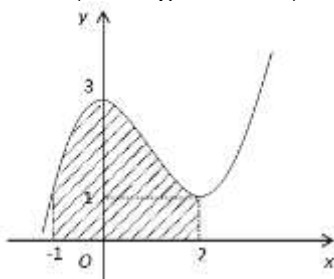
Câu 19: Cho hàm số $f(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2$ và hàm số $g(x) = bx^3 - cx^2 + 2$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Gọi $S_1; S_2$ là diện tích các hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ, biết $S_1 = \frac{221}{640}$. Khi đó S_2 bằng

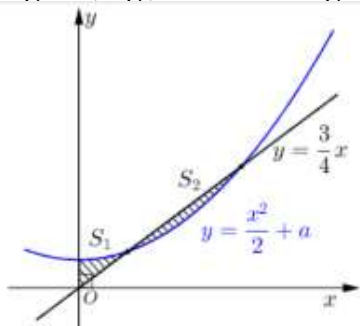
- A. $\frac{1361}{640}$. B. $\frac{271}{320}$. C. $\frac{571}{640}$. D. $\frac{791}{640}$.

Câu 20: Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây:



- A. $S = \frac{51}{8}$. B. $S = \frac{52}{8}$. C. $S = \frac{50}{8}$. D. $S = \frac{53}{8}$.

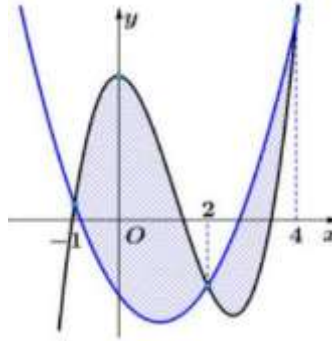
Câu 21: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên dưới:



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$. B. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$. C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$. D. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$.

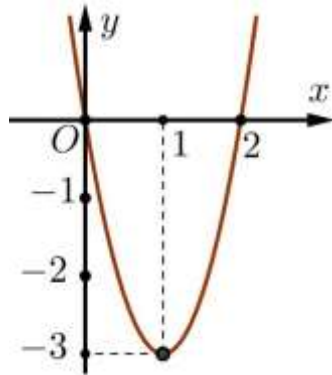
Câu 22: Cho hai hàm đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$. Biết rằng đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 4$ đồng thời cắt trục tung lần lượt tại M, N sao cho $MN = 6$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho (phần gạch sọc) có diện tích bằng

- A. $\frac{125}{8}$. B. $\frac{253}{24}$. C. $\frac{253}{16}$. D. $\frac{253}{12}$.

Câu 23: Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $[2; 3]$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



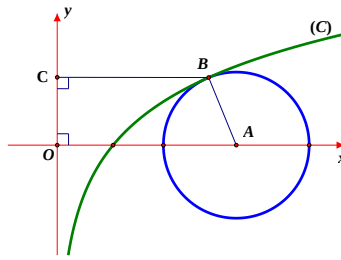
Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $g(x) = xf^2(x)$; $h(x) = -x^2 f(x) f'(x)$ và các đường thẳng $x = 2$; $x = 3$ bằng 72. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = 2$. B. $f(1) = -1$. C. $f(1) = 1$. D. $f(1) = \frac{-62}{5}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 . Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Gọi S_1, S_2 là diện tích các phần hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (với S_2 là diện tích phần hình phẳng nằm bên phải trục Oy). Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{1}{28}$ C. $\frac{2}{25}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 25: Cho hàm số $y = \ln x$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới:



Đường tròn tâm A có duy nhất một điểm chung B với (C). Biết $C(0;1)$, diện tích của hình thang $ABCO$ gần nhất với số nào sau đây.

- A. 3,01. B. 2,91. C. 3,09. D. 2,98.

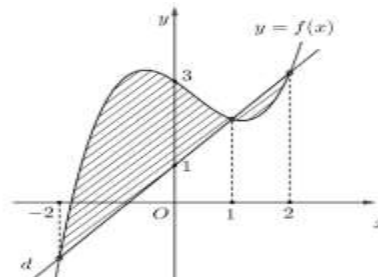
Câu 26: Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($b, c, d, e \in \mathbb{R}$) có các giá trị cực trị là 1, 4 và 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ và trục hoành bằng

- A. 4. B. 6. C. 2. D. 8.

Câu 27: Biết đồ thị (C) của hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có cực trị là $A(1;0)$. Gọi (P) là parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $B(2;3)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;1)$. B. $(2;3)$. C. $(3;4)$. D. $(1;2)$.

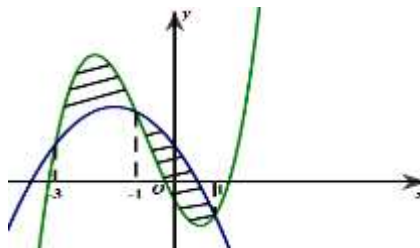
Câu 28: Đường thẳng d cắt đường cong $f(x) = a^3x + bx^2 + cx + d$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$ như hình vẽ bên dưới:



Diện tích hình phẳng gạch sọc thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{9}{2}; 5\right)$. B. $\left(6; \frac{13}{2}\right)$. C. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$. D. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$.

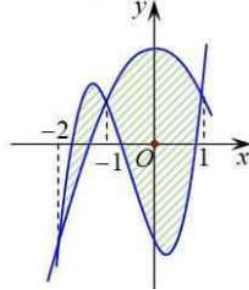
Câu 29: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3 ; -1 ; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. 6. B. 9. C. 7. D. 8.

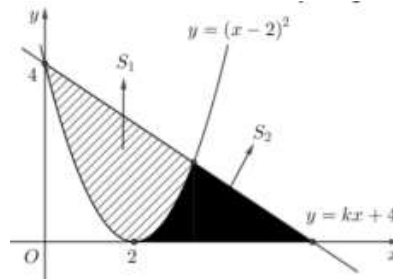
Câu 30: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

- A. $\frac{37}{5}$. B. $\frac{145}{7}$. C. $\frac{37}{6}$. D. $\frac{145}{8}$.

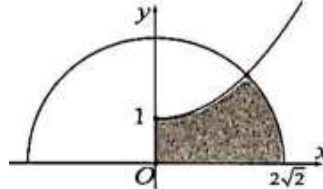
Câu 31: Đường thẳng $y = kx + 4$ cắt parabol $y = (x - 2)^2$ tại hai điểm phân biệt và diện tích các hình phẳng S_1, S_2 bằng nhau như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $k \in (-6; -4)$. B. $k \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. C. $k \in (-2; -1)$. D. $k \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

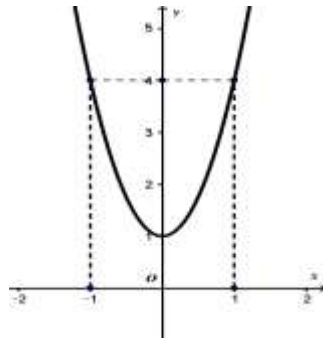
Câu 32: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (với $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$), nửa đường tròn $y = \sqrt{8 - x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

- A. $\frac{3\pi + 14}{6}$. B. $\frac{2\pi + 2}{3}$. C. $\frac{3\pi + 4}{6}$. D. $\frac{3\pi + 2}{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên.



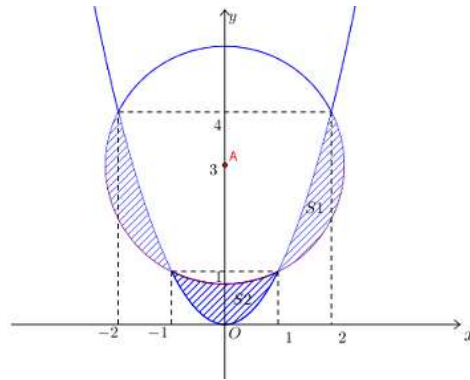
Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.

- A. $H = 45$. B. $H = 64$. C. $H = 51$. D. $H = 58$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in (3; 5)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in (5; +\infty)$.

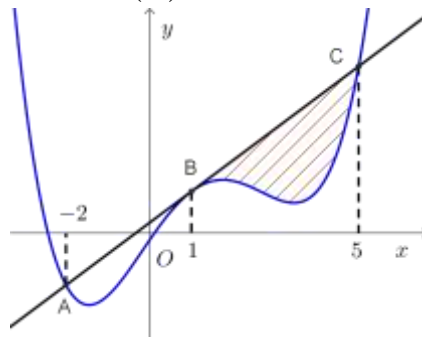
Câu 35: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn (C) có tâm $A(0; 3)$ bán kính bằng $\sqrt{5}$ như hình vẽ bên dưới:



Diện tích phần được tô đậm giữa (C) và (P) gần nhất với số nào dưới đây?

- A. 3.44. B. 1.51. C. 1.77. D. 3.54.

Câu 36: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới:



Đường thẳng $d: y = kx + \frac{1}{4}$ có đúng ba điểm chung với (C) là A, B, C và $BC - AB = \frac{5}{4}$. Biết

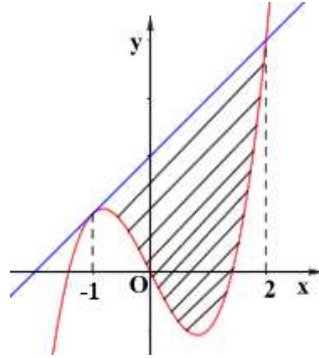
diện tích hình phẳng S (phần gạch sọc) là $\frac{24}{5}$. Giá trị của $\int_{-2}^1 f(x) dx$ bằng

- A. -2 . B. $-\frac{321}{160}$. C. $-\frac{161}{80}$. D. $-\frac{159}{160}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(x) + 2f'(x) + 3f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -6 và 42 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x) + f'(x) + f''(x)}{g(x) + 18}$ và $y = 1$.

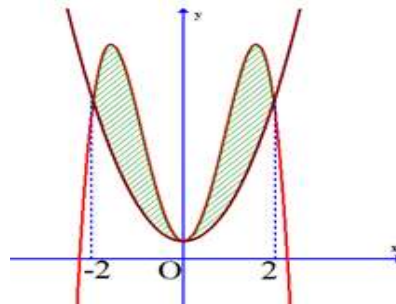
- A. $\ln 5$. B. $\ln 7$. C. $2\ln 6$. D. $2\ln 5$.

Câu 38: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm A có hoành độ bằng -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo trong hình) bằng



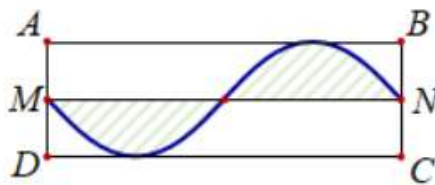
- A. $\frac{27}{4}$. B. $\frac{11}{2}$. C. $\frac{25}{4}$. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C) và $y = g(x) = mx^2 + nx + p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



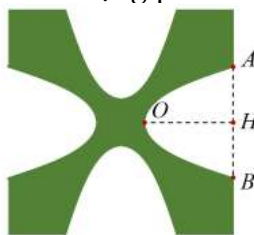
- A. $(4; 4,1)$. B. $(4,2; 4,3)$. C. $(4,3; 4,4)$. D. $(4,1; 4,2)$.

Câu 40: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu được giới hạn bởi cạnh AB, CD , đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin. Biết $AB = 2\pi$ (m), $AD = 2$ (m). Tính diện tích phần còn lại.



- A. $4\pi - 1$. B. $4(\pi - 1)$. C. $4\pi - 2$. D. $4\pi - 3$.

Câu 41: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên dưới:



Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.

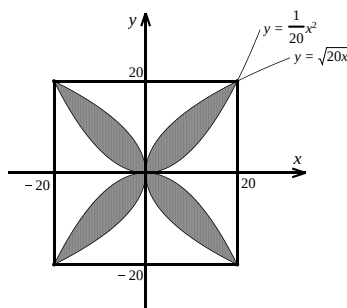
- A. $\frac{160}{3} \text{ cm}^2$. B. $\frac{140}{3} \text{ cm}^2$. C. $\frac{14}{3} \text{ cm}^2$. D. 50 cm^2 .

Câu 42: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình dạng một nửa elip như hình vẽ. Biết một nửa trục lớn là $AB = 6$ cm, trục bé $CD = 8$ cm. Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng



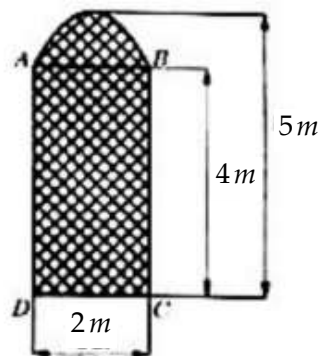
- A. $400 - 48\pi (\text{cm}^2)$. B. $400 - 96\pi (\text{cm}^2)$. C. $400 - 24\pi (\text{cm}^2)$. D. $400 - 36\pi (\text{cm}^2)$.

Câu 43: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



- A. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$. B. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$. C. 250 cm^2 . D. 800 cm^2 .

Câu 44: Ông An muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Biết rằng đường cong phía trên là một parabol, tứ giác $ABCD$ là một hình chữ nhật.



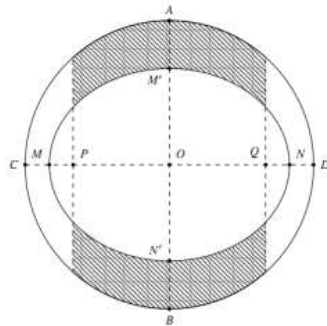
Giá cánh cửa sau khi hoàn thành là 900000 đồng/ m^2 . Số tiền ông An phải trả để làm cánh cửa đó bằng

A. $9\,600\,000$ đồng. B. $15\,600\,000$ đồng. C. $8\,160\,000$ đồng. D. $8\,400\,000$ đồng.

Câu 45: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là

A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. D. 6750000 đồng.

Câu 46: Một khu vườn dạng hình tròn có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, $AB = 12m$. Người ta làm một hồ cá có dạng elip với bốn đỉnh M, N, M', N' như hình vẽ. Biết $MN = 10m, M'N' = 8m, PQ = 8m$. Diện tích phần trồng cỏ (phần gạch sọc) bằng:

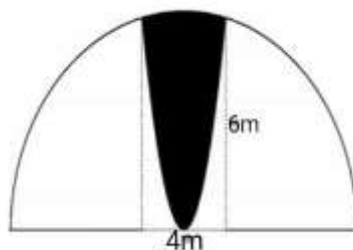


A. $32,03\,m^2$. B. $20,33\,m^2$. C. $33,02\,m^2$. D. $23,03\,m^2$.

Câu 47: Một khu vườn có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai đường tròn là $20m$ và $15m$, khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $30m$. Phần giao của hai hình tròn được trồng hoa với chi phí 300000 đồng/ m^2 . Phần còn lại được trồng cỏ với chi phí 100000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí để trồng hoa và cỏ của khu vườn gần nhất với số tiền nào dưới đây?

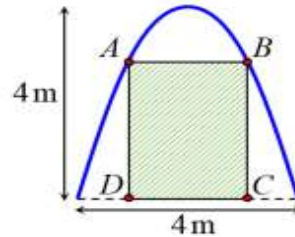
A. 202 triệu đồng. B. 208 triệu đồng. C. 192 triệu đồng. D. 218 triệu đồng.

Câu 48: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần trồng hoa hồng có dạng một hình Parabol có đỉnh trùng với tâm hình tròn và trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa đường tròn, hai đầu mút của Parabol nằm trên đường tròn và cách nhau một khoảng 4 mét (phần tô đậm). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dùng để trồng hoa cúc. Biết các kích thước cho như hình vẽ. Chi phí trồng hoa hồng và hoa cúc lần lượt là 120.000 đồng m^2 và 80.000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí trồng hoa khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây (làm tròn đến ngàn đồng).



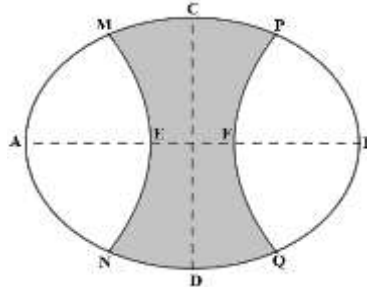
A. $6.847.000$ đồng. B. $6.865.000$ đồng. C. $5.710.000$ đồng. D. $5.701.000$ đồng.

Câu 49: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



- A. 900.000 đồng. B. 1.232.000 đồng. C. 902.000 đồng. D. 1.230.000 đồng.

Câu 50: Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A, B, C, D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E, F (phần tô đậm của hình vẽ).



Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB , đối xứng nhau qua trục CD , hai parabol cắt elip tại các điểm M, N, P, Q . Biết $AB = 8m$, $CD = 6m$, $MN = PQ = 3\sqrt{3}m$, $EF = 2m$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300.000 \text{ đ}/m^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn gần nhất với số tiền nào dưới đây?

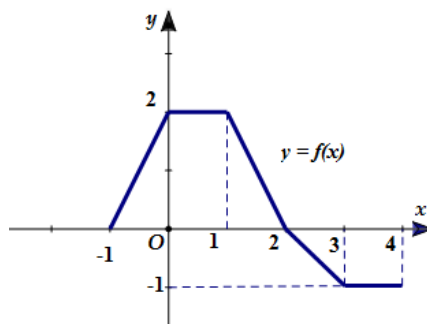
- A. 4477800 đồng. B. 4477000 đồng. C. 4477815 đồng. D. 4809142 đồng.

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-1; 4]$ như hình vẽ dưới:



Tính tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$.

A. $I = 5$.

B. $I = \frac{11}{2}$.

C. $I = \frac{5}{2}$.

D. $I = 3$.

Lời giải:

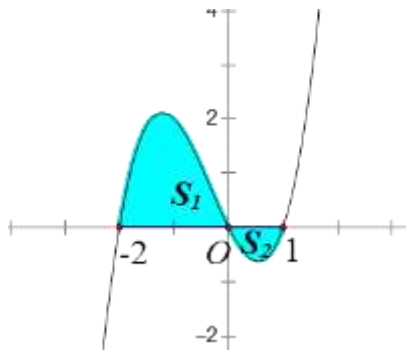
Gọi S_1 là diện tích của hình thang giới hạn bởi phần trên đồ thị hàm số $f(x)$ với trục hoành.

Gọi S_2 là diện tích của hình thang giới hạn bởi phần dưới đồ thị hàm số $f(x)$ với trục hoành.

Với $S_1 = \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{(1+3) \cdot 2}{2} = 4$, $S_2 = -\int_2^4 f(x)dx = -\frac{(1+2) \cdot 1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Ta có: $I = \int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx = \int_{-1}^2 f(x)dx - \left(-\int_2^4 f(x)dx \right) = S_1 - S_2 = \frac{5}{2}$.

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích $S_1 = \frac{8}{3}$ và phần nằm phía dưới trục hoành có diện tích $S_2 = \frac{5}{12}$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính $I = \int_{-1}^0 f(3x+1)dx$.

A. $I = \frac{5}{3}$.

B. $I = \frac{3}{4}$.

C. $I = \frac{37}{36}$.

D. $I = \frac{27}{4}$.

Lời giải:

Với $I = \int_{-1}^0 f(3x+1)dx$.

Đặt $t = 3x + 1 \Rightarrow dt = 3dx$. Khi $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = -1 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$.

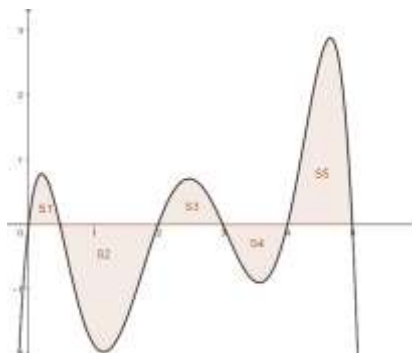
$$\text{Ta được } I = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \left(\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right).$$

Trên đoạn $[-2; 0]$: $f(x) \geq 0$ nên $\int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

Trên đoạn $[0; 1]$: $f(x) \leq 0$ nên $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{5}{12}$.

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{3} \left(\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{12} \right) = \frac{3}{4}.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết diện tích $S_1 = 2$, $S_2 = 11$, $S_3 = 3$, $S_4 = 4$, $S_5 = 12$ (tham khảo hình vẽ)



Tích phân $\int_{-6}^1 [f(|x+1|) + x+1] dx$ bằng

A. $\frac{35}{2}$.

B. $-\frac{35}{2}$.

C. 18.

D. -18.

Lời giải:

$$\int_{-6}^1 [f(|x+1|) + x+1] dx = \int_{-6}^1 f(|x+1|) dx + \int_{-6}^1 (x+1) dx$$

$$\text{Ta có: } \int_{-6}^1 f(|x+1|) dx = \int_{-6}^{-1} f(-x-1) dx + \int_{-1}^1 f(x+1) dx$$

$$\text{Xét } \int_{-6}^{-1} f(-x-1) dx. \text{ Đặt } -x-1 = t \Rightarrow -dx = dt.$$

x	-6	-1
t	5	0

$$\text{Ta có: } \int_{-6}^{-1} f(-x-1) dx = -\int_5^0 f(t) dt = \int_0^5 f(t) dt = 2 - 11 + 3 - 4 + 12 = 2$$

$$\text{Xét } \int_{-1}^1 f(x+1) dx$$

$$\text{Đặt } x+1 = t \Rightarrow dx = dt$$

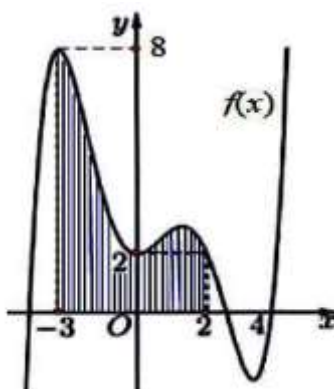
x	-1	1
t	0	2

Ta có: $\int_{-1}^1 f(x+1)dx = \int_0^2 f(t)dt = 2 - 11 = -9$

Xét $\int_{-6}^1 (x+1)dx = \frac{-21}{2}$

Vậy $\int_{-6}^1 [f(|x+1|) + x+1]dx = \int_{-6}^1 f(|x+1|)dx + \int_{-6}^1 (x+1)dx = 2 - 9 - \frac{21}{2} = \frac{-35}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giả sử diện tích phần kẻ dọc trên hình vẽ có diện tích bằng a . Tính theo a giá trị của

$$I = \int_{-3}^2 (2x+1)f'(x)dx.$$

A. $I = 50 - 2a$.

B. $I = 50 - a$.

C. $I = -30 - 2a$.

D. $I = -30 + 2a$.

Lời giải:

Từ đồ thị suy ra $S = \int_{-3}^2 f(x)dx = a$ và $f(-3) = 8; f(2) = 2$.

Ta có $I = \int_{-3}^2 (2x+1)f'(x)dx = \int_{-3}^2 (2x+1)d(f(x))$

$$= (2x+1)f(x) \Big|_{-3}^2 - 2 \int_{-3}^2 f(x)dx = 5f(2) + 5f(-3) - 2S = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 8 - 2a = 50 - 2a.$$

Vậy $I = 50 - 2a$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;2]$ và thỏa mãn

$f(x) = f(1-x), \forall x \in [-1;2]$. Đặt $S_1 = \int_{-1}^2 xf(x)dx$, S_2 là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ

thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S_1 = 2S_2$.

B. $S_1 = 3S_2$.

C. $2S_1 = S_2$.

D. $3S_1 = S_2$.

Lời giải:

Ta có $S_1 = \int_{-1}^2 xf(x)dx$.

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $x = -1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } S_1 &= \int_{-1}^2 (1-t) f(1-t) (-dt) = \int_{-1}^2 (1-t) f(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 f(t) dt - \int_{-1}^2 t f(t) dt = \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_{-1}^2 x f(x) dx = S_2 - S_1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2S_1 = S_2.$$

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$, trục hoành, các đường thẳng $x = -1$, $x = k$ ($k > 0$) bằng 8. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $k \in (-1; 4)$. **B.** $k \in (3; 6)$. **C.** $k \in (0; 2)$. **D.** $k \in \left(-3; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải:

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm } S = \int_{-1}^k (x^3 - 3x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right) \Big|_{-1}^k = \frac{k^4}{4} + k^3 + 4k + \frac{11}{4}.$$

$$\text{Mà } S = 8 \Leftrightarrow \frac{k^4}{4} + k^3 + 4k - \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow (k-3) \left(\frac{1}{4}k^3 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k + \frac{7}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 & (TM) \\ k = -2,07 & (L) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } k \in (-1; 4).$$

Câu 7: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $\Delta: y = 2x + m$. Để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và Δ bằng $\frac{4}{3}$ thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-5; -3)$. **B.** $(-3; 0)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(2; 3)$.

