

TRUNG TÂM LTĐH THD

TÀI LIỆU LTĐH

NĂM 2018

Tổng ôn Vận dụng - Vận dụng cao THPTQG 2018

Người biên soạn:

Lục Trí Tuyên

Dành cho:

Thành viên estudy.edu.vn

Ngày 29 tháng 4 năm 2018



Mục lục

1	Tổng ôn Vận dụng- Vận dụng cao	3
1	Vận dụng cao lớp 11	3
2	Vận dụng cao lớp 12	7
3	Đáp án	20
2	Hướng dẫn giải chi tiết	21

Giới thiệu

Tài liệu này sử dụng một số kết quả trong:

<https://estudy.edu.vn/docrepo/bai-toan-gia-tri-lon-nhat-cua-ham-co-tha-cyb6yivudrl5y>

<https://estudy.edu.vn/docrepo/bai-toan-chia-keo-euler-va-ung-dung-ey6pyl73gwxxi>

<https://estudy.edu.vn/course/lesson/tich-phan-ham-an-ttop7vcwiqtsf3ixj2krfdmvsx>

Vì vậy, các bạn đọc tham khảo thêm các chuyên đề này để hiểu rõ hơn về phương pháp giải tổng quát.

Xin cảm ơn!

Chương 1

Tổng ôn Vận dụng- Vận dụng cao

1. Vận dụng cao lớp 11

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{3 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4 \cos^2 x + 1} \leq m + 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- (A) $m \geq \frac{3\sqrt{5}}{4}$. (B) $m \geq \frac{3\sqrt{5}+9}{4}$. (C) $m \geq \frac{\sqrt{65}-9}{2}$. (D) $m \geq \frac{\sqrt{65}-9}{4}$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị của α trong $[0; 2\pi]$ để ba phần tử của $S = \{\sin \alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T = \{\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 3. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\ln(m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)) = \sin x$ có nghiệm?

- (A) 3. (B) 4. (C) 5. (D) 6.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m + \sin(m + \sin 3x) = \sin(3 \sin x) + 4 \sin^3 x$ có nghiệm thực?

- (A) 9. (B) 5. (C) 4. (D) 8.

Câu 5. Cho phương trình: $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ khi:

- (A) $m > -1$. (B) $m \geq -1$. (C) $-1 \leq m \leq 1$. (D) $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$.

Câu 6. Xét bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

- (A) 72. (B) 90. (C) 80. (D) 144.

Câu 7. Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con của A có 8 phần tử nhiều gấp 26 lần số tập con của A có 4 phần tử. Hãy tìm $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là nhiều nhất.

- (A) $k = 20$. (B) $k = 11$. (C) $k = 14$. (D) $k = 10$.

Câu 8. Một khối lập phương có độ dài cạnh là 2cm được chia thành 8 khối lập phương cạnh 1cm. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các đỉnh của khối lập phương cạnh 1cm.

- (A) 2876. (B) 2898. (C) 2915. (D) 2012.

Câu 9. Trung tâm bồi dưỡng kiến thức và luyện thi Địa học muốn trao tặng hết 500 cuốn sách giống nhau **Đột phá tư duy giải nhanh trắc nghiệm Giải tích 12** của tác giả **Lục Trí Tuyên** cho 3 trường THPT ở huyện Mù Cang Chải (thuộc Yên Bái) sao cho mỗi trường đều được ít nhất 100 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách trao tặng sách theo số lượng thỏa mãn yêu cầu trên?

- (A) 20503. (B) 20301. (C) 1373701. (D) 83436.

Câu 10. Cho khối lập phương $3 \times 3 \times 3$ gồm 27 khối lập phương đơn vị. Một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của khối lập phương lớn tại trung điểm của nó. Mặt phẳng này cắt ngang (không đi qua đỉnh) bao nhiêu khối lập phương đơn vị?

- (A) 10. (B) 23. (C) 18. (D) 19.

Câu 11. Cho đa giác đều 20 cạnh nội tiếp trong đường tròn (O). Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là ba đỉnh của đa giác và ba cạnh là ba đường chéo của đa giác?

- (A) 800. (B) 702. (C) 600. (D) 912.

Câu 12. Cho 2018-giác đều nội tiếp đường tròn (O). Hỏi có bao nhiêu tam giác tù mà các đỉnh là đỉnh của đa giác này?

- (A) $2018C_{1008}^2$. (B) $C_{2018}^3 - 2018$. (C) C_{1008}^2 . (D) $2018C_{1009}^2$.

Câu 13. Trong mặt phẳng (Oxy) cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0; 10)$; $N(100; 10)$ và $P(100; 0)$. Gọi S là tập hợp tất cả các điểm $A(x; y)$, $x, y \in \mathbb{N}$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của $OMNP$.

Lấy ngẫu nhiên 1 điểm $A(x; y) \in S$. Tính xác suất để $x + y \leq 90$

- (A) $\frac{90}{101}$. (B) $\frac{86}{101}$. (C) $\frac{860}{1111}$. (D) $\frac{900}{1111}$.

Câu 14. Cho đa giác đều 15 đỉnh. Gọi M là tập tất cả các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đều này. Chọn ngẫu nhiên 1 tam giác thuộc M . Tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác cân nhưng không đều.

- (A) $\frac{87}{455}$. (B) $\frac{19}{91}$. (C) $\frac{98}{445}$. (D) $\frac{18}{91}$.

Câu 15. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Rút ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Tính xác suất để rút được số mà trong đó chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

- (A) $\frac{3}{16}$. (B) $\frac{87}{448}$. (C) $\frac{91}{448}$. (D) $\frac{5}{16}$.

Câu 16. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Lấy ngẫu nhiên 3 đỉnh. Tính xác suất để 3 đỉnh đó tạo thành một tam giác vuông không cân.

- (A) $\frac{3}{19}$. (B) $\frac{9}{57}$. (C) $\frac{2}{19}$. (D) $\frac{8}{57}$.

Câu 17. Cho n , ($n \geq 4$) giác đều nội tiếp đường tròn (O). Có bao nhiêu hình thang (không là hình chữ nhật) mà 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đều đã cho?

- (A) 720. (B) 680. (C) 800. (D) 920.

Câu 18. Gọi S là tập tất cả các số có 7 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 59. Lấy ngẫu nhiên một số trong S . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11.

- (A) $\frac{3}{17}$. (B) $\frac{4}{21}$. (C) $\frac{5}{21}$. (D) $\frac{19}{42}$.

Câu 19. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số (các chữ số không nhất thiết khác nhau) và chia hết cho 9.

- (A) 2558. (B) 1601. (C) 1760. (D) 2145.

Câu 20. Sau khi khai triển và rút gọn, biểu thức $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ có bao nhiêu số hạng?

- (A) 27. (B) 28. (C) 29. (D) 32.

Câu 21. Tìm n biết rằng

$$a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + \dots + a_1(x-1) + a_0 = x^n$$

đồng thời $a_1 + a_2 + a_3 = 231$.

- (A) $n = 9$. (B) $n = 10$. (C) $n = 11$. (D) $n = 12$.

Câu 22. Cho khai triển $(1-2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Biết $S = |a_1| + 2|a_2| + \dots + n|a_n| = 34992$, tính giá trị của biểu thức $P = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \dots + 3^na_n$?

- (A) 390625. (B) -78125. (C) -1953125. (D) 9765625.

Câu 23. Cho đa thức: $P(x) = (x+1)^8 + (x+1)^9 + (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + (x+1)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8 .

- (A) 715. (B) 720. (C) 700. (D) 730.

Câu 24. Tìm số tất cả tự nhiên n thỏa mãn $\frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)}$.

- (A) $n = 100$. (B) $n = 98$. (C) $n = 99$. (D) $n = 101$.

Câu 25. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; \dots; 100\}$. Gọi S là tập các tập con của A . Mỗi tập con này gồm 3 phần tử và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân là?

- (A) $\frac{4}{645}$. (B) $\frac{2}{1395}$. (C) $\frac{3}{645}$. (D) $\frac{1}{930}$.

Câu 26. Cho $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và đặt $u_n = \frac{f(1)f(3)\dots f(2n-1)}{f(2)f(4)\dots f(2n)}$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\log_2 u_n + u_n < -\frac{10239}{1024}$?

- (A) $n = 23$. (B) $n = 29$. (C) $n = 33$. (D) $n = 21$.

Câu 27. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện $a_1 = 1$; $5^{a_{n+1}-a_n} - 1 = \frac{3}{3n+2}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất để $a_n \in \mathbb{Z}$?

- (A) $n = 39$. (B) $n = 41$. (C) $n = 49$. (D) $n = 123$.

Câu 28. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ 2018u_{n+1} = u_n^2 + 2017u_n \end{cases}$. Tìm giới hạn của dãy số $S_n = \frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}$?

- (A) $\lim S_n = \frac{1}{2018}$. (B) $\lim S_n = 2018$. (C) $\lim S_n = \frac{2017}{2018}$. (D) $\lim S_n = 1$.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 5; u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + 2^n + 2 \cdot 3^n$ với mọi $n \geq 1$. Tìm số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $u_n^n - 2^n > 5^{100}$.

- (A) 146. (B) 233. (C) 232. (D) 147.

Câu 30. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2} \end{cases}$ và $S = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2018}^2 + 2018$. Khi đó S có bao nhiêu chữ số?

- (A) 963. (B) 962. (C) 607. (D) 608.

Câu 31. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng của 100 số hạng đầu tiên 24850. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{48} u_{49}} + \frac{1}{u_{49} u_{50}}$?

- (A) $S = 123$. (B) $S = \frac{4}{23}$. (C) $S = \frac{9}{246}$. (D) $S = \frac{49}{246}$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$. Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$?

- (A) $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. (B) $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. (C) $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. (D) $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Xét điểm A_1 có hoành độ $x_1 = 1$ thuộc (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_2 \neq A_1$ có hoành độ x_2 . Tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại điểm thứ hai $A_3 \neq A_2$ có hoành độ x_3 . Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của (C) tại A_{n-1} cắt (C) tại điểm thứ hai $A_n \neq A_{n-1}$ có hoành độ x_n . Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $x_n > 5^{100}$.

- (A) 235. (B) 234. (C) 118. (D) 117.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác ABC ta lấy một điểm O bất kỳ. Từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng $(SBC), (SCA), (SAB)$ theo thứ tự tại A', B', C' . Khi đó tổng tỉ số $T = \frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

- (A) $T = 3$. (B) $T = \frac{3}{4}$. (C) $T = 1$. (D) $T = \frac{1}{3}$.

Câu 35. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3, CD = 4, \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) ?

- (A) $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. (B) $\frac{\sqrt{43}}{86}$. (C) $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. (D) $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

2. Vận dụng cao lớp 12

Câu 36. Phương trình $e^x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \dots - \frac{1}{x-2018} - 2018 = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

- (A) 1. (B) 0. (C) 2018. (D) 2019.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m + 2$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m < 2018$ sao cho với mọi bộ ba số thực $a, b, c \in [-1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn.

- (A) 1989. (B) 1969. (C) 1997. (D) 2008.

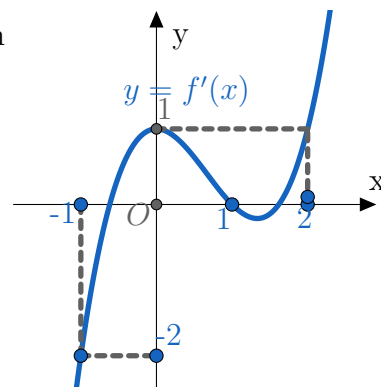
Câu 38. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị?

- (A) $(-\infty; \frac{1}{4})$. (B) $[0; \frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$. (C) $(-\infty; 0]$. (D) $(1; +\infty)$.

Câu 39.

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

- (A) $x = 1$. (B) $x = -1$. (C) $x = 0$. (D) $x = 2$.



Câu 40. Với giá trị thực dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ có các điểm cực trị A và B sao cho tam giác $\triangle OAB$ có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $1 < m < 2$. (B) $2 < m < \frac{7}{2}$. (C) $3 < m < 4$. (D) $m < 1$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+4)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = f(x^2)$ có đúng 1 điểm cực trị?

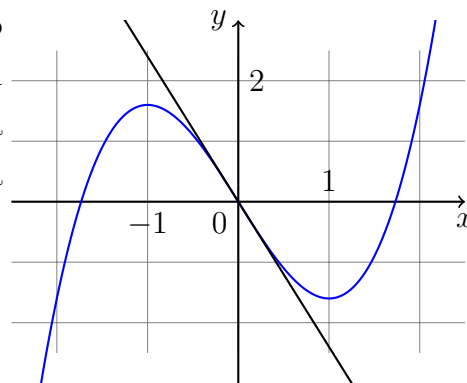
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 42. Xét các số thực với $a \neq 0, b > 0$ sao cho phương trình $ax^3 - x^2 + b = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức a^2b bằng:

- (A) $\frac{4}{27}$. (B) $\frac{15}{4}$. (C) $\frac{27}{4}$. (D) $\frac{4}{15}$.

Câu 43.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đường thẳng trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại gốc tọa độ. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f'(x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- (A) $m < -2$. (B) $-2 < m < 0$.
(C) $0 < m < 2$. (D) $m > 2$.

Câu 44. Giả sử k là số thực lớn nhất sao cho bất đẳng thức $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2}$ đúng với $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Khi đó giá trị của k là

- (A) 5. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có điều kiện $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$ bằng:

- (A) $c + 8a$. (B) $c - \frac{7a}{16}$. (C) $c + \frac{9a}{16}$. (D) $c - a$.

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m| + 4x$ bằng -1 ?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 47. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên $[1; e^2]$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

- (A) $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2} - 1}{4}$. (C) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. (D) $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$.

Câu 48. Biết rằng tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3$ có hệ số góc nhỏ nhất tại tiếp điểm có hoành độ $x = -1$ đồng thời a, b, c là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất của tung độ của giao điểm đồ thị hàm số với trục tung?

- (A) 27. (B) 3. (C) 9. (D) 18.

Câu 49. Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $2^x + 4^y + 8^z = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$.

- (A) $\frac{1}{12}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $1 - \log_4 3$.

Câu 50. Cho các số thực $a, b, c \in [2; 3]$. Biết giá trị lớn nhất của $S = 4^a + 4^b + 4^c - \frac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $P = m + 2n$.

- (A) $P = 257$. (B) $P = 258$. (C) $P = 17$. (D) $P = 18$.

Câu 51. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^2 + mx + 1|$ trên $[-1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1?

- (A) 1. (B) 32. (C) 6. (D) 4.

Câu 52. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A \in (C)$. Tiếp tuyến với (C) tại A tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất là bao nhiêu?

- (A) $2 + 2\sqrt{2}$. (B) $4 - 2\sqrt{2}$. (C) $3 - \sqrt{2}$. (D) $4 + 2\sqrt{2}$.

Câu 53. Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$?

- (A) 0. (B) 8. (C) 4. (D) 12.

Câu 54. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = |x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7|$$

trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 15.

- (A) $m \geq -2$. (B) $m \leq 2$. (C) $0 \leq m \leq 2$. (D) $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 56. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; 5]$ thỏa mãn $f(1) = a + 1$; $f(2) = -a$; $f(3) = -a - 2$; $f(4) = 2a + 5$ và $f(5) = 1 - a^2$ (a là tham số). Biết rằng hàm số $f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$ và $(4; 5)$. Tìm tất cả các giá trị của a để $\min_{[1; 5]} f(x) \leq -3$.

- (A) $a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \setminus \{-\frac{7}{3}\}$. (B) $a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.
(C) $a \in [-2; 1]$. (D) $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Câu 57. Gọi k, e là số thực để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - kx - e|$ trên đoạn $[-1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $k + e$?

- (A) -1. (B) 1. (C) -3. (D) 3.

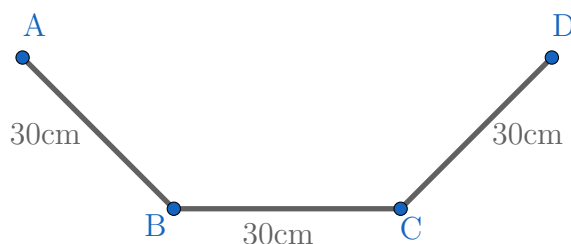
Câu 58. Cho hàm số $y = |8x^4 + ax^2 + b|$ trong đó a, b là các tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 1]$ bằng 1. Tính $T = a + b$.

- (A) -9. (B) -7. (C) 8. (D) 6.

Câu 59. Từ một tấm tôn có kích thước $90cm \times 3m$, người ta làm một máng xối nước trong đó mặt cắt là hình thang $ABCD$ có hình dưới.

Tính thể tích lớn nhất của máng xối.

- (A) $40500\sqrt{6}cm^3$. (B) $40500\sqrt{5}cm^3$.
(C) $202500\sqrt{3}cm^3$. (D) $40500\sqrt{2}cm^3$.



Câu 60. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		3			
	$-\infty$			-1			$-\infty$	

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào?

- (A) $(-2; 0)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(-\infty; -2)$.

Câu 61. Cho phương trình $8^x - m2^{2x+1} + (2m^2 - 1)2^x + m - m^3 = 0$. Biết tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình có ba nghiệm phân biệt là $(a; b)$. Tính $S = ab$?

- (A) $S = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (B) $S = \frac{4}{3}$. (C) $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 62. Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3\log_b x - 1 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1 \cdot x_2$.

- (A) $\frac{16875}{16}$. (B) $\frac{4000}{27}$. (C) 15625. (D) 3456.

Câu 63. Cho ba số thực a, b, c thay đổi lớn hơn 1 thỏa mãn $a + b + c = 100$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (1 + 2\log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 1 = 0$. Tính $S = a + 2b + 3c$ khi $x_1 \cdot x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

- (A) $S = \frac{500}{3}$. (B) $S = \frac{700}{3}$. (C) $S = \frac{650}{3}$. (D) $S = 200$.

Câu 64. Biết rằng khi m, n là các số dương khác 1, thay đổi thỏa mãn $m + n = 2017$ thì phương trình $8\log_m x \cdot \log_n x - 7\log_m x - 6\log_n x - 2017 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1 x_2)$ là $\frac{3}{4} \ln\left(\frac{c}{13}\right) + \frac{7}{8} \ln\left(\frac{d}{13}\right)$ với c, d là các số nguyên dương. Tính $S = 2c + 3d$.

- (A) $S = 2017$. (B) $S = 66561$. (C) $S = 64544$. (D) $S = 26221$.

Câu 65. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $4^a - 2^{a+1} + 2(2^a - 1)\sin(2^a + b - 1) + 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b$.

- (A) $\frac{\pi}{2} - 1$. (B) $\frac{\pi}{2}$. (C) $\pi - 1$. (D) $\frac{3\pi}{2} - 1$.

Câu 66. Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2} - 1 = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

- (A) 4. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $3\sqrt[3]{4}$. (D) $\sqrt[3]{2}$.

Câu 67. Cho các số nguyên dương $a, b > 1$. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$.

- (A) 12. (B) 46. (C) 44. (D) 22.

Câu 68. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a.4^x - b.2^x + 50 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $9^x - b.3^x + 50a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_3 + x_4 > x_1 + x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$.

- (A) 49. (B) 51. (C) 81. (D) 78.

Câu 69. Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = mn + 9a$.

- (A) $\frac{279}{4}$. (B) 90. (C) $\frac{81}{4}$. (D) $\frac{45}{2}$.

Câu 70. Cho hai số thực dương a, b lớn hơn 1 và biết phương trình $a^{x^2}b^{x+1} = 1$ có nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_a(ab) + \frac{4}{\log_a b}$.

- (A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 10.

Câu 71. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2^2 a - 2\log_2 a + 2 + 2(\log_2 a - 1)\sin(\log_2 a + b) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 2a + 3b$.

- (A) $\frac{3\pi}{2} - 1$. (B) $\frac{3\pi}{2} - 2$. (C) $\pi - 1$. (D) $\frac{9\pi}{2} + 2$.

