

Chương 06

HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 11

Biên soạn

LÊ MINH TÂM



Mục lục

⌘ Bài 01. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

A. Lý thuyết

1. Lũy thừa với số mũ nguyên.....	3
2. Căn bậc n.....	3
3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ	4
4. Lũy thừa với số mũ thực:.....	4

B. Bài tập

➤ Dạng 1. Tính giá trị biểu thức.....	5
➤ Dạng 2. Rút gọn biểu thức.....	7
➤ Dạng 3. So sánh.....	8
➤ Dạng 4. Bài toán lãi kép.....	9

C. Luyện tập

⌘ Bài 02. PHÉP TÍNH LOGARIT

A. Lý thuyết

1. Khái niệm logarit.	19
2. Tính logarit bằng máy tính cầm tay.	19
3. Tính chất của phép tính logarit.....	19
4. Công thức đổi cơ số	20

B. Bài tập

➤ Dạng 1. Tính giá trị biểu thức.....	21
➤ Dạng 2. Biểu diễn logarit	22

C. Luyện tập

⌘ Bài 03. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

A. Lý thuyết

1. Hàm số mũ.....	26
2. Hàm số logarit	27

B. Bài tập

➤ Dạng 1. Tập xác định của hàm số.....	28
➤ Dạng 2. Đạo hàm của hàm số	30
➤ Dạng 3. Sự biến thiên của hàm số	32
➤ Dạng 4. Đồ thị của hàm số.....	34

C. Luyện tập

⌘ Bài 04. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. Lý thuyết

1. Phương trình mũ.	40
2. Phương trình logarit.	41

B. Bài tập

✎ Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản.....	42
✎ Dạng 2. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số	43
✎ Dạng 3. Phương trình mũ dùng logarit hóa.....	44
✎ Dạng 4. Phương trình mũ đặt ẩn phụ cơ bản	45
✎ Dạng 5. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp.....	47
✎ Dạng 6. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1	49
✎ Dạng 7. Phương trình logarit cơ bản.....	51
✎ Dạng 8. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số	52
✎ Dạng 9. Phương trình logarit dùng mũ hóa.....	53
✎ Dạng 10. Phương trình logarit đặt ẩn phụ	55

C. Luyện tập

✎ Bài 05. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

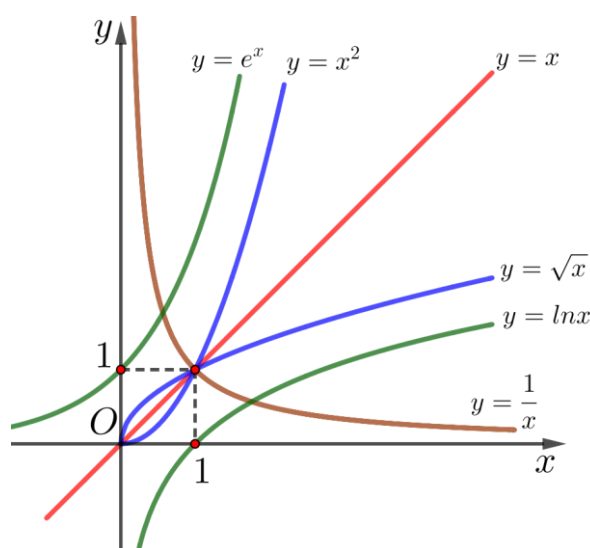
A. Lý thuyết

1. Bất phương trình mũ.....	61
2. Bất phương trình logarit.....	62

B. Bài tập

✎ Dạng 1. Bất phương trình mũ cơ bản.....	63
✎ Dạng 2. Bất phương trình mũ đưa về cùng cơ số	64
✎ Dạng 3. Bất phương trình mũ dùng logarit hóa.....	65
✎ Dạng 4. Bất phương trình mũ đặt ẩn phụ	66
✎ Dạng 5. Bất phương trình logarit cơ bản.....	67
✎ Dạng 6. Bất phương trình logarit đưa về cùng cơ số	68
✎ Dạng 7. Bất phương trình logarit dùng mũ hóa.....	69
✎ Dạng 8. Bất phương trình logarit đặt ẩn phụ	71