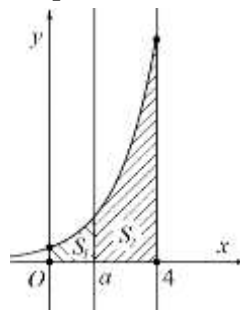
Lời giải:

$$\text{Ta xét: } f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 1 - (2x + m) = x^2 - 4x - 1 - m.$$

Đã biết công thức tính nhanh diện tích giới hạn bởi hai đường cong có

$$f(x) - g(x) = ax^2 + bx + c \text{ là } S = \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2} = \frac{(20+4m)\sqrt{20+4m}}{6 \cdot 1^2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = -4.$$

Câu 8: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên dưới:



$$\text{Tìm } a \text{ để } S_2 = 4S_1.$$

- A.** $a = 3$. **B.** $a = \log_2 13$. **C.** $a = 2$. **D.** $a = \log_2 \frac{16}{5}$.

Lời giải:

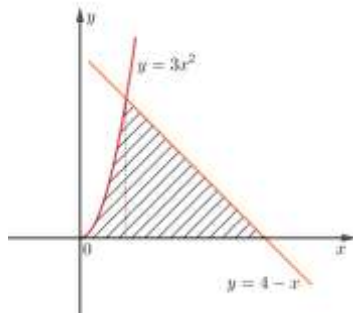
Ta có $S_1 = \int_0^a 2^x dx$; $S_2 = \int_a^4 2^x dx$.

Mặt khác, $S_2 = 4S_1 \Leftrightarrow \int_a^4 2^x dx = 4 \int_0^a 2^x dx \Leftrightarrow \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_a^4 = 4 \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^a \Leftrightarrow \frac{2^4}{\ln 2} - \frac{2^a}{\ln 2} = 4 \left(\frac{2^a}{\ln 2} - \frac{2^0}{\ln 2} \right)$

$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^a + 2^a = 2^4 + 4 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^a = 20 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $a = 2$.

Câu 9: Gọi (H) là phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x^2$, $y = 4 - x$ và trục hoành (tham khảo hình vẽ)



Diện tích của (H) là bằng

A. $\frac{11}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{13}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải:

$(H): \begin{cases} y = 3x^2 \\ y = 4 - x \\ y = 0 \end{cases}$

Xét các phương trình hoành độ giao điểm:

$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $3x^2 = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (t/m)} \\ x = \frac{-4}{3} \text{ (Loại)} \end{cases}$

Diện tích hình phẳng $S_{(H)} = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^4 (4 - x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{11}{2}$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$ và hai tiếp tuyến của (C) xuất phát từ $M(3; -2)$ là

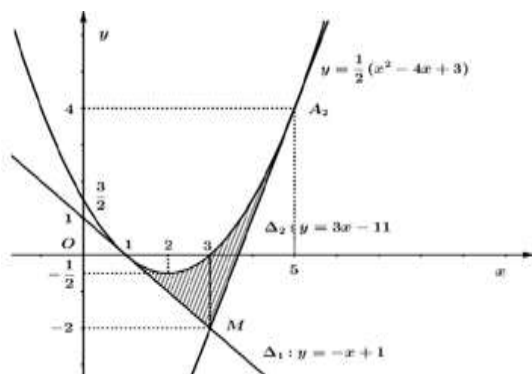
A. $\frac{5}{3}$.

B. $\frac{11}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải:



Đặt $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$, có $f'(x) = x - 2$.

Tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(x_0; f(x_0))$ có phương trình dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Hay $\Delta: y = (x_0 - 2)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x_0^2 - 4x_0 + 3)$

Tiếp tuyến này xuất phát từ $M(3; -2)$ nên $-2 = (x_0 - 2)(3 - x_0) + \frac{1}{2}(x_0^2 - 4x_0 + 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^2 + 3x_0 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1: y = -x + 1 \\ \Delta_2: y = 3x - 11 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị đã vẽ, diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_1^3 \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) - (-x + 1) \right] dx + \int_3^5 \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) - (3x - 11) \right] dx$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \right) dx + \int_3^5 \left(\frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{25}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{25}{2}x \right) \Big|_3^5 = \frac{8}{3}.$$

Câu 11: Cho parabol $(P): y = x^2 + 2$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm $M(-1; 3)$ và $N(2; 6)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến đó bằng

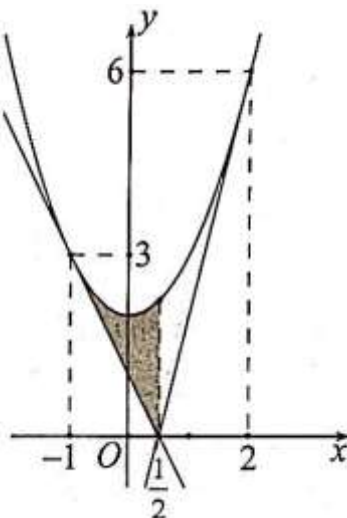
A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải:



Ta có: $y' = 2x$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ là $d_1: y = -2x + 1$.

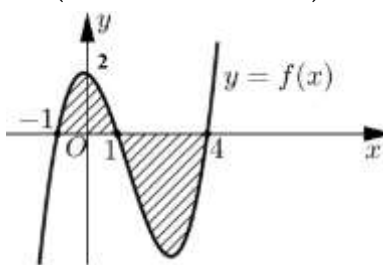
Phương trình tiếp tuyến tại $N(2;6)$ là $d_2: y = 4x - 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $-2x + 1 = 4x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích phần giới hạn cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left| (x^2 + 2) - (-2x + 1) \right| dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left| (x^2 + 2) - (4x - 2) \right| dx = \frac{9}{4}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm số bậc ba. Gọi S là diện tích giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (tham khảo hình vẽ).



Khi đó diện tích S có giá trị bằng

A. $\frac{253}{12}$.

B. $\frac{253}{24}$.

C. $\frac{235}{24}$.

D. $\frac{235}{12}$.

Lời giải:

Dựa vào hình vẽ ta có $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -1$; $x = 1$; $x = 4$.

Mà $f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x) = a(x+1)(x-1)(x-4)$

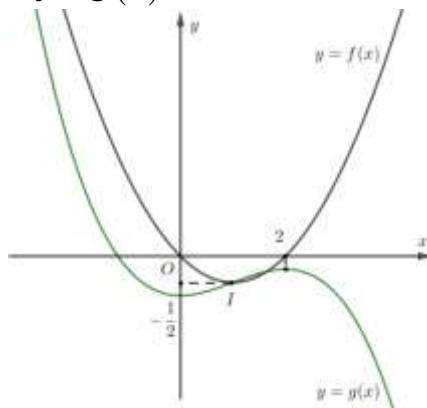
Cho $x = 0$ suy ra $4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Do đó $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-4)$

Nên diện tích S giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ là

$$S = \int_{-1}^4 \left| \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-4) \right| dx = \frac{253}{24}.$$

Câu 13: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{1}{2}$ và $y = g(x)$ là một hàm số bậc ba. Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 6.

B. 8.

C. 5.

D. 7.

Lời giải:

Gọi phương trình của Parabol là $y = ax^2 + bx + c$, từ dữ kiện đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Giả sử $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì đồ thị của nó đi qua $I\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ và có 2 cực trị có hoành độ bằng 0 và 2, tức là phương trình $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm là 0 và 2.

Kết hợp với giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\frac{1}{2} \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = \frac{3}{8} \\ c = 0 \\ d = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}.$$

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2}x^2 - x = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{7} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 + \sqrt{7} \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1-\sqrt{7}}^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^{-1+\sqrt{7}} [g(x) - f(x)] dx \\ &= \int_{-1-\sqrt{7}}^1 \left[\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{8} - x + \frac{3}{4} \right] dx + \int_1^{-1+\sqrt{7}} \left[-\frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{8} + x - \frac{3}{4} \right] dx \approx 6,22. \end{aligned}$$

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 4$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{316}{15}$.

B. $\frac{191}{9}$.

C. $\frac{253}{12}$.

D. $\frac{97}{6}$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

$$h(x) = ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 6 = 0.$$

Hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$ nên

$$h(x) = a(x+3)(x+1)(x-2) = 0.$$

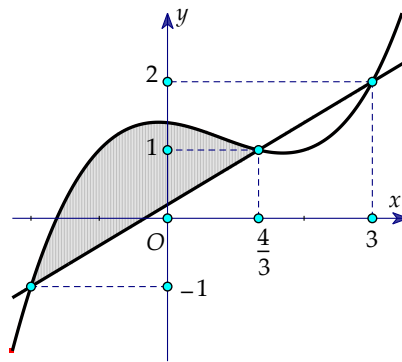
$$\text{Xét } h(0) = -6 \Leftrightarrow a \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-2) = -6 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy hàm số: } h(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$$

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho có diện tích bằng:

$$S = \int_{-3}^2 |h(x)| dx = \int_{-3}^2 |(x+3)(x+1)(x-2)| = \frac{253}{12}.$$

Câu 15: Cho $f(x), g(x)$ lần lượt là các hàm đa thức bậc ba và bậc nhất có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình S (được tô đậm) bằng $\frac{250}{81}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{19}{15}$.

B. $\frac{11}{9}$.

C. $\frac{34}{15}$.

D. $\frac{23}{6}$.

Lời giải:

Ta có $g(x)$ là hàm số bậc nhất đi qua $A\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ và $B(3; 2)$ nên $g(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

Với $y = -1 \Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2; -1)$ là giao điểm của $f(x)$ và $g(x)$.

$$\text{Do đó } f(x) - g(x) = a\left(x + 2\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 3).$$

$$\text{Lại có: } S = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} [f(x) - g(x)] dx \Leftrightarrow \frac{250}{81} = \int_{-2}^{\frac{4}{3}} \left[a\left(x + 2\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 3) \right] dx \Leftrightarrow a = \frac{3}{20}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) - g(x) = \frac{3}{20}\left(x + 2\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{20}\left(x + 2\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{20}\left(x + 2\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 3) + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \right] dx = \frac{34}{15}.$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x + c$ ($a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$) có hai điểm cực trị là -6 và 2 . Gọi $y = g(x)$ là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. 160.

B. 128.

C. 64.

D. 672.

Lời giải:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 36.$$

$$\text{Theo bài ta được } \begin{cases} f'(-6) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a(-6)^2 + 2b(-6) - 36 = 0 \\ 3a(2)^2 + 2b(2) - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - b = 3 \\ 3a + b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + c; f'(x) = 3x^2 + 12x - 36;$$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số:

$$y = f(x) = (3x^2 + 12x - 36) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) - 32x + c + 24$$

$$\text{là } y = g(x) = -32x + c + 24.$$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị } x^3 + 6x^2 - 36x + c = -32x + c + 24 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

$$S = \int_{-6}^2 \left| (x^3 + 6x^2 - 36x + c) - (-32x + c + 24) \right| dx = \left| \int_{-6}^2 (x^3 + 6x^2 - 4x - 24) dx \right| + \left| \int_{-2}^2 (x^3 + 6x^2 - 4x - 24) dx \right| = 128.$$

Câu 17: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$; với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1 ; 3 và 4 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{64}{9}$.

C. $\frac{125}{12}$.

D. $\frac{131}{12}$.

Lời giải:

Ta có $f(x) - g(x)$ là hàm bậc 4 nên $f(x) - g(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + 4x$.

$$f'(x) - g'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + 4.$$

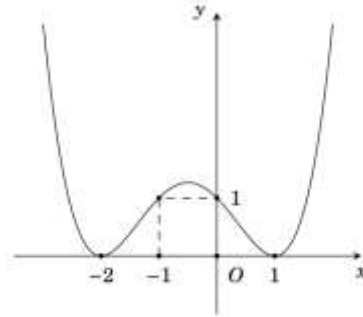
Hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là -1 ; 3 và 4 nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4A + 3B - 2C + 4 = 0 \\ 108A + 27B + 6C + 4 = 0 \\ 256A + 48B + 8C + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = \frac{-2}{3} \\ C = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow f'(x) - g'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x + 4$$

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

$$S = \int_{-1}^4 \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x + 4 \right| dx = \frac{131}{12}.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ có diện tích bằng



A. $\frac{127}{40}$.

B. $\frac{107}{5}$.

C. $\frac{87}{40}$.

D. $\frac{127}{10}$.

Lời giải:

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng -2 và 1 nên hàm số có dạng $f(x) = a(x+2)^2(x-1)^2$.

Mà đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(0;1) \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1)$$

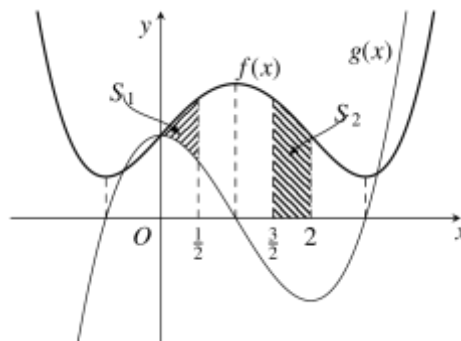
Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$:

$$\frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2 = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ có diện tích là

$$S = \int_{-2}^4 \left| \frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1) \right| dx = \frac{107}{5}.$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2$ và hàm số $g(x) = bx^3 - cx^2 + 2$, có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Gọi $S_1; S_2$ là diện tích các hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ, biết $S_1 = \frac{221}{640}$. Khi đó S_2 bằng

A. $\frac{1361}{640}$.

B. $\frac{271}{320}$.

C. $\frac{571}{640}$.

D. $\frac{791}{640}$.

Lời giải:

Từ đồ thị ta thấy hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ với trục hoành chính là điểm cực trị của hàm số $f(x)$. Do đó: $f'(x) = k.g(x)$. Hay: $4ax^3 - 3x^2 + 2 = k(bx^3 - cx^2 + 2)$

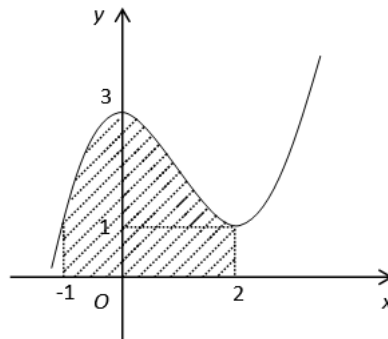
$$\text{Suy ra: } \begin{cases} k = 1 \\ b = 3a \\ c = 3 \end{cases} \text{ Hay: } g(x) = 4ax^3 - 3x^2 + 2.$$

$$\text{Suy ra: } f(x) - g(x) = ax^4 - x^3 + 2x + 2 - 4ax^3 + 3x^2 - 2 = ax^4 - (1 + 4a)x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$\text{Khi đó: } S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (ax^4 - (1 + 4a)x^3 + 3x^2 + 2x) dx = \frac{221}{640} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } S_2 = \int_{\frac{3}{2}}^2 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + 2 \right) dx = \frac{791}{640}.$$

Câu 20: Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây:



A. $S = \frac{51}{8}$.

B. $S = \frac{52}{8}$.

C. $S = \frac{50}{8}$.

D. $S = \frac{53}{8}$.

Lời giải:

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

• Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và 3 $\Rightarrow S_1 = 3$.

$$\text{• Miền } D_2 \text{ gồm: } \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \\ y = 1 \\ x = -1; x = 2 \end{cases}.$$

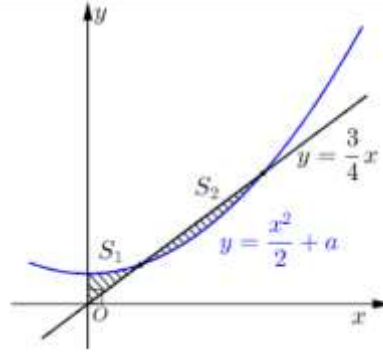
Để thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3.$$

$$\Rightarrow S_2 = \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3 - 1 \right) dx = \frac{27}{8}.$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S = S_1 + S_2 = \frac{51}{8}$.

Câu 21: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên dưới:



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$.

D. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$.

Lời giải:

Xét phương trình: $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x^2 + a \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4a = 0$

Ta có: $\Delta = 9 - 32a$, theo giả thuyết $\Delta > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{32}$

Khi đó hoành độ giao điểm là $x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 32a}}{4}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 32a}}{4}$.

Ta có: $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - a \right) dx$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{6} + ax - \frac{3x^2}{8} \right) \Big|_0^{x_1} = \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{6} - ax \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1^3}{6} + ax_1 - \frac{3x_1^2}{8} = \frac{3x_2^2}{8} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 - \frac{3x_1^2}{8} + \frac{x_1^3}{6} + ax_1$$

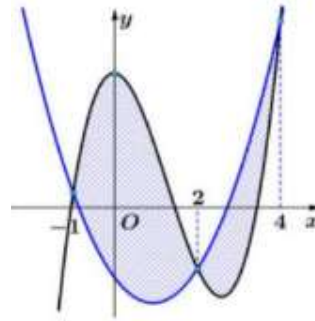
$$\Leftrightarrow \frac{3x_2^2}{8} - \frac{x_2^3}{6} - ax_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3x_2}{8} - \frac{x_2^2}{6} - a = 0 \Leftrightarrow \frac{9 + 3\sqrt{9 - 32a}}{32} - \frac{(3 + \sqrt{9 - 32a})^2}{96} - a = 0$$

$$\Leftrightarrow 27 + 9\sqrt{9 - 32a} - 9 - 6\sqrt{9 - 32a} - 9 + 32a - 96a = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{9 - 32a} = 64a - 9 \Leftrightarrow 81 - 288a = 4096a^2 - 1152a + 81 \Leftrightarrow 4096a^2 - 864a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{27}{128} \end{cases}$$

Do a là số thực dương nên $a = \frac{27}{128} \in \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

Câu 22: Cho hai hàm đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$. Biết rằng đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 4$ đồng thời cắt trục tung lần lượt tại M, N sao cho $MN = 6$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đã cho (phần gạch sọc) có diện tích bằng

- A. $\frac{125}{8}$. B. $\frac{253}{24}$. **C. $\frac{253}{16}$.** D. $\frac{253}{12}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = mx^2 + nx + p \Leftrightarrow ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + d-p = 0$$

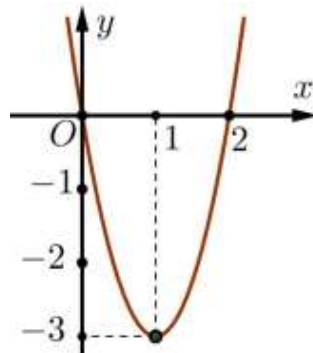
Do đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-1; 2; 4$ nên ta được $a(x+1)(x-2)(x-4) = ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + d-p$.

Mà $|f(0) - g(0)| = |y_M - y_N| = MN = 6$. Suy ra $a = \frac{3}{4}$.

Do đó: $f(x) - g(x) = \frac{3}{4}(x+1)(x-2)(x-4)$.

$$\text{Khi đó: } S = \int_{-1}^4 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^4 \left| \frac{3}{4}(x+1)(x-2)(x-4) \right| dx = \frac{253}{16}.$$

Câu 23: Cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) là hàm số nhận giá trị không âm trên đoạn $[2; 3]$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $g(x) = xf^2(x)$; $h(x) = -x^2 f(x) f'(x)$ và các đường thẳng $x = 2$; $x = 3$ bằng 72. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = 2$.** B. $f(1) = -1$. C. $f(1) = 1$. D. $f(1) = \frac{-62}{5}$.

Lời giải:

Từ hình vẽ ta có được $f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + C$.

Diện tích hình phẳng là $S = \int_2^3 |g(x) - h(x)| dx = \int_2^3 |xf^2(x) + x^2 f(x) f'(x)| dx$

Do $xf^2(x) + x^2 f(x) f'(x) \geq 0, \forall x \in [2;3]$ nên $S = \int_2^3 [xf^2(x) + x^2 f(x) f'(x)] dx$

Ta có: $S = \int_2^3 \left[\frac{1}{2} x^2 f^2(x) \right]' dx = \frac{1}{2} x^2 f^2(x) \Big|_2^3 = \frac{9}{2} f^2(3) - 2 f^2(2) = \frac{9}{2} C^2 - 2(C-4)^2$

Mà $S = 72 \Leftrightarrow \frac{9}{2} C^2 - 2(C-4)^2 = 72 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ C = \frac{-52}{5} \end{cases}$.

Do $f(x) \geq 0, \forall x \in [2;3] \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f(1) = 2$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 . Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Gọi S_1, S_2 là diện tích các phần hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (với S_2 là diện tích phần hình phẳng nằm bên phải trục Oy). Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{1}{14}$

B. $\frac{1}{28}$

C. $\frac{2}{25}$

D. $\frac{1}{5}$

Lời giải:

Giả sử phương trình tiếp tuyến là $y = g(x)$.

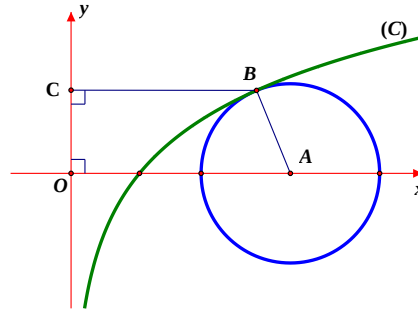
Do tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại 2 điểm khác có hoành độ lần lượt là 0 và 2 nên ta có phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$f(x) - g(x) = ax(x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } S_1 = \left| \int_{-1}^0 ax(x+1)^2(x-2) dx \right| = \frac{|a|}{5}; S_2 = \left| \int_0^2 ax(x+1)^2(x-2) dx \right| = \frac{28|a|}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{28}.$$

Câu 25: Cho hàm số $y = \ln x$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới:



Đường tròn tâm A có duy nhất một điểm chung B với (C) . Biết $C(0;1)$, diện tích của hình thang $ABCO$ gần nhất với số nào sau đây.

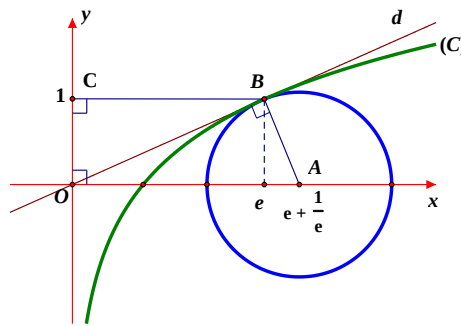
A. 3,01.

B. 2,91.

C. 3,09.

D. 2,98.

Lời giải:



Đường thẳng đi qua $C(0;1)$ và song song với trục hoành cắt đồ thị (C) tại $B(e;1)$.

Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại $B(e;1)$ thì phương trình (d) là $y = \frac{x}{e}$.

(C) tiếp xúc với đường tròn tâm A tại $B(e;1)$ thì (d) là tiếp tuyến chung của (C) và đường tròn tâm A . $AB \perp (d) \Rightarrow A(e + \frac{1}{e}; 0)$.

Hình thang $ABCO$ có: $OA = e + \frac{1}{e}$; $CB = e$; $OC = 1$.

Vậy $S_{ABCO} = \frac{(OA + CB)OC}{2} = e + \frac{1}{2e} \approx 2,91$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($b, c, d, e \in \mathbb{R}$) có các giá trị cực trị là 1, 4 và 9. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ và trục hoành bằng

A. 4.

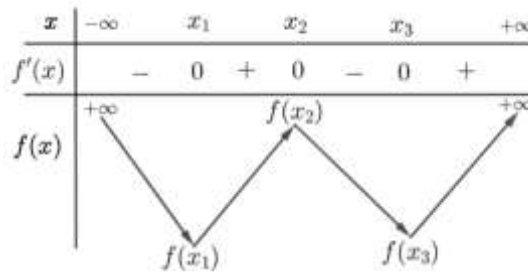
B. 6.

C. 2.

D. 8.

Lời giải:

+) Gọi $x_1 < x_2 < x_3$ là ba điểm cực trị của hàm số $f(x)$. Ta có bảng biến thiên:



+) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)$ và trục hoành là:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ f(x_i) > 0 \text{ (TM)} \end{cases}$$

+) Diện tích cần tìm là

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx - \int_{x_2}^{x_3} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} \Big|_{x_1}^{x_2} - 2\sqrt{f(x)} \Big|_{x_2}^{x_3} = 4\sqrt{f(x_2)} - 2\sqrt{f(x_1)} - 2\sqrt{f(x_3)} = 6.$$

Câu 27: Biết đồ thị (C) của hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có cực trị là $A(1; 0)$. Gọi (P) là parabol có đỉnh $I(0; -1)$ và đi qua điểm $B(2; 3)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(3; 4)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải:

Đồ thị (C) của hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có cực trị là

$$A(1; 0) \Rightarrow A \in (C) \Rightarrow b + c = -1$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx \text{ vì } A(1; 0) \text{ là cực trị nên } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2b = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow c = 1.$$

$$\Rightarrow (C): f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\text{Gọi } (P): y = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad (a_1 \neq 0).$$

$$(P) \text{ là parabol có đỉnh } I(0; -1) \Rightarrow I \in (P) \Rightarrow c_1 = -1.$$

$$\text{Hoành độ đỉnh } (P): x_I = -\frac{b_1}{2a_1} = 0 \Rightarrow b_1 = 0.$$

$$(P) \text{ đi qua điểm } B(2; 3) \Rightarrow 3 = 4a_1 + 2b_1 + c_1 \Rightarrow a_1 = 1.$$

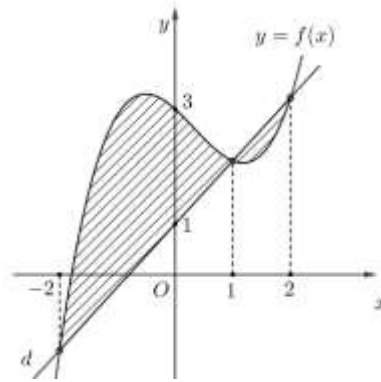
$$\Rightarrow (P): y = x^2 - 1.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) :

$$x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Diện tích hình phẳng: } S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |x^4 - 3x^2 + 2| dx \approx 2,537.$$

Câu 28: Đường thẳng d cắt đường cong $f(x) = a^3x + bx^2 + cx + d$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -2, x = 1, x = 2$ như hình vẽ bên dưới:



Diện tích hình phẳng gạch sọc thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{9}{2}; 5\right)$.