Câu 72. Cho các số thực $a, b > 1$ và phương trình $\log_a(ax)\log_b(bx) = 2018$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (4a^2 + 9b^2)(36x_1^2x_2^2 + 1)$.

- (A) 144. (B) 72. (C) 36. (D) 288.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \log_3 \frac{m^2x}{1-x}$, $x \in (0; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $f(a) + f(b) = 3$ với mọi số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $e^{a+b} \leq e(a+b)$. Tính tích các phần tử của S .

- (A) 27. (B) $3\sqrt{3}$. (C) $-3\sqrt{3}$. (D) -27.

Câu 74. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b\ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính $a^2 + b^2$?

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{13}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{9}{2}$.

Câu 75. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $\int_{-1}^1 f^2(x) dx \leq 2$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$?

- (A) $-\frac{4\sqrt{5}}{15}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{\sqrt{5}}{15}$. (D) -1.

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 1; f'(0) = 2018$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = -2018$. (B) $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = 2018$.
(C) $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = 1$. (D) $\int_0^1 f''(x)(1-x) dx = -1$.

Câu 77. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $3f(x) + xf'(x) \geq x^{2018}$ với mọi $x \in [0; 1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{2021 \times 2022}$. (B) $\frac{1}{2018 \times 2021}$. (C) $\frac{1}{2018 \times 2019}$. (D) $\frac{1}{2019 \times 2021}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{11}$

và $\int_0^1 x^4 f(x) dx = -\frac{1}{55}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{-1}{7}$. (B) $\frac{1}{7}$. (C) $\frac{-1}{55}$. (D) $\frac{1}{11}$.

Câu 79. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$

và $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{1 - 2 \ln 2}{2}$. (B) $\frac{3 - 2 \ln 2}{2}$. (C) $\frac{3 - 4 \ln 2}{2}$. (D) $\frac{1 - \ln 2}{2}$.

Câu 80. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ đồng thời ta

đặt $g(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt$. Biết $g(x) \leq \sqrt{f(x)}$ với mọi $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\frac{3}{8}$.

Câu 81. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời ta

đặt $g(x) = 1 + 3 \int_0^x f(t) dt$. Biết $g(x) \geq f^2(x)$ với mọi $x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)} dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{7}{4}$. (D) $\frac{9}{5}$.

Câu 82. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị dương và liên tục trên khoảng $(0; 1)$ đồng thời có

một nguyên hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$. Đặt $g(x) = 1 + \int_0^{x^2} f(t) dt$. Biết $g(x) \geq 2xf(x^2)$ với mọi

$x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 g(x) dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

- (A) $e - 1$. (B) 2 . (C) $e + 1$. (D) $\frac{e + 1}{2}$.

Câu 83. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^5 + 4x + 3) = 2x + 1$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_{-2}^8 f(x) dx$ bằng:

- (A) 10 . (B) $\frac{32}{3}$. (C) 72 . (D) 2 .

Câu 84. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx \neq 0$. Giá trị của biểu thức $\frac{ef'(1) - f'(0)}{ef(1) - f(0)}$ bằng:

(A) -2.

(B) -1.

(C) 2.

(D) 1.

Câu 85. Cho hàm số $y = f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời ta đặt $g(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) dt$. Biết $g(x) \geq [f(x)]^3$ với mọi $x \in [0; 1]$. Tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{[g(x)]^2} dx$ có giá trị lớn nhất bằng:

(A) $\frac{5}{3}$.

(B) 4.

(C) $\frac{4}{3}$.

(D) 5.

Câu 86. Cho hàm số f có đạo hàm liên tục trên $[1; 8]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện: $\int_1^2 [f(x^3)]^2 dx +$

$2 \int_1^2 f(x^3) dx = \frac{2}{3} \int_1^8 f(x) dx - \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx$. Tích phân $\int_1^2 [f'(x)]^3 dx$ bằng:

(A) $\frac{8 \ln 2}{27}$.

(B) $\frac{\ln 2}{27}$.

(C) $\frac{4}{3}$.

(D) $\frac{5}{4}$.

Câu 87.

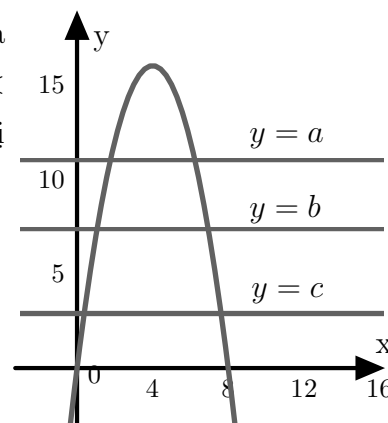
Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = 8x - x^2$ và trục hoành. Các đường thẳng $y = a, y = b, y = c$ với $0 < a < b < c < 16$ chia (H) thành bốn phần có diện tích bằng nhau. Giá trị của biểu thức $(16 - a)^3 + (16 - b)^3 + (16 - c)^3$ bằng:

(A) 2048.

(B) 3584.

(C) 2816.

(D) 3480.



Câu 88.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Khi đó giá trị của biểu thức $\int_0^4 f'(x-2) dx +$

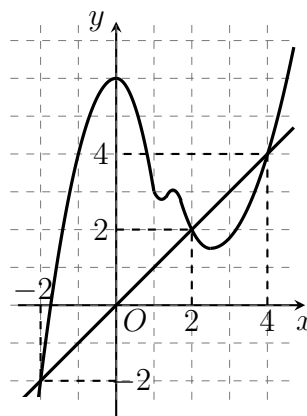
$\int_0^2 f'(x+2) dx$ bằng bao nhiêu:

(A) 10.

(B) -2.

(C) 2.

(D) 6.



Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 1$ và $3 \int_0^1 \left[f'(x) f^2(x) + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$. Tính tích phân $\int_0^1 f^3(x) dx$?

(A) $\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{5}{4}$.

(C) $\frac{5}{6}$.

(D) $\frac{7}{6}$.

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và dương trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = 1$ đồng thời $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 1}$. Tính $T = f(2\sqrt{2}) - 2f(1)$?

(A) $3 - 2\sqrt{2}$.

(B) 2.

(C) 4.

(D) $4 - 2\sqrt{3}$.

Câu 91. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = 2$ và $21(x^2 - 1)^2 - 12(x - 1)^2 - 12xf(x) = [f'(x)]^2 \forall x \in [0; 1]$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{4}{3}$.

(C) -2.

(D) $-\frac{5}{4}$.

Câu 92. Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

(A) 8.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 6.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và không âm trên $[1; 4]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2$ đồng thời $f(1) = \frac{3}{2}$. Tính $\int_1^4 f(x) dx$.

(A) $\frac{1186}{45}$.

(B) $\frac{2507}{90}$.

(C) $\frac{848}{45}$.

(D) $\frac{1831}{90}$.

Câu 94. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = 0, f(1) = 1$ và $\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx = \frac{1}{e - 1}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx = ?$

(A) $\frac{e - 2}{e - 1}$.

(B) $\frac{e - 1}{e - 2}$.

(C) 1.

(D) $\frac{1}{(e - 1)(e - 2)}$.

Câu 95. Cho parabol $(P) : y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Tìm diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB .

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{3}{4}$.

(C) $\frac{3}{4}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 96. Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của module $|z - 2 + 2i|$.

(A) 1.

(B) $\sqrt{5}$.

(C) $\frac{5}{2}$.

(D) $\frac{3}{2}$.

Câu 97. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| = 2\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a|z - 1| + b|\bar{z} + 3 + 4i|$ với a, b là số thực dương.

(A) $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(B) $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

(C) $4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

(D) $a^2 + b^2$.

Câu 98. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số thuần ảo. Khi số phức z có môđun lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

(A) $P = 0$.

(B) $P = 4$.

(C) $P = 2\sqrt{2} + 1$.

(D) $P = 1 + 3\sqrt{2}$.

Câu 99. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = \sqrt{2}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 2 - 5i| + |z - 6 + 3i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- (A) $P = 3$. (B) $P = -3$. (C) $P = 7$. (D) $P = -7$.

Câu 100. Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 2i| = 1$ và $\frac{z_2 - z_1}{1 + i}$ là số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính giá trị của biểu thức $T = M + m$?

- (A) $T = 4$. (B) $T = 4\sqrt{2}$. (C) $T = 3\sqrt{2} + 1$. (D) $T = \sqrt{2} + 3$.

Câu 101. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tính bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

- (A) $R_{\min} = 5$. (B) $R_{\min} = 20$. (C) $R_{\min} = 4$. (D) $R_{\min} = 25$.

Câu 102. Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M' . Số phức $z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N' . Biết rằng $MM'N'N$ là một hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

- (A) $\frac{5}{\sqrt{34}}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 103. Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox .

- (A) 1. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{32}{3}$. (D) $\frac{8}{3}$.

Câu 104. Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0$. Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $\sqrt{3}$. (C) 2. (D) 4.

Câu 105. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của phần thực số phức $w = z^3 + \frac{1}{z^3}$ trong đó $|z| = 1$. Tính $P = M^2 + m^2$?

- (A) 10. (B) 5. (C) 29. (D) 8.

Câu 106. Cho $|2z + 1 - 3i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z - 1| + 3|z + 1 - 2i|$?

- (A) $4\sqrt{2}$. (B) $4\sqrt{3}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 4.

Câu 107. Tính module của số phức $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2017i^{2016}$.

- (A) $|z| = \sqrt{2036164}$. (B) $|z| = \sqrt{2030113}$. (C) $|z| = \sqrt{2034145}$. (D) $|z| = \sqrt{2032130}$.

Câu 108. Cho 3 số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$.

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\frac{8}{3}$. (D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Câu 109. Cho số phức $|z^{2017} - 1| = 1$. Gọi $P = |z|$. Tính $A = 2017 \cdot (\max P) - 2017 \cdot (\min P)$.

- (A) $A = 2017 \cdot \sqrt[2016]{2}$. (B) $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{3}$. (C) $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}$. (D) $A = 2017$.

Câu 110. Xét số phức z thỏa $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\frac{3}{2} < |z| < 2$. (B) $|z| > 2$. (C) $|z| < \frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 111. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.
 (A) $\max P = \frac{13}{4}$. (B) $\max P = \frac{9}{4}$. (C) $\max P = \frac{13}{3}$. (D) $\max P = \frac{11}{3}$.

Câu 112. Có bao nhiêu giá trị của m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z} = 1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$.
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 113. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.
 (A) $P = 4\sqrt{6}$. (B) $P = 2\sqrt{26}$. (C) $P = 5 + 3\sqrt{5}$. (D) $P = 32 + 3\sqrt{2}$.

Câu 114. Cho số phức z có $|z| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 1008 |1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \dots + |1 + z^{2017}|$$

(A) 4032. (B) 2016. (C) 2018. (D) 1008.

Câu 115. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z} = 1$ và $|z - 3 - 4i| = m$. Tính tổng các phần tử thuộc S .
 (A) 10. (B) 42. (C) 52. (D) 40.

Câu 116. Cho biết $\left|z + \frac{4}{z}\right| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z|^2 + |z| + 1$?
 (A) $8 - 3\sqrt{5}$. (B) $6 + \sqrt{5}$. (C) $6 - \sqrt{5}$. (D) $8 + 3\sqrt{5}$.

Câu 117. Cho $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$. Tính $P = M^2 + m^2$?
 (A) $P = 240$. (B) $P = 250$. (C) $P = 270$. (D) $P = 320$.

Câu 118. Cho hai số phức z và w biết chúng thỏa mãn $\left|\frac{(1+i)z}{1-i} + 2\right| = 1$ và $w = iz$. Tìm giá trị lớn nhất của $M = |z - w|$.
 (A) $3\sqrt{3}$. (B) 3. (C) $3\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{3}$.

Câu 119. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1).$$

(A) 1. (B) $\frac{19}{7}$. (C) $\frac{17}{9}$. (D) 2.

Câu 120. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F . Tính thể tích V của khối tứ diện $AECF$.
 (A) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{30}$. (B) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{60}$. (C) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{40}$. (D) $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{15}$.

Câu 121. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất thì tổng $x + y$ bằng:

- (A) $\sqrt{3}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. (C) $\frac{4}{\sqrt{3}}$. (D) $4\sqrt{3}$.

Câu 122. Cho tam diện vuông $OABC$ có bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp lần lượt là R và r . Khi đó tỷ số $\frac{R}{r}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{a + \sqrt{b}}{2}$. Tính $P = a + b$?

- (A) 6. (B) 27. (C) 30. (D) 60.

Câu 123. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + z - 4 = 0$. Có tất cả bao nhiêu mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng (P) và tiếp xúc với ba trục tọa độ $x'Ox, y'Oy, z'Oz$?

- (A) 8. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Câu 124. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết rằng điểm B thuộc mặt cầu (S) , có hoành độ dương và tam giác OAB đều.

- (A) $x - y - 2z = 0$. (B) $x - y - z = 0$. (C) $x - y + z = 0$. (D) $x - y + 2z = 0$.

Câu 125. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; c), C(0; 0; c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. Khi tổng $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $P = a + 2b + 3c$ bằng:

- (A) 45. (B) 35. (C) 38. (D) 42.

Câu 126. Cho mặt cầu $(S) : (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8$ và các điểm $A(3; 0; 0), B(4; 2; 1)$. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 2MB$?

- (A) $4\sqrt{2}$. (B) $6\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 127. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $S(0; 0; 1), M(m; 0; 0), N(0; n; 0)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 1$. (SMN) luôn tiếp xúc với 1 mặt cầu cố định có bán kính là bao nhiêu biết mặt cầu đó đi qua $M(1; 1; 1)$.

- (A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) 1. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 128. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho (P) là mặt phẳng đi qua $M(1; 4; 9)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó (P) đi qua điểm nào trong các đáp án sau?

- (A) $(12; 0; 0)$. (B) $(0; 6; 0)$. (C) $(0; 12; 0)$. (D) $(0; 0; 6)$.

Câu 129. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $H(a; b; c)$ trong đó $ab + bc + ca = -1$. Mặt phẳng (α) qua H và cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm $\triangle ABC$. Mặt cầu tâm O tiếp xúc (α) có bán kính nhỏ nhất là?

- (A) 1. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 130. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1), M(2; 4; 1), N(1; 5; 3)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng $(P) : x + z - 27 = 0$ sao cho tồn tại các điểm B, D tương ứng thuộc các tia AM, AN để tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

- (A) $C(6; -17; 21)$. (B) $C(20; 15; 7)$. (C) $C(6; 21; 21)$. (D) $C(18; -7; 9)$.

Câu 131. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P) : x + y - z - 3 = 0$ và tọa độ hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó?

- (A) $R = 4$. (B) $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$. (C) $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$. (D) $R = 6$.

Câu 132. Trong không gian tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P) : 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$ và điểm $A(2; 11; -5)$. Biết khi m thay đổi tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua A . Tìm tổng bán kính hai mặt cầu đó.

- (A) $7\sqrt{2}$. (B) $15\sqrt{2}$. (C) $5\sqrt{2}$. (D) $12\sqrt{2}$.

Câu 133. Trong không gian hệ tọa độ Oxyz, cho phương trình các mặt phẳng $(P) : x - y + 2z + 1 = 0$ và $(Q) : 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Ox đồng thời cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ tồn tại duy nhất một mặt cầu thỏa mãn điều kiện đã cho.

- (A) $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$. (B) $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. (C) $r = \sqrt{3}$. (D) $r = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 134. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2, 1, 0)$, song song với mặt phẳng $(P) : x - y - z = 0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0, 2, 0)$, $N(4, 0, 0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vector chỉ phương của Δ là?

- (A) $\vec{u}_\Delta = (1, 0, 1)$. (B) $\vec{u}_\Delta = (2, 1, 1)$. (C) $\vec{u}_\Delta = (3, 2, 1)$. (D) $\vec{u}_\Delta = (0, 1, -1)$.

Câu 135. Ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi C là điểm cố định trên Oz , đặt $OC = 1$ hai điểm A, B thay đổi trên Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. (D) $\sqrt{6}$.

Câu 136. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{MA + 2\sqrt{3}}{MB}$ bằng:

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $3\sqrt{3 + \sqrt{78}}$. (C) $\sqrt{54 + 6\sqrt{78}}$. (D) $3\sqrt{3}$.

Câu 137. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3; 4; 5)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M sao cho (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ tới (P) là lớn nhất. Thể tích khối tứ diện $OABC$ là?

- (A) $\frac{6250}{3}$. (B) $\frac{3125}{9}$. (C) $\frac{24}{5}$. (D) $\frac{144}{5}$.

Câu 138. Cho mặt phẳng $(P_{a,b,c}) : bcx + cay + abz - abc = 0$ với $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Gọi $M(x_0, y_0, z_0)$ là điểm cố định của mặt phẳng $(P_{a,b,c})$ khi a, b, c thay đổi. Tính giá trị của biểu thức $E = x_0 + y_0 + z_0$?

- (A) $E = 1$. (B) $E = 3$. (C) $E = \frac{1}{3}$. (D) $E = \frac{1}{2}$.

Câu 139. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng có phương trình lần lượt là $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$, $d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$, $d_3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Biết rằng đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u}(2; a; b)$ cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Giá trị của biểu thức $2a + 3b$ bằng:

- (A) 5. (B) -1. (C) $-\frac{3}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

Câu 140. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1, 0, 1)$, $B(-3, 4, -1)$, $C(2, 2, 3)$. Đường thẳng d đi qua A , cắt các mặt cầu đường kính AB và AC lần lượt tại các điểm M, N không trùng với A sao cho đường gấp khúc $BMNC$ có độ dài lớn nhất có vector chỉ phương là?

- (A) $\vec{u} = (1, 0, 2)$. (B) $\vec{u} = (1, 0, 1)$. (C) $\vec{u} = (1, 0, -1)$. (D) $\vec{u} = (2, 0, -1)$.

Câu 141. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1, 0, 0)$ có hình chiếu trên mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z + 8 = 0$ là d' . Giả sử giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khoảng cách từ điểm $M(2, -3, -1)$ tới d' là α và β . Tính giá trị của $T = \alpha + \beta$?

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 142. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ và $A(0; 4; 0)$.

Gọi M là điểm cách đều d và trục $x'Ox$. Khoảng cách ngắn nhất giữa A và M bằng:

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) $\sqrt{6}$. (D) $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

3. Đáp án

1 D	16 D	31 D	46 B	62 D	77 D	92 D	107 C	122 C	137 B
2 D	17 A	32 A	47 C	63 B	78 A	93 A	108 C	123 C	138 A
3 B	18 B	33 A	48 A	64 B	79 A	94 A	109 C	124 C	139 B
4 A	19 B	34 C	50 D	65 C	80 D	95 A	110 D	125 B	140 B
5 D	20 C	35 A	51 A	66 C	81 C	96 A	111 A	126 D	141 D
6 B	21 C	36 D	52 B	67 B	82 A	97 C	112 C	127 C	142 C
7 D	22 A	37 B	53 A	68 C	83 A	98 B	113 B	128 C	
8 A	23 A	38 C	54 B	69 A	84 D	99 D	114 B	129 C	
9 B	24 B	39 A	55 D	70 C	85 A	100 B	115 A	130 C	
10 D	25 C	40 B	56 A	71 A	86 A	101 B	116 D	131 D	
11 A	26 A	41 B	57 D	72 A	87 B	102 C	117 A	132 D	
12 A	27 B	42 A	58 B	73 C	88 D	103 B	118 C	133 B	
13 B	28 B	43 A	59 C	74 D	89 D	104 A	119 C	134 A	
14 D	29 D	44 C	60 B	75 A	90 A	105 D	120 D	135 A	
15 A	30 A	45 D	61 A	76 A	91 A	106 A	121 C	136 C	

Chương 2

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1. Có $m + 1 \geq f(x) \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m + 1 \geq \max_{\mathbb{R}} f(x)$.