C. Luyện tập



A Lý thuyết

1. Lũy thừa với số mũ nguyên.



Định nghĩa:

Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

- Với a là số thực tùy ý: $a^n = a.a...a$ (n thừa số a).
- Với a là số thực khác 0: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Trong biểu thức a^m , a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

⌘ Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên dương. Với $a \neq 0$; $b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$\textcircled{1} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \textcircled{2} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \textcircled{3} (ab)^m = a^m \cdot b^m \quad \textcircled{4} \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$



Chú ý

- 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.
- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

2. Căn bậc n .



Định nghĩa:

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

- Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$

⌘ Ta có các tính chất sau (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa):

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases} & \textcircled{2} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} & \textcircled{3} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0 \\ \textcircled{4} \sqrt[n]{a^m} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m & \textcircled{5} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \end{aligned}$$

Chú ý

n lẻ	$b \in \mathbb{R}$	♦ Có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu $\sqrt[n]{b}$.
n chẵn	$b < 0$	♦ Không tồn tại căn bậc n của b
	$b = 0$	♦ Có một căn bậc n của b là 0
	$b > 0$	♦ Có hai bậc n của a là hai số đối nhau, ♦ Căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$, căn có giá trị âm ký hiệu là $-\sqrt[n]{b}$.

✎ Nếu n chẵn thì $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa chỉ khi $b \geq 0$.

✎ Nếu n lẻ thì $\sqrt[n]{b}$ luôn có nghĩa với mọi số thực b .

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ



Định nghĩa:

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , được xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ thực:



Định nghĩa:

Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là lũy thừa của số thực dương a với số mũ α .

✎ Kí hiệu: $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$ với $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

B Bài tập

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức



Phương pháp

- ☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.
- ☑ Chọn $a; b$ là các số thực dương và $\alpha; \beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

$$\textcircled{1} a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\textcircled{2} \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\textcircled{3} (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\textcircled{4} (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$



Ví dụ 1.1.

Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{16^{0,75}}$$

$$(3) \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (a, b > 0).$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của biểu thức

$$(1) P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8}$$

$$(2) S = 27^{\frac{1}{3}}$$

$$(3) A = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-1,25}$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của biểu thức

$$(1) A = \frac{3^4 \cdot 3^{-2} + 2^5 \cdot 2^{-4}}{2^4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3^5 \cdot 3^{-4}}$$

$$(2) B = \frac{3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (2^2)^{-3} \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}}{5^{-3} \cdot 25^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{25}\right)^{-1}}.$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}$.

(2) Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $a.b$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 2. Rút gọn biểu thức



Phương pháp

- ☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.
- ☑ Chọn $a; b$ là các số thực dương và $\alpha; \beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

① $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

② $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$

④ $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$



Ví dụ 2.1.

Rút gọn các biểu thức:

(1) $P = a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a > 0$

(2) $Q = a^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{a}$ với $a > 0$

(3) $K = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}$, với $x > 0$

(4) $M = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$

 **Lời giải**

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P = a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

(2) Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}$ ($x > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

 Dạng 3. So sánh



Phương pháp

- (1) Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $a^m > a^n$.
- (2) Nếu $m > n$ thì $0 < a < 1$ khi và chỉ khi $a^m > a^n$.



Ví dụ 3.1.

Thực hiện các yêu cầu sau:

- (1) Cho $A = 199^{2023}$; $B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B .
- (2) Sắp theo $A = 3^{4999}$, $B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

 Lời giải

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Với những giá trị nào của a thì

- (1) $a^e > a^\pi$
- (2) $(a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}}$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

 Dạng 4. Bài toán lãi kép



Phương pháp

☑ Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

☑ Công thức: $T_n = T_0(1+r)^n$

 Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.



Ví dụ 4.1.

Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

 **Lời giải**

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 243 101 250 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.3.

Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.4.

Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100 000 000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.5.

Lãi suất cho vay tại PVcomBank trong tháng 5/2022 rất ưu đãi, ở mức 5%/năm, được áp dụng trong 6 tháng đầu, từ tháng thứ 7 trở đi ấn định mức lãi 12%/năm. Tại ngân hàng này, thời hạn cho vay mua nhà tối đa là 20 năm, mức vay tối đa 85% giá trị tài sản đảm bảo. Một người có khả năng trả cố định hằng tháng là 15 triệu. Giả sử người đó có thể mượn người thân 15% giá trị căn nhà, nếu được sử dụng gói vay ở trên với thời hạn tối đa và mức vay tối đa thì có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa khoảng?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C Luyện tập

Câu 1. Tính giá trị biểu thức:

(1) $E = 2^{3-\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$

(2) $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$

(3) $N = 2019^{\sqrt{2020}} \cdot \left(\frac{1}{2019}\right)^{\sqrt{2020}-2}$

(4) $T = \left(2^{2020} + 2(1-2^{2019})\right) \sqrt[3]{2}$

(5) $M = \frac{\left(2^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}{2^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-2}}$

(6) $Y = \frac{\sqrt[5]{5^2 \sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5 \sqrt{5}}} + \frac{5 \sqrt[3]{5}}{5^{-2}}$

Câu 2. Tính giá trị biểu thức:

(1) $P = \left(2\sqrt{6} - 5\right)^{2020} \left(2\sqrt{6} + 5\right)^{2021}$

(2) $S = \left(\sqrt{5} - 2\right)^{2020} \cdot \left(\sqrt{5} + 2\right)^{2021}$

(3) $T = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2020} \left(4\sqrt{3} - 7\right)^{2019}$

(4) $W = \left(2\sqrt{5} - \sqrt{19}\right)^{2018} \left(\sqrt{20} + \sqrt{19}\right)^{2019}$

(5) $F = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2018} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2019}$

(6) $G = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)^{100} \cdot \left(12\sqrt{2} + 22\right)^2 \cdot \left(22 - 12\sqrt{2}\right)^{52}$

Câu 3. Thu gọn các biểu thức sau (biết rằng các biểu thức luôn có nghĩa):

(1) $P = \sqrt{x^3 \cdot 4\sqrt{x} \cdot 3\sqrt{x^5}}$

(2) $Q = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}$

(3) $E = \left(\sqrt{x^3}\right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{3}-1}$

(4) $S = \frac{x - 9x^{-1}}{\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{2}}}$

(5) $V = \frac{x^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{3}{4}}\right)}{\sqrt{x^5} (\sqrt{x} - x)}$

(6) $T = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x}} : \sqrt[24]{x^5}$

Câu 4. Thu gọn các biểu thức sau (biết rằng các biểu thức luôn có nghĩa):

(1) $M = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}}$

(2) $B = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}}$

(3) $E = \left(\sqrt{x^3}\right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{3}-1}$

(4) $X = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[5]{ab}\right)}$

(5) $P = \frac{x^{\frac{7}{6}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{7}{6}}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} \cdot \left(\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^5}\right)$

(6) $R = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$

$$(7) F = \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} - \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}}$$

$$(8) E = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} - \sqrt[3]{ab}$$

Câu 5. Thu gọn các biểu thức sau (biết rằng các biểu thức luôn có nghĩa):

$$(1) F = \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2$$

$$(2) P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} (a^2 b^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$$

$$(3) Q = \left(\frac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2}{a-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$$

$$(4) O = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$(5) K = \frac{2}{a+b} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2}$$

$$(6) Z = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)}$$

$$(7) L = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (2^x - 2^{-x})^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (2^x - 2^{-x})^2} + 1}$$

$$(8) U = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - \sqrt{xy}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3} \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