B. $\left(6; \frac{13}{2}\right)$.

C. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$.

Lời giải:

Ta có $d: y = mx + n$

Phương trình hoành độ giao điểm:

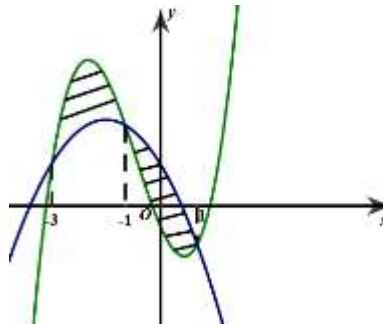
$a^3x + bx^2 + cx + d = mx + n \Leftrightarrow g(x) = a^3x + bx^2 + cx + d - (mx + n)$ có 3 nghiệm $x = -2; x = 1; x = 2$.

Do đó $g(x) = a(x+2)(x-1)(x-2)$.

Do $g(0) = d - n = 3 - 1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2)$.

Vì vậy $S = \int_{-2}^2 \left| \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2) \right| dx = \frac{71}{12}$.

Câu 29: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. 6.

B. 9.

C. 7.

D. 8.

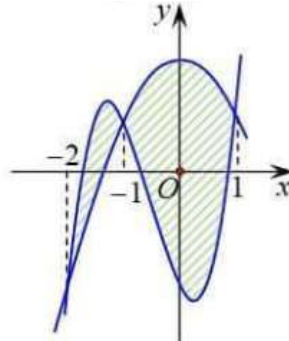
Lời giải:

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 3 = 0$ (*).

Do phương trình (*) có 3 nghiệm nên ta có hệ pt
$$\begin{cases} -a + b - d - c + e - 3 = 0 \\ a + b - d + c - e - 3 = 0 \\ -9a + 3b - 3d - c + e - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - d = 3 \\ c - e = -1 \end{cases}$$

Do vậy $S = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)dx - \int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 - x - 3)dx = 8$.

Câu 30: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{5}$.

B. $\frac{145}{7}$.

C. $\frac{37}{6}$.

D. $\frac{145}{8}$.

Lời giải:

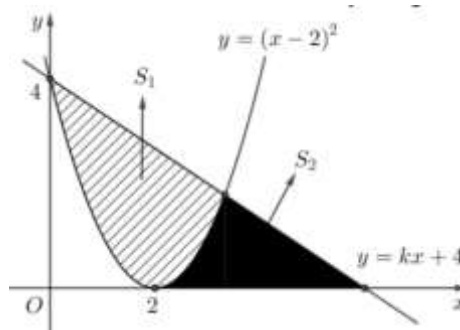
Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 3 = 0$ (*)

Do phương trình (*) có 3 nghiệm là $-2; -1; 1$ nên ta có hệ pt :

$$\begin{cases} -a + b - d - c + e - 4 = 0 \\ a + b - d + c - e - 4 = 0 \\ -4a + 2b - 2d - c + e - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - d = 4 \\ c - e = -2 \end{cases}$$

Do vậy $S = \int_{-2}^{-1} (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4)dx - \int_{-1}^1 (2x^3 + 4x^2 - 2x - 4)dx = \frac{37}{6}$.

Câu 31: Đường thẳng $y = kx + 4$ cắt parabol $y = (x-2)^2$ tại hai điểm phân biệt và diện tích các hình phẳng S_1, S_2 bằng nhau như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k \in (-6; -4)$.

B. $k \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

C. $k \in (-2; -1)$.

D. $k \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $(x-2)^2 = kx+4 \Leftrightarrow x^2 - (k+4)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=k+4 \end{cases}$.

Đường thẳng $y = kx+4$ cắt trục tọa độ tại các điểm $A\left(-\frac{4}{k}; 0\right)$, $B(0; 4)$.

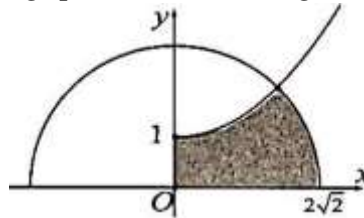
$$-\frac{4}{k} > k+4 > 2 \Leftrightarrow -2 < k < 0.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S_1 = \int_0^{k+4} (kx+4 - (x-2)^2) dx = \int_0^{k+4} (-x^2 + (k+4)x) dx = \frac{1}{6}(k+4)^3.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S_2 = \int_2^{k+4} (x-2)^2 dx + \int_{k+4}^{\frac{4}{k}} (kx+4) dx = \frac{1}{3}(k+2)^3 - \frac{(k+2)^4}{2k}.$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(k+4)^3 = \frac{1}{3}(k+2)^3 - \frac{(k+2)^4}{2k} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -0,457 \quad (TM) \\ k = -5,54 \quad (L) \end{cases}.$$

Câu 32: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (với $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$), nửa đường tròn $y = \sqrt{8-x^2}$ và trục hoành, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ).



Diện tích của (H) bằng

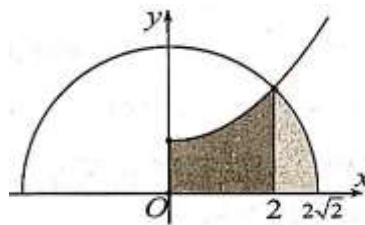
A. $\frac{3\pi+14}{6}$.

B. $\frac{2\pi+2}{3}$.

C. $\frac{3\pi+4}{6}$.

D. $\frac{3\pi+2}{3}$.

Lời giải:



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ và đường $y = \sqrt{8-x^2}$ là:

$$\sqrt{8-x^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -28 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (Vì } 0 \leq x \leq 2\sqrt{2} \text{)}$$

Diện tích của (H) là:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = \left(\frac{1}{12}x^3 + x\right) \Big|_0^2 + I = \frac{8}{3} + I \text{ với } I = \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx$$

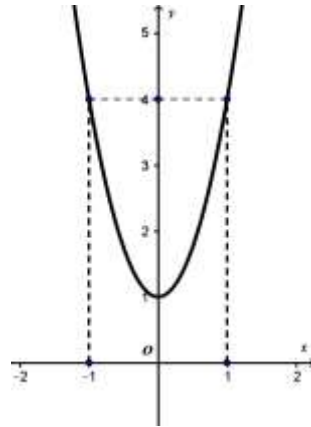
$$\text{Đặt } x = 2\sqrt{2} \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt$$

Đổi cận $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, x = 2\sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cos t \cdot dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos^2 t \cdot dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1 + \cos 2t) \cdot dt = 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

Vậy $S = \frac{8}{3} + I = \frac{3\pi + 2}{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên.



Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.

A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.

Lời giải:

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

Dựa vào đồ thị ta có:
$$\begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1.$$

Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox , $x = 4$, $x = 2$.

Ta có $S = \int_2^4 (3x^2 + 1) dx = 58$.

Lại có: $S = \int_2^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^4 = f(4) - f(2)$.

Do đó: $H = f(4) - f(2) = 58$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần phía dưới trục hoành. Khi đó m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $m \in (-1; 1)$.

B. $m \in (3; 5)$.

C. $m \in (2; 3)$.

D. $m \in (5; +\infty)$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành là $x^4 - 4x^2 + m = 0$ (1).

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), phương trình (1) trở thành $t^2 - 4t + m = 0$ (2).

Để (1) có bốn nghiệm phân biệt thì (2) phải có hai nghiệm dương phân biệt. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 4 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4 \quad (3).$$

Gọi t_1 và t_2 ($t_1 < t_2$) là hai nghiệm của (2), khi đó bốn nghiệm (theo thứ tự từ nhỏ đến lớn) của phương trình (1) là $x_1 = -\sqrt{t_2}$, $x_2 = -\sqrt{t_1}$, $x_3 = \sqrt{t_1}$, $x_4 = \sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của (C_m) nên từ giả thiết ta có

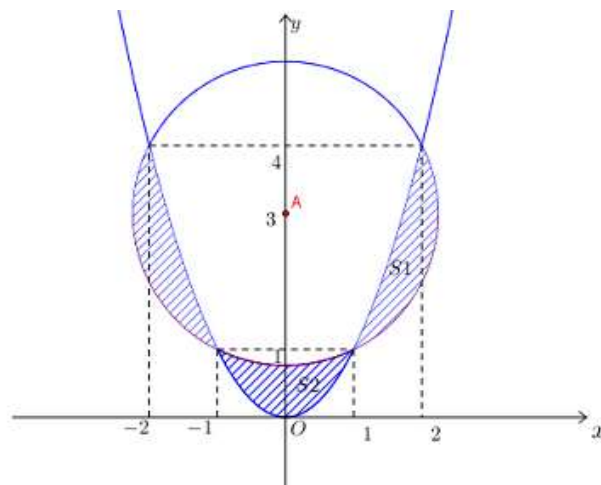
$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} (x^4 - 4x^2 + m) dx &= \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 4x^2 - m) dx \Leftrightarrow \int_0^{x_4} (2x^4 - 8x^2 + 2m) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 2mx \right) \Big|_0^{x_4} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} + mx_4 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} + mx_4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_4^3}{3} + mx_4 = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0. \end{aligned}$$

Vậy x_4 là nghiệm của hệ:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_4^4 - 4x_4^2 + m = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 15x_4^4 - 60x_4^2 + 15m = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_4^4 - 40x_4^2 = 0 \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ m = 0 \\ x_4^2 = \frac{10}{3} \\ m = \frac{20}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện (3) suy ra $m = \frac{20}{9}$.

Câu 35: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường tròn (C) có tâm $A(0;3)$ bán kính bằng $\sqrt{5}$ như hình vẽ bên dưới:



Diện tích phần được tô đậm giữa (C) và (P) gần nhất với số nào dưới đây?

A. 3.44.

B. 1.51.

C. 1.77.

D. 3.54.

Lời giải:

+) Phương trình đường tròn (C) tâm $A(0;3)$ bán kính bằng $\sqrt{5}$ là $(C):x^2+(y-3)^2=5$

+) Do tính chất đối xứng, ta chỉ cần xét phần được tô đậm của (C) và (P) với $x \geq 0$.

+) Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{5-(y-3)^2}$, $x=\sqrt{y}$, $y=1$, $y=4$

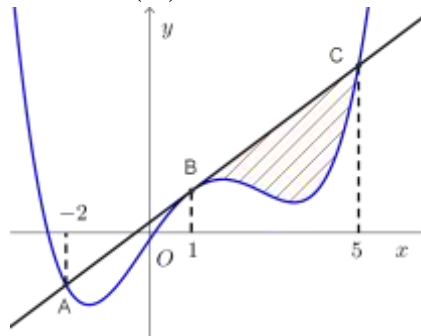
Ta có $S_1 = \int_1^4 (\sqrt{5-(y-3)^2} - \sqrt{y}) dy \approx 1.26032$.

+) Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3-\sqrt{5-x^2}$, $y=x^2$, $x=0$, $x=1$.

Ta có $S_2 = \int_0^1 [(3-\sqrt{5-x^2}) - x^2] dx \approx 0.5075$.

Vậy diện tích cần tính $S = 2(S_1 + S_2) \approx 3,539$.

Câu 36: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới:



Đường thẳng $d: y = kx + \frac{1}{4}$ có đúng ba điểm chung với (C) là A, B, C và $BC - AB = \frac{5}{4}$. Biết

diện tích hình phẳng S (phần gạch sọc) là $\frac{24}{5}$. Giá trị của $\int_{-2}^1 f(x) dx$ bằng

- A. -2. B. $-\frac{321}{160}$. C. $-\frac{161}{80}$. D. $-\frac{159}{160}$.

Lời giải:

Phương trình giao điểm của (C) và d là:

$$f(x) - g(x) = a(x+2)(x-1)^2(x-5) \text{ (hệ số } a > 0 \text{)}$$

Theo giả thiết, ta có: $S = \frac{24}{5} \Leftrightarrow -a \int_1^5 (x+2)(x-1)^2(x-5) dx = \frac{24}{5} \Leftrightarrow a = \frac{1}{24}$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + \frac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5) = kx + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5)$$

$$* \text{ Gọi } A\left(-2; \frac{1}{4} - 2k\right), B\left(1; \frac{1}{4} + k\right), C\left(5; \frac{1}{4} + 5k\right)$$

$$BC - AB = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sqrt{4^2 + (4k)^2} - \sqrt{3^2 + (3k)^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ k = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Đường thẳng nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba nên hệ số góc là dương nên ta chọn

$$k = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5).$$

$$\text{Và } \int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^1 \left[\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}(x+2)(x-1)^2(x-5) \right] dx = -\frac{321}{160}.$$

Câu 37: Cho hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $g(x) = f(x) + 2f'(x) + 3f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -6 và 42 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x) + f'(x) + f''(x)}{g(x) + 18}$ và $y = 1$.

A. $\ln 5$.

B. $\ln 7$.

C. $2\ln 6$.

D. $2\ln 5$.

Lời giải:

Hàm số $f(x)$ là hàm số bậc 3 nên $g(x)$ là hàm số bậc 3 suy ra $g'(x)$ là hàm số bậc hai.

Ta có $3f^{(3)}(x) = 3 \cdot 3! = 18$;

$g'(x) = f'(x) + 2f''(x) + 18$ có hai nghiệm x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) và $g(x_1) = 42, g(x_2) = -6$.

Xét phương trình tìm cận của tích phân để tính diện tích:

$$\frac{f(x) + f'(x) + f''(x)}{g(x) + 18} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x) + 2f''(x) + 18}{g(x) + 18} = 0.$$

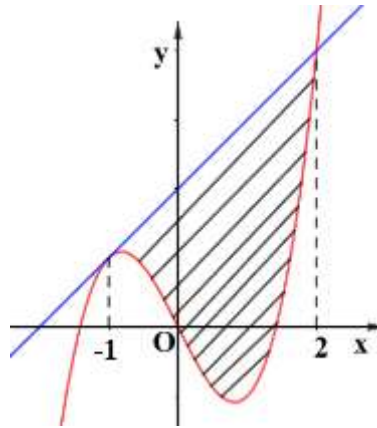
$$\text{Suy ra } f'(x) + 2f''(x) + 18 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng } S = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{f(x) + f'(x) + f''(x)}{g(x) + 18} - 1 \right| dx = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{g'(x)}{g(x) + 18} \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x) + 18} dx \right|.$$

$$\text{Đặt } t = g(x) + 18 \Rightarrow dt = g'(x)dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = x_1 \Rightarrow t_1 = g(x_1) + 18 \\ x = x_2 \Rightarrow t_2 = g(x_2) + 18 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } S = \left| \int_{60}^{12} \frac{dt}{t} \right| = \left| \ln t \Big|_{60}^{12} \right| = |\ln 12 - \ln 60| = \left| \ln \frac{12}{60} \right| = |-\ln 5| = \ln 5.$$

Câu 38: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm A có hoành độ bằng -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo trong hình) bằng



A. $\frac{27}{4}$.

B. $\frac{11}{2}$.

C. $\frac{25}{4}$.

D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải:

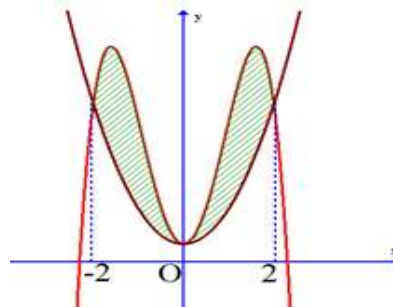
Đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ suy ra $c = 0$. Tiếp tuyến d với (C) tại điểm có hoành độ $x = -1$ có phương trình $y = (3 - 2a + b)x + 2 - a$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị d và (C): $x^3 + ax^2 + bc = (3 - 2a + b)x + 2 - a \Leftrightarrow (x + 1)[x^2 + (a - 1)x + a - 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ g(x) = x^2 + (a - 1)x + a - 2 = 0 \end{cases}$$

Vì d cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 suy ra $g(2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_{-1}^2 |(x^3 + bx) - ((3 + b)x + 2)| dx = \int_{-1}^2 |x^3 - 3x - 2| dx = \frac{27}{4}$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C) và $y = g(x) = mx^2 + nx + p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(4; 4,1)$.

B. $(4,2; 4,3)$.

C. $(4,3; 4,4)$.

D. $(4,1; 4,2)$.

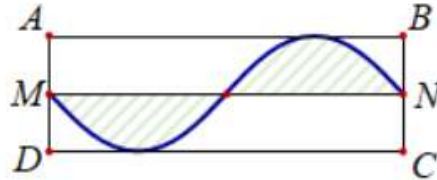
Lời giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P): $S = \int_{-2}^2 [f(x) - g(x)] dx$.

$h(x) = f(x) - g(x)$ là hàm bậc bốn có hệ số bậc bốn bằng $-\frac{1}{2}$, có hai nghiệm đơn $x = 2$, $x = -2$ và một nghiệm kép $x = 0$ (dựa vào sự tương giao của (C) và (P) trong hình vẽ)

$$\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-2)(x+2) \Rightarrow S = \int_{-2}^2 -\frac{1}{2}x^2(x-2)(x+2)dx = \frac{64}{15} \approx 4,266.$$

Câu 40: Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu được giới hạn bởi cạnh AB, CD , đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin. Biết $AB = 2\pi$ (m), $AD = 2$ (m). Tính diện tích phần còn lại.



A. $4\pi - 1$.

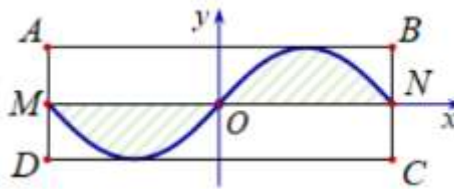
B. $4(\pi - 1)$.

C. $4\pi - 2$.

D. $4\pi - 3$.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



Đồ thị hàm số có dạng $y = a \sin bx$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường sin có chu kì $AB = 2\pi$ và biên độ bằng $AM = \frac{1}{2}AB = 1$.

Suy ra đường hình sin có phương trình $y = \sin x$.

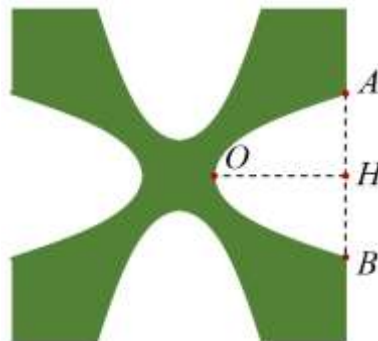
Đường thẳng BC có phương trình $x = \pi$.

Do đó diện tích phần đất được tô màu là $S = 2 \int_0^\pi \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^\pi = 4$.

Diện tích hình chữ nhật là $S_2 = 4\pi$.

Diện tích phần còn lại: $S = S_2 - S_1 = 4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$.

Câu 41: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên dưới:



Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.

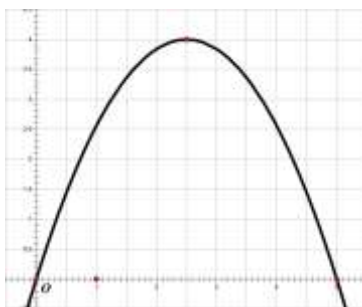
A. $\frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

B. $\frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{14}{3} \text{ cm}^2$.

D. 50 cm^2 .

Lời giải:



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng

$$x = 0, x = 5 \text{ là } S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}.$$

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

Câu 42: Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình dạng một nửa elip như hình vẽ. Biết một nửa trục lớn là $AB = 6 \text{ cm}$, trục bé $CD = 8 \text{ cm}$. Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng



A. $400 - 48\pi (\text{cm}^2)$. **B.** $400 - 96\pi (\text{cm}^2)$. **C.** $400 - 24\pi (\text{cm}^2)$. **D.** $400 - 36\pi (\text{cm}^2)$.

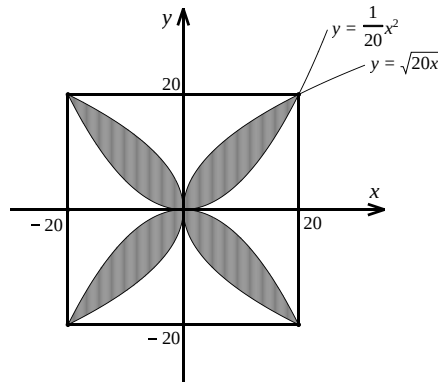
Lời giải:

Gọi S_1 là diện tích hình vuông, S_2 là diện tích khoét đi.

Ta có $S_1 = 20^2 = 400 (\text{cm}^2)$ và $S_2 = 2\pi ab = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi (\text{cm}^2)$ (vì mỗi phần bị khoét đi là nửa elip có $a = 6$, $b = 4$).

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S = S_1 - S_2 = 400 - 48\pi (\text{cm}^2)$.

Câu 43: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới. Diện tích mỗi cánh hoa (phần tô đậm) bằng



A. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.

B. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

C. 250 cm^2 .

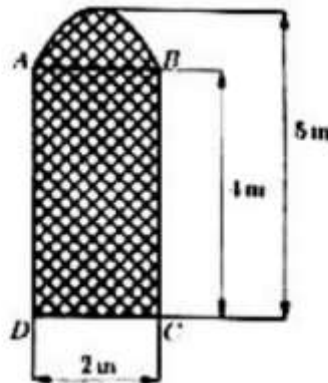
D. 800 cm^2 .

Lời giải:

Diện tích một cánh hoa là diện tích hình phẳng được tính theo công thức sau:

$$S = \int_0^{20} \left(\sqrt{20x} - \frac{1}{20}x^2 \right) dx = \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{1}{60}x^3 \right) \Big|_0^{20} = \frac{400}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Câu 44: Ông An muốn làm một cánh cửa bằng sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Biết rằng đường cong phía trên là một parabol, tứ giác $ABCD$ là một hình chữ nhật.



Giá cánh cửa sau khi hoàn thành là 900000 đồng/m^2 . Số tiền ông An phải trả để làm cánh cửa đó

bằng

A. $9\,600\,000 \text{ đồng}$.

B. $15\,600\,000 \text{ đồng}$.

C. $8\,160\,000 \text{ đồng}$.

D. $8\,400\,000 \text{ đồng}$.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho cạnh AB nằm trên Ox và O là trung điểm AB . Khi đó, ta có phương trình parabol là: $y = 1 - x^2$.

Diện tích cánh cửa là: $S = 2.4 + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{28}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$

Câu 45: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25 \text{ mét}$, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét . Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng . Vậy số tiền bác Năm phải trả là

A. 33750000 đồng .

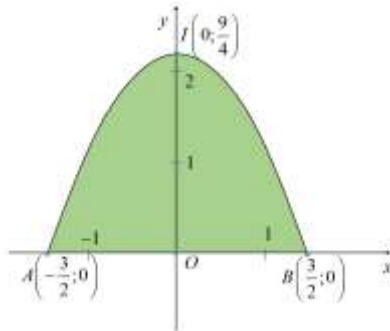
B. 3750000 đồng .

C. 12750000 đồng .

D. 6750000 đồng .

Lời giải:

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

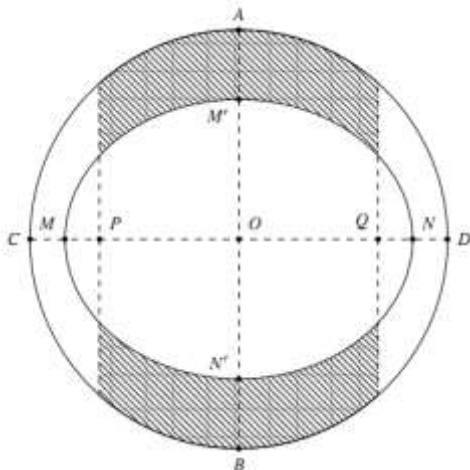
Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng.