Ta có: $y = f(x) = \frac{3 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 4 \cos^2 x + 1} = \frac{3 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2 \cos 2x + 3}$ và $\sin 2x + 2 \cos 2x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét phương trình $y = \frac{3 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x + 2 \cos 2x + 3} \Leftrightarrow (\sin 2x + 2 \cos 2x + 3)y = 3 \sin 2x + \cos 2x \Leftrightarrow (y - 3) \sin 2x + (2y - 1) \cos 2x = -3y$.

Phương trình trên có nghiệm nên $(y - 3)^2 + (2y - 1)^2 \geq (-3y)^2 \Leftrightarrow 5y^2 - 10y + 10 \geq 9y^2 \Leftrightarrow -4y^2 - 10y + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{65}}{4} \leq y \leq \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}$. Suy ra giá trị lớn nhất của y là $\frac{-5 + \sqrt{65}}{4}$.

Vậy $m \geq \frac{-5 + \sqrt{65}}{4} - 1 = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4}$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 2. Hai tập bằng nhau thì có $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$

$$\Leftrightarrow (2 \cos \alpha + 1) \sin 2\alpha = (2 \cos \alpha + 1) \cos 2\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \tan 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}.$$

Do $\alpha \in [0; 2\pi]$ nên $\alpha = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{13\pi}{8}$.

Với $\alpha = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$ dễ thấy không thỏa mãn do T toàn các số hữu tỷ trong khi S có số vô tỉ.

Ta lại thấy luôn ghép được 3 đôi các cặp $\sin x$ và $\cos y$ ở S và T mà $x + y = 4\alpha$ nên với $\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ thì $x + y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Do đó $\sin x = \cos y$. Vậy hai tập bằng nhau. Do đó có 4 số α thỏa mãn.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 3. Cộng hai vế của phương trình với $m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)$, ta được

$$[m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)] + \ln[m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)] = (m + 3 \sin x) + \ln(m + 3 \sin x) \quad (*)$$

Đặt $a = m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x)$ và $b = m + 3 \sin x$

$$(*) \Leftrightarrow a + \ln a = b + \ln b \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow m + 2 \sin x + \ln(m + 3 \sin x) = m + 3 \sin x \Leftrightarrow \ln(m + 3 \sin x) = \sin x \Leftrightarrow m + 3 \sin x = e^{\sin x} \Leftrightarrow m = e^{\sin x} - 3 \sin x.$$

Xét hàm số $f(t) = e^t - 3t$ với $t \in [-1; 1]$.

Vì $f'(t) = e^t - 3 < 0 \quad \forall t \in [-1; 1]$ nên:
$$\begin{cases} \max_{[-1;1]} (e^{\sin x} - 3 \sin x) = f(-1) = \frac{1}{e} + 3 \\ \min_{[-1;1]} (e^{\sin x} - 3 \sin x) = f(1) = e - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e - 3 \leq m \leq \frac{1}{e} + 3.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 4. Ta có $m + \sin 3x + \sin(m + \sin 3x) = \sin(3 \sin x) + 4 \sin^3 x + \sin 3x$

$$\Leftrightarrow (m + \sin 3x) + \sin(m + \sin 3x) = (3 \sin x) + \sin(3 \sin x)$$

$$\Leftrightarrow f(m + \sin 3x) = f(3 \sin x) \text{ với } f(t) = t + \sin t.$$

Vì $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình tương đương $m + \sin 3x = 3 \sin x \Rightarrow m = 4 \sin^3 x$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m = \pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0$, tức có 9 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 5. Ta có $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) + m(\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = m \text{ (do } \cos x + 1 > 0, \forall x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]).$$

Phương trình $m = \cos 2x, x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ có 2 nghiệm tương đương với phương trình $m = \cos t$ có 2 nghiệm thuộc $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Từ đường tròn lượng giác ta thấy ngay điều kiện trên thỏa mãn $\Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{2}$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 6. Trên mỗi hàng (hoặc mỗi cột) đều phải có 2 số 1 và 2 số -1 .

Dễ thấy, nếu 3 hàng đầu tiên đã được điền số sao cho tổng các số trong mỗi hàng bằng 0 và trong mỗi cột có không quá 2 số bằng nhau thì ta chỉ có 1 cách điền hàng thứ 4. Ta đi tìm số cách điền 3 hàng đầu tiên. Hàng thứ nhất và hàng thứ 2, mỗi hàng có 6 cách điền số mà tổng bằng 0. Trong 6 cách điền số của hàng thứ 2, ta chia làm 3 loại:

Loại 1: Cách điền số hàng thứ 2 trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 0 vị trí: có 1 cách. Khi đó có 6 cách điền số hàng thứ 3.

Loại 2: Cách điền số hàng thứ 2 trùng với cách điền số hàng thứ nhất 4 vị trí: có 1 cách. Khi đó có 1 cách điền dòng thứ 3.

Loại 3: Cách điền số hàng thứ 2 trùng với cách điền số hàng thứ nhất 2 vị trí: có 4 cách. Khi đó, với mỗi cách điền dòng thứ 2, có 2 cách điền dòng thứ 3.

Vậy số cách điền thỏa mãn là: $6.1.6 + 6.1.1 + 6.4.2 = 90$ cách

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 7. Ta có $C_n^8 = 26C_n^4 \Leftrightarrow \frac{n!}{8!(n-8)!} = 26 \frac{n!}{4!(n-4)!} \Leftrightarrow (n-7)(n-6)(n-5)(n-4) = 13.14.15.16 \Leftrightarrow n-7 = 13 \Leftrightarrow n = 20$.

Số tập con gồm k phần tử của A là C_{20}^k nên $k = 10$ thì C_{20}^k nhỏ nhất.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 8.

Có tất cả 27 điểm, chọn 3 điểm trong 27 có $C_{27}^3 = 2925$ bao gồm cả tam giác và những bộ 3 điểm thẳng hàng.

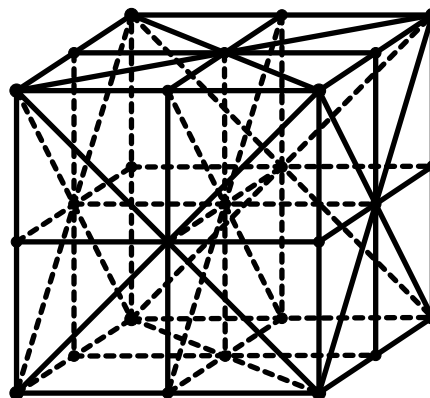
Cứ 2 đỉnh bất kỳ trong 8 đỉnh của hình lập phương 2cm được một bộ 3 điểm thẳng hàng nên có $C_8^2 = 28$ bộ thẳng hàng nối các đỉnh.

Xét hình chữ nhật có đỉnh là 4 trung điểm của 4 cạnh song song của hình lập phương 2cm. Cứ 2 đỉnh bất kỳ được một bộ 3 điểm thẳng hàng qua tâm hình lập phương nên có $C_4^2 = 6$ bộ. Có 3 hình chữ nhật như vậy nên có $3 \cdot 6 = 18$ bộ.

Đoạn nối tâm các mặt đối diện của hình lập phương cũng cho một bộ, có 3 đoạn như vậy.

Vậy có tất cả $2925 - 28 - 18 - 3 = 2876$ tam giác thỏa mãn bài toán.

Ta chọn đáp án **(A)**



Câu 9. Gọi x, y, z lần lượt là số sách được trao về 3 trường, ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 100 \leq x, y, z \end{cases}$$

Có $x + y + z = 500 \Leftrightarrow (x - 99) + (y - 99) + (z - 99) = 203 \Leftrightarrow x' + y' + z' = 203$ (*) trong đó $x', y', z' \geq 1$.

Mặt khác ta biết số nghiệm nguyên dương của (*) là C_{202}^2 . Nên số cách chia bộ x, y, z cũng bằng C_{202}^2 .

Vậy có C_{202}^2 cách trao sách thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 10. Gắn vào hệ tọa độ $Oxyz$, xét mặt phẳng đi qua trung điểm OA và vuông góc OA với $A(3; 3; 3)$ là $(P) : x + y + z - \frac{9}{2} = 0$.

Ta thấy các hình vuông đơn vị đều có 1 đường chéo vuông góc với (P) . Do đó, mặt phẳng (P) cắt một hình lập phương đơn vị nếu điểm $(i; j; k)$ và $(i + 1; j + 1; k + 1)$ nằm về hai phía (P) . Vậy

$$\begin{cases} i + j + k - \frac{9}{2} < 0 \\ i + 1 + j + 1 + k + 1 - \frac{9}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < i + j + k < \frac{9}{2}, \text{ trong đó } 0 \leq i, j, k \leq 2.$$

Các họ không thỏa mãn là $i + j + k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow i + j + k \leq 1$ hoặc $i + j + k \geq \frac{9}{2} \Rightarrow i + j + k \geq 5$.

Phương trình $i + j + k \leq 1$ có $C_4^3 = 4$ nghiệm (theo bài toán chia kẹo).

Phương trình $i + j + k \geq 5 \Leftrightarrow (3 - i) + (3 - j) + (3 - k) \leq 4 < 5$. Phương trình này có $C_4^3 = 4$

nghiệm.

Vậy có $4 + 4 = 8$ hình vuông không bị cắt bởi (P) , do đó có $27 - 8 = 19$ hình vuông bị cắt bởi (P) .

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 11. Gọi số đo mỗi cung chứa 1 cạnh của đa giác đều là 1 đơn vị (thực ra bằng $\frac{2\pi}{20}$).

Xét 1 tam giác thỏa mãn, với mỗi đỉnh gọi số đo 3 cung chứa 3 cạnh của nó là x, y, z thì ta có $x, y, z \geq 2$ và $x + y + z = 20$.

Đặt $x' = x - 1; y' = y - 1; z' = z - 1$ ta có $x', y', z' \geq 1$ và $x' + y' + z' = 17$.

Theo bài toán Euler có C_{16}^2 nghiệm của phương trình. Thực hiện cho 20 đỉnh nhưng mỗi tam giác được đếm 3 lần ứng với 3 đỉnh của nó nên số tam giác thỏa mãn đề bài là $\frac{20}{3}C_{16}^2 = 800$ tam giác.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 12. Xét mỗi tam giác tù thỏa mãn có đỉnh góc tù là 1 đỉnh của đa giác đều. Gọi x, y là cạnh của đa giác nằm trong hai cung chứa 2 cạnh bên của tam giác. Tam giác này tù khi và chỉ khi $x + y < \frac{n}{2}$ (*), $(x, y \geq 1)$ (tức nhỏ hơn $1/2$ đường tròn).

Nếu n chẵn, (*) $\Leftrightarrow x + y + z = \frac{n}{2}$ với $x, y, z \geq 1$. Số nghiệm của phương trình này là $C_{\frac{n}{2}-1}^2$. Vậy số tam giác thỏa mãn là $n.C_{\frac{n}{2}-1}^2$.

Nếu n lẻ, ta có $x + y \leq \left[\frac{n}{2}\right] \Leftrightarrow x + y + z = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ với $x, y, z \geq 1$ và $[x]$ là ký hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Phương trình có $C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2$ nghiệm. Vậy số tam giác thỏa mãn là $n.C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2$.

Vậy số tam giác tù thỏa mãn là
$$\begin{cases} n.C_{\frac{n}{2}-1}^2 & \text{với } n \text{ chẵn} \\ n.C_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2 & \text{với } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Áp dụng với $n = 2018$ ta được số tam giác thỏa mãn là $2018C_{1008}^2$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 13. Không gian mẫu dễ thấy bằng $|\Omega| = 101 \times 11 = 1111$.

Bài toán trở thành đếm các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $x + y \leq 90$ (*) với điều kiện $0 \leq x \leq 100$ và $0 \leq y \leq 10$.

+) Số nghiệm không âm của (*) không ràng buộc điều kiện (tức là tính cả các nghiệm mà $11 \leq y \leq 90$) bằng số nghiệm nguyên dương của $x' + y' \leq 92$. Ở đây $x' = x + 1 \geq 1; y' = y + 1 \geq 1$. Do đó, số nghiệm của nó là C_{92}^2 nghiệm. Chú ý: Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ là C_n^k .

+) Ta đếm số nghiệm của (*) thỏa mãn $0 \leq x \leq 90$ và $11 \leq y \leq 90$. Ta có (*) $\Leftrightarrow (x + 1) + (y - 10) \leq 81 \Leftrightarrow x' + y' \leq 81$ với $x' = x + 1; y' = y - 10$ nguyên dương. Số nghiệm của phương trình này là C_{81}^2 .

+) Vậy số nghiệm của (*) thỏa mãn ràng buộc ban đầu là $C_{92}^2 - C_{81}^2$. Vậy xác suất cần tính của bài toán là $P = \frac{C_{92}^2 - C_{81}^2}{1111} = \frac{86}{101}$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 14. Không gian mẫu có kích thước $|\Omega| = C_{15}^3$.

Xét một đỉnh tam giác cân có 1 đỉnh là 1 đỉnh của đa giác đều. Gọi x là số cạnh của đa giác đều nằm trong cung căng bởi hai cạnh bên ($x \in \mathbb{Z}$), cạnh còn lại là $y \geq 1$, $y \in \mathbb{Z}$.

Ta có $2x + y = 15 \Leftrightarrow x \leq 7$ và $x \neq y \Rightarrow x \neq 5$. Vậy có 6 tam giác cân có đỉnh là đỉnh của đa giác đã cho nên có tất cả $15 \times 6 = 90$ tam giác cân không đều thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{90}{C_{15}^3} = \frac{18}{91}$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 15. Không gian mẫu dễ tính được $|\Omega| = 7.8.8 = 448$.

Cách 1: Xét một số $\overline{abc}$ thỏa mãn đề bài thì $1 \leq a \leq b \leq c \leq 7$.

Đặt $x = a - 1$; $y = b - a$; $z = c - b$; $t = 7 - c$ ta có $x, y, z, t \geq 0$, $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ và $x + y + z + t = 6$ (*). Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (*) chính là số các số $\overline{abc}$ thỏa mãn đề bài.

Phương trình (*) có $C_{6+4-1}^{4-1} = C_9^3$. Do đó có C_9^3 số thỏa mãn biến cố xảy ra.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{C_9^3}{448} = \frac{3}{16}$.

Cách 2: Có $1 \leq a \leq b \leq c \leq 7 \Leftrightarrow 1 \leq a < b + 1 < c + 2 \leq 9$.

Đặt $b' = b + 1$; $c' = c + 2$ thì a, b', c' là 3 số phân biệt trong $1, 2, \dots, 9$. Do đó có C_9^3 cách chọn bộ a, b', c' tương đương với bấy nhiêu cách chọn bộ a, b, c .

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{C_9^3}{448} = \frac{3}{16}$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 16. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 20 đỉnh và gọi số.

Xét 1 tam giác vuông tại một đỉnh của đa giác, gọi m, n là số cạnh của đa giác nằm trong cung căng bởi hai cạnh bên của tam giác, ta có $m + n = 10$ (*) với $n, m \geq 1$; $m, n \in \mathbb{Z}$.

Do đó số tam giác vuông tạo thành từ 1 đỉnh là $C_9^1 = 9$ trong đó có 1 tam giác vuông cân khi $m = n = 5$ nên có 8 tam giác vuông không cân từ 1 đỉnh.

Vậy có tất cả $20 \times 8 = 160$ tam giác vuông không cân thỏa mãn.

Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{160}{C_{20}^3} = \frac{8}{57}$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 17. Xét một hình thang thỏa mãn mà đỉnh đầu tiên chứa đáy nhỏ là A_i , các đỉnh tiếp theo theo thứ tự thuận chiều kim đồng hồ. Gọi x, y, y, z lần lượt là số cạnh của đa giác đều nằm trong

các cung chứa đáy nhỏ, hai cạnh bên và đáy lớn của hình thang, ta có:

$$\begin{cases} 1 \leq x, y, z \in \mathbb{Z} \\ x < z \\ x + 2y + z = n \quad (*) \end{cases}$$

Ta có phương trình (*) tương đương với $x + z = n - 2y$ (**) với mỗi y thỏa mãn $1 \leq y < \frac{n-2}{2}$. Theo bài toán chia kẹo Euler, phương trình (**) có $n - 2y - 1$ nghiệm nguyên dương. Bây giờ ta đếm các nghiệm nguyên dương của (**) mà $x < z$.

- Nếu n lẻ thì (**) không có nghiệm $x = z$ nên số nghiệm thỏa mãn $x < z$ là $\frac{n-2y-1}{2}$.
- Nếu n chẵn thì (**) có đúng 1 nghiệm $x = z$ nên số nghiệm thỏa mãn $x < z$ là $\frac{n-2y-2}{2}$.

Vậy số nghiệm của (*) thỏa mãn các ràng buộc đã cho là

$$\sum_{y=1}^{\frac{n-3}{2}} \frac{n-2y-1}{2} = \frac{1}{8}(n-1)(n-3) \text{ với } n \text{ lẻ}$$

$$\sum_{y=1}^{\frac{n-4}{2}} \frac{n-2y-2}{2} = \frac{1}{8}(n-2)(n-4) \text{ với } n \text{ chẵn}$$

Với mỗi bộ số x, y, z thỏa mãn (*) xuất phát từ 1 đỉnh đa giác là đỉnh đầu tiên của đáy nhỏ hình thang (ứng với cạnh x) theo chiều thuận kim đồng hồ ta có 1 hình thang thỏa mãn. Vậy tổng số hình thang thỏa mãn là

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n-3) \text{ với } n \text{ lẻ}$$

$$\frac{1}{8}n(n-2)(n-4) \text{ với } n \text{ chẵn}$$

Áp dụng: Với $n = 20$ tức đa giác đều 20 cạnh, số hình thang không phải hình chữ nhật tạo thành từ các đỉnh của đa giác là: $\frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 18 \cdot 16 = 720$.

Ta chọn đáp án **A**

Câu 18. Gọi $\overline{a_1 a_2 \dots a_7}$ là số thỏa mãn đề bài với $\begin{cases} 1 \leq a_1 \leq 9; 0 \leq a_2, a_3, \dots, a_7 \leq 9 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 59 \quad (1) \end{cases}$

Vậy số phần tử của không gian mẫu là số nghiệm của (1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow (10 - a_1) + (10 - a_2) + \dots + (10 - a_7) = 11$ hay $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 11$ (*) trong đó $x_i = 10 - a_i \Rightarrow 1 \leq x_1 \leq 9$ và $1 \leq x_2, x_3, \dots, x_7 \leq 10$. Do các x_i trong nghiệm của (*) không vượt quá 10 nên số nghiệm của (*) là C_{10}^6 . Vậy $|\Omega| = C_{10}^6$.

Có $\overline{a_1 a_2 \dots a_7}$ chỉ hết cho 11 nên $|(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) - (a_2 + a_4 + a_6)| = 11; 22; 33; \dots$. Kết hợp với (1) ta được $a_2 + a_4 + a_6 = 24$ (2) và $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 35$ (3). Phương trình (2) tương đương $(10 - a_2) + (10 - a_4) + (10 - a_6) = 6$ nên tương tự (1) có số nghiệm là C_5^2 .

Phương trình (3) tương đương $(10 - a_1) + (10 - a_3) + (10 - a_5) + (10 - a_7) = 5$ nên tương tự (1)

có số nghiệm là C_4^3 .

Vậy số các số có 7 chữ số có tổng là 59 và chia hết cho 11 là $|\Omega_A| = C_5^2 \cdot C_4^3$.

Do đó xác suất của biến cố cần tìm là $P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^6} = \frac{4}{21}$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 19. Gọi số thỏa mãn có dạng $\overline{a_1 a_2 \dots a_5}$ thỏa mãn đề bài, ta có $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 9; 18; 27$.

Trường hợp 1: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 9$ với $1 \leq a_1 \leq 6; 0 \leq a_i \leq 6 (i = 2, \dots, 5)$. Đặt

$$x_i = a_i + 1, i = 2, \dots, 5 \text{ thì ta có } \begin{cases} a_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13 \quad (1) \\ 1 \leq a_1 \leq 6 \\ 1 \leq x_i \leq 7 \end{cases}.$$

- Số nghiệm nguyên dương bất kỳ của (1) là C_{12}^4 .

- Nếu $a_1 \geq 7$, (1) $\Leftrightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 6 \Rightarrow x_i < 7$ nên không trùng với các trường hợp $x_i \geq 8$, phương trình này có C_6^4 nghiệm.

- Nếu $x_i \geq 8$, (1) $\Leftrightarrow a_1 + \sum_{j \neq i} x_j \leq 5 \Rightarrow a_1, x_j < 6$ nên không trùng với trường hợp trên. Phương trình này có C_5^4 nghiệm nên với 4 vị trí x_i có $4 \cdot C_5^4$ nghiệm.

Vậy trường hợp này có $C_{12}^4 - C_6^4 - 4 \cdot C_5^4$ số thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 2: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 18$ với $1 \leq a_1 \leq 6; 0 \leq a_i \leq 6 (i = 2, \dots, 5)$. Đặt

$$x_i = 7 - a_i, i = 1, \dots, 5 \text{ thì ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17 \quad (2) \\ 1 \leq x_1 \leq 6 \\ 1 \leq x_i \leq 7, i = 2, \dots, 5. \end{cases}.$$

- Số nghiệm nguyên dương bất kỳ của (2) là C_{16}^4 .

- Nếu $x_1 \geq 7$, (2) $\Leftrightarrow x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 10 \Rightarrow x_i < 7$ nên không trùng với các trường hợp $x_i \geq 8$, phương trình này có C_{10}^4 nghiệm.

- Nếu $x_i \geq 8, i = 2, \dots, 5$, (2) $\Leftrightarrow x_1 + \sum_{j \neq i} x_j \leq 9 \Rightarrow x_j < 7$ nên không trùng với trường hợp trên.

Phương trình này có C_9^4 nghiệm nên với 4 vị trí x_i có $4 \cdot C_9^4$ nghiệm.

Vậy trường hợp này có $C_{16}^4 - C_{10}^4 - 4 \cdot C_9^4$ số thỏa mãn đề bài.

Trường hợp 3: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 27$ với $1 \leq a_1 \leq 6; 0 \leq a_i \leq 6 (i = 2, \dots, 5)$. Đặt

$$x_i = 7 - a_i, i = 1, 2, \dots, 5, \text{ thì ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \quad (3) \\ 1 \leq x_1 \leq 6 \\ 1 \leq x_i \leq 7, i = 2, \dots, 5. \end{cases}.$$

Từ (2) và $x_i \geq 1 \Rightarrow x_i \leq 6$ nên tập nghiệm của (3) không vượt ra khỏi miền xác định của x_i .

Phương trình này có C_7^4 nghiệm.

Vậy trường hợp này có C_7^4 số thỏa mãn đề bài.

Vậy có tất cả $C_{12}^4 + C_{16}^4 + C_7^4 - C_6^4 - C_{10}^4 - 4C_5^4 - 4C_9^4 = 1601$ số thỏa mãn đề bài.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 20. Ta có: $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (-1)^k x^{20-3k} + \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i (-1)^i x^{30-4i}$. Khai triển này bao gồm tất cả $21 + 11 = 32$ số hạng.

Ta đếm các số hạng có lũy thừa của x giống nhau ở hai khai triển. Điều này tương đương với $20 - 3k = 30 - 4i \Leftrightarrow 4i - 3k = 10$. Do đó i phải là số chia cho 3 dư 1 và $2 \leq i \leq 10$. Ta có bảng: Vậy có 3 cặp số hạng cùng lũy thừa của x trong hai khai triển nên có tất cả $32 - 3 = 29$ số hạng

i	4	7	10
k	2	6	10

trong khai triển sau khi rút gọn.

Ta chọn đáp án **C**

Câu 21. Đặt $x - 1 = y$, khi đó đẳng thức bài cho tương đương

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = (y + 1)^n.$$

Do đó, $a_k = C_n^k$.

$$\text{Vậy } a_1 + a_2 + a_3 = 231 \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 231 \Rightarrow n = 11.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 22. Theo công thức khai triển Newton ta thấy $a_i > 0$ với i chẵn và $a_i < 0$ với i lẻ.

$$\text{Do đó ta có: } (1 + 2x)^n = |a_0| + |a_1|x + |a_2|x^2 + \dots + |a_n|x^n.$$

$$\text{Lấy đạo hàm hai vế ta được: } 2n(1 + 2x)^{n-1} = |a_1| + 2|a_2|x + \dots + n|a_n|x^{n-1}.$$

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào khai triển trên ta được: } 2n.3^{n-1} = |a_1| + 2|a_2| + \dots + n|a_n| = 34992 \Rightarrow \boxed{n = 8}$$

$$\text{Vậy với } n = 8 \text{ ta có: } P = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + \dots + 3^n a_n = (1 - 2.3)^8 = 390625.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 23. Cách 1: Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton vào bài toán ta có:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^k.$$

Hệ số của số hạng chứa x^k là C_n^k .

Áp dụng vào bài tập ta thấy hệ số a_8 chính là tổng tất cả hệ số của số hạng chứa x^8 trong các khai triển $(1 + x)^n$ với $n = 8, 9, \dots, 12$.

$$\text{Vậy hệ số } a_8 \text{ trong khai triển } P(x) \text{ là } C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8 = C_{13}^9 = 715.$$

Cách 2: Áp dụng công thức tổng hữu hạn các số hạng liên tiếp của cấp số nhân, ta có:

$$P(x) = (x + 1)^8 \cdot \frac{(x + 1)^5 - 1}{x + 1 - 1} = \frac{(1 + x)^{13}}{x} - \frac{(1 + x)^8}{x}$$

Vậy, hệ số của x^8 là hệ số của x^9 trong $(1 + x)^{13}$.

Do đó, hệ số của x^8 là C_{13}^9 .

Ta chọn đáp án **A**

Câu 24. Áp dụng công thức $\frac{C_n^k}{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{C_n^0}{1.2} + \frac{C_n^1}{2.3} + \frac{C_n^2}{3.4} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{C_{n+1}^1}{2} + \frac{C_{n+1}^2}{3} + \frac{C_{n+1}^3}{4} + \dots + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} (C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + C_{n+2}^4 + \dots + C_{n+2}^{n+2}) \\ &= \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó giả thiết bài toán} \Leftrightarrow \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{100} - n - 3}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow n = 98.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 25. Gọi 1 phần tử của S là (a, b, c) với $a + b + c = 91$ (*) và đôi một khác nhau.

Số nghiệm nguyên dương bất kỳ của (*) là: C_{90}^2 .

Nếu $a = b = c$ thì (*) vô nghiệm.

Nếu $a = b \neq c$ ta có $2a + c = 91 \Rightarrow 1 \leq a \leq 45$ nên phương trình có 45 nghiệm nguyên dương như vậy. Tương tự với $a = c \neq b$ và $a \neq b = c$.

Vậy số nghiệm nguyên dương và các số a, b, c đôi một khác nhau của (*) là $C_{90}^2 - 3 \times 45 = 3870$.

Do đó, số tập con có bộ (a, b, c) thỏa mãn (*) là $\frac{3870}{3!} = 645$. Vậy $n(\Omega) = 645$.

Nếu $a + qa + qa^2 = 91 \Rightarrow 1 + q + q^2 \in U(91) = \{1; 7; 13; 91\} \Rightarrow q \in \{2; 3; 9\}$
 $\Rightarrow (a; b; c) \in (1; 9; 81); (7; 21; 63); (13; 26; 52)$. Vậy $|\Omega_A| = 3$. Do đó $P = \frac{3}{645}$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 26. Ta có: $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)((n+1)^2 + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Đến đây ta dễ dàng có: } u_n = \frac{(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1) \dots ((2n-1)^2 + 1)((2n)^2 + 1)}{(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1) \dots ((2n)^2 + 1)((2n+1)^2 + 1)} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}.$$

$$\text{Ta có: } \log_2 u_n + u_n < -\frac{10239}{1024} = \log_2 \frac{1}{1024} + \frac{1}{1024} \Rightarrow u_n < \frac{1}{1024} \Rightarrow n \geq 23.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 27. Ta có: $5^{a_n - a_{n-1}} = 1 + \frac{3}{3n-1}$; $5^{a_{n-1} - a_{n-2}} = 1 + \frac{3}{3n-4}$; ... $5^{a_2 - a_1} = 1 + \frac{3}{5}$. Nhân vế với vế ta được: $5^{a_n - a_1} = \left(1 + \frac{3}{3n-1}\right) \left(1 + \frac{3}{3n-4}\right) \dots \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8.11.14 \dots (3n-1)(3n+2)}{5.8.11 \dots (3n-4)(3n-1)} = \frac{3n+2}{5}$. Khi đó ta có công thức tổng quát $a_n = \log_5(3n+2)$.

Đến đây dùng $3n+2 = 5^{a_n} \Leftrightarrow n = \frac{5^{a_n} - 2}{3}$ và sử dụng máy tính cầm tay chức năng TABLE với $F(X) = \frac{5^X - 2}{3}$. Ta tìm được $X = 3 \rightarrow n = 41$ là những số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 28. Trước hết ta thấy $u_{n+1} = \frac{1}{2018}u_n^2 + \frac{2017}{2018}u_n$ và $u_1 > 1$ nên $\lim u_n = +\infty$ dựa trên hàm $f(x) = \frac{1}{2018}x^2 + \frac{2017}{2018}x$.

Ta lại có: $2018(u_{n+1} - u_n) = u_n(u_n - 1) \Rightarrow \frac{u_n}{2018} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - 1}$
 $\Rightarrow \frac{u_n}{2018(u_{n+1} - 1)} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} \Rightarrow \frac{u_n}{2018(u_{n+1} - 1)} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$
 $\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2018 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$.
 Vậy: $S_n = 2018 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \Rightarrow \lim S_n = 2018 \left(\frac{1}{2 - 1} - \frac{1}{\lim u_n - 1} \right) \Rightarrow \lim S_n = 2018$.
 Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 29. Ta có:

$$\begin{cases} u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} \\ u_{n-1}^{n-1} - u_{n-2}^{n-2} = 2^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2} \\ \dots \\ u_2^2 - u_1^1 = 2 + 2 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow u_n^n = 2 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}).$$

Vậy: $u_n^n = 2^n + 3^n$.

Có $u_n^n - 2^n > 5^{100} \Leftrightarrow 3^n > 5^{100} \Rightarrow n > 100 \log_3 5 \Rightarrow n \geq 147$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 30. Nhận xét: Dãy truy hồi $u_{n+1} = \alpha \cdot u_n + \beta$ có số hạng tổng quát dạng $u_n = a \cdot 3^{n-1} + b$.

Ta có $u_{n+1}^2 = 3 \cdot u_n^2 + 2 \Rightarrow u_n^2 = a \cdot 3^{n-1} + b$.

Vì $u_2 = \sqrt{5} \Rightarrow$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 5 = 3a + b \\ 1 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy $u_n^2 = \frac{2}{3} \cdot 3^n - 1 = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$.

Khi đó $S = 2(1 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2017}) = 3^{2018} - 1$.

Số chữ số của $S = [2018 \log 3] + 1 = 963$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 31. Ta có: $u_{100} + u_1 = 497 \Rightarrow u_{100} = 496 = 1 + 99d \Rightarrow \boxed{d=5} \Rightarrow u_{50} = 246$.

Lại có: $5S = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{u_{49} - u_{48}}{u_{48} u_{49}} + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49} u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = 1 - \frac{1}{246} \Rightarrow S = \frac{49}{246}$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 32. Ta xét $x = 0$ ta được $f^2(1) = -f^3(1) \Rightarrow f(1) = 0$ hoặc $f(1) = -1$.

Đạo hàm hai vế đẳng thức ban đầu ta có có

$4f(1+2x)f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x)f'(1-x)$ và thay $x = 0$ ta có $4f(1)f'(1) = 1 + 3f^2(1)f'(1)$. (*)

Trường hợp 1: Nếu $f(1) = 0$ thay vào (*) ta thấy $0 = 1$ vô lý.

Trường hợp 2: Nếu $f(1) = -1$ thì thay vào $-4f'(1) = 1 + 3f'(1) \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 33. Ta có phương trình hoành độ giao điểm của tiếp tuyến tại A_k và (C) là:

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = 2x_k^3 - 3x_k^2 + 1 + (6x_k^2 - 6x_k)(x - x_k) \Leftrightarrow (x - x_k)^2(2x + 4x_k - 3) = 0 \Leftrightarrow x = -2x_k + \frac{3}{2}.$$

Vậy $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = -2x_n + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta.$

Xét $\begin{cases} x_1 = -2\alpha + \beta = 1 \\ x_2 = 4\alpha + \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$ Do đó, tìm n để $x_n = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^n + \frac{1}{2} > 5^{100}$. Chọn $n = 2k+1$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \cdot 4^k \cdot (-2) + \frac{1}{2} > 5^{100} \Leftrightarrow 4^k + 1 > 2 \cdot 5^{100} \Leftrightarrow 4^k > 2 \cdot 5^{100} - 1 \Leftrightarrow k > \log_4(2 \cdot 5^{100} - 1).$$

Chọn $k = 117 \Rightarrow n = 235$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 34. Cách 1 (trắc nghiệm): Vì bài toán hỏi bất biến đối với O nên chọn O là trọng tâm của tam giác ABC ta thấy ngay các tỉ số

$$\frac{OA'}{SA} = \frac{OB'}{SB} = \frac{OC'}{SC} = \frac{1}{3}$$

Vậy $T = 1$.

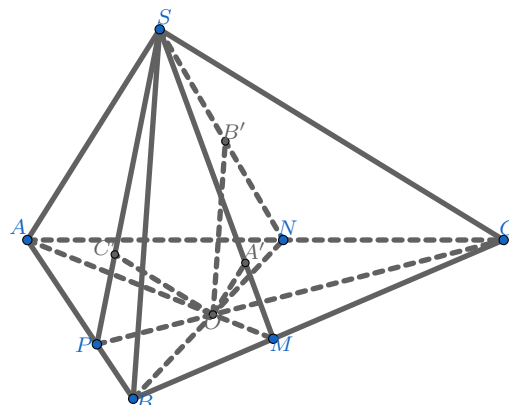
Cách 2 (tự luận): Ta có $\frac{OA'}{SA} = \frac{OM}{OA}$; $\frac{OB'}{SB} = \frac{ON}{OB}$;
 $\frac{OC'}{SC} = \frac{OP}{OC}$.

Theo định lý Xê-Va trong tam giác ABC có

$$\frac{OM}{OA} + \frac{ON}{OB} + \frac{OP}{OC} = 1$$

Vậy $T = 1$.

Ta chọn đáp án **(C)**



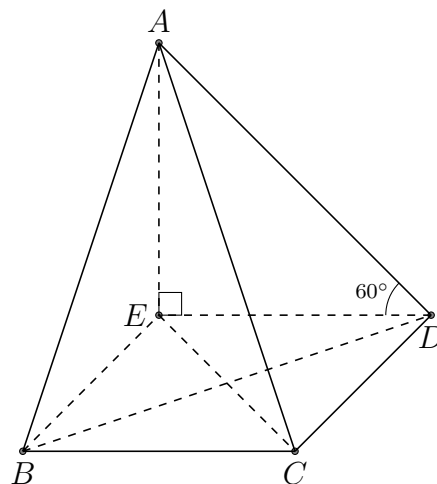
Câu 35.

Dựng $AE \perp (BCD) \Rightarrow CD \perp (ADE) \Rightarrow CD \perp ED$. Tương tự cũng có $CB \perp BE$. Vậy $BCDE$ là hình chữ nhật. Khi đó $\angle(AD, BC) = \angle ADE = 60^\circ$ khi đó ta suy ra $AE = 3\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD} = 6\sqrt{3}$.

Mặt khác ta có công thức:

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{ABC} \cdot S_{ACD} \sin((ABC), (ACD))}{3AC} (*)$$

Đặt $\angle((ABC), (ACD)) = \alpha$ và theo định lý Pythagore ta suy ra $AB = \sqrt{43}$; $AD = 6$; $AC = 2\sqrt{13}$.



Thay vào (*), ta có:

$$6\sqrt{3} = \frac{2}{6\sqrt{13}} \left(\frac{1}{2} 3\sqrt{43} \right) (12) \sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{43}}{43}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 36. Gọi $f(x) = e^x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \dots - \frac{1}{x-2018} - 2018$ thì tập xác định của $f(x)$ là $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup \dots \cup (2018; +\infty)$ gồm 2019 khoảng.

Có $f'(x) = e^x + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \dots + \frac{1}{(x-2018)^2} > 0$ do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Mặt khác, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_i^{\pm}} = \mp\infty$ nên trong mỗi khoảng xác định của hàm số $f(x)$ có 1 nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình đã cho có 2019 nghiệm phân biệt.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 37. Giả sử $f(a) \leq f(b) \leq f(c)$. Có $\max_{[-1;3]} f(x) = m + 20$; $\min_{[-1;3]} g(x) = m$.

$f(a), f(b), f(c)$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác $\Leftrightarrow f(a) > |f(b) - f(c)| \forall a, b, c \in [-1; 3] \quad (1)$.

Mặt khác $\min_{[-1;3]} f(a) = m$, $\max_{[-1;3]} |f(b) - f(c)| = |m + 20 - m| = 20$ và đẳng thức xảy ra khi $f(a) = f(b) = m$, $f(c) = m + 20$ hay $a = b$. Nhưng trong (1) có $a \neq b$ nên đẳng thức ở các min; max xảy ra nhưng (1) không xảy ra, do đó (1) $\Leftrightarrow m \geq 20$.

Tam giác này nhọn $\Leftrightarrow f^2(a) + f^2(b) > f^2(c) \quad (2) \quad \forall a, b, c \in [-1; 3] \Rightarrow m^2 + m^2 \geq (m + 20)^2 \quad (3)$.

Đẳng thức ở (3) xảy ra khi $f(a) = f(b) = m$; $f(c) = m + 20 \Rightarrow a = b$, nhưng trong (2) có $a \neq b$ nên (2) không xảy ra đẳng thức. Vậy đẳng thức ở (3) thỏa mãn (2).

Có (3) $\Leftrightarrow m \geq 20 + 20\sqrt{2} \approx 48,28$ (do $m \geq 20$).

Vậy $m \geq 49$, do đó $49 \leq m < 2018$, $m \in \mathbb{Z}$ có 1969 số nguyên thỏa mãn.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 38. Hàm số $y = |x|^3 - (2m + 1)x^2 + 3m|x| - 5$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + 3mx - 5$ có 1 cực trị dương, cực trị còn lại không dương. Vậy phương trình $3x^2 - 2(2m + 1)x + 3m = 0 \quad (*)$ có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

Trường hợp 1: (*) có 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow m = 0$, khi đó nghiệm còn lại bằng $\frac{2}{3} > 0$ nên $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: (*) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy tập hợp tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(-\infty; 0]$.

Ta chọn đáp án **(C)**

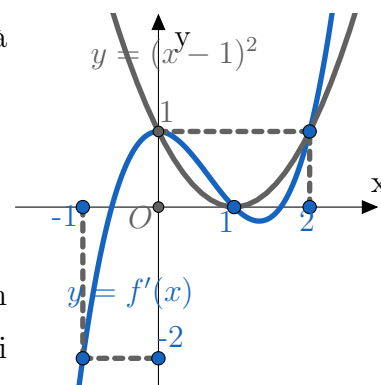
Câu 39. Ta có $g'(x) = f'(x) - (x - 1)^2$ do đó nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và $y = (x - 1)^2$.