Câu 46: Một khu vườn dạng hình tròn có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, $AB = 12\text{m}$. Người ta làm một hồ cá có dạng elip với bốn đỉnh M, N, M', N' như hình vẽ. Biết $MN = 10\text{m}$, $M'N' = 8\text{m}$, $PQ = 8\text{m}$. Diện tích phần trồng cỏ (phần gạch sọc) bằng:



A. $32,03 \text{ m}^2$.

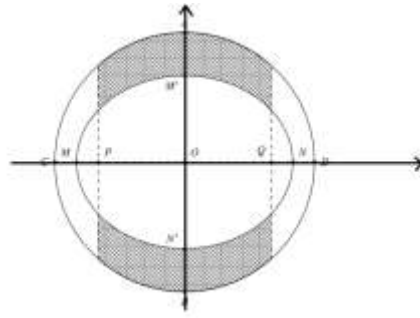
B. $20,33 \text{ m}^2$.

C. $33,02 \text{ m}^2$.

D. $23,03 \text{ m}^2$.

Lời giải:

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Khi đó phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$

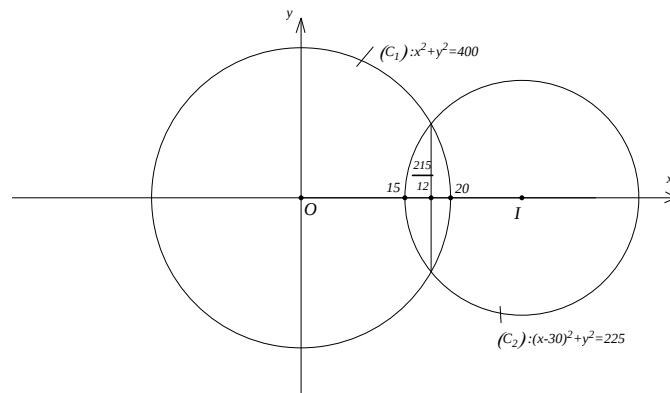
Phương trình elip là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

Do tính đối xứng nên diện tích phần trồng cỏ sẽ là: $S = 4 \int_0^4 \left(\sqrt{36 - x^2} - 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} \right) dx \approx 30,03m^2$.

Câu 47: Một khu vườn có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai đường tròn là $20m$ và $15m$, khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là $30m$. Phần giao của hai hình tròn được trồng hoa với chi phí $300000\text{đồng}/m^2$. Phần còn lại được trồng cỏ với chi phí $100000\text{đồng}/m^2$. Hỏi chi phí để trồng hoa và cỏ của khu vườn gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 192 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Lời giải:



+ Gắn hệ trục như hình vẽ.

+ Đường tròn (C_1) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1 = 20$ có phương trình: $x^2 + y^2 = 400$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{400 - x^2}.$$

+ Đường tròn (C_2) có tâm $I(30;0)$, bán kính $R_2 = 15$ có phương trình: $(x - 30)^2 + y^2 = 225$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{225 - (x - 30)^2}.$$

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là: $400 - x^2 = 225 - (x - 30)^2 \Leftrightarrow x = \frac{215}{12}$.

+ Diện tích trồng hoa: $S_1 = 2 \cdot \int_{15}^{\frac{215}{12}} \sqrt{225 - (x - 30)^2} dx + 2 \cdot \int_{\frac{215}{12}}^{20} \sqrt{400 - x^2} dx \approx 60,255m^2$.

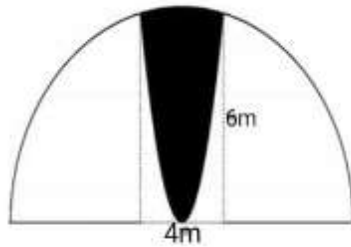
+ Diện tích trồng cỏ: $S_2 = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 - 2S_1 = \pi \cdot 20^2 + \pi \cdot 15^2 - 2 \cdot 60,255 \approx 1842,985 m^2$

Tổng chi phí trồng hoa và cỏ là:

$$P = 300000.S_1 + 100000.S_2 = 300000.60,255 + 100000.1842,985 = 202375000 \text{ đồng}$$

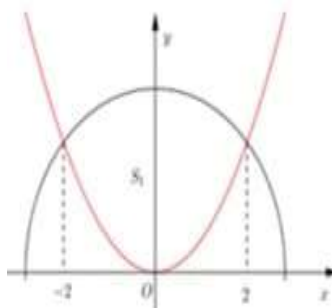
Vậy chi phí để trồng hoa và cỏ của khu vườn gần nhất với số tiền 202 triệu đồng

Câu 48: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người ta thiết kế phần trồng hoa hồng có dạng một hình Parabol có đỉnh trùng với tâm hình tròn và trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa đường tròn, hai đầu mút của Parabol nằm trên đường tròn và cách nhau một khoảng 4 mét (phần tô đậm). Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dùng để trồng hoa cúc. Biết các kích thước cho như hình vẽ. Chi phí trồng hoa hồng và hoa cúc lần lượt là 120.000 đồng m^2 và 80.000 đồng/ m^2 . Hỏi chi phí trồng hoa khuôn viên đó gần nhất với số nào sau đây (làm tròn đến ngàn đồng).



- A. 6.847.000 đồng. B. 6.865.000 đồng. C. 5.710.000 đồng. **D. 5.701.000 đồng.**

Lời giải:



Parabol có phương trình là $y = \frac{3}{2}x^2$.

Đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$

Phương trình nửa đường tròn đã cho là $x^2 + y^2 = 40, y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{40 - x^2}$.

Nửa đường tròn cắt Parabol tại $M(2; 6), N(-2; 6)$

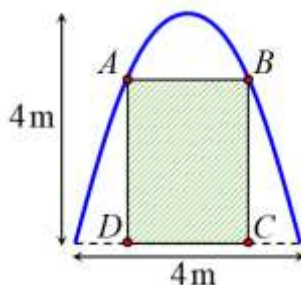
Ta có diện tích trồng hoa hồng $S_1 = \int_{-2}^2 \left| \sqrt{40 - x^2} - \frac{3}{2}x^2 \right| dx \approx 16,87$.

Diện tích trồng hoa cúc $S_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 40 - S_1 = 20\pi - S_1 \approx 45,9619$.

Từ đó chi phí trồng các loài hoa theo yêu cầu $T = S_1 \cdot 120000 + S_2 \cdot 80000 \approx 5.701.000$.

Câu 49: Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng.

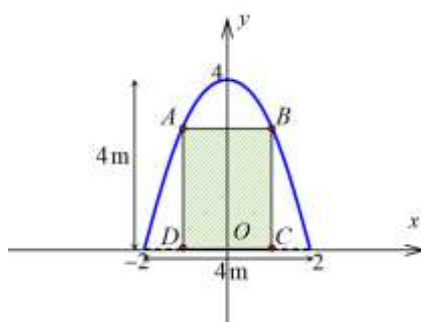
Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



- A. 900.000 đồng. B. 1.232.000 đồng. C. 902.000 đồng. D. 1.230.000 đồng.

Lời giải:

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$ và cắt trục hoành tại $(2; 0)$ nên:

$$\begin{cases} b = 4 \\ a \cdot 2^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Do đó, phương trình parabol là $y = -x^2 + 4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là

$$S_1 = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

Gọi $C(t; 0) \Rightarrow B(t; 4 - t^2)$ với $0 < t < 2$.

Ta có $CD = 2t$ và $BC = 4 - t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_2 = CD \cdot BC = 2t \cdot (4 - t^2) = -2t^3 + 8t.$$

$$\text{Diện tích phần trang trí hoa văn là } S = S_1 - S_2 = \frac{32}{3} - (-2t^3 + 8t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$ với $0 < t < 2$.

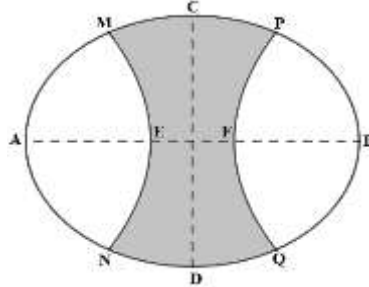
$$\text{Ta có } f'(t) = 6t^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0; 2) \\ t = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0; 2) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Như vậy, diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9} \text{ m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là $\frac{96-32\sqrt{3}}{9} \cdot 200000 \approx 902000$ đồng.

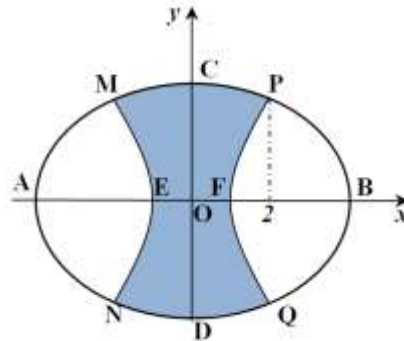
Câu 50: Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A, B, C, D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E, F (phần tô đậm của hình vẽ).



Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB , đối xứng nhau qua trục CD , hai parabol cắt elip tại các điểm M, N, P, Q . Biết $AB = 8\text{m}$, $CD = 6\text{m}$, $MN = PQ = 3\sqrt{3}\text{m}$, $EF = 2\text{m}$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300.000 \text{ đ}/\text{m}^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn gần nhất với số tiền nào dưới đây?

- A. 4477800 đồng. B. 4477000 đồng. C. 4477815 đồng. **D. 4809142 đồng.**

Lời giải:



+) Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với $O(0;0)$, $B(4;0)$ và $C(0;3)$.

+) Khi đó elip (E) có độ dài trục lớn $AB = 8$, độ dài trục bé $CD = 6$.

$\Rightarrow$ Phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

+) Do $PQ = 3\sqrt{3}$ và $P, Q \in (E)$, suy ra $P\left(2; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Lại có $EF = 2 \Rightarrow F(1;0)$.

+) Phương trình parabol (P_1) đỉnh F có dạng: $x = ky^2 + 1$.

+) Vì parabol (P_1) đi qua điểm $P\left(2; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ nên phương trình (P_1) là: $x = \frac{4}{27}y^2 + 1$.

+) Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Ta có $S_1 = \int_0^2 \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} dx \approx 5,73967(m^2)$.

+) Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Ta có $S_2 = \int_1^2 \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{x-1} dx \approx 1,73205(m^2)$.

+) Diện tích trồng hoa là: $S = 4(S_1 - S_2) \approx 16,0305(m^2)$.

Vậy số tiền trồng hoa cho cả vườn khoảng $16,0305.300000 \approx 4809150$ đồng.

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023

LÊ BÁ BẢO

TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

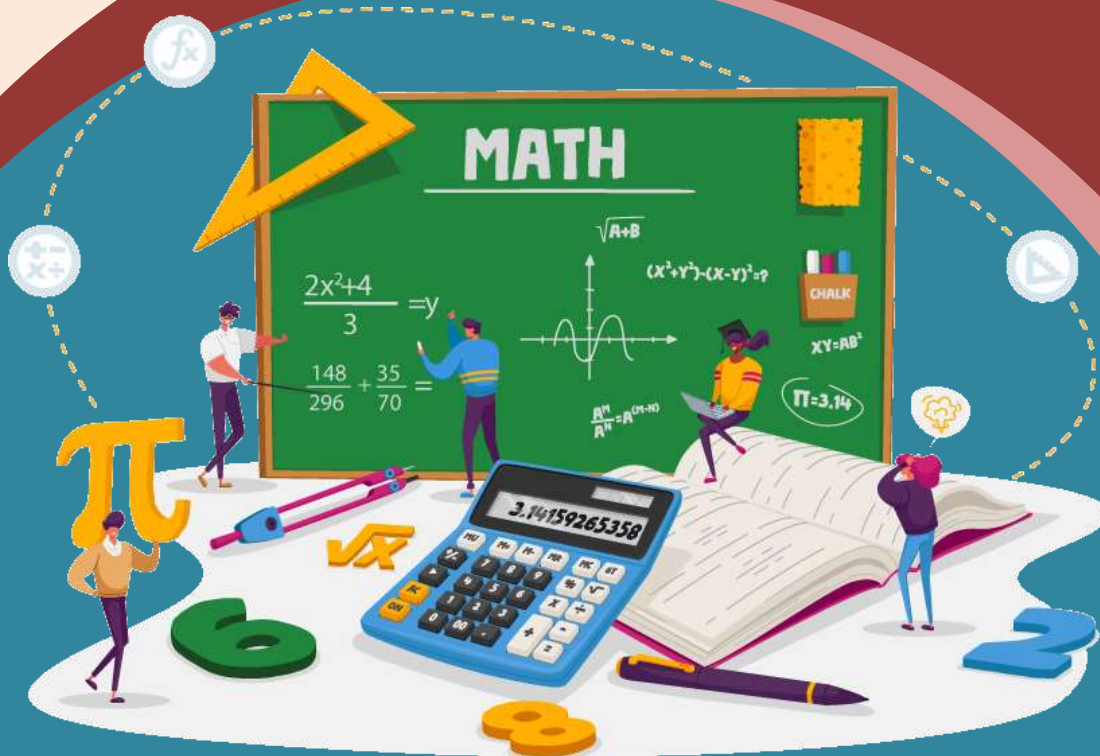
NGÂN HÀNG CÂU HỎI

TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍNH

DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG (PHẦN 2)

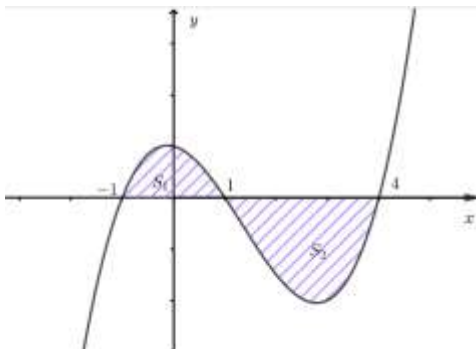
- ✎ LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- ✎ CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



Ngân hàng câu hỏi:
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC (2)

NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hai phần gạch chéo lần lượt là $S_1 = 5, S_2 = 12$.

Tính $I = \int_0^1 f(2x-1)dx + \int_{-3}^0 f(x+4)dx$.

- A. $-\frac{19}{2}$. B. $\frac{29}{2}$. C. 17. D. -7.

Câu 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 + 4$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm A, B có hoành độ lần lượt là -1 và 1 .

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

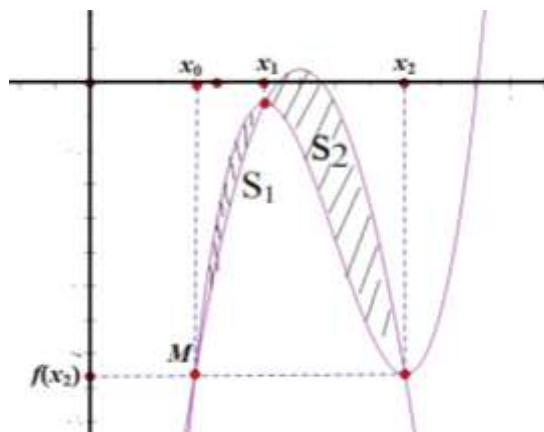
Câu 3: Gọi S_1 là diện tích của mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = mx$ với $m < 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x(2-x)$. Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (P) và Ox . Với giá trị nào của m thì $S_1 = \frac{1}{2}S_2$?

- A. $2 - \sqrt[3]{4}$. B. $2 + \sqrt[3]{2}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ là $-1; 1; 2$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{37}{12}$. D. $\frac{37}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. và đồ thị luôn đi qua $M(x_0; f(x_0))$ trong đó $x_0 = x_1 - 1$ $g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua 2 điểm cực trị và M . $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm $f(x), g(x)$ như hình vẽ).



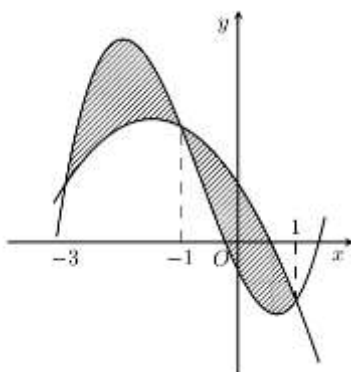
A. $\frac{5}{32}$.

B. $\frac{6}{35}$.

C. $\frac{7}{33}$.

D. $\frac{4}{29}$.

Câu 6: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

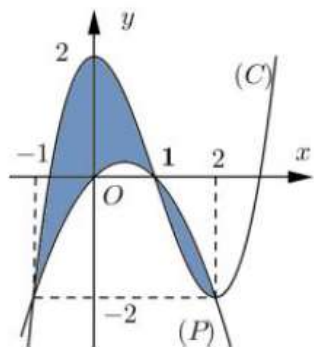
A. $\frac{9}{2}$.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Câu 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



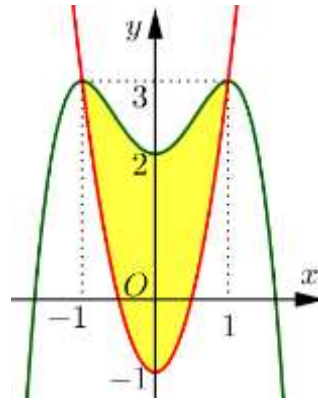
A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.

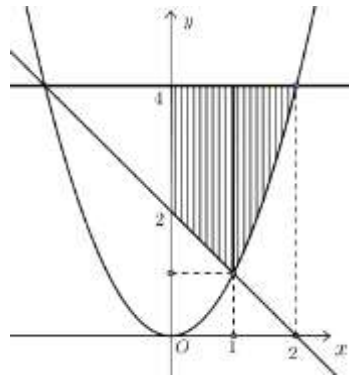
Câu 8: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) và hàm số $y = mx^2 + nx + p$ ($m \neq 0$) có đồ thị là các đường cong như hình vẽ bên.



Gọi S là diện tích của hình phẳng được tô đậm. Khẳng định nào sau đây đúng?

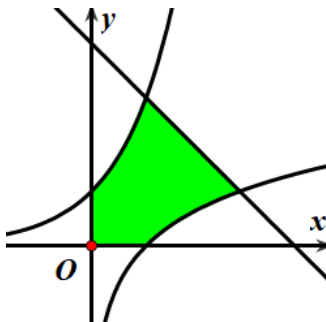
- A. $S \in \left(\frac{62}{15}; \frac{64}{15}\right)$. B. $S \in \left(\frac{21}{5}; \frac{13}{3}\right)$. C. $S \in \left(4; \frac{21}{5}\right)$. D. $S \in \left(\frac{13}{3}; \frac{67}{15}\right)$.

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $d: y = mx + n$ ($m \neq 0$). Tính diện tích hình phẳng (D) giới hạn bởi (P) , d và đường thẳng $\Delta: y = 4$ như hình vẽ bên.



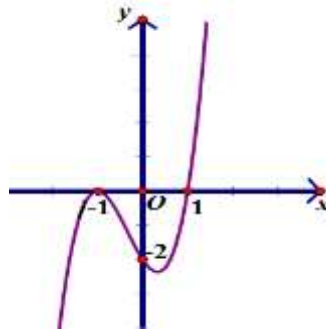
- A. $\frac{25}{6}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $\frac{19}{6}$. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 10: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = -x + e + 1$ với các trục tọa độ.



- A. $\frac{e^2 + 2e - 5}{2}$. B. $\frac{e^2}{2}$. C. $\frac{2e^2 + e - 4}{3}$. D. $\frac{e^2}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C) . Biết rằng đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên dưới:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2$.

- A. $\frac{17\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{32\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{16\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{14\sqrt{3}}{5}$.

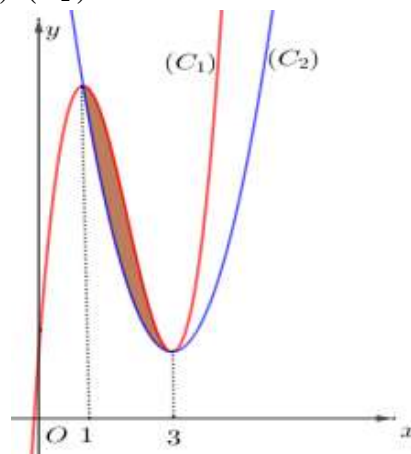
Câu 12: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, c, b, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2; -1; 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

- A. $\frac{131}{4}$. B. $\frac{131}{6}$. C. $\frac{125}{12}$. D. $\frac{125}{6}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \int_0^1 (x+u) f(u) du$ có đồ thị (C) . Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

- A. $S = \frac{1}{4}$ B. $S = \frac{1}{3}$ C. $S = \frac{2}{3}$ D. $S = \frac{1}{6}$.

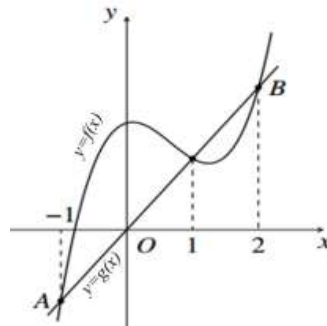
Câu 14: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g(x) = ax^2 + bx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đồ thị lần lượt là hai đường cong $(C_1), (C_2)$ ở hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$ bằng $\frac{8}{3}$, tính $f(2) - g(-1)$.

- A. -26 . B. -24 . C. -28 . D. -30 .

Câu 15: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{1}{3}x + c$ và đường thẳng $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Biết $AB = 5$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

- A. $\frac{17}{11}$. B. $\frac{19}{12}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{7}{11}$.

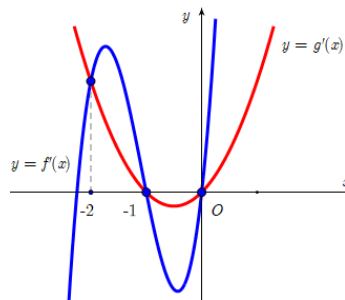
Câu 16: Cho hàm số $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có ba điểm cực trị là -1 , 1 và 3 . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

- A. $\frac{256}{15}$. B. $\frac{265}{15}$. C. $\frac{128}{15}$. D. $\frac{182}{15}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị có hoành độ lần lượt là -2 ; 1 ; 2 và hàm số $y = g(x)$ là hàm bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị đó. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(71; 72)$. B. $(72; 73)$. C. $(73; 74)$. D. $(74; 75)$.

Câu 18: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = px^2 + qx + r$ với $a, p \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Đồng thời diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng 2 và $f(-1) = g(-1) + 1$. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\frac{m}{n}$. Giá trị $m + n$ bằng:



- A. 28. B. 29. C. 30. D. 31.

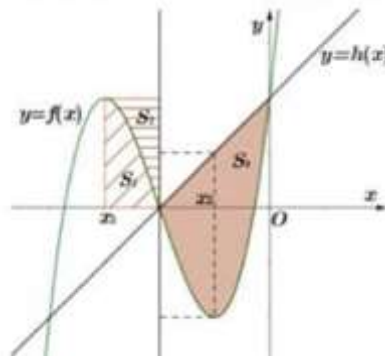
Câu 19: Cho số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $f(0) = F(1) = 0$. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = F(x)$ và trục Ox .

- A. $S = \frac{64}{15}$. B. $S = \frac{116}{15}$. C. $S = \frac{576}{5}$. D. $S = \frac{32}{15}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ có ba điểm cực trị $-2, 1$ và 2 . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

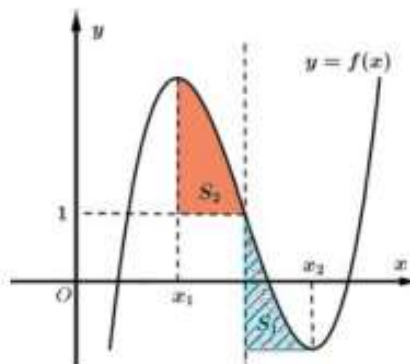
- A. $(34; 35)$. B. $(36; 37)$. C. $(37; 38)$. D. $(35; 36)$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hình phẳng như hình bên và S_3 là diện tích phần tô đậm. Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_3}$.



- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{2}{16}$. D. $\frac{3}{16}$.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

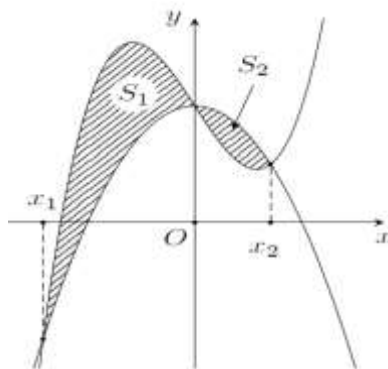


- A. $\frac{5}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{8}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ là $-3, -1, 1$; $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $y = g(x)$ là hàm số bậc hai đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = F(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = F(x)$ và $y = g(x)$ bằng

- A. $\frac{128}{15}$. B. $\frac{64}{15}$. C. 16. D. 64.