Có $g'(x) > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên $y = (x-1)^2$ và $g'(x) < 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới $y = (x-1)^2$.

$$\text{Từ đồ thị suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Từ đồ thị ta thấy $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm (từ nằm trên chuyển xuống nằm dưới) khi qua $x = 1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Ta chọn đáp án **(A)**



Câu 40. Điều kiện có hai điểm cực trị là $m^2 > 1$. Gọi a, b, c, d là các hệ số của hàm bậc 3 tổng quát, Δ là biệt thức Delta của y' .

Đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = kx + e$ với $k = -\frac{\Delta}{18a} = 2 - 2m^2$ và $e = d - \frac{bc}{9a} = 1 - \frac{-9m}{9} = m + 1$. Vậy $y = (2 - 2m^2)x + m + 1$.

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(x_1; kx_1 + e)$ và $B(x_2; kx_2 + e)$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |x_1(kx_2 + e) - x_2(kx_1 + e)| \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |e| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |m + 1| \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|3a|} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |m + 1| \cdot \sqrt{4m^2 - 4}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = |m + 1| \cdot \sqrt{m^2 - 1} = 8\sqrt{2} \Rightarrow (m^2 + 2m + 1)(m^2 - 1) = 128$$

$$\Rightarrow (m - 3)(m^3 + 5m^2 + 15m + 43) = 0 \Rightarrow m = 3.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 41. Ta có: $y' = 2x \cdot f'(x^2) = 2x^5(x^2 + 1)(x^4 + 2mx^2 + 4)$.

$$\text{Do đó } y' = 0 \text{ khi } \begin{cases} x = 0 \\ x^4 + 2mx^2 + 4 = 0 (*) \end{cases}.$$

Ta thấy các nghiệm của (*) nếu có đều khác 0. Do đó $x = 0$ luôn là 1 cực trị của hàm số.

Hàm số có duy nhất 1 cực trị khi và chỉ khi $x^4 + 2mx^2 + 4$ không đổi dấu trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow (*)$ có $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vậy chỉ có 2 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn là $m = -2; m = -1$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 42. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = \frac{2}{3a}$. Từ đây ta có tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0; b) \text{ và } B\left(\frac{2}{3a}; b - \frac{4}{27a^2}\right).$$

Để có ít nhất 2 giao điểm với trục hoành thì $y_A \cdot y_B \leq 0 \Leftrightarrow b\left(b - \frac{4}{27a^2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow (27a^2b - 4)b \leq$

$$0 \Leftrightarrow a^2b \leq \frac{4}{27} \text{ (Vì } b > 0).$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 43. Gọi α_0, α lần lượt là góc tạo bởi tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x = 0$ và tại x_0 bất kỳ $x_0 \neq 0$ với tia Ox theo chiều dương (lưu ý là $\alpha_0 > 90^\circ$), từ đồ thị ta thấy:

Với $-1 < x_0 < 1$ thì $\alpha_0 < \alpha < 180^\circ$ nên $\tan \alpha > \tan \alpha_0$, tức $f'(x_0) > f'(0)$.

Với $x_0 \leq -1$ hoặc $x_0 \geq 1$ thì $90^\circ > \alpha \geq 0$ nên $\tan \alpha > 0$, vậy $f'(x_0) > f'(0)$.

Chúng tỏ $f'(x_0) > f'(0)$ với mọi $x_0 \neq 0$, do đó giá trị nhỏ nhất của $f'(x)$ là $m = f'(0)$.

Hơn nữa, từ đồ thị ta thấy phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại $x = 0$ là $y = mx$. Tại $x = -1 \Rightarrow y > 2$ nên $m < -2$.

Ta chọn đáp án **A**

Câu 44. Ta có $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{k}{\pi^2} \Leftrightarrow k < \pi^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) \Leftrightarrow k < \pi^2 \cdot f(x)$ với $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} + 1$.

Xét hàm số $f(x)$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, ta có $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$

Ta chứng minh $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hay $g(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - x^3 > 0$.

Ta có $g'(x) = \tan^2 x + 2 \sin^2 x - 2x^2; g''(x) = 2 \tan^3 x + 2 \tan x + 2 \sin 2x - 4x$.

$g'''(x) = 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x + 4 \cos 2x - 2 = \frac{6 \tan^6 x + 14 \tan^4 x + 2 \tan^2 x + 2}{1 + \tan^2 x} > 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $g''(x) \geq g''(0) = 0$, suy ra $g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy $f'(x) < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hay hàm $f(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. Do đó $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2} \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $k < \pi^2 \cdot f(x) \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow k \leq 4$.

Ta chọn đáp án **C**

Câu 45. Dựa vào hình dạng đồ thị hàm trùng phương ta thấy $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1) \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = -2a$.

Vậy $\min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(-1) = a + b + c = a - 2a + c = c - a$.

Ta chọn đáp án **D**

Câu 46. Nếu $m \geq 1$ thì $y = x^2 + 2x + m$ có GTNN là $m - 1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$ (loại). Nếu $m < 1$ thì $y = \begin{cases} x^2 + 2x + m & \text{với } x \in (-\infty; 1 - \sqrt{1 - m}] \cup [1 + \sqrt{1 - m}; +\infty) \\ -x^2 + 6x - m & \text{với } x \in (1 - \sqrt{1 - m}; 1 + \sqrt{1 - m}) \end{cases}$

nên giá trị nhỏ nhất của y chỉ có thể xảy ra tại những điểm cực tiểu có thể có của nó, nghĩa là:

$\min y = \min \{f(-1); f(1 + \sqrt{1 - m}); f(1 - \sqrt{1 - m})\}$

$\Rightarrow \min y = \min \{|m + 3| - 4; 4(1 + \sqrt{1 - m}); 4(1 - \sqrt{1 - m})\} = \min \{|m + 3| - 4; 4(1 - \sqrt{1 - m})\}$.

Trường hợp 1: $\min y = |m + 3| - 4 = -1 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -6 \end{cases}$

Với $m = 0$ thì $4(1 - \sqrt{1 - m}) = 0 > -1$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn.

Với $m = -6$, thì $4(1 - \sqrt{1 - m}) < -1$ nên -1 không là giá trị nhỏ nhất, do đó trường hợp này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\min y = 4(1 - \sqrt{1-m}) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{16}$, khi đó $|m+3| - 4 = -\frac{27}{16} < -1$ nên trường hợp này không thỏa mãn.

Vậy chỉ có một giá trị của m thỏa mãn bài toán.

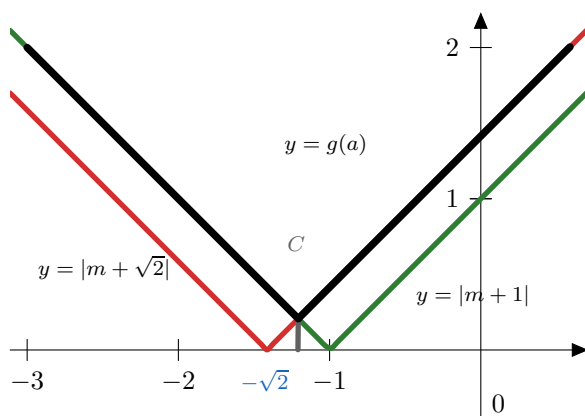
Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 47.

Đặt $t = \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}}$, khảo sát $t(x)$ trên $[1; e^2]$ ta được $t \in [1; \sqrt{2}]$.

Ta có $\max_{[1; e^2]} y = \max_{[0; \sqrt{2}]} |t+m| = \max \{|m+1|; |m+\sqrt{2}|\} = g(m)$.

Vẽ đồ thị hàm $g(m)$ theo m như hình vẽ ta thấy ngay $g(m)$ nhỏ nhất khi $m = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.



Chú ý: Khi vẽ đồ thị hàm $g(m) = \max \{|m+1|; |m+\sqrt{2}|\}$ ta vẽ đồng thời hai hàm $y = |m+1|$ và $y = |m+\sqrt{2}|$ sau đó lấy đường đồ thị nằm phía trên cùng của hai đồ thị này. Trong trường hợp min thì ta lấy phần đồ thị nằm dưới.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 48. Ta biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất tại điểm uốn.

Mặt khác $y' = 3((x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2) \Rightarrow y'' = 6(3x+a+b+c)$.

Có $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a+b+c}{3} = -1 \Leftrightarrow a+b+c = 3$.

Giao điểm với trục tung có tung độ $y = a^3 + b^3 + c^3$.

Vì $a(9-a^2) = a(3-a)(3+a) \geq 0 \Rightarrow a(a^2-9) + b(b^2-9) + c(c^2-9) \leq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \leq 9(a+b+c) = 27$.

Vậy tung độ giao điểm của đồ thị hàm số và Oy lớn nhất bằng 27 khi $a=3; b=c=0$ và các hoán vị.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 49. Đặt $2^x = a, 4^y = b, 8^z = c$ ta có $a, b, c \geq 1$ và $a+b+c = 4$ và $2^{6S} = a.b.c$.

Đánh giá S dự đoán đẳng thức xảy ra tại biên nên ta có:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a+b-1 = 3-c$$

Vậy $2^{6S} \geq (3-c)c = -c^2 + 3c$ với $c \in [1; 2]$. Do đó $2^{6S} \geq \min_{[1; 2]} (-c^2 + 3c) = 2$.

Vậy $S \geq \frac{1}{6}$. Đẳng thức xảy ra khi 3 số a, b, c có 2 số bằng 1 và số còn lại bằng 2.

Câu 50. Ta có: $4^x \leq 48x - 80, \forall x \in [2; 3]$. Dấu bằng xảy ra khi $x \in \{2; 3\}$.

Do đó $S \leq 48(a+b+c) - 240 - \frac{1}{4}(a+b+c)^3 \leq 16$.

Dấu bằng xảy ra khi $(a; b; c) = (3; 3; 2)$ hoặc các hoán vị.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 51. Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 đương nhiên không thỏa mãn. Do đó ta chỉ xét trường hợp $\min y \neq 0$. Khi đó ta có:

$$\min_{[-1;2]} y = \min \left\{ f(-1), f(2), f\left(-\frac{m}{2}\right) \right\} = \min \left\{ |2-m|; |5+2m|; \left| \frac{m^2}{4} - 1 \right| \right\}$$

Trường hợp 1: $|2-m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = \frac{3}{4} \neq 1 \\ m=3 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 0 \neq 1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị M thỏa mãn.

Trường hợp 2: $|5+2m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 0 \neq 1 \\ m=-3 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 0 \neq 1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị M thỏa mãn.

Trường hợp 3: $\left| \frac{m^2}{4} - 1 \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 0 \neq 1 \\ m = 0 \Rightarrow \min_{[-1;2]} y = 1 \end{cases}$.

Vậy chỉ có $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 52. Đây là bài toán đặc biệt về hàm phân thức bậc nhất.

Giải $f'(x_A) = \pm 1 \Leftrightarrow x_A = 1$ (chỉ cần lấy 1 nghiệm).

Gọi I là giao hai đường tiệm cận và M, N là hai giao điểm của tiếp tuyến tại A với hai đường tiệm cận. Khi đó, tam giác IMN vuông cân tại I và có đường cao $IA = 2\sqrt{2}$ do đó $IM = IN = 4$.

$$\text{Vậy } r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{IM + IN + MN} = \frac{16}{8 + 4\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 53. Ta có $y = \frac{x^2+3}{x}$. Thay vào ta có $P = 5x - \frac{9}{x} = f(x)$.

$$\text{Từ } 2x + 3y - 14 \leq 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot \frac{x^2+3}{x} - 14 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

Khi đó $\max P + \min P = 0$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 54. Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

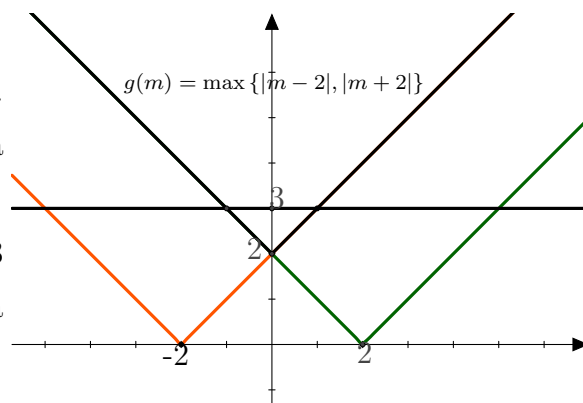
$$\text{Vậy } y = |t+m| \Rightarrow \max_{[0;2]} y = \max_{[-2;2]} |t+m| = \max\{|m-2|, |m+2|\}.$$

Vẽ đồ thị hàm $g(m)$ ta thực hiện như sau:

Vẽ đồng thời cả hai đồ thị $y = |m+2|$ và $y = |m-2|$.

Lấy phần đồ thị nằm ở mặt trên của hai đồ thị ta được đồ thị $g(m)$.

Từ đồ thị của hàm $g(m)$ ở bên ta thấy ngay $g(m) = 3$ có hai nghiệm phân biệt nên bài toán có 2 giá trị của m thỏa mãn.



Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 55.

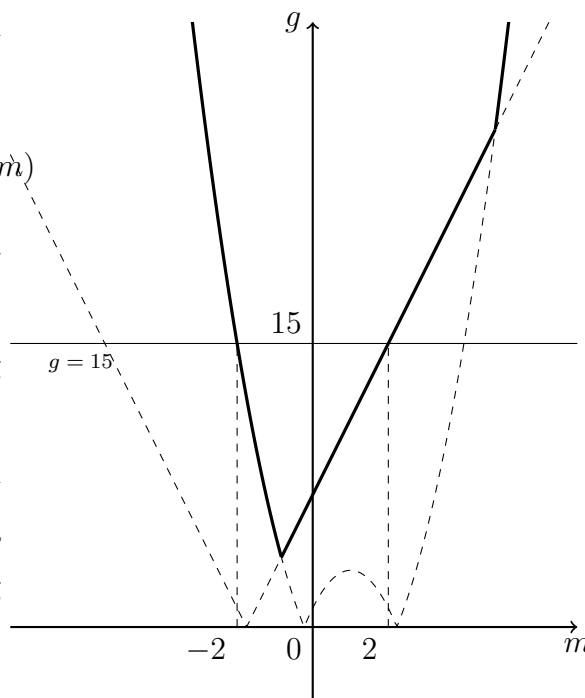
Đặt $f(x) = x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$\max_{[0;2]} |f(x)| = \max \left\{ |4m + 7|; |2m^2 - 4m - 1| \right\} = g(m)$$

Ta có ngay đồ thị của hàm $y = g(m)$ như sau (lấy phần đồ thị nằm phía trên trong 2 đồ thị).

Từ đồ thị ta thấy đồ thị $g(m)$ nằm bên dưới đường $g = 15$ khi $-2 \leq m \leq 2$.

Chú ý: Nếu bài toán hỏi $\min_{[a;b]} f(x)$ thì ta lấy phần đồ thị nằm dưới giữa hai đồ thị. Giống như $\max$ là phần "nổi lên bề mặt", còn $\min$ là phần chìm xuống dưới.



Ta chọn đáp án **D**

Câu 56. Do hàm số đơn điệu trên mỗi khoảng nên ta có

$$\begin{cases} a + 1 \neq -a \\ -a \neq -a - 2 \\ -a - 2 \neq 2a + 5 \\ 2a + 5 \neq 1 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow a \notin \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{7}{3} \right\}.$$

Khi đó, $\min_{[1;5]} f(x) = \min \{a + 1; -a; -a - 2; 2a + 5; 1 - a^2\} = g(a)$.

Như vậy ta dễ dàng vẽ được đồ thị hàm $y = g(a)$ là phần tô đậm trong hình dưới đây (lấy phần đồ thị nằm dưới trong các đồ thị).

Từ đồ thị ta thấy $g(a) = -3$

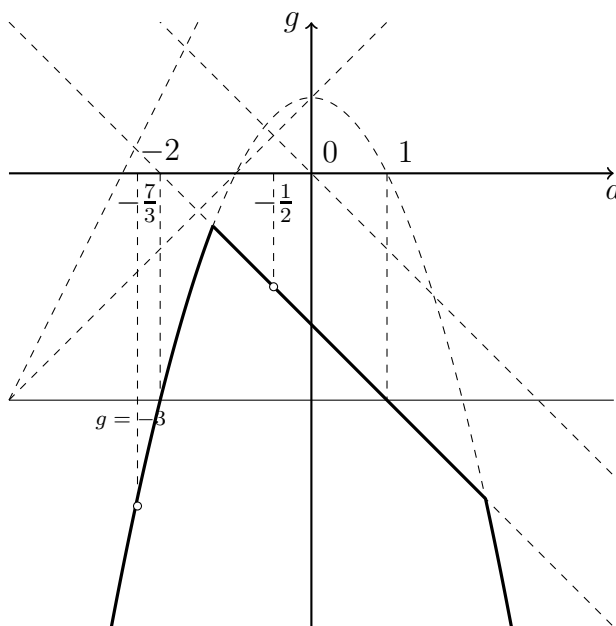
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 1 - a^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ -a - 2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy $g(a) \leq -3 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Kết hợp với điều kiện $a \neq -\frac{7}{3}$ ta được

$$a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{ -\frac{7}{3} \right\}$$



Ta chọn đáp án **A**

Câu 57. Bài toán tổng quát: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) - kx - e|$ trên

đoạn $[\alpha; \beta]$ với $f(x)$ là hàm lồi trên $[\alpha; \beta]$ thì M đạt giá trị nhỏ nhất bằng

$$m = \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right|$$

Đạt được khi

$$k = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}; e = \begin{cases} m + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} & \text{nếu } f''(x) > 0, \forall x \in [\alpha; \beta] \\ -m + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} & \text{nếu } f''(x) < 0, \forall x \in [\alpha; \beta] \end{cases}$$

Áp dụng bài toán trên ta có $f(x) = x^2$; $a = -1$; $b = 3$, do đó $m = \frac{1}{2} |1 - 5| = 2$,

khi $k = \frac{f(-1) - f(3)}{-4} = 2$ và $e = -2 + \frac{(-1).9 - 3.1}{-4} = 1$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 58. Đặt $t = x^2$ ta có $t \in [0; 1]$ khi $x \in [-1; 1]$. Khi đó $y = |8t^2 + at + b|$ với $t \in [0; 1]$.

Bài toán tổng quát: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) - ax - b|$ trên đoạn $[\alpha; \beta]$ với $f(x)$ là hàm lồi trên $[\alpha; \beta]$ thì M đạt giá trị nhỏ nhất bằng

$$m = \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right|$$

Đạt được khi

$$a = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}; b = \begin{cases} m + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} & \text{nếu } f''(x) > 0, \forall x \in [\alpha; \beta] \\ -m + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta} & \text{nếu } f''(x) < 0, \forall x \in [\alpha; \beta] \end{cases}$$

Áp dụng bài toán tổng quát với $f(t) = 8t^2$ ta có:

$m = \frac{1}{2} \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{f(0) + f(1)}{2} \right| = 1$. Vậy giá trị 1 của bài toán chính là giá trị nhỏ nhất của M .

$-a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 8$ và $-b = -1 + \frac{1f(0) - 0.f(1)}{1 - 0} = -1$.

Vậy $a = -8$ và $b = 1$. Do đó $a + b = -7$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 59. Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) CH = \frac{1}{2} (2BC + 2HD) CH = (30 + 30 \cos \alpha) 30 \sin \alpha = 900 \left(\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$.

Xét hàm số: $y = \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ có:

$y' = \cos \alpha + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

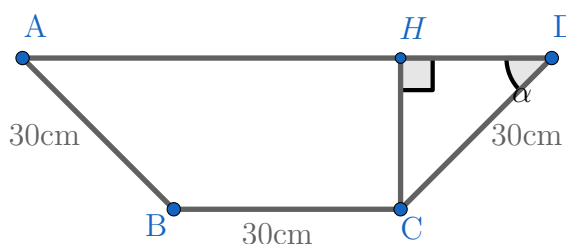
Để thấy $y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y(60^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\text{Max}\{S_{ABCD}\} = 900 \frac{3\sqrt{3}}{4} = 675\sqrt{3} (cm^2)$.