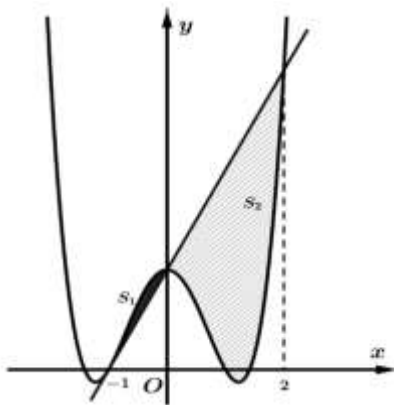
Câu 24: Cho đường cong $(C): y = x^3 + kx + 2$ và parabol $P: y = -x^2 + 2$ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ.



Biết rằng $S_1 = \frac{8}{3}$, giá trị của S_2 bằng

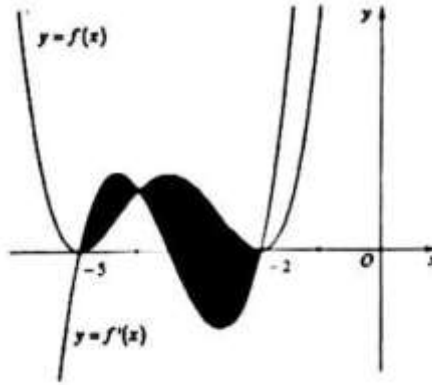
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết $f(-1) = 0$. Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính S_2 , biết $S_1 = \frac{401}{2022}$.



- A. $\frac{12431}{2022}$. B. $\frac{5614}{1011}$. C. $\frac{2005}{2022}$. D. $\frac{2807}{1011}$.

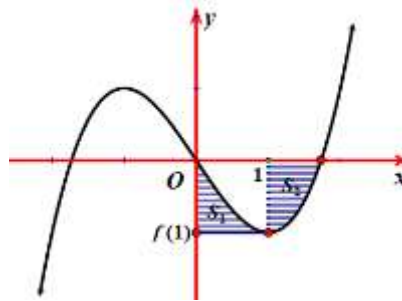
Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị nhận đường thẳng $x = -\frac{7}{2}$ làm trục đối xứng. Biết diện tích hình phẳng của phần giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và hai đường thẳng $x = -5$, $x = -2$ có giá trị là $\frac{127}{50}$ (hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ và trục hoành bằng

- A. $\frac{81}{50}$. B. $\frac{91}{50}$. C. $\frac{71}{50}$. D. $\frac{61}{50}$.

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $(f(x)+1)$ và $(f(x)-1)$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng như trong hình dưới. Tính $2S_1 - S_2$.



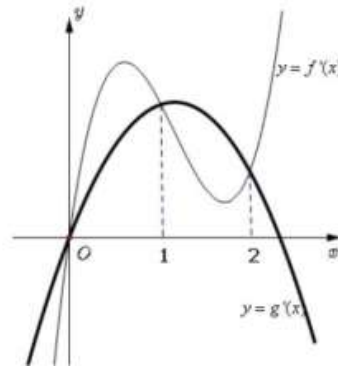
- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 4. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y = 1$ bằng

- A. $2\ln 3$. B. $\ln 3$. C. $\ln 18$. D. $\ln 2$.

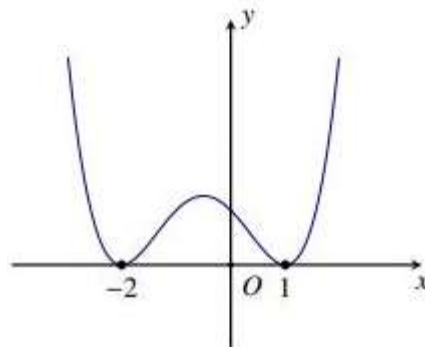
Câu 29: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = qx^2 + nx + p$ với $a, q \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi

hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng $\frac{5}{2}$ và $f(2) = g(2)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\frac{a}{b}$. Tính $T = a^2 - b^2$.



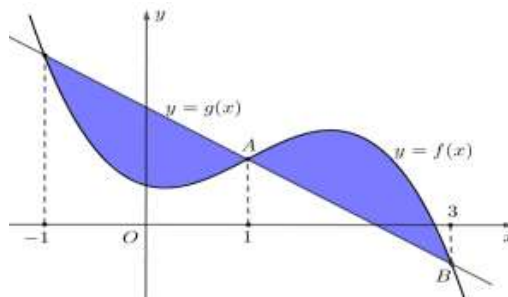
- A. 7. B. 55. C. -5. D. 16.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc bốn có đồ thị như hình bên. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{214}{5}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.



- A. $\frac{81}{20}$. B. $\frac{81}{10}$. C. $\frac{17334}{635}$. D. $\frac{17334}{1270}$.

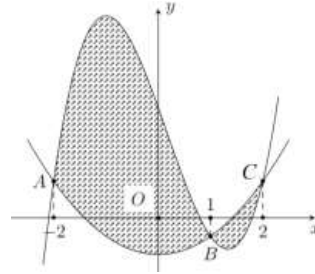
Câu 31: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 - \frac{2}{7}x + d$ và đường thẳng $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết $AB = \frac{2\sqrt{65}}{7}$ diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

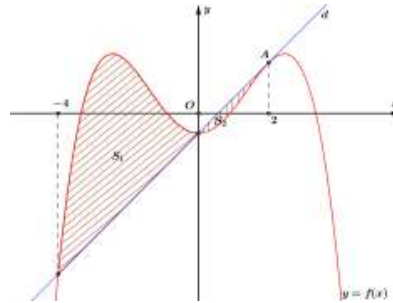
- A. $\frac{11}{3}$. B. $\frac{23}{3}$. C. $\frac{16}{7}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$ và parabol $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 2$ và thỏa mãn $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.



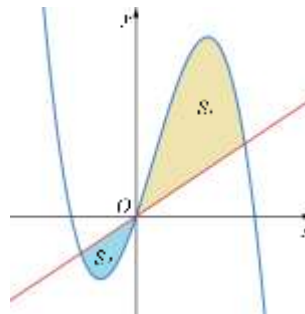
- A. $\frac{71}{3}$. B. $\frac{238}{3}$. C. $\frac{71}{6}$. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Tiếp tuyến d đi qua điểm A có hoành độ $x = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm khác A có hoành độ lần lượt là $x = -4$ và $x = 0$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần gạch sọc (như hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.



- A. $\frac{3}{20}$. B. $\frac{1}{28}$. C. $\frac{3}{28}$. D. $\frac{1}{20}$.

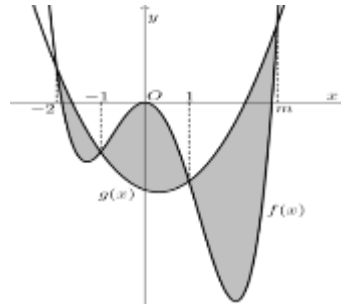
Câu 34: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ



Biết $S_1 = \frac{27}{4}$. Khi đó $S_2 = \frac{m}{n}$, giá trị của $2m - n$ bằng

- A. 143. B. -50. C. 50. D. 142.

Câu 35: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a \neq 0$ và $g(x) = px^2 + qx - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua gốc tọa độ và cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại bốn điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 và m . Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) - g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ có hệ số góc bằng $-\frac{15}{2}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.



Diện tích của hình (H) bằng

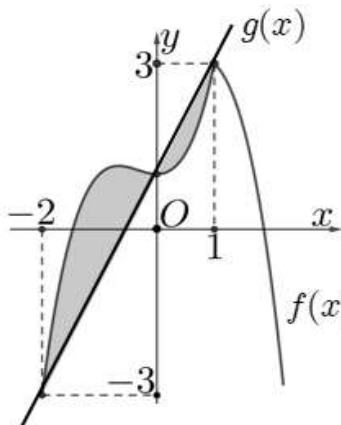
A. $\frac{1553}{120}$.

B. $\frac{1553}{240}$.

C. $\frac{1553}{60}$.

D. $\frac{1553}{30}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đường thẳng $(d): g(x) = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích miền tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và $\int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{12}$. Tích phân $\int_{-1}^0 x \cdot f'(2x) dx$ bằng

A. $-\frac{607}{348}$.

B. $-\frac{20}{3}$.

C. $-\frac{5}{3}$.

D. $-\frac{5}{6}$.

Câu 37: Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB .

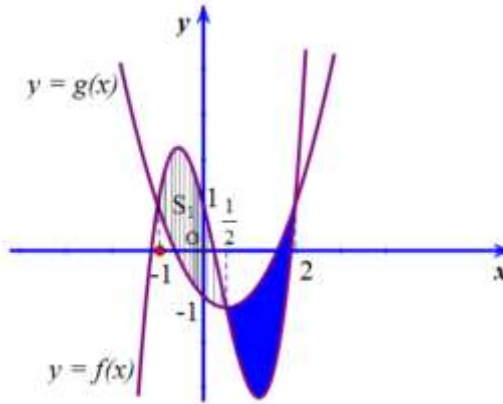
A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Câu 38: Cho hai hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = mx^2 + nx + k$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ là $-1; \frac{1}{2}; 2$ và có đồ thị như hình vẽ.

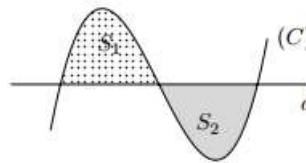


Biết phần diện tích kẻ sọc (hình S_1) bằng $\frac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

$y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}; x = 2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

- A. $\frac{79}{24}$. B. $\frac{243}{96}$. C. $\frac{81}{32}$. D. $\frac{45}{16}$.

Câu 39: Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -45m - 2$ cùng với đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + x + 1$ tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là S_1, S_2 thỏa mãn $S_1 = S_2$ (xem hình vẽ). Số phần tử của tập X là

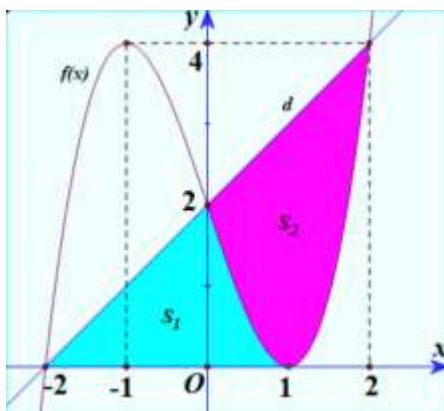


- A. 0. B. 2. C. 1. D. 9.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

- A. $\ln 3$. B. $\ln 7$. C. $3\ln 2$. D. $\ln 10$.

Câu 41: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: y = mx + n$ như hình vẽ và S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình bên. Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$ là một phân số tối giản. Tính $p + q + 2022$.



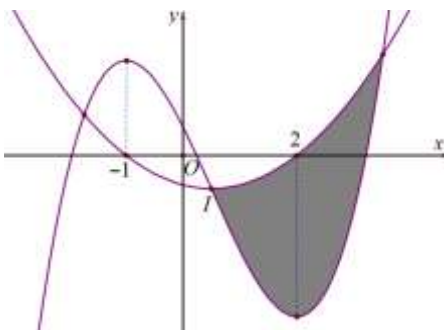
A. 2043.

B. 2045.

C. 2049.

D. 2051.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ với đồ thị là Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{7}{12}$ và hàm số bậc ba $g(x)$. Đồ thị hai hàm số đó cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $18x_1x_2x_3 = -55$ (hình vẽ).



Diện tích miền tô đậm gần số nào nhất trong các số sau đây?

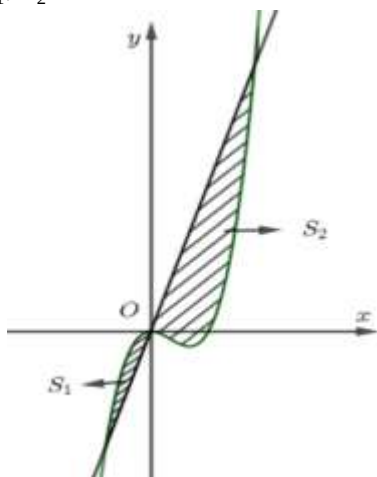
A. 5,7.

B. 5,9.

C. 6,1.

D. 6,3.

Câu 43: Cho hàm số $y = 4x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ tạo thành hai miền hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên dưới:



Khi $S_2 = 12$ thì S_1 bằng

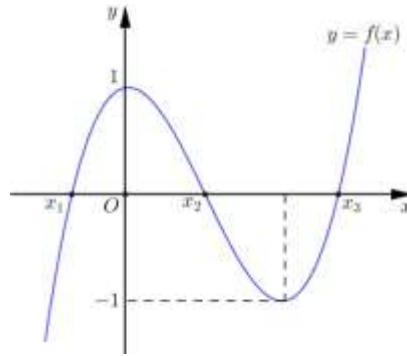
A. $\frac{7}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{875}{256}$.

D. $\frac{865}{256}$.

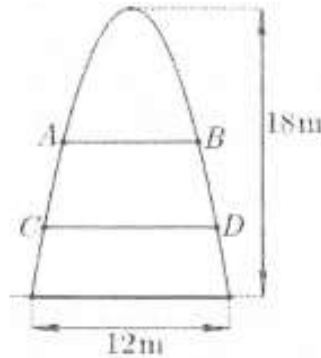
Câu 44: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

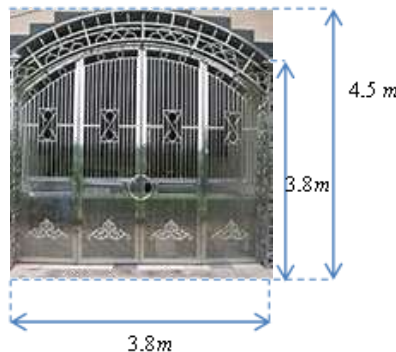
- A. $4\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $2S + 4\sqrt{3}$. D. $S + 2\sqrt{3}$.

Câu 45: Một miếng đất dạng hình parabol chiều dài 18m, chiều rộng 12m. Người ta chia miếng đất bằng 2 đoạn thẳng song song AB, CD thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên dưới). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng:



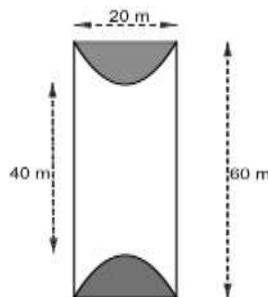
- A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. B. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Câu 46: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol, chất liệu làm là inox. Giá $1m^2$ vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



- A. 13.050.000 đồng. B. 36.630.000 đồng. C. 19.520.000 đồng. D. 21.077.330 đồng.

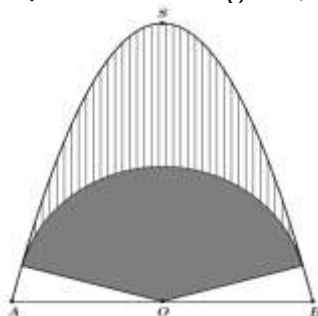
Câu 47: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài $60m$, chiều rộng $20m$. Người ta muốn trồng cỏ ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường Parabol có hai đỉnh cách nhau $40m$ (như hình vẽ).



Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch với chi phí là $200.000 \text{ đ}/m^2$. Tính tổng số tiền để lát gạch (làm tròn đến hàng nghìn)

A. 133.334.000 đồng. **B.** 213.334.000 đồng. **C.** 53.334.000 đồng. **D.** 186.667.000 đồng.

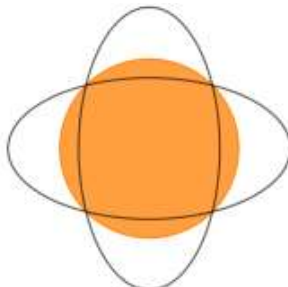
Câu 48: Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS = AB = 4 \text{ m}$, O là trung điểm của AB . Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc $140000 \text{ đồng}/m^2$, phần giữa là hình quạt tâm O , bán kính 2 m được tô đậm $150000 \text{ đồng}/m^2$, phần còn lại $160000 \text{ đồng}/m^2$.



Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần nhất với số nào sau đây?

A. 1.597.000 đồng. **B.** 1.625.000 đồng. **C.** 1.575.000 đồng. **D.** 1.600.000 đồng.

Câu 49: Hướng tới kỉ niệm ngày thành lập trường Đoàn TNCS Hồ Chí Minh. Khối 12 thiết kế bồn hoa gồm hai Elip bằng nhau có độ dài trục lớn bằng $8m$ và độ dài trục nhỏ bằng $4m$ đặt chồng lên nhau sao cho trục lớn của Elip này trùng với trục nhỏ của Elip kia và ngược lại (như hình vẽ).



Phần diện tích nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa nằm giữa hình tròn và Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là $150.000 \text{ đồng}/1m^2$, kinh phí để trồng cỏ là $100.000 \text{ đồng}/1m^2$. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 4.100.000 đồng. **B.** 4.550.000 đồng. **C.** 3.100.000 đồng. **D.** 4.300.000 đồng.

Câu 50: Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo.



Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập $2/3$, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $a + b$.

A. $\frac{41}{80}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{5}$.

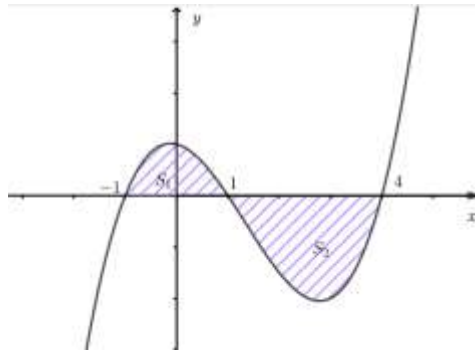
D. $\frac{9}{10}$.

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hai phần gạch chéo lần lượt là $S_1 = 5, S_2 = 12$.

Tính $I = \int_0^1 f(2x-1)dx + \int_{-3}^0 f(x+4)dx$.

A. $-\frac{19}{2}$.

B. $\frac{29}{2}$.

C. 17.

D. -7.

Lời giải:

Ta có $\int_{-1}^1 f(x)dx = S_1 = 5, \int_1^4 f(x)dx = -S_2 = -12$

Vậy $I = \int_0^1 f(2x-1)dx + \int_{-3}^0 f(x+4)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 5 - 12 = -\frac{19}{2}$.

Câu 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 + 4$ và hai tiếp tuyến của (P) tại các điểm A, B có hoành độ lần lượt là -1 và 1 .

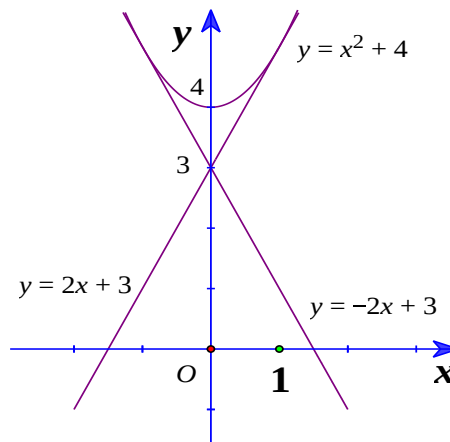
A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:



Xét hàm số $y = x^2 + 4 \Rightarrow y' = 2x$.

Ta có $A(-1;5), B(1;5)$ là hai điểm thuộc (P) .

+) Tiếp tuyến của (P) tại $A(-1;5)$ là: $y = -2(x+1)+5 \Leftrightarrow y = -2x+3$.

+) Tiếp tuyến của (P) tại $B(1;5)$ là: $y = 2(x-1)+5 \Leftrightarrow y = 2x+3$.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2x+3, y = -2x+3$ là nghiệm của phương trình: $2x+3 = -2x+3 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và hai tiếp tuyến của (P) tại A, B là:

$$S = \int_{-1}^0 (x^2 + 4 + 2x - 3) dx + \int_0^1 (x^2 + 4 - 2x - 3) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Câu 3: Gọi S_1 là diện tích của mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = mx$ với $m < 2$ và parabol (P) có phương trình $y = x(2 - x)$. Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (P) và Ox . Với giá trị nào của m thì $S_1 = \frac{1}{2}S_2$?

A. $2 - \sqrt[3]{4}$.

B. $2 + \sqrt[3]{2}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

* Tính S_2

Phương trình hoành độ giao điểm $x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do đó $S_2 = \int_0^2 |2x - x^2| dx = \frac{4}{3}$.

* Tính S_1

Phương trình hoành độ giao điểm $mx = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (m - 2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 - m \end{cases}$.

Do đó $S_1 = \int_0^{2-m} |2x - x^2 - mx| dx = \int_0^{2-m} (-x^2 + (2 - m)x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{(2 - m)x^2}{2} \right) \Big|_0^{2-m} = \frac{(2 - m)^3}{6}$.

* $S_1 = \frac{1}{2}S_2 \Leftrightarrow \frac{(2 - m)^3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{4}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị cắt nhau tại các điểm có hoành độ là $-1; 1; 2$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên bằng

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{37}{12}$.

D. $\frac{37}{6}$.

Lời giải:

Do hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị cắt nhau các điểm có hoành độ là $-1; 1; 2$, nên $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc ba.

Suy ra ta có: $f(x) - g(x) = k \cdot (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

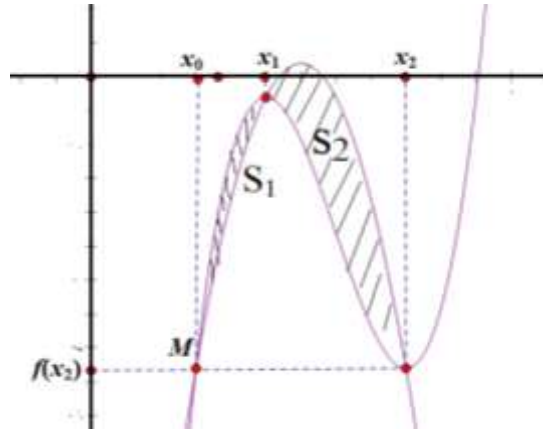
Mặt khác ta có: $f(0) - g(0) = 4 \Rightarrow k = 2$.

$\Rightarrow f(x) - g(x) = 2(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$

Vậy ta có diện tích là $S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 |2x^3 - 4x^2 - 2x + 4| dx$

$= \int_{-1}^1 (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx - \int_1^2 (2x^3 - 4x^2 - 2x + 4) dx = \frac{16}{3} + \frac{5}{6} = \frac{37}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. và đồ thị luôn đi qua $M(x_0; f(x_0))$ trong đó $x_0 = x_1 - 1$ $g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị qua 2 điểm cực trị và M. $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm $f(x), g(x)$ như hình vẽ).



A. $\frac{5}{32}$.

B. $\frac{6}{35}$.

C. $\frac{7}{33}$.

D. $\frac{4}{29}$.

Lời giải:

Nhận thấy hình phẳng trên có diện tích không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho $x_0 = 0$ Khi đó ta có $x_1 = 1, x_2 = 3$, Xét hàm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$.

Vì $x_1 = 1, x_2 = 3$, là các điểm cực trị nên ta có: $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$

Hơn nữa, ta có $f(1) = 3f(3) \Leftrightarrow a + b + c + d = 27a + 9b + 3c + d. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \\ d = 2a \end{cases}$

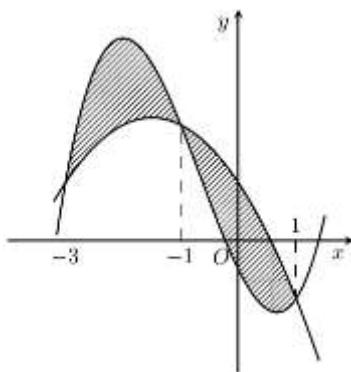
Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy: $\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(1) = 3g(3) \\ g(0) - g(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2a \\ m = -2a \\ n = -3a \end{cases}$

Suy ra $f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x + 2)$, $g(x) = a(-2x^2 + 6x + 2)$

Khi đó ta có: $S_1 = |a| \int_0^1 |x^3 - 4x^2 + 3x| dx = \frac{5}{12} |a|$ $S_2 = |a| \int_1^3 |x^3 - 4x^2 + 3x| dx = \frac{8}{3} |a|$

Do đó, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{32}$.

Câu 6: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-3}^{-1} [f(x) - g(x)] dx + \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)] dx$$

$$= \int_{-3}^{-1} \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} \right] dx.$$

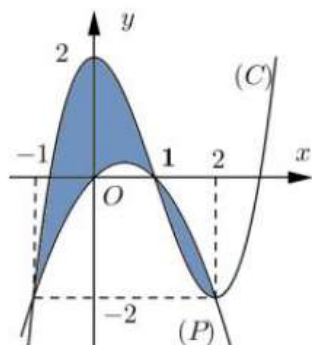
Trong đó phương trình $ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0$ (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Phương trình (*) có nghiệm $-3; -1; 1$ nên

$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) = \frac{3}{2} \\ -a + (b-d) - (c-e) = \frac{3}{2} \\ a + (b-d) + (c-e) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ (b-d) = \frac{3}{2} \\ (c-e) = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-3}^{-1} \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx - \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right] dx = 2 - (-2) = 4.$$

Câu 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải:

Giả sử $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Vì (C) đi qua các điểm $A(-1; -2), B(0; 2), C(1; 0), D(2; -2)$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -a + b - c + d = -2 \\ d = 2 \\ a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x^2 + 2.$$

Giả sử $(P): y = mx^2 + nx + q$ ($m \neq 0$).