Vậy thể tích lớn nhất của máng xối là: $V =$

$675\sqrt{3}.300 = 202500\sqrt{3} (cm^3)$.

Ta chọn đáp án **(C)**



Câu 60. Ta có: $y' = 2xf'(x^2 - 2)$. Ta dùng thuật ngữ "nghiệm đơn" thay cho các nghiệm mà $f'(x)$ đổi dấu qua nghiệm đó. Như vậy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; 0; 2$ đều là các nghiệm đơn.

$$\text{Ta giải } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -2; 0; 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; x^2 = 0; x^2 = 2; x^2 = 4.$$

Vậy $y' = 0$ có các nghiệm $x = 0$ (bội 3-lặp lại 3 lần) và $x = \pm\sqrt{2}; x = \pm 2$ (đều là nghiệm đơn).

Do đó y' đổi dấu qua tất cả các nghiệm này.

Mặt khác ta có $y'(3) = 6.f'(7)$, mà 7 thuộc miền nghịch biến của $f(x)$ nên $f'(7) < 0$. Vậy $y'(3) < 0$.

Từ đây có bảng biến thiên của y :

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		$y(-2)$		$y(0)$		$y(2)$		
	$-\infty$		$y(-\sqrt{2})$		$y(\sqrt{2})$		$-\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 61. Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình có dạng $(t - m)(t^2 - mt + m^2 - 1) = 0$ (*)

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt tương đương với phương trình (*) có 3 nghiệm dương

$$\text{phân biệt, hay: } \begin{cases} m > 0; S = m > 0 \\ P = m^2 - 1 > 0; m^2 - m.m + m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}}. \\ \Delta = m^2 - 4(m^2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 62. Phương trình tương đương với: $\log_b a (\log_a x)^2 - (2 + 3\log_b a) \log_a x - 1 = 0$.

$$\text{Theo Vi-ét ta có: } \log_a x_1 + \log_a x_2 = \frac{2 + 3\log_b a}{\log_b a} = 2\log_a b + 3 = \log_a (a^3 b^2) \Leftrightarrow x_1 x_2 = a^3 b^2.$$

$$\text{Khi đó ta có } S = f(a) = a^3(10 - a)^2 \leq \max_{(1;9)} f(a) = f(6) = 3456.$$

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 63. Theo Vi-ét ta có: $\log_a x_1 + \log_a x_2 = 1 + 2\log_a b + 3\log_a c = \log_a (ab^2 c^3) \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = ab^2 c^3$.

$$\text{Theo Cauchy ta có: } x_1 \cdot x_2 = a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c = a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot 108 \leq 108 \cdot \left(\frac{a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3}}{6} \right)^6 =$$

$$108 \cdot \left(\frac{a + b + c}{6} \right)^6 = 108 \cdot \frac{50^6}{3^6} = \frac{4 \times 50^6}{27}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \Leftrightarrow a = \frac{50}{3}, b = \frac{100}{3}, c = \frac{150}{3} \Rightarrow S = \frac{700}{3}.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 64. Ta có: $8\log_m x \cdot \log_n m \cdot \log_m x - 7\log_m x - 6\log_n m \cdot \log_m x - 2017 = 0 \Leftrightarrow 8\log_n m (\log_m x)^2 - (6\log_n m + 7)\log_m x - 2017 = 0$.

Theo Vi-ét ta có $\log_m x_1 + \log_m x_2 = \frac{6\log_n m + 7}{8\log_n m} = \frac{6}{8} + \frac{7}{8}\log_m n \Leftrightarrow \log_m (x_1 x_2) = \log_m \left(m^{\frac{6}{8}} \cdot n^{\frac{7}{8}}\right)$

Vì vậy $x_1 \cdot x_2 = m^{\frac{6}{8}} \cdot n^{\frac{7}{8}} = m^{\frac{3}{4}} (2017 - m)^{\frac{7}{8}} \Rightarrow \ln(ab) = f(m) = \frac{3}{4} \ln m + \frac{7}{8} \ln(2017 - m)$.

Mà $f'(m) = \frac{3}{4m} - \frac{7}{8(2017 - m)} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{12102}{13} \Rightarrow \ln(ab) = f\left(\frac{12102}{13}\right) = \frac{3}{4} \ln \frac{12102}{13} + \frac{7}{8} \ln \frac{14119}{13}$.

Do đó $c = 12102, d = 14119 \Rightarrow S = 66561$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 65. Có $(2^a)^2 - 2 \cdot 2^a + 2(2^a - 1) \sin(2^a + b - 1) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2^a - 1)^2 + 2(2^a - 1) \sin(2^a + b - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^a - 1 + \sin(2^a + b - 1))^2 + 1 - \sin^2(2^a + b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^a - 1 + \sin(2^a + b - 1))^2 + \cos^2(2^a + b - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2^a + b - 1) = 0 \\ 2^a - 1 + \sin(2^a + b - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a + b - 1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2^a - 1 \pm 1 = 0 \end{cases}$$

Do đó $a = 1, b = \frac{\pi}{2} - 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lại có $b > 0 \Rightarrow b \geq \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow S \geq 1 + 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 1$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 66. Logarit cơ số b hai vế ta có:

$$x^2 - 1 + x \log_b a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

Khi đó $S = \left(\frac{1}{\log_b a}\right)^2 + 4\log_b a = \frac{1}{(\log_b a)^2} + 2\log_b a + 2\log_b a \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(\log_b a)^2} \cdot 2\log_b a \cdot 2\log_b a} = 3\sqrt[3]{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{(\log_b a)^2} = 2\log_b a \Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 67. Với $a^{x^2+1} = b^x$, lấy logarit cơ số a hai vế ta được: $x^2 + 1 = x \log_a b \Leftrightarrow x^2 - x \log_a b + 1 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \log_a b > 2 \Leftrightarrow b > a^2$.

Tương tự $b^{x^2-1} = (9a)^x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \log_b(9a)$. Phương trình này có hai nghiệm trái dấu với mọi $a, b > 1$.

Khi đó theo Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_a b \\ x_3 + x_4 = \log_b(9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b(9a) < 3 \Leftrightarrow \log_b(9a) < 3 \Leftrightarrow 9a < a^3 \Rightarrow a \geq 4.$$

Do $b > a^2 \Rightarrow b > 16 \Rightarrow b \geq 17 \Rightarrow S \geq 3 \cdot 4 + 2 \cdot 17 = 46$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 68. Coi hai phương trình là phương trình bậc hai với hai ẩn 2^x và 3^x .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \Delta_1 > 0; S_1 > 0; P_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0; S_2 > 0; P_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b^2 - 200a > 0.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 2^{x_1+x_2} = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = \frac{50}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \log_2 \frac{50}{a} \\ 3^{x_1+x_2} = 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 50a \Leftrightarrow x_3 + x_4 = \log_3 (50a) \end{cases}.$$

$$\text{Vì vậy: } x_3 + x_4 > x_1 + x_2 \Leftrightarrow \log_3 (50a) > \log_2 \left(\frac{50}{a} \right) \Rightarrow a \geq 3 \Rightarrow b^2 > 200a \geq 600 \Rightarrow b \geq 25 \Rightarrow S = 2a + 3b \geq 81.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 69. Cho hai số thực a, b lớn hơn 1 thay đổi thỏa mãn $a + b = 10$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 3 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1 \cdot x_2 + 9a$.

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow \log_a x (\log_b a \log_a x) - 2\log_a x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_b a (\log_a x)^2 - 2\log_a x - 3 = 0.$$

$$\text{Theo Vi-ét ta có: } \log_a x_1 + \log_a x_2 = \frac{2}{\log_b a} = 2\log_a b = \log_a b^2 \Leftrightarrow \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a b^2 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = b^2.$$

$$\text{Vậy } P = b^2 + 9a = b^2 + 9(10 - b) = \left(b - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{279}{4} \geq \frac{279}{4}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } b = \frac{9}{2}, a = \frac{11}{2}.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 70. Phương trình tương đương với: $x^2 + (x + 1)\log_a b = 0 \Leftrightarrow x^2 + x\log_a b + \log_a b = 0$.

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta = (\log_a b)^2 - 4\log_a b \geq 0 \Leftrightarrow \log_a b \geq 4 \text{ (do } \log_a b > 0).$$

$$\text{Khi đó } P = \log_a b + \frac{4}{\log_a b} + 1 = f(t) = t + \frac{4}{t} + 1 \text{ với } t = \log_a b.$$

$$\text{Mà } \min_{[4; +\infty)} f(t) = f(4) = 6.$$

$$\text{Với } t = \log_a b \geq 4.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 71. Theo giả thiết ta có: $(\log_2 a - 1 + \sin(\log_2 a + b))^2 + \cos^2(\log_2 a + b) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\log_2 a + b) = 0 \\ \log_2 a - 1 + \sin(\log_2 a + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a + b = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \log_2 a - 1 \pm 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{\pi}{2} - 1 + k\pi \\ a = 4 \\ b = \frac{\pi}{2} - 2 + k\pi \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: Nếu } a = 1 \Rightarrow b \geq \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow S \geq \frac{3\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Trường hợp 2: Nếu } a = 4 \Rightarrow b \geq \frac{3\pi}{2} - 2 \Rightarrow S \geq \frac{9\pi}{2} + 2.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 72. Phương trình tương đương với:

$$(1 + \log_a x)(1 + \log_b x) = 2018 \Leftrightarrow \log_a x \log_b x + \log_a x + \log_b x + 1 = 2018$$

$$\Leftrightarrow \log_b a (\log_a x)^2 + (1 + \log_b a) \log_a x - 2017 = 0.$$

Khi đó theo Vi-ét ta có: $\log_a x_1 + \log_a x_2 = -\frac{1 + \log_b a}{\log_b a} = -\log_a b - 1 = \log_a \frac{1}{ab} \Leftrightarrow mn = \frac{1}{ab}$.

Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ (hay gọi là Cauchy) ta có

$$P = (4a^2 + 9b^2) \left(\frac{36}{a^2 b^2} + 1 \right) \geq 2\sqrt{4a^2 \cdot 9b^2} \cdot 2\sqrt{\frac{36}{a^2 b^2} \cdot 1} = 144.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra tại } \begin{cases} 4a^2 = 9b^2 \\ \frac{36}{a^2 b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 73. Từ giả thiết $e^{a+b} \leq e(a+b)$ ta có $a+b=1$ (Do $e^x \geq ex, \forall x \in \mathbb{R}$ và đẳng thức đặt tại $x=1$).

$$\text{Và } f(a) + f(b) = f(a) + f(1-a) = \log_3 \frac{m^2 a}{1-a} + \log_3 \frac{m^2 (1-a)}{1-(1-a)} = \log_3 m^4.$$

$$f(a) + f(b) = 3 \Leftrightarrow m^4 = 27 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt[4]{27}.$$

Do vậy tích phần tử thuộc S là $-\sqrt{27} = -3\sqrt{3}$.

Ta chọn đáp án **C**

$$\textbf{Câu 74.} \text{ Ta có } f'(x) + \frac{1}{x(x+1)} \cdot f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \left[f(x) \cdot \frac{x}{x+1} \right]' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) \cdot \frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1| + C. \text{ Tại sao lại nhân hai vế với } \frac{x}{x+1}$$

xem thêm tại mục *Tích phân hàm ẩn* trong cuốn **Đột phá tư duy giải nhanh trắc nghiệm Giải tích 12**, tác giả **Lục Trí Tuyên, Nguyễn Đức Lợi, Phạm Quốc Vương** xuất bản năm 2018.

$$\text{Ta có } f(1) \cdot \frac{1}{2} = 1 - \ln 2 + C \Rightarrow C = -1.$$

$$\text{Khi đó } f(2) \cdot \frac{2}{3} = 2 - \ln 3 - 1 = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = \frac{9}{2}.$$

Ta chọn đáp án **D**

$$\textbf{Câu 75.} \text{ Đặt } I = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx \Rightarrow I = \int_{-1}^1 (x^2 - t) f(x) dx, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trong tích phân, ta có:

$$I^2 \leq \int_{-1}^1 (x^2 - t)^2 dx \cdot \int_{-1}^1 f^2(x) dx \leq 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}t + t^2 \right) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow I^2 \leq \min_{\mathbb{R}} f(t) = \frac{16}{45} \Rightarrow -\frac{4\sqrt{5}}{15} \leq I \leq \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

$$I = -\frac{4\sqrt{5}}{15} \text{ khi } f(x) = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

$$\text{Vậy } I \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 76. Áp dụng công thức từng phần, ta có:

$$\int_0^1 f''(x)(1-x)dx = \int_0^1 (1-x)df'(x) = f'(x)(1-x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)dx = -2018.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 77. Ta có: $3f(x) + x.f'(x) \geq x^{2018} \Rightarrow 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) \geq x^{2020} \Rightarrow [x^3 f(x)]' \geq x^{2020}$
 $\Rightarrow \int_0^t [x^3 f(x)]' dx \geq \int_0^t x^{2020} dx \quad \forall t \in [0; 1] \Rightarrow f(t) \geq \frac{t^{2018}}{2021}.$

Khi đó $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021} dx = \frac{1}{2019.2021}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ là $\frac{1}{2019.2021}$ khi $f(x) = \frac{x^{2018}}{2021}.$

Ta chọn đáp án **D**

Câu 78. Ta có $\int_0^1 x^4 f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5} f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{5} f'(x)dx.$ Suy ra $\int_0^1 x^5 f'(x)dx = \frac{1}{11}.$

Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int_0^1 (x^5)^2 dx = \frac{1}{11}.$

Do đó $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 x^5 f'(x)dx + \int_0^1 (x^5)^2 dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - x^5]^2 dx = 0.$

Suy ra $f'(x) = x^5$, do đó $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + C.$ Vì $f(1) = 0$ nên $C = -\frac{1}{6}.$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^6 - 1}{6} dx = \frac{-1}{7}.$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 79. Ta có: $\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 f(x) d\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) f'(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) f'(x) dx = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Hơn nữa ta có: $\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - 2\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$

$$= \left[x - 2 \ln|x+1| - \frac{1}{(x+1)} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Do đó $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) f'(x) dx + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 dx = 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1 \right]^2 dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = \ln 2 - 1$.

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1] dx = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 80. Từ giả thiết ta có $g(x) \geq 1 \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$; $g(0) = 1$ và $g'(x) = f(x)$.

$$\text{Với mọi } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ có } g(x) \leq \sqrt{f(x)} \Rightarrow g^2(x) \leq g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)} \geq 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx \geq \int_0^t 1 dx = t$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{g(x)} \Big|_0^t \geq t \Leftrightarrow -\frac{1}{g(t)} + 1 \geq t \text{ với mọi } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]. \text{ Vậy } \frac{1}{g(x)} \leq 1 - x \forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g(x)} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x) dx = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } g(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Ta chọn đáp án **D**

Câu 81. Từ giả thiết ta có $g(x) \geq 1 \forall x \in [0; 1]$; $g(0) = 1$ và $g'(x) = 3f(x)$.

$$\text{Với mọi } x \in [0; 1] \text{ có } g(x) \geq f^2(x) \Rightarrow 3\sqrt{g(x)} \geq g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} dx \leq$$

$$\int_0^t \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}t \Rightarrow \sqrt{g(x)} \Big|_0^t \leq \frac{3}{2}t \Leftrightarrow \sqrt{g(t)} - 1 \leq \frac{3}{2}t \text{ với mọi } t \in [0; 1]. \text{ Vậy } \sqrt{g(x)} \leq \frac{3}{2}x + 1$$

$$\forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 \sqrt{g(x)} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x + 1\right) dx = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \sqrt{g(x)} = \frac{3}{2}x + 1.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 82. Từ giả thiết ta có $g(x) \geq 1 \forall x \in [0; 1]$; $g(0) = 1$ và $g'(x) = 2xf(x^2)$.

$$\text{Với mọi } x \in [0; 1] \text{ có } g(x) \geq 2xf(x^2) \Rightarrow g(x) \geq g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} \leq 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)} dx \leq \int_0^t 1 dx = t$$

$$\Rightarrow \ln g(x) \Big|_0^t \leq t \Leftrightarrow \ln g(t) \leq t \text{ với mọi } t \in [0; 1]. \text{ Vậy } g(x) \leq e^x \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } g(x) = e^x. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 83. Đặt $x = t^5 + 4t + 3$ và đổi cận: $x = -2 \rightarrow t = -1$ và $x = 8 \rightarrow t = 1$. Do đó: $\int_{-2}^8 f(x) dx$

$$= \int_{-1}^1 f(t^5 + 4t + 3) d(t^5 + 4t + 3) = \int_{-1}^1 (2t + 1)(5t^4 + 4) dt = 10.$$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 84. Đặt $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 e^x f''(x) dx = I$. Sử dụng tích phân từng phần ta

có:

$$I = \int_0^1 e^x df'(x) = e^x f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx \Rightarrow ef'(1) - f'(0) = 2I;$$

$$I = \int_0^1 e^x df(x) = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f(x) dx \Rightarrow ef(1) - f(0) = 2I.$$

$$\text{Vậy } \frac{ef'(1) - f'(0)}{ef(1) - f(0)} = \frac{2I}{2I} = 1.$$

Chú ý, đối với bài toán trắc nghiệm có tính chất bất biến, ta chỉ cần chọn một hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện giả thiết để kiểm tra. Chẳng hạn trong bài này ta có thể chọn $f(x) = e^x$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 85. Từ giả thiết ta có $g(0) = 1$; $g'(x) = 2f(x)$ và $g(x) \geq 1, \forall x \in [0; 1]$.

$$\text{Có } g(x) \geq [f(x)]^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{g(x)} \geq f(x) \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{g(x)} \geq g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt[3]{g(x)}} \leq 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt[3]{g(x)}} dx \leq \int_0^t 2 dx \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{g^2(x)} \Big|_0^t \leq 2t \Rightarrow \sqrt[3]{g^2(t)} \leq \frac{4}{3}t + 1.$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 \sqrt[3]{g^2(t)} dt \leq \int_0^1 \left(\frac{4}{3}t + 1 \right) dt = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } g(x) = \left(\frac{4}{3}t + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4}{3}t + 1}$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 86. Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$. Khi đó: $\int_1^2 [f(x^3)]^2 dx + 2 \int_1^2 f(x^3) dx = \frac{2}{3} \int_1^8 f(x) dx -$

$$\int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} [f(t)]^2 dt + 2 \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} f(t) (1 - \sqrt[3]{t^2}) dt + 3 \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx = 0 (*).$$

$$\text{Mà } 3 \int_1^2 (x^2 - 1)^2 dx = \frac{38}{5} = \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} (1 - \sqrt[3]{t^2})^2 dt.$$

$$\text{Vậy } (*) \Rightarrow \int_1^8 \left[\frac{f(t) + 1 - \sqrt[3]{t^2}}{\sqrt[3]{t}} \right]^2 dt = 0 \Rightarrow f(t) = \sqrt[3]{t^2} - 1 \Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^3 dx = \frac{8 \ln 2}{27}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 87. Học sinh lưu ý công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng: “Nếu hai đồ thị cắt nhau có phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = 0$. Khi đó

diện tích hình phẳng giữa hai đồ thị đó là $S = \frac{(\sqrt{\Delta})^3}{6a^2}$ với $\Delta = b^2 - 4ac$ ”.

$$\text{Áp dụng, xét } 8x - x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - 8x + a = 0 \text{ nên } S_a = \frac{4(\sqrt{16 - a})^3}{3}.$$

Tương tự ta có: $S_b = \frac{4(\sqrt{16-b})^3}{3}$; $S_c = \frac{4(\sqrt{16-c})^3}{3}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = 8x - x^2$ và trục hoành là $S_0 = \frac{4}{3}(64)$. Mặt khác vì $S_0 = \frac{4}{3}(64) = 4S_a \Rightarrow S_a = \frac{64}{3} = \frac{4(\sqrt{16-a})^3}{3} \Rightarrow (16-a)^3 = 256$.