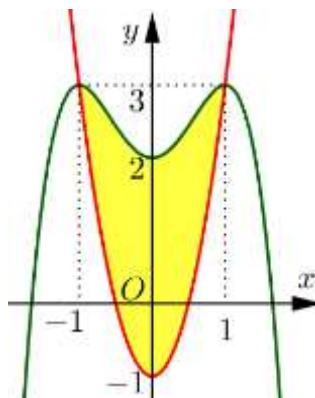
Vì (P) đi qua các điểm $A(-1; -2), E(1; 0), D(2; -2)$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} m - n + q = -2 \\ m + n + q = 0 \\ 4m + 2n + q = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ q = 0 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + x.$$

Dựa vào đồ thị của (C) và (P) , ta có diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S_{hp} &= \int_{-1}^1 [x^3 - 3x^2 + 2 - (-x^2 + x)] dx + \int_1^2 [-x^2 + x - (x^3 - 3x^2 + 2)] dx = \\ &= \int_{-1}^1 [x^3 - 2x^2 - x + 2] dx + \int_1^2 [-x^3 + 2x^2 + x - 2] dx = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) và hàm số $y = mx^2 + nx + p$ ($m \neq 0$) có đồ thị là các đường cong như hình vẽ bên.



Gọi S là diện tích của hình phẳng được tô đậm. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S \in \left(\frac{62}{15}; \frac{64}{15}\right)$. B. $S \in \left(\frac{21}{5}; \frac{13}{3}\right)$. C. $S \in \left(4; \frac{21}{5}\right)$. D. $S \in \left(\frac{13}{3}; \frac{67}{15}\right)$.

Lời giải:

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ đi qua các điểm $A(1;3)$, $B(0;2)$ và đạt cực trị tại $x=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1)=3 \\ f(0)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=3 \\ c=2 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2.$$

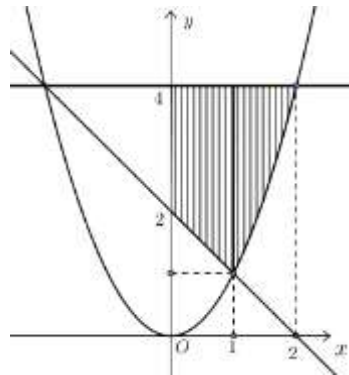
Từ đồ thị ta lại thấy đồ thị hàm số $y = g(x) = mx^2 + nx + p$ đi qua các điểm $C(0;-1)$, $A(1;3)$

$$\text{và } D(-1;3) \Rightarrow \begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=3 \\ f(-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-1 \\ m+n+p=3 \\ m-n+p=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-1 \\ m=4 \\ n=0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = 4x^2 - 1.$$

Diện tích hình phẳng được tô đậm là

$$S = \int_{-1}^1 [(-x^4 + 2x^2 + 2) - (4x^2 - 1)] dx = \int_{-1}^1 (-x^4 - 2x^2 + 3) dx = \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + 3x\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{64}{15}.$$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $d: y = mx + n$ ($m \neq 0$). Tính diện tích hình phẳng (D) giới hạn bởi (P) , d và đường thẳng $\Delta: y = 4$ như hình vẽ bên.



A. $\frac{25}{6}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{19}{6}$.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải:

Từ đồ thị ta thấy parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đi qua các điểm $A(2;4)$ và có đỉnh là

$$O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=4 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow y = x^2.$$

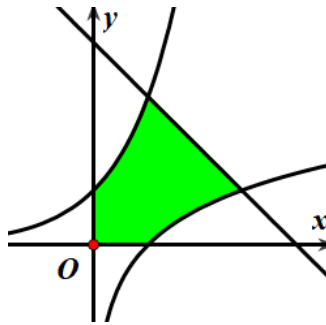
Từ đồ thị ta lại thấy đường thẳng $d: y = mx + n$ ($m \neq 0$) đi qua các điểm $B(2;0)$ và $C(0;2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m+n=0 \\ n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow y=-x+2.$$

Diện tích hình phẳng (D) là:

$$S = \int_0^1 (4 - (-x+2)) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \int_0^1 (x+2) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{25}{6}.$$

Câu 10: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = -x + e + 1$ với các trục tọa độ.



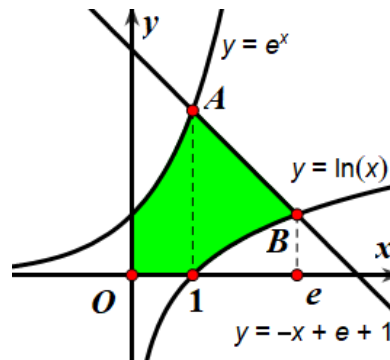
A. $\frac{e^2 + 2e - 5}{2}$.

B. $\frac{e^2}{2}$.

C. $\frac{2e^2 + e - 4}{3}$.

D. $\frac{e^2}{3}$.

Lời giải:



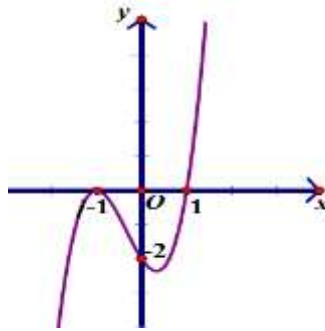
Vì hàm $y = e^x$ đồng biến và hàm $y = -x + e + 1$ nghịch biến, nên phương trình $e^x = -x + e + 1$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Tương tự hàm $y = \ln x$ đồng biến và hàm $y = -x + e + 1$ nghịch biến, nên phương trình $\ln x = -x + e + 1$ có nghiệm duy nhất $x = e$.

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 |e^x| dx + \int_1^e |\ln x - (-x + e + 1)| dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^e (-x + e + 1 - \ln x) dx \\ &= e^x \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{2} + (e+1)x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \ln x dx = (e-1) + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - (x \ln x - x) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 2e - 5}{2}. \end{aligned}$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên dưới:



Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2$.

A. $\frac{17\sqrt{3}}{5}$.

B. $\frac{32\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{16\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{14\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải:

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = a(x+1)^2(x-1)$.

Do $f'(0) = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f'(x) = 2(x+1)^2(x-1) = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$.

Ta có $f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x^3 + 2x^2 - 2x - 2)dx = \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x + C$.

Mà $f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x + \frac{1}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2$ là:

$$\frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2$ là:

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{3}{2} \right| dx = \frac{16\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, c, b, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2; -1; 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\frac{131}{4}$.

B. $\frac{131}{6}$.

C. $\frac{125}{12}$.

D. $\frac{125}{6}$.

Lời giải:

+ Ta có: $f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + 3(b-m)x^2 + 2(c-n)x + 4$. (1)

+ Mặt khác, vì hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2; -1; 3$ nên

$$f'(x) - g'(x) = a(x+2)(x+1)(x-3) \quad (2)$$

+ Từ (1), (2) suy ra: $4 = -6a \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$. Do đó: $f'(x) - g'(x) = -\frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int_{-2}^3 |f'(x) - g'(x)| dx = \int_{-2}^3 \left| -\frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-3) \right| dx = \frac{131}{6}$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \int_0^1 (x+u)f(u)du$ có đồ thị (C) . Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $S = \frac{1}{4}$

B. $S = \frac{1}{3}$.

C. $S = \frac{2}{3}$.

D. $S = \frac{1}{6}$.

Lời giải:

Hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = x^2 + ax + b$, với $a = \int_0^1 f(u)du$ và $b = \int_0^1 uf(u)du$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b \\ b = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = \frac{-17}{6} \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = x^2 - 5x - \frac{17}{6}$; $f'(x) = 2x - 5$.

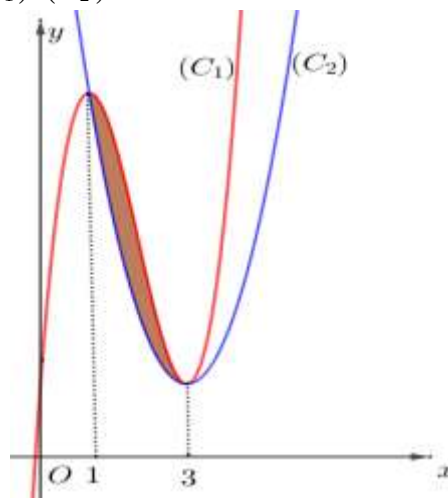
$$M\left(1; -\frac{41}{6}\right) \in (C); f'(1) = -3.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M : $y = -3(x-1) - \frac{41}{6} = -3x - \frac{23}{6}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^1 \left| x^2 - 5x - \frac{17}{6} - \left(-3x - \frac{23}{6}\right) \right| dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{3}.$$

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g(x) = ax^2 + bx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}; a \neq 0$) có đồ thị lần lượt là hai đường cong $(C_1), (C_2)$ ở hình vẽ bên dưới:



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1), (C_2)$ bằng $\frac{8}{3}$, tính $f(2) - g(-1)$.

A. -26.

B. -24.

C. -28.

D. -30.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị, ta có:

$$+) f'(x) = 3a(x-1)(x-3) \Rightarrow b = -6a; c = 9a$$

Ta có: $f(1) = g(1) \Leftrightarrow d = e - c$ và

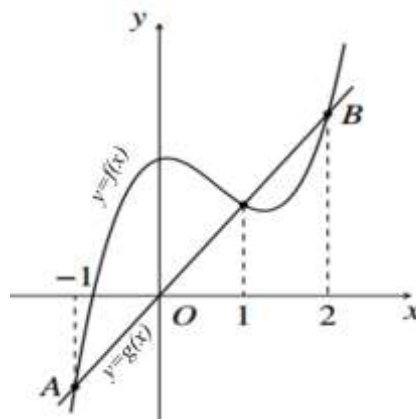
$$S = \int_1^3 |f(x) - g(x)| dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 34a + 14b + 12c + 6d - 6e = 18$$

$$\Rightarrow 17a + 7b + 3c = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \\ 17a + 7b + 3c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + e - 18; g(x) = 2x^2 - 12x + e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = e - 14 \\ g(-1) = e + 14 \end{cases} \Rightarrow f(2) - g(-1) = -28$$

Câu 15: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{1}{3}x + c$ và đường thẳng $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Biết $AB = 5$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{17}{11}$.

B. $\frac{19}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{7}{11}$.

Lời giải:

Gọi $g(x) = mx$ ($m > 0$). Ta có $A(-1; -m)$; $B(2; 2m)$.

$$\text{Khi đó } AB = \sqrt{9 + 9m^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \text{ (tm)} \\ m = -\frac{4}{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

Ta có $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 - x + c = 0$.

$$\text{Mặt khác } ax^3 + bx^2 - x + c = a(x^2 - 1)(x - 2) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 - x + c = ax^3 - 2ax^2 - ax + 2a,$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = 1, b = -2, c = 2$. Vậy $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 2$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng $S = \int_1^2 \left(x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right) dx = \frac{19}{12}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có ba điểm cực trị là $-1, 1$ và 3 . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

- A.** $\frac{256}{15}$. **B.** $\frac{265}{15}$. **C.** $\frac{128}{15}$. **D.** $\frac{182}{15}$.

Lời giải:

Ta có $f'(x) = 8(x+1)(x-1)(x-3) = 8(x^3 - 3x^2 - x + 3)$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 24x + d$$

Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{4}(x-1) - 8x^2 + 16x + 6 + d$

Giả sử $A_i(x_i, y_i)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ thì

$$y_i = f(x_i) = -8x_i^2 + 16x_i + 6 + d$$

Do đó đồ thị hàm số bậc hai qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

$$y = g(x) = -8x^2 + 16x + 6 + d.$$

$$\text{Khi đó } f(x) - g(x) = 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

$$S = \int_{-1}^3 |f(x) - g(x)| dx = \frac{256}{15}.$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 2$ và hàm số $y = g(x)$ là hàm bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị đó. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(71; 72)$. **B.** $(72; 73)$. **C.** $(73; 74)$. **D.** $(74; 75)$.

Lời giải:

Ta có $y' = f'(x) = 24x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$.

Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị có hoành độ $-2; 1; 2$ nên phương trình

$f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $-2; 1; 2$.

Suy ra $f'(x) = 24(x+2)(x-1)(x-2) \Leftrightarrow f'(x) = 24x^3 - 24x^2 - 96x + 96$

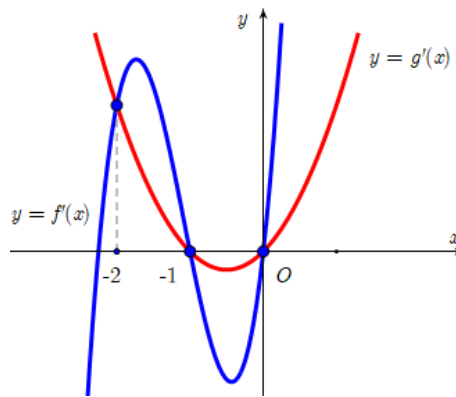
$$\Rightarrow f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 96x + d.$$

Ta có $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}\right)f'(x) - 26x^2 + 64x + d + 8 \Rightarrow g(x) = -26x^2 + 64x + d + 8$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$S = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |(6x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 96x + d) - (-26x^2 + 64x + d + 8)| dx \approx 74,63.$$

Câu 18: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = px^2 + qx + r$ với $a, p \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Đồng thời diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng 2 và $f(-1) = g(-1) + 1$. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\frac{m}{n}$. Giá trị $m + n$ bằng:



A. 28.

B. 29.

C. 30.

D. 31.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow f'(x) - g'(x) = a(x+2)(x+1)x$ và $a > 0$.

$$\text{Theo đề } S = \int_{-2}^0 |a(x+2)(x+1)x| dx = a \int_{-2}^0 |(x+2)(x+1)x| dx \Leftrightarrow 2 = a \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 4.$$

$$\text{Ta có: } \int [f'(x) - g'(x)] dx = \int 4(x+2)(x+1)x dx \Rightarrow f(x) - g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + C.$$

$$\text{Theo đề: } f(-1) = g(-1) + 1 \Leftrightarrow f(-1) - g(-1) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 - 4 + 4 + C \Leftrightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) = x^2(x+2)^2.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$

$$S = \int_{-2}^0 |x^2(x+2)^2| dx = \frac{16}{15} = \frac{m}{n}.$$

Vậy giá trị $m + n = 31$.

Câu 19: Cho số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, $f(0) = F(1) = 0$. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = F(x)$ và trục Ox .

A. $S = \frac{64}{15}$.

B. $S = \frac{116}{15}$.

C. $S = \frac{576}{5}$.

D. $S = \frac{32}{15}$.

Lời giải:

+) Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 4) dx = 4x^3 + 4x + C_1$.

Do $f(0) = 0$ nên $C_1 = 0$, suy ra $f(x) = 4x^3 + 4x$.

$F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 + 4x) dx = x^4 + 2x^2 + C_2$.

Do $F(1) = 0$ nên $C_2 = -3$, suy ra $F(x) = x^4 + 2x^2 - 3$.

+) Xét phương trình $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^1 |x^4 + 2x^2 - 3| dx = \frac{64}{15}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có ba điểm cực trị $-2, 1$ và 2 . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(34; 35)$.

B. $(36; 37)$.

C. $(37; 38)$.

D. $(35; 36)$.

Lời giải:

Theo bài ra, ta có: $f'(x) = 12(x+2)(x-1)(x-2) = 12(x^3 - x^2 - 4x + 4)$

$\Rightarrow f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + d$.

Khi đó $f(-2) = d - 112$, $f(1) = d + 23$, $f(2) = d + 16$.

Giả sử $g(x) = mx^2 + nx + p$.

Theo bài ra, ta có:

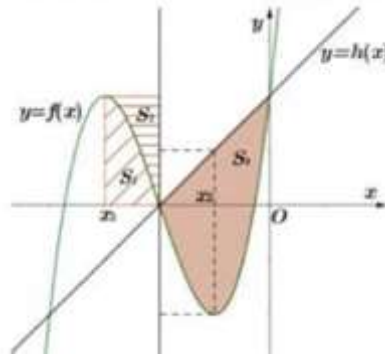
$$\begin{cases} g(-2) = 4m - 2n + p = d - 112 \\ g(1) = m + n + p = d + 23 \\ g(2) = 4m + 2n + p = d + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 2n + (p - d) = -112 \\ m + n + (p - d) = 23 \\ 4m + 2n + (p - d) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -13 \\ n = 32 \\ p - d = 4 \end{cases}$$

Do vậy, $f(x) - g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + d + 13x^2 - 32x - p = 3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4$.

Suy ra $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = \int_{-2}^2 |3x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 16x - 4| dx \approx 37,31358 \in (37; 38)$.

Câu 21: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hình phẳng như hình bên và S_3 là diện tích phần tô đậm. Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_3}$.



A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{2}{16}$.

D. $\frac{3}{16}$.

Lời giải:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải một đoạn $-\frac{x_1 + x_2}{2}$ đơn vị ta thu được đồ thị hàm số bậc ba $y = g(x)$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng nên $g(x)$ là hàm lẻ có dạng $g(x) = ax^3 + bx$ và hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 1$.

Có: $g'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow g'(\pm 1) = 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a$. Suy ra: $g(x) = a(x^3 - 3x)$.

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = h(x)$ sang phải một đoạn $-\frac{x_1 + x_2}{2}$ đơn vị ta thu được đồ thị hàm bậc nhất $y = k(x)$ có đồ thị là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, điểm $A\left(\frac{x_2 - x_1}{2}; \frac{g(-1)}{2}\right)$ hay $A(1; a)$. Phương trình đường thẳng $y = k(x)$ là $y = ax$.

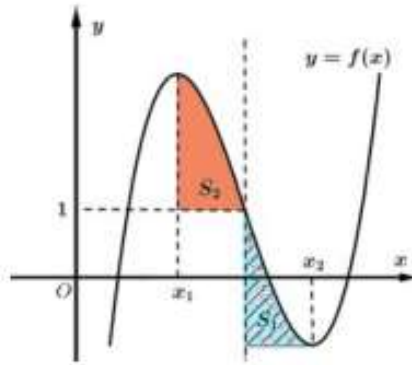
Ta có: $S_1 = \int_{-1}^0 g(x) dx = \frac{5}{4}a \Rightarrow S_2 = |(-1) \cdot g(-1)| - S_1 = \frac{3}{4}a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $g(x)$ và $k(x)$ là: $ax = a(x^3 - 3x) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$S_3 = a \int_0^2 (x - x^3 + 3x) dx = a \int_0^2 (4x - x^3) dx = 4a$.

Vậy: $\frac{S_2}{S_3} = \frac{\frac{3}{4}a}{4a} = \frac{3}{16}$.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 2$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của hai hình phẳng được cho trong hình vẽ bên. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.



A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{5}{8}$.

Lời giải:

Gọi x_0 là hoành độ điểm uốn I của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Do $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2 \Rightarrow |x_1 - x_0| = |x_2 - x_0| = 1$.

Cố định đồ thị hàm số $f(x)$, tịnh tiến hệ toạ độ Oxy theo véc tơ $\overrightarrow{OI}$. Khi đó, trong hệ toạ độ mới $S_1; S_2$ không thay đổi so với hệ toạ độ cũ.

Trong hệ toạ độ Oxy mới, đường cong là đồ thị của hàm số bậc ba $y = g(x)$. Từ hình vẽ suy ra $g'(x)$ là tam thức bậc hai có nghiệm $x_1 = -1; x_2 = 1$.

$$\Rightarrow g'(x) = a(x+1)(x-1) = a(x^2 - 1) \quad (a > 0) \Rightarrow g(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + b.$$

$$\text{Đồ thị hàm số } y = g(x) \text{ đi qua điểm } O(0;0) \text{ nên } b = 0 \Rightarrow g(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - x\right).$$

$$\text{Ta có: } S_2 = \int_{-1}^0 a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx = a\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^0 = \frac{5a}{12}$$

$$S_1 = \int_0^1 \left[a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - g(1) \right] dx = \int_0^1 \left[a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + \frac{2a}{3} \right] dx = a\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{a}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ là $-3, -1, 1$; $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $y = g(x)$ là hàm số bậc hai đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = F(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = F(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{128}{15}$.

B. $\frac{64}{15}$.

C. 16.

D. 64.

Lời giải:

Vì hàm số $y = f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ là

$$-3, -1, 1 \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} 9a - 3b + c = -108 \\ a - b + c = -4 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 4 \\ c = 12 \end{cases}$$

$$\text{hay } y = f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 4x + 12$$

$$\text{Ta có } F(x) = \int (-4x^3 - 12x^2 + 4x + 12) dx = -x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x + C$$

$$\text{Mặt khác ta có } F(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) f(x) + 4x^2 + 8x + C - 3 \text{ do vậy } y = g(x) = 4x^2 + 8x + C - 3 \text{ là}$$

hàm số bậc hai đi qua 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = F(x)$ và $y = g(x)$ ta có:

$$-x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x + C = 4x^2 + 8x + C - 3 \Leftrightarrow -x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)(x+1)^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S = \int_{-3}^1 |F(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^1 |-x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3| dx$$

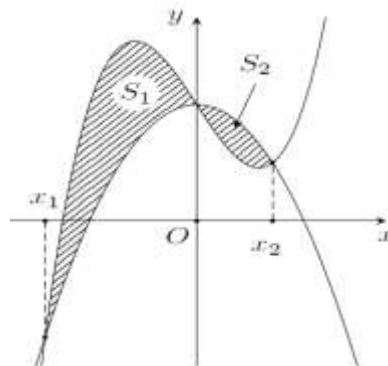
$$= \int_{-3}^{-1} (-x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3) dx + \int_{-1}^1 (-x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3) dx$$

$$= \left(\frac{-x^5}{5} - x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{-x^5}{5} - x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= -\frac{17}{15} + \frac{27}{5} + \frac{47}{15} + \frac{17}{15} = \frac{128}{15}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = F(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\frac{128}{15}$.

Câu 24: Cho đường cong $(C): y = x^3 + kx + 2$ và parabol $P: y = -x^2 + 2$ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ.



Biết rằng $S_1 = \frac{8}{3}$, giá trị của S_2 bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$x^3 + kx + 2 = -x^2 + 2 \Leftrightarrow x(x^2 + x + k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x + k = 0. \end{cases}$$

Hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt nên phương trình $x^2 + x + k = 0$ có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$. Do đó ta có $\begin{cases} k < 0 \\ x_2 = -1 - x_1 \\ k = -x_1^2 - x_1. \end{cases}$

Trên đoạn $[x_1; 0]$, $x^3 + kx + 2 \geq -x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + kx \geq 0$. Theo bài ra, diện tích $S_1 = \frac{8}{3}$ nên

$$\int_{x_1}^0 |x^3 + x^2 + kx| dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{x_1}^0 (x^3 + x^2 + kx) dx = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{kx^2}{2} \right) \Big|_{x_1}^0 = \frac{8}{3}$$

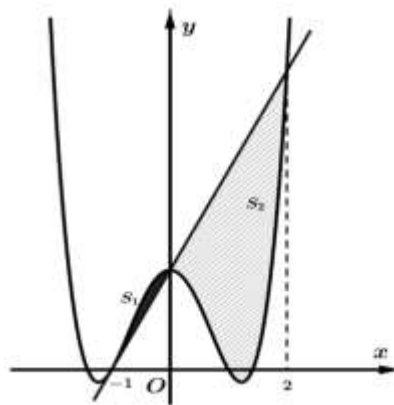
$$\Leftrightarrow -(3x_1^4 + 4x_1^3 + 6kx_1^2) = 32 \Leftrightarrow 3x_1^4 + 4x_1^3 + 6(-x_1^2 - x_1)x_1^2 = -32$$

$$\Leftrightarrow 3x_1^4 + 2x_1^3 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 2)(3x_1^3 - 4x_1^2 + 8x_1 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$$

Với $x_1 = -2 \Rightarrow k = -2, x_2 = 1$ và $x^3 + x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in [0; 1]$, ta có

$$S_2 = -\int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết $f(-1) = 0$. Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính S_2 , biết $S_1 = \frac{401}{2022}$.



A. $\frac{12431}{2022}$.

B. $\frac{5614}{1011}$.

C. $\frac{2005}{2022}$.

D. $\frac{2807}{1011}$.

Lời giải:

Giả sử tiếp tuyến d có phương trình $y = g(x) = mx + n$.

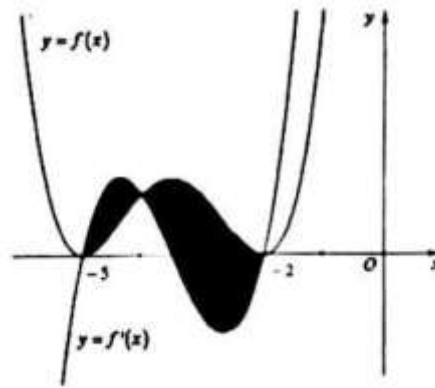
Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2, nên ta có: $f(x) - g(x) = a(x+1)^2 x(x-2)$, $a > 0$.

Theo giả thiết: $S_1 = \frac{401}{2022} \Leftrightarrow \int_{-1}^0 |f(x) - g(x)| dx = \frac{401}{2022}$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 a(x+1)^2 x(x-2)dx = \frac{401}{2022} \Leftrightarrow \frac{a}{5} = \frac{401}{2022} \Leftrightarrow a = \frac{2005}{2022}$$

$$\text{Do đó: } S_2 = \int_0^2 [-f(x) + g(x)]dx = -\int_0^2 \left[\frac{2005}{2022} (x+1)^2 x(x-2) \right] dx = \frac{5614}{1011}.$$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị nhận đường thẳng $x = -\frac{7}{2}$ làm trục đối xứng. Biết diện tích hình phẳng của phần giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ và hai đường thẳng $x = -5$, $x = -2$ có giá trị là $\frac{127}{50}$ (hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ và trục hoành bằng

A. $\frac{81}{50}$.

B. $\frac{91}{50}$.

C. $\frac{71}{50}$.

D. $\frac{61}{50}$.

Lời giải:

Đặt $f(x) = k(x+5)^2(x+2)^2, k > 0$.

Khi đó $f'(x) = 2k(x+5)(x+2)^2 + 2k(x+5)^2(x+2) = k(x+5)(x+2)(4x+14)$

Xét hàm $g(x) = f(x) - f'(x) = k(x+5)(x+2)(x^2 + 3x - 4)$

Suy ra $g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x = 1 \end{cases}$

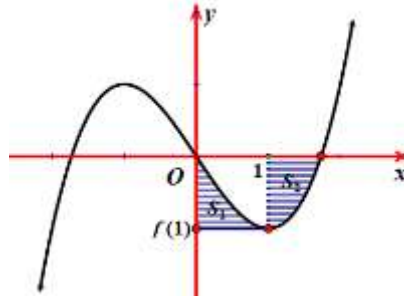
Từ đó ta suy ra: $\int_{-5}^{-2} |g(x)|dx = -\int_{-5}^{-4} g(x)dx + \int_{-4}^{-2} g(x)dx$

$$= -k \int_{-5}^{-4} (x+5)(x+2)(x^2 + 3x - 4)dx + k \int_{-4}^{-2} (x+5)(x+2)(x^2 + 3x - 4)dx$$

$$= \frac{23}{10}k + \frac{52}{5}k = \frac{127}{10}k = \frac{127}{50} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-5}^{-2} f(x) dx = \int_{-5}^{-2} \frac{1}{5} (x+2)^2 (x+5)^2 dx = \frac{81}{50}.$$

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, biết $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và thỏa mãn $(f(x)+1)$ và $(f(x)-1)$ lần lượt chia hết cho $(x-1)^2$ và $(x+1)^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng như trong hình dưới. Tính $2S_1 - S_2$.



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 4.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Theo bài ra, ta có: $f(x) = (ax+b)(x-1)^2 - 1, (a > 0)$.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = (ax+1)(x-1)^2 - 1 \Rightarrow f(x) - 1 = (ax+1)(x-1)^2 - 2.$$

$$f(x) - 1 = a(x+1)^3 + (1-5a)(x+1)^2 + (8a-4)(x+1) - 2(2a-1).$$

$$f(x) - 1 : (x+1)^2 \Leftrightarrow 2a-1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2 - 1 = \frac{x^3 - 3x}{2}.$$

$$\text{Vậy } 2S_1 - S_2 = 2 \int_0^1 \left(\frac{x^3 - 3x}{2} + 1 \right) dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 - 3x}{2} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -4 và 4 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+12}$ và $y = 1$ bằng

A. $2\ln 3$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 18$.

D. $\ln 2$.

Lời giải:

Ta có:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 12x + 2a \Rightarrow f'''(x) = 12$$

$$\text{Ta lại có } \frac{f(x)}{g(x)+12} - 1 = \frac{f(x) - g(x) - 12}{g(x)+12} = \frac{-f'(x) - f''(x) - 12}{f(x) + f'(x) + f''(x) + 12}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)+12} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{-f'(x) - f''(x) - 12}{f(x) + f'(x) + f''(x) + 12} = 0 \Rightarrow f'(x) + f''(x) + 12 = 0$$

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 12.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{f(x)}{g(x)+12} - 1 = \frac{-f'(x) - f''(x) - 12}{f(x) + f'(x) + f''(x) + 12} = \frac{-g'(x)}{g(x)+12}$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g'(x) = 0$

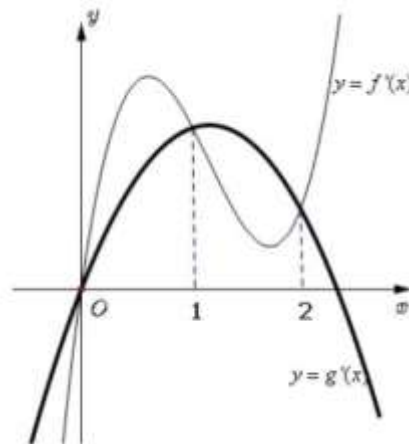
Khi và chỉ khi x_1, x_2 là 2 nghiệm của $f'(x) + f''(x) + 12 = 0$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} g(x_1) = 4 \\ g(x_2) = -4 \end{cases}$.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{g'(x)}{g(x)+12} \right| dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{g'(x)}{g(x)+12} dx \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{d(g(x)+12)}{g(x)+12} \right| = \left| \left(\ln |g(x)+12| \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right|$$

$$= \left| \left(\ln \left| \frac{g(x_2)+12}{g(x_1)+12} \right| \right) \right| = \left| \ln \frac{8}{16} \right| = \left| \ln \frac{1}{2} \right| = \ln 2.$$

Câu 29: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = qx^2 + nx + p$ với $a, q \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng $\frac{5}{2}$ và $f(2) = g(2)$. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng $\frac{a}{b}$. Tính $T = a^2 - b^2$.



A. 7.

B. 55.

C. -5.

D. 16.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta có: $f'(x) - g'(x) = a(x)(x-1)(x-2) = a(x^3 - 3x^2 + 2x)$, với $a > 0$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng: $\int_0^2 |f'(x) - g'(x)| dx = a \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = 5$. Suy ra $f'(x) - g'(x) = 5x^3 - 15x^2 + 10x$.

Mặt khác, $f'(x) - g'(x) = ax^3 + (b-q)x^2 + (c-n)x + (d-p)$.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} a = 5 \\ b - q = -15 \\ c - n = 10 \\ d - p = 0 \end{cases}.$$

Ta có $f(x) = \frac{5}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + r$, $g(x) = \frac{q}{3}x^3 + \frac{n}{2}x^2 + px + s$.

$$\bullet f(2) = g(2) \Leftrightarrow 20 + \frac{8}{3}(b-q) + 2(c-n) + 2(d-p) + (r-s) = 0.$$

Thế vào ta được $r-s=0$.

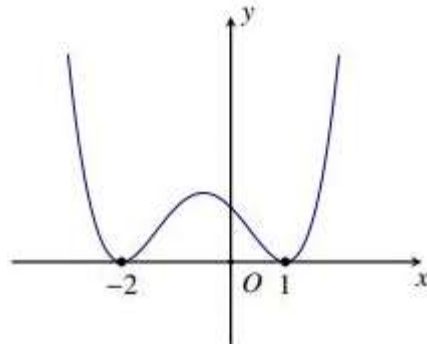
$$\bullet f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 + \frac{(b-q)}{3}x^3 + \frac{(c-n)}{2}x^2 + (d-p)x + (r-s) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 - 5x^3 + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$

bằng: $\int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^2 \left| \frac{5}{4}x^4 - 5x^3 + 5x^2 \right| dx = \frac{4}{3}$. Suy ra $a=4, b=3$. Vậy $T = a^2 - b^2 = 7$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm bậc bốn có đồ thị như hình bên. Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{214}{5}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành.



A. $\frac{81}{20}$.

B. $\frac{81}{10}$.

C. $\frac{17334}{635}$.

D. $\frac{17334}{1270}$.

Lời giải:

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ suy ra $f(x) = a(x+2)^2(x-1)^2, (a > 0)$.

Ta có $f'(x) = 2a(x+2)(x-1)^2 + 2a(x+2)^2(x-1) = 2a(x+2)(x-1)(2x+1)$.

Xét phương trình $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow a(x+2)(x-1)[(x+2)(x-1) - 2(2x+1)] = 0$

$$\Leftrightarrow a(x+2)(x-1)(x^2 - 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

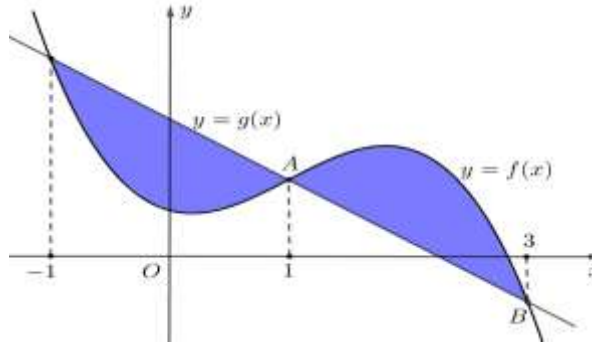
$$S = \int_{-2}^4 |a(x+2)(x-1)(x^2 - 3x - 4)| dx = a \int_{-2}^4 |(x+2)(x-1)(x^2 - 3x - 4)| dx = \frac{428}{5}a.$$

Theo đề bài ta có $\frac{428}{5}a = \frac{214}{5} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} (TM) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^2$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

$$S_1 = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} (x+2)^2 (x-1)^2 dx = \frac{81}{20}.$$

Câu 31: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 - \frac{2}{7}x + d$ và đường thẳng $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết $AB = \frac{2\sqrt{65}}{7}$ diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{11}{3}$.

B. $\frac{23}{3}$.

C. $\frac{16}{7}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải:

Giả sử $d: y = mx + n$ với $m < 0$ do $y = g(x)$ là hàm nghịch biến.

Do $A, B \in d$ nên tọa độ hai điểm $A(1; m+n), B(3; 3m+n)$.

$$\text{Mặt khác } AB = \frac{2\sqrt{65}}{7} \Leftrightarrow \sqrt{(3-1)^2 + (3m+n-m-n)^2} = \frac{2\sqrt{65}}{7}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4+4m^2} = \frac{2\sqrt{65}}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{7} \\ m = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } y = g(x) = -\frac{4}{7}x + n.$$

$$\begin{aligned} \text{Xét phương trình: } f(x) - g(x) &= \left(ax^3 + bx^2 - \frac{2}{7}x + d\right) - \left(-\frac{4}{7}x + n\right) \\ &= ax^3 + bx^2 + \frac{2}{7}x + d - n. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-3) = ax^3 - 3ax^2 - ax + 3a.$$

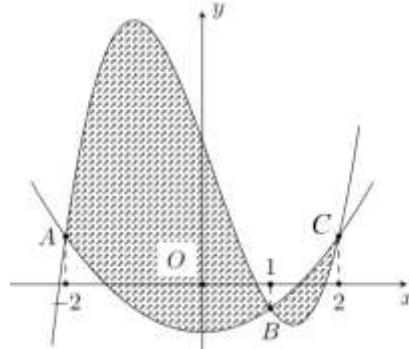
$$\text{Đồng nhất hệ số ta được } a = -\frac{2}{7}.$$

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là } S = \int_{-1}^3 \left| -\frac{2}{7}(x+1)(x-1)(x-3) \right| dx = \frac{16}{7}.$$

Câu 32: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$ và parabol $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Biết đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C có hoành độ lần lượt

là $-2; 1; 2$ và thỏa mãn $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.



A. $\frac{71}{3}$.

B. $\frac{238}{3}$.

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Lời giải:

Ta có: $A(-2; f(x_A)), B(1; f(x_B)) \Rightarrow AB^2 = (1+2)^2 + (f(-2) - f(1))^2$

Theo giả thiết $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow f(-2) - f(1) = \frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow (-8a - 2 - 2c + d) - \left(a - \frac{1}{2} + c + d\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3a + c = -1 \quad (1).$

Mặt khác, $f(x) - g(x) = a(x+2)(x-1)(x-2) = a(x^3 - x^2 - 4x + 4) \quad (*)$

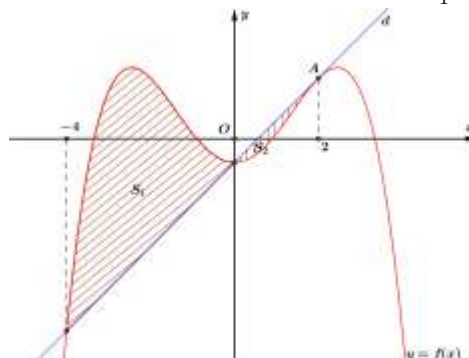
Nhận xét do đồ thị $y = g(x)$ là parabol nhận Oy làm trục đối xứng $\Rightarrow g(x) = kx^2 + m$

Đồng nhất hệ số của phương trình $(*)$ ta có: $c = -4a \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} 3a + c = -1 \\ c = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -4 \end{cases}$. Vậy $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Vậy $S = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \frac{71}{6}$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Tiếp tuyến d đi qua điểm A có hoành độ $x = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm khác A có hoành độ lần lượt là $x = -4$ và $x = 0$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần gạch sọc (như hình vẽ). Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$.



A. $\frac{3}{20}$.

B. $\frac{1}{28}$.

C. $\frac{3}{28}$.

D. $\frac{1}{20}$.

Lời giải:

Gọi phương trình của tiếp tuyến d là $y = g(x)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và tiếp tuyến d là:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = m(x+4)x(x-2)^2 \text{ với } m < 0.$$

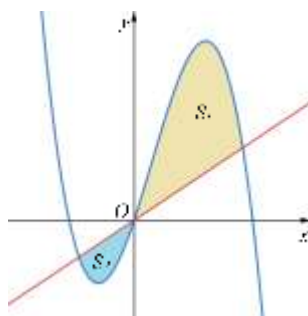
Theo giả thiết ta có:

$$+) S_1 = \int_{-4}^0 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-4}^0 [f(x) - g(x)] dx = m \int_{-4}^0 (x+4)x(x-2)^2 dx = -\frac{896m}{5}.$$

$$+) S_2 = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = -\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = -m \int_0^2 (x+4)x(x-2)^2 dx = -\frac{32m}{5}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{28}.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ tạo thành hai miền phẳng có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ



Biết $S_1 = \frac{27}{4}$. Khi đó $S_2 = \frac{m}{n}$, giá trị của $2m - n$ bằng

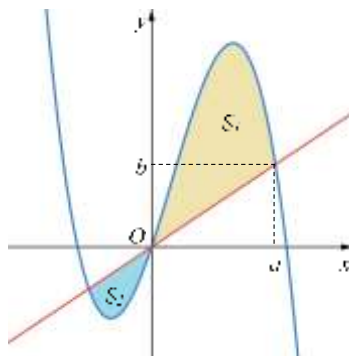
A. 143.

B. -50.

C. 50.

D. 142.

Lời giải:



- ♦ Gọi $a > 0$ là hoành độ giao điểm của (C) và d .

Khi đó, đường thẳng d có hệ số góc là: $k = \frac{-\frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{4}a^2 + 3a}{a} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + 3$.

Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ nên có phương trình là $d: y = \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + 3\right)x$.

♦ Ta có: $S_1 = \int_0^a \left[\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x\right) - \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + 3\right)x \right] dx$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{4} = \left[\left(-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) - \left(-\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{8}a + \frac{3}{2}\right)x^2 \right]_0^a$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{4} = \left(-\frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{4}a^3 + \frac{3}{2}a^2\right) - \left(-\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{8}a + \frac{3}{2}\right)a^2 \Leftrightarrow \frac{27}{4} = \frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{8}a^3 \Leftrightarrow a = 3.$$

Do đó, $d: y = \frac{3}{4}x$.

- ♦ Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

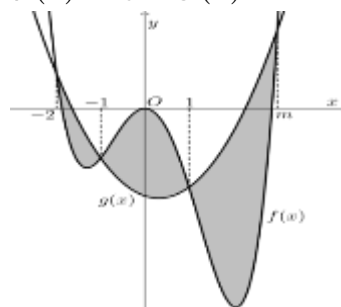
$$\frac{3}{4}x - \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x = 0$$

Phương trình trên có 3 nghiệm: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ và $x_3 = -\frac{3}{2}$.

♦ $S_2 = \int_{-\frac{3}{2}}^0 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x\right) dx = \frac{135}{128}$.

Do đó: $m = 135$, $n = 128$. Vậy: $2m - n = 142$.

Câu 35: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a \neq 0$ và $g(x) = px^2 + qx - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua gốc tọa độ và cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại bốn điểm có hoành độ lần lượt là -2 ; -1 ; 1 và m . Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) - g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ có hệ số góc bằng $-\frac{15}{2}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.



Diện tích của hình (H) bằng

A. $\frac{1553}{120}$.

B. $\frac{1553}{240}$.

C. $\frac{1553}{60}$.

D. $\frac{1553}{30}$.

Lời giải:

Đặt $h(x) = f(x) - g(x) = ax^4 + bx^3 + (c-p)x^2 + (d-q)x + (e+3)$.

$$h'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2(c-p)x + (d-q).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x) = 0 \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + (c-p)x^2 + (d-q)x + e + 3 = 0.$$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua gốc tọa độ và cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại bốn điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ và m nên $f(0) = h(-2) = h(-1) = h(1) = h(m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e = 0 \\ 16a - 8b + 4(c-p) - 2(d-q) = -3 \quad (1) \\ a - b + (c-p) - (d-q) = -3 \quad (2) \\ a + b + (c-p) + (d-q) = -3 \quad (3) \\ am^4 + bm^3 + (c-p)m^2 + (d-q)m + 3 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Mặt khác, tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại điểm có hoành độ $x = -2$ có hệ số góc bằng $-\frac{15}{2}$ nên $h'(-2) = -\frac{15}{2} \Leftrightarrow -32a + 12b - 4(c-p) + (d-q) = -\frac{15}{2} \quad (5)$.

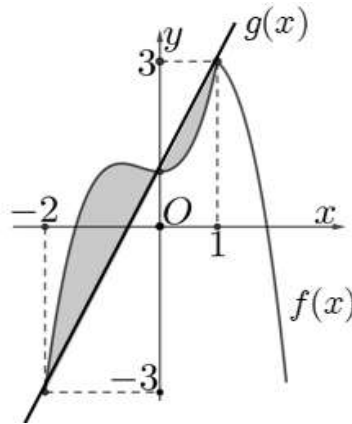
Từ (1), (2), (3), (5), ta tìm được:
$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c-p = -\frac{7}{2} \\ d-q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay vào (4): $\frac{1}{2}m^4 - \frac{1}{2}m^3 - \frac{7}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 3 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m-1)(m+1)(m+2) = 0$
 $\Leftrightarrow m = 3$.

Ngoài ra, ta cũng có: $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_{-2}^3 |h(x)| dx = \int_{-2}^{-1} |h(x)| dx + \int_{-1}^1 |h(x)| dx + \int_1^3 |h(x)| dx$
 $= \left| \int_{-2}^{-1} h(x) dx \right| + \left| \int_{-1}^1 h(x) dx \right| + \left| \int_1^3 h(x) dx \right| = \left| -\frac{113}{120} \right| + \left| \frac{58}{15} \right| + \left| -\frac{122}{15} \right| = \frac{1553}{120}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đường thẳng $(d): g(x) = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích miền tô đậm bằng $\frac{37}{12}$ và $\int_0^1 f(x) dx = \frac{19}{12}$. Tích phân $\int_{-1}^0 x \cdot f'(2x) dx$ bằng

A. $-\frac{607}{348}$.

B. $-\frac{20}{3}$.

C. $-\frac{5}{3}$.

D. $-\frac{5}{6}$.

Lời giải:

Ta có: $\begin{cases} A(1;3) \in g(x) = ax + b \\ B(-2;-3) \in g(x) = ax + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) = 2x + 1.$

Mà $S = \frac{37}{12} \Leftrightarrow \int_{-2}^0 [f(x) - (2x + 1)] dx + \int_0^1 [(2x + 1) - f(x)] dx = \frac{37}{12}$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (2x + 1) dx - \int_{-2}^0 (2x + 1) dx = \frac{37}{12} \Rightarrow \int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{2}{3}.$

Khi đó $\int_{-1}^0 x \cdot f'(2x) dx \xrightarrow[\substack{x=-1 \rightarrow t=-2 \\ x=0 \rightarrow t=0}]{t=2x \rightarrow dt=2dx} \frac{1}{4} \int_{-2}^0 t \cdot f'(t) dt \xrightarrow[\substack{dv=f'(t)dt \rightarrow v=f(t)}]{u=t \rightarrow du=dt} \frac{1}{4} \left[t \cdot f(t) \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(t) dt$

$= \frac{1}{4} \left[2f(-2) - \int_{-2}^0 f(x) dx \right] = \frac{1}{4} \left[2 \cdot (-3) - \frac{2}{3} \right] = -\frac{5}{3}.$

Câu 37: Cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB .

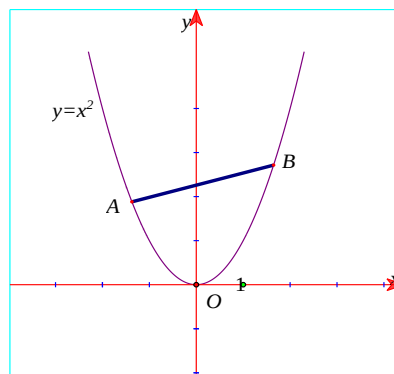
A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải:



Gọi $A(a; a^2)$ và $B(b; b^2)$ là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB = 2$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a < b$.

Theo giả thiết ta có $AB = 2$ nên $(b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2[(b+a)^2+1] = 4$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y = (b+a)x - ab$.

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB ta có

$$S = \int_a^b [(a+b)x - ab - x^2] dx = \left[(a+b)\frac{x^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

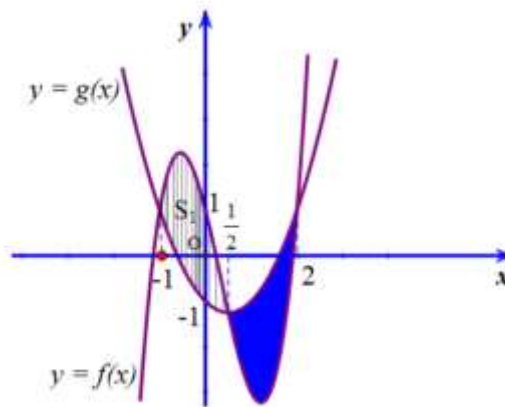
Mặt khác $(b-a)^2[(b+a)^2+1] = 4$ nên $(b-a)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |b-a| = b-a \leq 2$.

$$\text{Vậy } S = \frac{(b-a)^3}{6} \leq \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=2 \\ (b-a)^2[(b+a)^2+1]=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=2 \\ b+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1;1) \\ B(1;1) \end{cases}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng AB bằng $\frac{4}{3}$.

Câu 38: Cho hai hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $y = g(x) = mx^2 + nx + k$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ là $-1; \frac{1}{2}; 2$ và có đồ thị như hình vẽ.



Biết phần diện tích kẻ sọc (hình S_1) bằng $\frac{81}{32}$. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

$y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}; x = 2$ (phần bôi đen trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{79}{24}$.

B. $\frac{243}{96}$.

C. $\frac{81}{32}$.

D. $\frac{45}{16}$.

Lời giải:

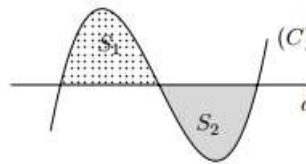
$$\text{Ta có: } f(x) - g(x) = a(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \quad (a > 0)$$

$$S_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} a(x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-2) dx = a \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-2) dx = a \cdot \frac{81}{64}.$$

$$\text{Mà } S_1 = \frac{81}{32} \Rightarrow a = 2.$$

$$\text{Khi đó: } S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^2 [g(x) - f(x)] dx = -2 \int_{\frac{1}{2}}^2 (x+1) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-2) dx = \frac{81}{32}.$$

Câu 39: Gọi X là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = -45m - 2$ cùng với đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + x + 1$ tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là S_1, S_2 thỏa mãn $S_1 = S_2$ (xem hình vẽ). Số phần tử của tập X là



A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 9.