Có $S_b = 2S_a = \frac{128}{3} = \frac{4(\sqrt{16-b})^3}{3} \Rightarrow (16-b)^3 = 1024$ và $S_c = 3S_a = 64 = \frac{4(\sqrt{16-c})^3}{3} \Rightarrow (16-c)^3 = 2304$.

Như vậy: $(16-a)^3 + (16-b)^3 + (16-c)^3 = 3584$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 88. Đổi biến $x-2$ cho x và $x+2$ cho x , ta có:

$$\int_0^4 f'(x-2) dx + \int_0^2 f'(x+2) dx = \int_{-2}^2 f'(x) dx + \int_2^4 f'(x) dx.$$

$$\text{Như vậy: } \int_0^4 f'(x-2) dx + \int_0^2 f'(x+2) dx = \int_{-2}^4 f'(x) dx = f(4) - f(-2) = 6.$$

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 89. Từ giả thiết ta có: $\int_0^1 \left[\sqrt{f'(x)} f(x) - \frac{1}{3} \right]^2 dx \leq 0$.

$$\text{Do đó: } f'(x) f^2(x) = \frac{1}{9} \Rightarrow [f^3(x)]' = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow \int_0^1 f^3(x) dx = \frac{7}{6}.$$

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 90. Ta có:

$$\int_0^t \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^t \frac{x}{x^2+1} dx \Rightarrow \ln f(t) - \ln f(0) = \frac{1}{2} \ln(t^2+1)$$

$$\Rightarrow f(t) = \sqrt{t^2+1} \Rightarrow T = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 91. Ta có:

$$21(x^2-1)^2 - 12(x-1)^2 - 12xf(x) = [f'(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{36}{5} - 6 \int_0^1 f(x) d(x^2-1) = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow -\frac{24}{5} + 6 \int_0^1 (x^2-1) f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - 3x^2 + 3]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 92. Đặt $\tan x = t \Rightarrow 4 = \int_0^1 f(t) \cdot \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx$.

Cộng hai tích phân lại ta được $6 = \int_0^1 f(x) dx$.

Ta chọn đáp án **D**

Câu 93. Ta có: $x \cdot (2f(x) + 1) = [f'(x)]^2 \Rightarrow \sqrt{x} \sqrt{2f(x) + 1} = f'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x) + 1}} = \sqrt{x}$
 $\Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{2f(x) + 1}} d(2f(x) + 1) = \int \sqrt{x} dx \Rightarrow \sqrt{2f(x) + 1} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Vì $f(1) = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{4}{3} \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx = \frac{1186}{45}$.

Ta chọn đáp án **A**

Câu 94. Theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx \cdot \int_0^1 e^x dx \geq \left[\int_0^1 f'(x) dx \right]^2 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} \cdot (e-1) \geq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} = k \cdot \sqrt{e^x} \Leftrightarrow f'(x) = k \cdot e^x$.

Vì $\int_0^1 f'(x) dx = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{e-1}$.

Vậy $f(x) = \frac{e^x + C}{e-1}$. Mà $f(0) = 0, f(1) = 1$ nên $f(x) = \frac{e^x - 1}{e-1}$.

Vậy $I = \frac{e-2}{e-1}$.

Ta chọn đáp án **A**

Câu 95. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A, B , ta có

$$S = \frac{|a|}{6} |x_1 - x_2|^3 = \frac{1}{6} |x_1 - x_2|^3$$

Chú ý, ở đây a là hệ số bậc hai của parabol, tức $a = 1$. Đây là công thức nhanh tính diện tích giới hạn bởi Parabol và đường thẳng đã được xây dựng trong sách **Đột phá tư duy giải nhanh trắc nghiệm Giải tích 13** của tác giả **Lục Trí Tuyên, Nguyễn Đức Lợi, Phạm Quốc Vương** xuất bản 2018.

Lại có $|x_1 - x_2| \leq AB = 2$, do đó $S \leq \frac{4}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $A(-1; 1)$ và $B(1; 1)$.

Ta chọn đáp án **A**

Câu 96. Ta có: $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$

$\Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z - 1 + 2i| = 0 \\ |z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \end{cases}$

Trường hợp 1: $|(z - 1 + 2i)| = 0 \Leftrightarrow z = 1 - 2i \Rightarrow |z - 2 + 2i| = 1$.

Trường hợp 2: $|(z - 1 - 2i)| = |(z + 3i - 1)| \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$ với $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow z - 2 + 2i = \left(a - \frac{1}{2}i\right) - 2 + 2i = (a - 2) + \frac{3}{2}i \Rightarrow |z - 2 + 2i| = \sqrt{(a - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 97. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức thì M thuộc đường tròn tâm $I(-1; 2)$ bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng phức xét các điểm $A(1; 0)$, $B(-3; 4)$ thì I là trung điểm của AB .

Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác MAB có $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 2R^2 + \frac{AB^2}{2} = 32$ (không đổi).

Có $P = aMA + bMB$ nên theo bất đẳng thức Bunhiakovski ta có $P^2 \leq (a^2 + b^2)(MA^2 + MB^2) = 32(a^2 + b^2) \Rightarrow P \leq 4\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 98. Có $\frac{z - 2i}{z - 2}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \frac{z - 2i}{z - 2} + \frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} - 2} = 0 \Leftrightarrow 2|z|^2 - 2(z + \bar{z}) + 2i(z - \bar{z}) = 0$
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$.

Gọi M là điểm biểu diễn z trong mặt phẳng phức thì M thuộc đường tròn tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{2}$. Khi đó $|z| = OM$ đạt giá trị lớn nhất bằng $OI + R = 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\overrightarrow{IM} = -\frac{R}{IO}\overrightarrow{IO}$, hay $M(2; 2)$.

Vậy $z = 2 + 2i$, do đó $a + b = 4$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 99. Gọi M là điểm biểu diễn z trên mặt phẳng phức. Từ $|z + 2 + 3i| = 2$ suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-2; -3)$ bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đặt $A(-2; 5)$ và $B(6; -3)$ ta có $T = |z + 2 - 5i| + |z - 6 + 3i| = MA + MB$.

Lại thấy $IA = IB = 8$ nên I thuộc trung trực của AB và $IH = \sqrt{IA^2 - \frac{AB^2}{4}} = 4\sqrt{2}$ với $H(2; 1)$ là trung điểm AB .

Có $T^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 4MH^2 + AB^2$. Mà $MH \leq MI + IH = 2 + 4\sqrt{2}$. Do đó T lớn nhất khi MH lớn nhất hay $MA = MB$ và M, I, H thẳng hàng.

Điều kiện dấu bằng tương đương với

$$\overrightarrow{IM} = -\frac{IM}{IH}\overrightarrow{IH} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\frac{1}{4}(4; 4) \Leftrightarrow M(-3; -4).$$

Vậy $z = -3 - 4i$ hay $P = a + b = -7$.

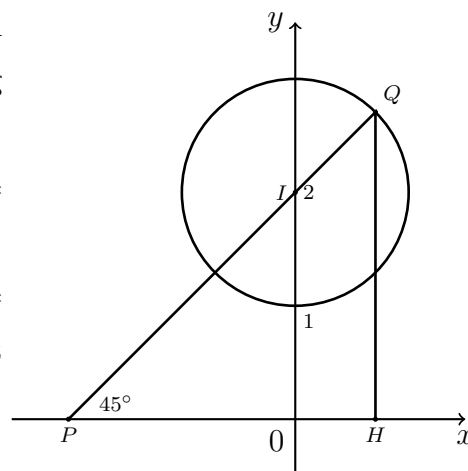
Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 100.

Cách 1: Gọi P, Q lần lượt là điểm biểu diễn z_1 và z_2 trên mặt phẳng phức. Từ giả thiết ta thấy ngay Q thuộc đường tròn tâm $I(0; 2)$ bán kính $R = 1$ và P thuộc Ox .

Ta có $\frac{z_2 - z_1}{1 + i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_2 - z_1 = k(1 + i), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} // \vec{u} = (1; 1)$. Vậy PQ tạo với Ox một góc 45° .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của Q lên Ox thì $PQ = \sqrt{2} \cdot QH$. Do đó, ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của QH .



Từ hình vẽ ta thấy ngay $\min QH = d(I; Ox) - R = 1$ và $\max QH = d(I; Ox) + R = 3$. Vậy $M = 3\sqrt{2}$ và $m = \sqrt{2}$. Suy ra $M + m = 4\sqrt{2}$.

Cách 2: Ta đặt $z_1 = a, z_2 = b + ci$ khi đó: $\frac{z_2 - z_1}{1 + i} = \frac{(a - b - ci)(i - 1)}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow c = b - a$ đồng thời ta cũng có $|z_2 - 2i| = 1 \Rightarrow b^2 + (c - 2)^2 = 1$. Do vậy $|z_1 - z_2| = |(a - b) - ci| = |c + ci| = |c| \sqrt{2}$. Vì $b^2 + (c - 2)^2 = 1 \geq (c - 2)^2 \Rightarrow 1 \leq c \leq 3 \Rightarrow 1 \leq |c| \leq 3$ do đó $|z_1 - z_2| = |c| \sqrt{2} \in [\sqrt{2}; 3\sqrt{2}] \Rightarrow T = 4\sqrt{2}$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 101. Ta có: $|(3 + 4i)z| = 5(m^2 + 2m + 5) \Rightarrow |w + 2i| = 5(m^2 + 2m + 5)$.

Vậy $R = 5(m^2 + 2m + 5) \geq 20$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 102. Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Khi đó số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$ được biểu diễn bởi điểm $M'(a; -b)$.

Ta có: $z(4 + 3i) = (a + bi)(4 + 3i) = 4a + 3ai + 4bi - 3b = (4a - 3b) + (3a + 4b)i$, do đó số phức $z(4 + 3i)$ được biểu diễn bởi điểm $N(4a - 3b; 3a + 4b)$ Khi đó điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z(4 + 3i)$ là $N'(4a - 3b; -3a - 4b)$ Do $M'N'$ đối xứng với MN qua Ox nên $MM'N'N$ là hình thang cân. Vì vậy, $MM'N'N$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow y_M = y_N \Leftrightarrow b = -3a - 4b \Leftrightarrow a + b = 0$, hay M di chuyển trên đường thẳng $d: x + y = 0$.

Gọi $A(5; -4)$ thì $|z + 4i - 5| = AM$ nên $\min AM = d(A; d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 103. Gọi $M(x; y)$ biểu diễn z trong mặt phẳng phức thì

$$\begin{cases} x = m - 2 \Rightarrow m = x + 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y = (x + 2)^2 - 1.$$

Vậy (C) là Parabol có phương trình $y = x^2 + 4x + 3$.

Dễ thấy $\Delta = 4$, do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và Ox là

$$S = \frac{\sqrt{\Delta^2}}{6a^2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 104. Có $z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2) = 0 \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$. Vậy tam giác OAB cân tại O .

$$\text{Lại có } z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} + \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{|z_1|^2} = 1$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 \Rightarrow |z_1|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2 = |z_2|^2$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_2|^2 \Rightarrow AB = OB.$$

Vậy tam giác OAB đều.

Mà diện tích OAB bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ chứng tỏ $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 2 = a$.

Vậy $|z_1 + z_2| = 2OM = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3}$, trong đó M là trung điểm của AB .

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 105. Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ ta có $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{Có } w = z^3 + \frac{z^3 \cdot \overline{z^3}}{z^3} = z^3 + \overline{z^3} = (z + \overline{z})^3 - 3z \cdot \overline{z} \cdot (z + \overline{z}) = 8x^3 - 6x = f(x).$$

Ta dễ dàng tìm được $M = \max_{[-1;1]} f(x) = 2$ và $m = \min_{[-1;1]} f(x) = -2$. Vậy $P = 8$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 106.

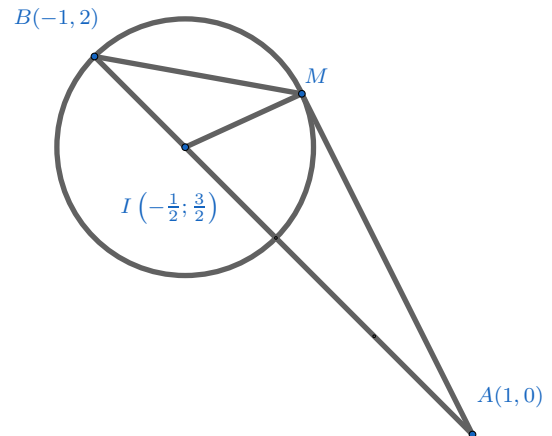
Gọi M là điểm biểu diễn z . Từ giả thiết có M thuộc

đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi $A(1;0)$ và $B(-1;2)$ thì $P = MA + 3MB$.

Dễ dàng kiểm tra thấy I thuộc đoạn AB và $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IB}$, do đó

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MI^2 + IA^2 + 3IB^2 = 8$$



Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có:

$$MA + 3MB \leq \sqrt{(MA^2 + 3MB^2)(1 + 3)} = 4\sqrt{2}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 107. Có $i \cdot z = i + 2i^2 + \dots + 2016i^{2016} + 2017i^{2017}$.

$$\text{Vậy } z - i \cdot z = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2016} - 2017i^{2017} = \frac{1 - i^{2017}}{1 - i} - 2017i = 1 - 2017i.$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 - 2017i}{1 - i} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1 + 2017^2}{2}} = \sqrt{2034145}$$

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 108. Ta có:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \end{cases} \Rightarrow A = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = \frac{8}{3}.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 109. Ta có : $\max P = \max |z| > 0 \Leftrightarrow \max P^{2017} = \max |z|^{2017} = \max |z^{2017}|$.

Mặt khác ta cũng có: $\min P = |z| > 0 \Leftrightarrow \min P^{2017} = \min |z|^{2017} = \min |z^{2017}|$.

Gọi $z^{2017} = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z^{2017} là đường tròn tâm $I(0; 1)$

có bán kính $R = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max P^{2017} = 2 \\ \min P^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max P = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2} \\ \min P = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}.$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 110. Ta xét các điểm $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ và $M(x; y)$ với M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức. Ta có :

$$2|z - 1| + 3|z - i| = 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + 3\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 2MA + 3MB.$$

Ta có : $2MA + 3MB = 2(MA + MB) + MB \geq 2AB + MB = 2\sqrt{2} + MB \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow 2|z - 1| + 3|z - i| \geq 2\sqrt{2}.$

Mà theo giả thiết ta có : $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}.$

Vậy $2|z - 1| + 3|z - i| = 2\sqrt{2}$. Dấu xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} M \in AB \\ MB = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow M(0; 1) \Rightarrow |z| = 1.$

Ta chọn đáp án **D**

Câu 111. Ta có $|z^2 - z|^2 = |z|^2 |z - 1|^2 = |z - 1|^2 = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{2 - 2x}$ (chú ý $x^2 + y^2 = 1$).

Có $|z^2 + z + 1| = |z^2 + z + z\bar{z}| = |z| |z + 1 + \bar{z}| = |z + 1 + \bar{z}| = |2x + 1|.$

Vậy $P = |2x + 1| + \sqrt{2 - 2x} = f(x)$ với $x \in [-1; 1]$.

Khảo sát hàm $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ ta tìm được $\max P = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{8}.$

Ta chọn đáp án **A**

Câu 112. Gọi M là điểm biểu diễn z trong mặt phẳng phức. Dễ thấy M thuộc đường tròn tâm $O(0; 0)$ bán kính $R_1 = 1$ và đường tròn tâm $I(\sqrt{3}; -1)$ bán kính $R_2 = m$, ($m > 0$).

Có duy nhất 1 số phức thỏa mãn bài toán tương đương với có duy nhất điểm M thỏa mãn. Điều này xảy ra khi và chỉ khi hai đường tròn (O) và (I) tiếp xúc.

Trường hợp 1: Tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow 2 = 1 + m \Leftrightarrow m = 1 > 0.$

Trường hợp 2: Tiếp xúc trong $\Leftrightarrow OI = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow 2 = |m - 1| \Leftrightarrow m = 3; m = -1.$ Vậy $m = 3 > 0$ thỏa mãn.

Vậy có hai số thực m thỏa mãn.

Ta chọn đáp án **C**

Câu 113. Ta có $P^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Theo giả thiết ta có $|z_1 + z_2|^2 = 100$ và $|z_1 - z_2|^2 = 4$.

Mặt khác $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (coi z_1 và z_2 là hai vector để chứng minh).

Vậy $P^2 \leq 104 \Rightarrow P \leq 2\sqrt{26}$. Đẳng thức xảy ra khi $|z_1| = |z_2| = \sqrt{26}$ và $|z_1 - z_2| = 2$, ứng với hai điểm nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{26}$ và dây cung $MN = 2$. Có vô số cặp điểm M, N thỏa mãn.

Ta chọn đáp án (B)

Câu 114. Ta có:
$$\begin{cases} |1 + z^{2017}| + |1 + z^{2016}| \geq |(1 + z^{2017}) - (1 + z^{2016})| = |z|^{2016} |1 - z| = |1 - z| \\ |1 + z^{2015}| + |1 + z^{2014}| \geq |(1 + z^{2015}) - (1 + z^{2014})| = |z|^{2014} |1 - z| = |1 - z| \\ \dots \\ |1 + z^3| + |1 + z^2| \geq |(1 + z^3) - (1 + z^2)| = |z|^2 |1 - z| = |1 - z| \end{cases}$$

Vậy: $P = 1008|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \dots + |1 + z^{2017}| \geq$

$1008(|1 + z| + |1 - z|) \geq 1008|(1 + z) + (1 - z)| = 2016$.

Đẳng thức xảy ra khi $z = -1$.

Ta chọn đáp án (B)

Câu 115. Gọi M là điểm biểu diễn z trong mặt phẳng phức. Ta có M thuộc các đường tròn tâm $O(0; 0)$, $R = 1$ và tâm $I(3, 4)$, $R' = m$, ($m > 0$).

Có duy nhất số phức thỏa mãn bài toán tương đương với hai đường tròn tiếp xúc.

Do đó có hai trường hợp tiếp xúc ngoài và trong cho nên $R + R' = OI \Leftrightarrow m = 4$ hoặc $OI = R' - R \Leftrightarrow m = 6$.

Ta chọn đáp án (A)

Câu 116. Áp dụng công thức: với $|z + \frac{z_0}{z}| \leq k$ thì $\max|z| = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4|z_0|}}{2}$.

Ta được $\max|z| = 1 + \sqrt{5}$. Khi đó $\max P = 8 + 3\sqrt{5}$.

Ta chọn đáp án (D)

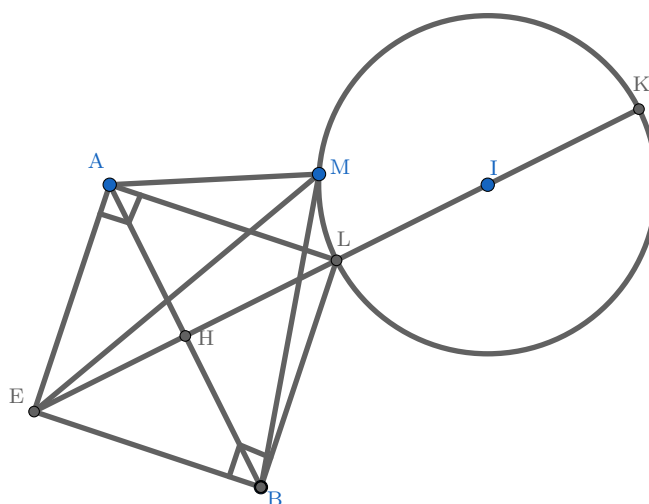
Câu 117.

Gọi M là điểm biểu diễn z thì từ giả thiết cho thấy M thuộc đường tròn $I(4; 3)$ bán kính $R = \sqrt{5}$.

Gọi $A(-1; 3)$, $B(1; -1) \Rightarrow IA = IB = 5 > R$. Vậy I thuộc trung trực của AB .