Lời giải:

Điều kiện để đồ thị (C) có hai điểm cực trị là $y' = x^2 - 4mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó } \Delta' = (-2m)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đường thẳng $d: y = -45m - 2$ song song với trục hoành và cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + x + 1$ tạo thành hai miền kín có diện tích lần lượt là S_1, S_2 thỏa mãn $S_1 = S_2$ nên d đi qua điểm uốn của đồ thị (C) .

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 4mx + 1 \Rightarrow y'' = 2x - 4m = 0 \Rightarrow x_t = 2m \Rightarrow y_t = \frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1.$$

Khi đó ta có phương trình:

$$\frac{-16}{3}m^3 + 2m + 1 = -45m - 2 \Leftrightarrow \frac{-16}{3}m^3 + 47m + 3 = 0 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ có 3 nghiệm m phân biệt và có 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện nên tập X có 2 phần tử.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x) + 6}$ và $y = 1$ bằng

A. $\ln 3$.

B. $\ln 7$.

C. $3\ln 2$.

D. $\ln 10$.

Lời giải:

Xét hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$

Ta có $g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6$.

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm m, n và $\begin{cases} g(m) = -5 \\ g(n) = 2 \end{cases}$.

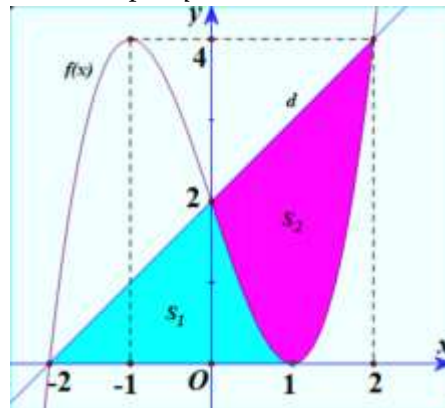
Xét phương trình $\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)+6-f(x)=0 \\ g(x)+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)+f''(x)+6=0 \\ g(x)+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ x=n \end{cases}$

Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \left| \int_m^n \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_m^n \frac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6} dx \right| = \left| \int_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6} dx \right| = \left| \int_m^n \frac{g'(x)}{g(x)+6} dx \right|$$

$$= \left| \ln|g(x)+6| \Big|_m^n \right| = \left| \ln|g(n)+6| - \ln|g(m)+6| \right| = \left| \ln 8 \right| = 3 \ln 2.$$

Câu 41: Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: y = mx + n$ như hình vẽ và S_1, S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình bên. Biết $\frac{S_1}{S_2} = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$ là một phân số tối giản. Tính $p + q + 2022$.



A. 2043.

B. 2045.

C. 2049.

D. 2051.

Lời giải:

Ta có $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 4)$ và $(1; 0)$ nên

$$\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ -a + b - c + d = 4 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x + 2.$$

Vì đường thẳng $d: y = mx + n$ đi qua 2 điểm $(-2; 0), (0; 2)$ nên $d: y = x + 2$.

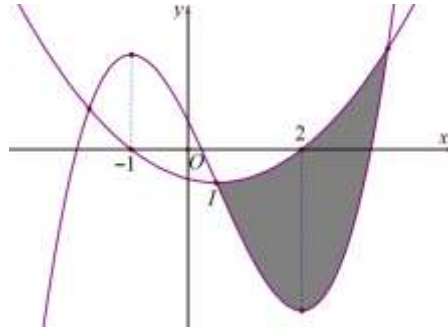
$$\text{Ta có } S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \int_0^1 |x^3 - 3x + 2| dx = 2 + \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx = 2 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{4}.$$

$$S_2 = \int_0^2 \left| (x+2) - (x^3 - 3x + 2) \right| dx = \int_0^2 (x+2 - x^3 + 3x - 2) dx = \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx = 4.$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{p}{q} = \frac{11}{16}.$$

$$\text{Vậy } p + q + 2022 = 2049.$$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ với đồ thị là Parabol đỉnh I có tung độ bằng $-\frac{7}{12}$ và hàm số bậc ba $g(x)$. Đồ thị hai hàm số đó cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $18x_1x_2x_3 = -55$ (hình vẽ).



Diện tích miền tô đậm gần số nào nhất trong các số sau đây?

A. 5,7.

B. 5,9.

C. 6,1.

D. 6,3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } x_I = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Lúc này ta có } I\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{12}\right) \text{ và } (P): f(x) = a(x+1)(x-2).$$

$$\text{Ta có } I\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{12}\right) \in (P) \Rightarrow a = \frac{7}{27} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{27}(x+1)(x-2).$$

Hàm số $g(x)$ đạt cực trị tại $x = -1, x = 2$ nên

$$g'(x) = a(x+1)(x-2) \Rightarrow g(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right) + b$$

$$\text{Đồ thị hàm số } g(x) \text{ đi qua } I \text{ nên } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} = -\frac{13}{12}a + b, (1).$$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } f(x) = g(x) \Leftrightarrow a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right) + b = \frac{7}{27}(x+1)(x-2)$$

$$\text{Theo định lý Viet ta có: } 18x_1x_2x_3 = -55 \Leftrightarrow 18 \cdot \frac{b + \frac{14}{27}}{\frac{a}{3}} = -55 \Rightarrow 18b + \frac{28}{3} = -\frac{55a}{3} \quad (2)$$

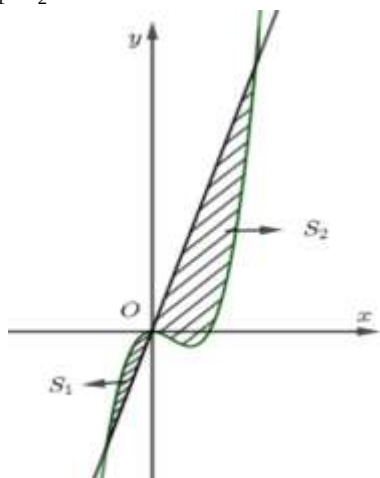
$$\text{Từ (1), (2) ta được } a = 1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm là $\frac{7}{27}(x+1)(x-2) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{8+\sqrt{559}}{9} \\ x = \frac{8-\sqrt{559}}{9} \end{cases}$$

Từ đó suy ra diện tích miền tô đậm là $S = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8+\sqrt{559}}{9}} \left(\frac{7}{27}(x+1)(x-2) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \right) dx \approx 5,7$.

Câu 43: Cho hàm số $y = 4x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) và đường thẳng d đi qua gốc tọa độ tạo thành hai miền hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên dưới:



Khi $S_2 = 12$ thì S_1 bằng

A. $\frac{7}{2}$.

B. 3.

C. $\frac{875}{256}$.

D. $\frac{865}{256}$.

Lời giải:

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = mx$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đồ thị (C) và đường thẳng d là

$$4x^3 - 3x^2 = mx \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3x - m = 0 \end{cases}$$

Gọi b là nghiệm dương của phương trình hoành độ giao điểm trên $\Rightarrow 4b^2 - 3b = m$

$$S_2 = \int_0^b (mx - 4x^3 + 3x^2) dx = \left(\frac{1}{2}mx^2 - x^4 + x^3 \right) \Big|_0^b = \frac{1}{2}mb^2 - b^4 + b^3$$

$$\text{Theo giả thiết } S_2 = 12 \Rightarrow \frac{1}{2}mb^2 - b^4 + b^3 = 12$$

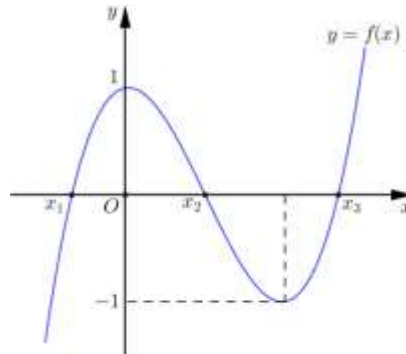
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(4b^2 - 3b)b^2 - b^4 + b^3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 2b^4 - b^3 - 24 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ vì } b > 0 \Rightarrow m = 10$$

$$\text{Khi đó phương trình } 4x^2 - 3x - m = 0 \text{ trở thành } 4x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_1 = \int_{-\frac{5}{4}}^0 (4x^3 - 3x^2 - 10x) dx = \frac{875}{256}.$$

Câu 44: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $x_3 - x_1 = 2\sqrt{3}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục Ox là S , diện tích S_1 của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) + 1$, $y = -f(x) - 1$, $x = x_1$ và $x = x_3$ bằng

A. $4\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $2S + 4\sqrt{3}$.

D. $S + 2\sqrt{3}$.

Lời giải:

Do đồ thị hàm bậc ba cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên đồ thị nhận điểm $A(x_2; 0)$ làm tâm đối xứng của đồ thị.

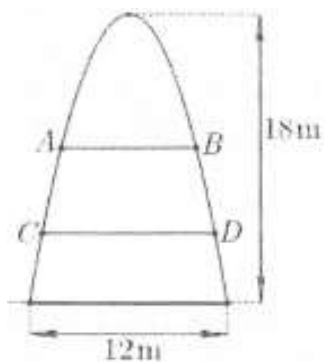
$$\text{Do đó: } \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = \frac{S}{2} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_2}^{x_3} -f(x) dx = \frac{S}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{S}{2}; \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = -\frac{S}{2}.$$

Vì đồ thị hai hàm số $y = f(x) + 1$ và $y = -f(x) - 1$ đối xứng với nhau qua trục hoành nên ta có:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_{x_1}^{x_3} |f(x) + 1| dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} [f(x) + 1] dx + 2 \int_{x_2}^{x_3} [-f(x) - 1] dx \\ &= 2 \left[\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right] + 2 \int_{x_1}^{x_3} dx = 2 \left(\frac{S}{2} - \frac{S}{2} \right) + 2(x_3 - x_1) = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 45: Một miếng đất dạng hình parabol chiều dài 18m, chiều rộng 12m. Người ta chia miếng đất bằng 2 đoạn thẳng song song AB, CD thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên dưới). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng:



A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

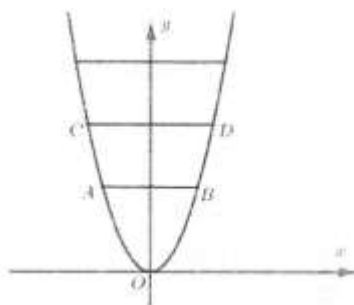
B. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Parabol có dạng $y = ax^2$, do (P) đi qua điểm $(6;18) \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Diện tích miếng đất là: $S = \int_{-6}^6 \left(18 - \frac{x^2}{2}\right) dx = 144$.

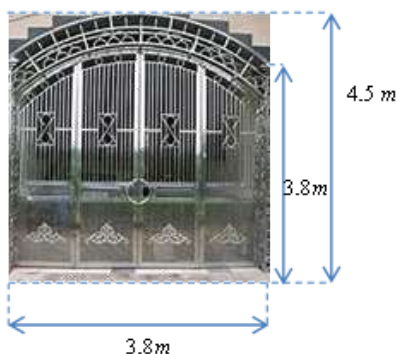
Để diện tích 3 phần bằng nhau thì diện tích mỗi phần là $\frac{S}{3} = 48$. Với $b, d > 0$

Gọi $B\left(b; \frac{b^2}{2}\right); D\left(d; \frac{d^2}{2}\right)$ khi đó $\frac{AB}{CD} = \frac{b}{d}$,

Ta có: $\int_0^b \left(\frac{b^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 24 \Leftrightarrow \left(\frac{b^2x}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \Big|_0^b = 24 \Rightarrow b^3 = 72$

Tương tự ta có $\int_0^d \left(\frac{d^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 48 \Rightarrow d^3 = 144 \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

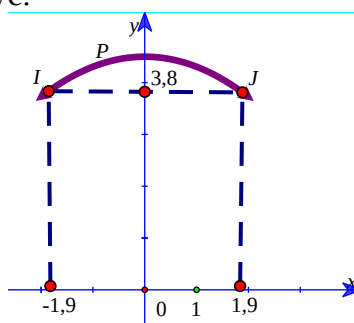
Câu 46: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol, chất liệu làm là inox. Giá $1m^2$ vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



- A. 13.050.000 đồng. B. 36.630.000 đồng. C. 19.520.000 đồng. **D. 21.077.330 đồng.**

Lời giải:

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $I\left(-\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$, $J\left(\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$.

Đường cong phía trên là một Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + b$, với $a; b \in \mathbb{R}$.

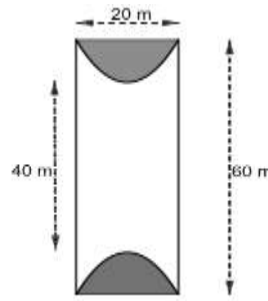
Do Parabol đi qua các điểm I, J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2}m$ nên có $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -\frac{19}{10}$; $x = \frac{19}{10}$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} \left(-\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1216}{75}.$$

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là: $\frac{1216}{75} \times 1.300.000 \approx 21.077.330$ (đồng).

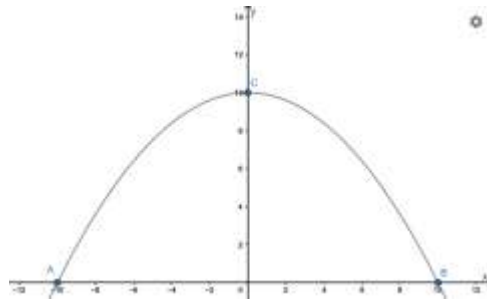
Câu 47: Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài $60m$, chiều rộng $20m$. Người ta muốn trồng cỏ ở hai đầu của mảnh đất hai hình bằng nhau giới hạn bởi hai đường Parabol có hai đỉnh cách nhau $40m$ (như hình vẽ).



Phần còn lại của mảnh đất người ta lát gạch với chi phí là $200.000 \text{ đ}/\text{m}^2$. Tính tổng số tiền để lát gạch (làm tròn đến hàng nghìn)

A. 133.334.000 đồng. B. 213.334.000 đồng. C. 53.334.000 đồng. **D. 186.667.000 đồng.**

Lời giải:



Ta có diện tích mảnh đất hình chữ nhật trên là. $S = 60.20 = 1200 \text{ (m}^2\text{)}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy , như hình vẽ thỏa mãn. $A(-10;0); B(10;0); C(0;10)$.

Phương trình P có dạng. $y = ax^2 + b.x + c$ (1). Do P đi qua các điểm D, C, I nên tọa độ các điểm $A(-10;0); B(10;0); C(0;10)$ thỏa mãn phương trình 1 nên ta có hệ phương trình.

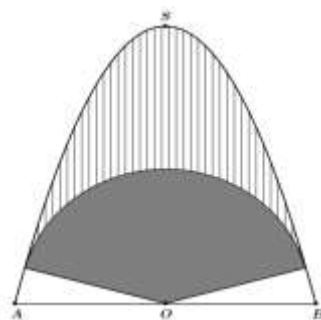
$$\begin{cases} 100a - 10b + c = 0 \\ 100a + 10b + c = 0 \\ c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{10} \\ b = 0 \\ c = 10 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình } P \text{ . } y = \frac{-1}{10}x^2 + 10 \text{ (1)}$$

Diện tích trống cỏ ở hai đầu là

$$S = 2 \cdot \int_{-10}^{10} \left| \frac{-1}{10}x^2 + 10 \right| dx = 2 \cdot \int_{-10}^{10} \left(\frac{-1}{10}x^2 + 10 \right) dx = 2 \cdot \left(\frac{-x^3}{30} + 10x \right) \Bigg|_{-10}^{10} = \frac{400}{3} - \left(\frac{-400}{3} \right) = \frac{800}{3} \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy tổng số tiền để lát gạch là. $T = \left(1200 - \frac{800}{3} \right) \cdot 200.000 = 186.666.667 \text{ (đồng)}$.

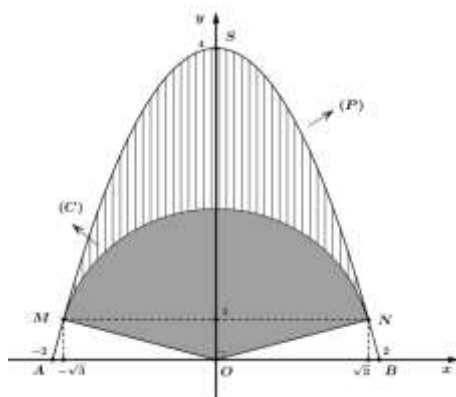
Câu 48: Trên bức tường cần trang trí một hình phẳng dạng parabol đỉnh S như hình vẽ, biết $OS = AB = 4 \text{ m}$, O là trung điểm của AB . Parabol trên được chia thành ba phần để sơn ba màu khác nhau với mức chi phí: phần trên là phần kẻ sọc $140000 \text{ đồng}/\text{m}^2$, phần giữa là hình quạt tâm O , bán kính 2 m được tô đậm $150000 \text{ đồng}/\text{m}^2$, phần còn lại $160000 \text{ đồng}/\text{m}^2$.



Tổng chi phí để sơn cả 3 phần gần nhất với số nào sau đây?

- A. 1.597.000 đồng. B. 1.625.000 đồng. C. 1.575.000 đồng. D. 1.600.000 đồng.

Lời giải:



Dựng hệ trục Oxy như hình vẽ.

Gọi parabol (P) có phương trình: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Khi đó (P) đi qua các điểm $S(0,4)$, $A(-2;0)$ và $B(2;0)$.

$$\text{Suy ra ta có } \begin{cases} c = 4 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}. \text{ Vậy parabol } (P): y = -x^2 + 4.$$

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $OA = 2$.

Khi đó phương trình (C) là: $x^2 + y^2 = 4$. Suy ra phương trình nửa đường tròn là $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Gọi M , N là giao điểm của (C) và (P) .

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) ta có:

$$\sqrt{4 - x^2} = -x^2 + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 \geq 0 \\ \sqrt{4 - x^2} = (-x^2 + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 \geq 0 \\ \sqrt{4 - x^2} = 0 \\ \sqrt{4 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 \geq 0 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Suy ra điểm $M(-\sqrt{3};1)$ và điểm $N(\sqrt{3};1)$.

Phương trình đường thẳng ON là: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

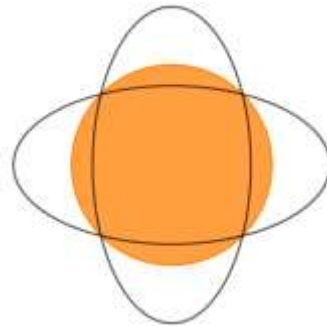
Chi phí sơn phần kẻ sọc là: $T_1 = \left[2 \int_0^{\sqrt{3}} (-x^2 + 4 - \sqrt{4-x^2}) dx \right] .140000$.

Chi phí sơn phần hình quạt là: $T_2 = \left[2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} x \right) dx \right] .150000$.

Chi phí sơn phần còn lại là: $T_3 = \left[2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} x dx + 2 \int_{\sqrt{3}}^2 (-x^2 + 4) dx \right] .160000$.

Vậy tổng chi phí sơn là: $T = T_1 + T_2 + T_3 \approx 1575349,5$ đồng.

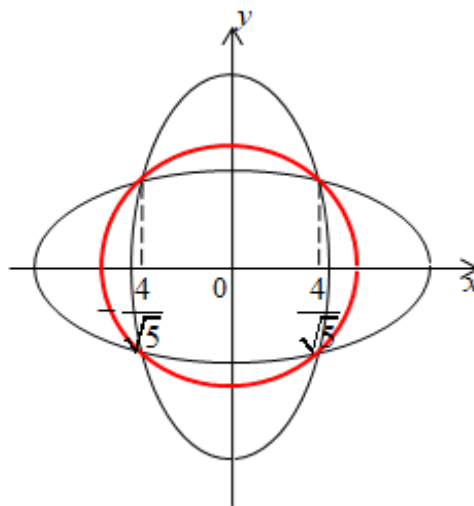
Câu 49: Hướng tới kỉ niệm ngày thành lập trường Đoàn TNCS Hồ Chí Minh. Khối 12 thiết kế bồn hoa gồm hai Elip bằng nhau có độ dài trục lớn bằng $8m$ và độ dài trục nhỏ bằng $4m$ đặt chồng lên nhau sao cho trục lớn của Elip này trùng với trục nhỏ của Elip kia và ngược lại (như hình vẽ).



Phần diện tích nằm trong đường tròn đi qua 4 giao điểm của hai Elip dùng để trồng cỏ, phần diện tích bốn cánh hoa nằm giữa hình tròn và Elip dùng để trồng hoa. Biết kinh phí để trồng hoa là $150.000 \text{ đồng}/m^2$, kinh phí để trồng cỏ là $100.000 \text{ đồng}/m^2$. Tổng số tiền dùng để trồng hoa và trồng cỏ cho bồn hoa gần với số nào nhất trong các số sau?

A. 4.100.000 đồng. **B.** 4.550.000 đồng. **C.** 3.100.000 đồng. **D.** 4.300.000 đồng.

Lời giải:



Chọn hệ trục Oxy như hình

Ta có: $\begin{cases} 2a=8 \\ 2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$

Gọi (E_1) là elip nhận Ox làm trục lớn $\Rightarrow (E_1): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Và (E_2) là elip nhận Oy làm trục lớn $\Rightarrow (E_2): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

Tọa độ giao điểm của (E_1) và (E_2) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{16}{5} \\ y^2 = \frac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \\ y = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình đường tròn đi qua 4 giao điểm của}$$

(E_1) và (E_2) là $(C): x^2 + y^2 = \frac{32}{5}$ có bán kính $R = 4\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$ Diện tích hình tròn dùng để trồng

cỏ: $S_1 = \pi R^2 = \frac{32}{5} \pi (m^2) \Rightarrow$ Tiền trồng cỏ: $T_1 = 100\,000 \cdot S_1 \approx 2\,010\,619$ (đồng)

Một cánh hoa được giới hạn bởi đường (E_2) có phần đồ thị từ phía trên trục

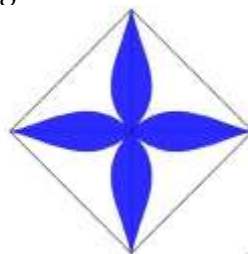
$Ox: y = 2\sqrt{4-x^2}$ và nửa đường tròn (C) từ phía trên trục $Ox: y = \sqrt{\frac{32}{5}-x^2}$ có diện tích

$$S = \int_{-\frac{4}{\sqrt{5}}}^{\frac{4}{\sqrt{5}}} \left(2\sqrt{4-x^2} - \sqrt{\frac{32}{5}-x^2} \right) dx \approx 3.83064(m^2)$$

Do tính đối xứng của hình nên diện tích của 4 cánh hoa đều bằng nhau $\Rightarrow$ diện tích của 4 cánh hoa: $S_2 = 4 \cdot S = 15.32256(m^2) \Rightarrow$ Số tiền trồng hoa $T_2 = 150\,000 \cdot S_2 = 2\,298\,384$ (đồng).

Tổng số tiền: $T = T_1 + T_2 \approx 4\,309\,000$ (đồng)

Câu 50: Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo.



Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập $2/3$, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $a + b$.

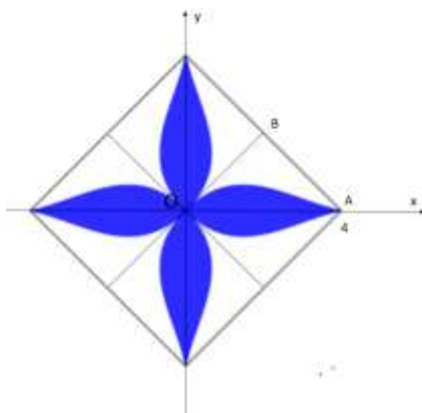
A. $\frac{41}{80}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $\frac{9}{10}$.

Lời giải:



Xét hệ trục toạ độ như hình vẽ, diện tích tam giác OAB vuông cân tại B .

Theo giả thiết ta có $OA = 4$, $A(4;0)$. Hình vuông có nửa đường chéo bằng 4 nên diện tích hình vuông là 32. Diện tích tô màu là $\frac{64}{5}$.

Xét riêng trong tam giác OAB có diện tích phần tô màu bằng $\frac{8}{5}$.

Theo giả thiết, diện tích phần tô màu trong tám giác OAB được tính bởi công thức

$$\int_0^4 |ax^3 + bx^2 - x| dx = \frac{8}{5}.$$

$$\text{Từ đó ta có hệ: } \begin{cases} \int_0^4 |ax^3 + bx^2 - x| dx = \frac{8}{5} \\ 64a + 16b - 4 = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{21}{20} \\ a = -\frac{1}{20} \\ b = \frac{9}{20} \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp } \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{21}{20} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm là } 0, \frac{5}{4}, 4 \text{ (đồ thị cắt Ox trong } (0;4) \text{ - loại)}$$

$$\text{Trường hợp } \begin{cases} a = -\frac{1}{20} \\ b = \frac{9}{20} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm } 0, 4, 5 \text{ thoả mãn. Vậy, } a + b = \frac{2}{5}.$$

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023