Đặt $T = |z + 1 - 3i| + |z - 1 + i| \Rightarrow T = MA + MB$.

• $MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)} \Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{4MH^2 + AB^2} \Rightarrow MA + MB \leq \sqrt{4KH^2 + AB^2} = 10\sqrt{2}$.



• Lấy E sao cho $\widehat{LAE} = \widehat{LAE} = 90^\circ$. Định lý Ptolemé ta có: $MA.EB + MB.EA \geq ME.AB$
 $\Rightarrow MA + MB \geq ME \cdot \frac{AB}{EB} \geq EL \cdot \sqrt{2} \Rightarrow MA + MB \geq 2\sqrt{10}$.

Đẳng thức xảy ra lần lượt tại K và L .

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 118. Gọi M là điểm biểu diễn số phức z .

Ta có: $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1 \Leftrightarrow |z - 2i| = 1$. Vậy $M(z)$ thuộc đường tròn tâm $I(0; 2)$, $R = 1$. Do đó,
 $|z| \leq OI + R = 3$

Lại có $|w - z| = |iz - z| = \sqrt{2} \cdot |z| \leq 3\sqrt{2}$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 119. Ta có: $(z - 1)^4 = (2z - i)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} (z - 1)^2 = (2z - i)^2 \\ (z - 1)^2 = -(2z - i)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 = \pm(2z - i) \\ z - 1 = \pm i(2z - i) \end{cases}$
 $\Leftrightarrow z_1 = \frac{1+i}{3}; z_2 = -1+i; z_3 = 0; z_4 = \frac{2+4i}{5} \Rightarrow P = \frac{17}{9}$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 120.

Kẻ CH vuông góc với $mp(ABD)$ (H là trọng tâm của $\triangle ABD$) thì $EH \cap AB = F$. Mặt phẳng CEF chính là mặt phẳng chứa CE và vuông góc với ABD .

Ta có $V(A.ECF) = V(F.ACE) = 2V(F.ACD)$ do $S(ACE) = 2.S(ACD)$.

Mà $V(F.ACD) = V(A.CDF)$. Ta chỉ cần tính $\frac{AF}{AB}$.

Có $\frac{d(A; EF)}{d(M; EF)} = \frac{AH}{MH} = 2$ và $\frac{d(A; EF)}{d(D; EF)} = \frac{AE}{DE} = 2$. Suy ra $d(M; EF) = d(D; EF)$ hay

I là trung điểm của DM . Vậy $\frac{BI}{MI} = 3$.

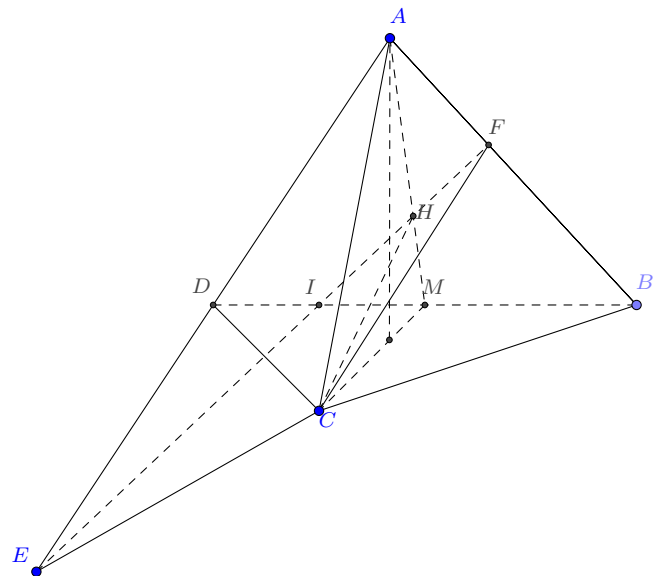
Lại có $\frac{d(B; EF)}{d(M; EF)} = \frac{BI}{MI} = 3$. Vậy $\frac{d(A; EF)}{d(B; EF)} = \frac{2}{3}$, suy ra $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{5}$.

Vậy $V(A.CDF) = \frac{2}{5}V(A.BCD) \Rightarrow V(AECF) = \frac{4}{5}V(ABCD) = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

Vậy $V(AECF) = \frac{\sqrt{2}}{15}a^3$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 121.



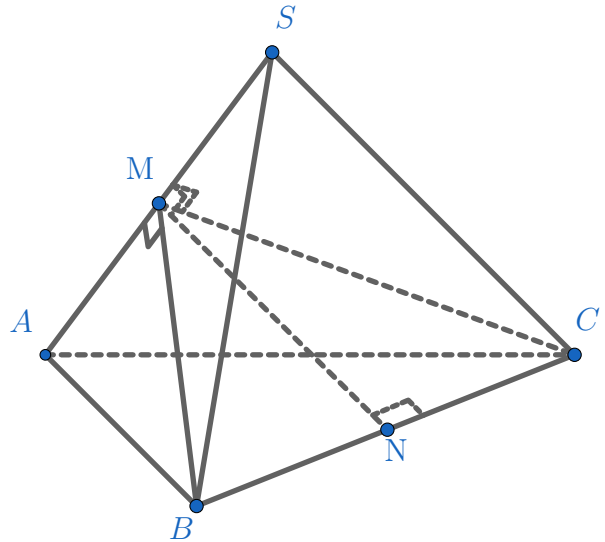
Ta gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC .

Để chứng minh được $SA \perp (MBC)$ và ΔMBC cân tại M .

$$\text{Ta có } MN^2 = MB^2 - \frac{BC^2}{4} = AB^2 - \frac{SA^2}{4} - \frac{BC^2}{4} = 1 - \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

$$\text{Do đó } V = V_{S.ABC} = \frac{1}{6}xy \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4}}.$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ nên } V \leq \frac{1}{6}xy \sqrt{1 - \frac{xy}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(xy)^2 \cdot (2 - xy)}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y.$$



$$\text{Đặt } t = xy \text{ và xét } f(t) = t^2(2-t), f(t) \text{ đạt GTLN trên } (0; 2) \text{ khi } t = \frac{4}{3}, \text{ suy ra } x = y = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 122. Ta có: $R^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với $OA = a, OB = b, OC = c$.

$$\text{Lưu ý tính chất } S_{ABC}^2 = S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2 \text{ Có } r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

$$\text{Vậy } \frac{2R}{r} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot (ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2})}{abc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số ta có:

$$\frac{2R}{r} \geq \frac{\sqrt{3\sqrt{a^2b^2c^2}} \cdot (3\sqrt{a^2b^2c^2} + \sqrt{3\sqrt{a^4b^4c^4}})}{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{2R}{r} \geq \sqrt{3}(3 + \sqrt{3}) = 3 + 3\sqrt{3} \Rightarrow \frac{R}{r} \geq \frac{3 + \sqrt{27}}{2}.$$

$$\text{Vậy } a = 3; b = 27 \Rightarrow a + b = 30.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 123. Gọi tâm $I(a, b, c)$, ta có $a + 2b + c = 4$. Vì $d(I, Ox) = d(I, Oy) = d(I, Oz) \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{c^2 + a^2} \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$

- Nếu $a = t, b = t, c = t \Rightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 1; 1)$
- Nếu $a = t, b = t, c = -t \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow I(2; 2; -2)$
- Nếu $a = t, b = -t, c = t \Rightarrow 0 = 4$ (Loại)
- Nếu $a = -t, b = t, c = t \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow I(-2; 2; 2)$

Vậy có tất cả 3 mặt cầu thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Ta chọn đáp án **C**

Câu 124. Gọi $B(x; y; z)$, $x > 0$, ta có $OA = 2\sqrt{2} \Rightarrow OB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Lại có $AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8$.

Điểm B thuộc mặt cầu nên $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$.

Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ x + y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow B(2; 0; -2).$$

Vậy phương trình mặt phẳng $(OAB) : x - y + z = 0$.

Ta chọn đáp án **(C)**

Câu 125. Ta có $R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 90$ và $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$.

Khi đó: $4 \leq a \leq \sqrt{29}; 5 \leq b \leq \sqrt{38}$.

Ta có: $OA + OB + OC = a + b + c = a + b + \sqrt{90 - a^2 - b^2} = f(a, b)$.

Xét $f'(a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{90 - a^2 - b^2}} = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{45 - \frac{b^2}{2}}$.

Lập bảng biến thiên ta được:

$\min f(a, b) = \min \{f(4); f(\sqrt{29})\} = \min \{b + 4 + \sqrt{74 - b^2}; b + \sqrt{29} + \sqrt{61 - b^2}\}.$

Dễ thấy: $b + 4 + \sqrt{74 - b^2} < b + \sqrt{29} + \sqrt{61 - b^2} \quad \forall b \in [5; \sqrt{38}] \Rightarrow \min f(a, b) = b + 4 + \sqrt{74 - b^2} = f(b).$

Do $f'(b) = 1 - \frac{b}{\sqrt{74 - b^2}} = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{37}$ nên lập bảng biến thiên ta được $\min f(a, b) = f(5) = 16$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $OA + OB + OC$ là 16 khi $a = 4, b = 5, c = 7$.

Ta chọn đáp án **(B)**

Câu 126. Ta thấy cả A và B cùng nằm ngoài mặt cầu đồng thời $\begin{cases} IA = 4\sqrt{2} = 2R \\ IB = \sqrt{30} \end{cases}.$

Mục đích cách giải là tìm C sao cho $MA = 2MC$ với mọi điểm M thuộc mặt cầu.

Lấy điểm C trên IA sao cho $IC \cdot IA = R^2$. Khi đó $IC \cdot IA = IM^2 \Rightarrow \frac{IC}{IM} = \frac{IM}{IA}$ hay $\triangle ICM$

và $\triangle IMA$ đồng dạng với nhau. Vậy $\frac{AM}{MC} = \frac{IA}{IM} = 2$ hay $AM = 2MC$. Dễ thấy $\vec{IA} = 4\vec{IC} \Rightarrow C(0; 3; 0)$.

Khi đó $MA + 2MB = 2(MB + MC) \geq 2BC = 3\sqrt{2}$.

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 127. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu. Khi đó: $R = d(I, (MSN)) = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{1} - 1 \right|}{1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}.$

Chú ý: $1 + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = 1 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{2}{mn} = 1 + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = \left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right|^2.$

Vậy $R = \frac{\left| \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{1} - 1 \right|}{\left| \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right|}.$

Chọn $a = b = 1 - c \Rightarrow R = |a|$ và tâm $I(a; a; 1 - a)$.

$$\Rightarrow IM = \sqrt{2(a-1)^2 + a^2} = |a| \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 128. Gọi a, b, c lần lượt là hoành độ, tung độ và cao độ của A, B, C ta có mặt phẳng

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$(P) \text{ qua } M \text{ nên } 1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{(1+2+3)^2}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 36.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ a+b+c = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \\ c = 18 \end{cases}.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 129. Ta có: $OH \perp (\alpha) \Rightarrow R = OH = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$$\text{Lại có: } a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - 2 \geq 2.$$

$$\text{Vậy } R \geq \sqrt{2}.$$

Ta chọn đáp án **C**

Câu 130. Dễ thấy C là giao của phân giác trong d của $\triangle AMN$ với (P) . Ta có: $AM = 3; AN = 5$.

Phân giác trong $\triangle AMN$ có vector chỉ phương: $\frac{\vec{AM}}{AM} + \frac{\vec{AN}}{AN} = \left(\frac{1}{3}; \frac{19}{15}; \frac{22}{15}\right) // \vec{u} = (5; 19; 22)$

$$\Rightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 19t \\ z = -1 + 22t \end{cases} \text{ Thay vào phương trình } (P) \Rightarrow C(6; 21; 21).$$

Ta chọn đáp án **C**

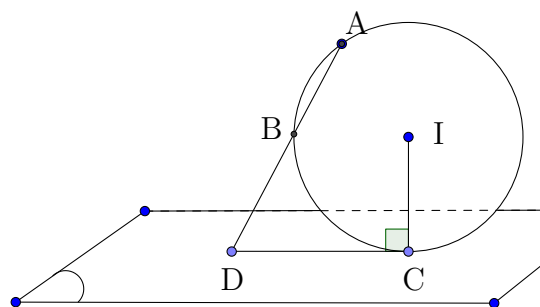
Câu 131.

Ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm $D(3; 3; 3)$ là giao điểm của (AB) và (P) . Do đó theo tính chất của phương tích ta được: $DA \cdot DB = DI^2 - R^2$. Mặt khác vì DC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) cho nên $DC^2 = DI^2 - R^2$.

Do vậy $DC^2 = DA \cdot DB = 36$ cho nên $DC = 6$ (Là một giá trị không đổi).

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định tâm D với bán kính $R = 6$.

Ta chọn đáp án **D**



Câu 132. Gọi tâm 1 mặt cầu tiếp xúc là $I(a, b, c)$ khi đó bán kính mặt cầu: $R = IA = d(I, (P))$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{(a-2)^2 + (b-11)^2 + (c+5)^2} = \frac{|2ma + (m^2 + 1)b + (m^2 - 1)c - 10|}{(m^2 + 1)\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{(a-2)^2 + (b-11)^2 + (c+5)^2} = \frac{|m^2(b+c) + 2ma + b - c - 10|}{(m^2+1)\sqrt{2}} \text{ đúng với } \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do vậy } \begin{cases} a=0 \\ b+c=b-c-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-5 \end{cases} \text{ nên } R = \sqrt{4+(b-11)^2} = \frac{|b-5|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} b=9 \\ b=25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 + R_2 = 12\sqrt{2}.$$

Ta chọn đáp án **(D)**

Câu 133. Gọi $I(x; 0; 0)$ là tâm mặt cầu. Khi đó bán kính:

$$R^2 = r^2 + d^2(I, (Q)) = 2^2 + d^2(I, (P)) \Leftrightarrow r^2 + \frac{(2x-1)^2}{6} = 4 + \frac{(x+1)^2}{6} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2(r^2 - 4) = 0.$$

$$\text{Do đó có duy nhất 1 tâm mặt cầu thỏa mãn } \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Ta chọn đáp án **(B)**

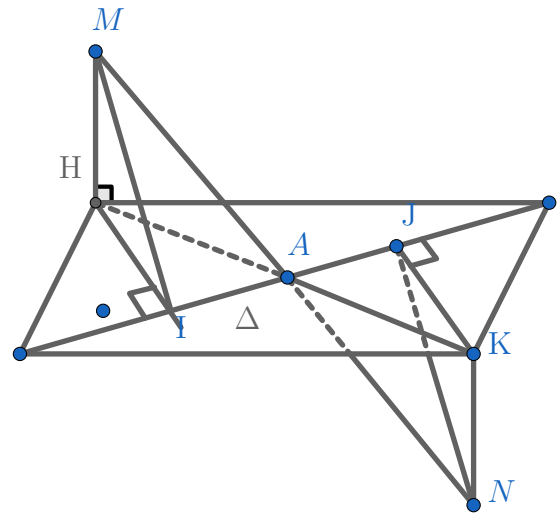
Câu 134.

Ta gọi (Q) là mặt phẳng qua điểm $A(2, 1, 0)$, song song với mặt phẳng (P) thì $(Q) : x - y - z - 1 = 0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M, N lên (Q) và I, J lần lượt là hình chiếu của H, K lên Δ thì MI, NJ lần lượt là khoảng cách từ M, N đến Δ .

Khi đó $MI + NJ \geq MC + ND = 2d(M, (Q))$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi Δ là đường thẳng đi qua H, K . Hơn nữa, ta thấy $A(2, 1, 0)$ là trung điểm MN nên A cũng là trung điểm của HK , hay HK đi qua A .



Vậy một vector chỉ phương của Δ là $[\overrightarrow{MN}, \vec{n}_{(Q)}, \vec{n}_{(Q)}] = (-6; 0; -6) // (1; 0; 1)$.

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 135. Đặt vào hệ tọa độ $Oxyz$ với $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; 1)$ trong đó $a, b, c > 0$ và $a + b = 1$.

$$\text{Có bất đẳng thức quen thuộc } (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} (*).$$

Do OA, OB, OC đôi một vuông góc nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có kích thước a, b, c nên bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện là $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

$$\text{Theo } (*) \text{ ta có } R \geq \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Đẳng thức đạt được khi } a = b = \frac{1}{2}.$$

Ta chọn đáp án **(A)**

Câu 136. Ta nhận thấy $A \in (P)$ và $AB = 2\sqrt{3}$ do vậy $P = \frac{MA + 2\sqrt{3}}{MB} = \frac{MA + AB}{MB}$.

Cách 1: Ta có $P^2 \leq \frac{2(MA^2 + AB^2)}{MB^2}$. Nếu $\widehat{MAB} \geq 90^\circ \Rightarrow MA^2 + AB^2 \leq MB^2 \Rightarrow P^2 \leq 2$.

Nếu $\widehat{MAB} < 90^\circ$, theo định lý hàm số cos ta có $MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2MA \cdot AB \cdot \cos \widehat{MAB} \geq MA^2 + AB^2 - 2MA \cdot AB \cdot \cos \alpha$ với α là góc giữa AB và (P) . Suy ra $MB^2 \geq MA^2 + AB^2 - (MA^2 + AB^2) \cos \alpha = (MA^2 + AB^2) 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow P^2 \geq \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Mà $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ nên $\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} > 2$. Vậy $P \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{54 + 6\sqrt{78}}$ trong mọi trường hợp.

Đẳng thức xảy ra khi M thuộc hình chiếu của tia AB lên (P) và $AB = AM$.

Cách 2: Áp dụng định lý hàm số sin: $P = \frac{\sin \widehat{MBA} + \sin \widehat{AMB}}{\sin \widehat{MAB}} = \frac{\cos \left(\frac{\widehat{MBA} - \widehat{AMB}}{2} \right)}{\sin \frac{\widehat{MAB}}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\widehat{MAB}}{2}}$.

Do $\widehat{MAB} \geq \alpha$ với α là góc tạo bởi AB và (P) nên $\frac{1}{\sin \frac{\widehat{MAB}}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Vậy $P \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{54 + 6\sqrt{78}}$. Đẳng thức xảy ra khi M thuộc hình chiếu của tia AB lên (P) và $AB = AM$.

Ta chọn đáp án **C**

Câu 137. Ta có: $\max d(O; (P)) = OM$ khi (P) có $\vec{n} = \vec{OM} = (3; 4; 5)$.

$$\Rightarrow (P): 3x + 4y + 5z - 50 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{50}{3}} + \frac{y}{\frac{25}{2}} + \frac{z}{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{50}{3}, b = \frac{25}{2}, c = 10 \Rightarrow V_{OABC} = \frac{3125}{9}.$$

Ta chọn đáp án **B**

Câu 138. Trong phương trình (P) chia hai vế cho abc , ta có $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{3}}{a} + \frac{\frac{1}{3}}{b} + \frac{\frac{1}{3}}{c} = 1.$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \in (P) \forall a, b, c.$$

Do đó $E = 1$.

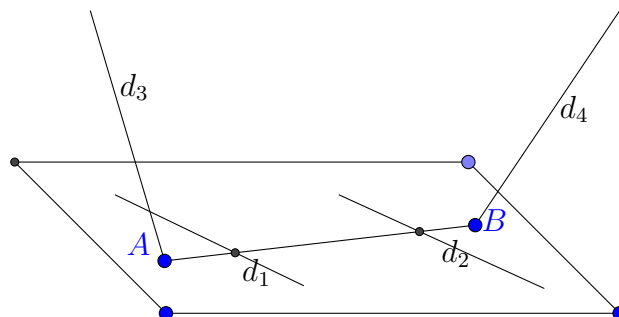
Ta chọn đáp án **A**

Câu 139.

Dễ thấy $d_1 // d_2$ do đó chúng cùng thuộc mặt phẳng (P) .

Viết phương trình mặt phẳng (P) và tìm $A = d_3 \cap (P)$, $B = d_4 \cap (P)$.

Đường thẳng Δ chính là đường thẳng qua A, B .



Ta chọn đáp án **B**