Câu 6. Thực hiện các yêu cầu sau:

$$(1) \text{ Biết } 4^x + 4^{-x} = 6. \text{ Tính giá trị của biểu thức } A = \sqrt{\frac{2^x + 2^{-x} + 3}{16^x + 16^{-x} + 2}}.$$

$$(2) \text{ Biết } 9^x + 9^{-x} = 3. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = \frac{3^x + 3^{-x} + 2}{1 - 3^x - 3^{-x}}.$$

Câu 7. Thực hiện các yêu cầu sau:

$$(1) \text{ Cho } A = 199^{200}; B = 2003^{150} \text{ và } C = 40000^{100}. \text{ So sánh } A, B \text{ và } C.$$

$$(2) \text{ Sắp theo } A = 3^{390}, B = 11^{210} \text{ và } C = 121^{100} \text{ theo thứ tự từ lớn đến bé.}$$

$$(3) \text{ Viết các số } A = 2^{100}; B = 3^{75} \text{ và } C = 5^{50} \text{ theo thứ tự từ bé đến lớn.}$$

$$(4) \text{ Hãy sắp xếp } A = \frac{1}{100}; B = \left(\frac{99}{1000} \right)^2; C = \left(\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{1000^2} \right)^2 \text{ theo thứ tự từ bé đến lớn.}$$

Câu 8. Với những giá trị nào của a thì

$$(1) \sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$$

$$(2) (a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(3) (a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(4) (a-1)^{-2} > (a-1)^{\sqrt{2}}$$

(5) $(2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7}$

(6) $(a^2-1)^{\sqrt{2}} \geq (a^2-1)^{\pi^2}$

Câu 9. So sánh hai số a và b , biết:

(1) $(\sqrt{2}-1)^a > \sqrt{2}+1 > (\sqrt{2}-1)^b$

(2) $(\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^b$

Câu 10. Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị biểu thức $R = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}$ **Câu 11.** Bác Hiếu đầu tư 100 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,25% năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì bác Hiếu thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử lãi suất hàng năm không đổi và làm tròn đến hàng phần nghìn).**Câu 12.** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% / năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% / năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc và lãi tính từ lúc gửi tiền ban đầu là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).**Câu 13.** Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất là 6,9% / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào nhất sau đây ?**Câu 14.** Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng**Câu 15.** Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới bác Năm đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi suất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác Năm đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Khẳng định nào sau đây đúng?**Câu 16.** Do thời tiết ngày càng khắc nghiệt và nhà cách xa trường học, nên một thầy giáo muốn đúng 5 năm nữa có 500 triệu đồng để mua ô tô đi làm. Để đạt nguyện vọng, thầy có ý định mỗi tháng dành ra một số tiền cố định gửi vào ngân hàng (hình thức lãi kép) với lãi suất 0,5% /tháng. Hỏi số tiền ít nhất cần dành ra mỗi tháng để gửi tiết kiệm là bao nhiêu?**Câu 17.** Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,6% /tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

- Câu 18.** Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?
- Câu 19.** Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi kép 1% trên tháng. Sau hai năm 3 tháng (tháng thứ 28) người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Hỏi người đó được rút về bao nhiêu tiền ?
- Câu 20.** Bác Hiếu đầu tư 100 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,25% năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì bác Hiếu thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử lãi suất hàng năm không đổi và làm tròn đến hàng phần nghìn).
- Câu 21.** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% / năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% / năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc và lãi tính từ lúc gửi tiền ban đầu là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).
- Câu 22.** Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất là 6,9% / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào nhất sau đây ?
- Câu 23.** Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng
- Câu 24.** Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7% / năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ số tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người đó nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hàng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền được nhập vào thành tiền gốc và số tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn một năm tiếp theo).
- Câu 25.** Vào 4 năm trước, chị Thương có gửi vào ngân hàng một số tiền là 20 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kỳ hạn. Số tiền hiện tại chị nhận được là 29,186792 triệu đồng. Biết rằng, lãi suất ngân hàng tại thời điểm mà chị Thương gửi tiền là 0,8%/tháng. Hỏi kỳ hạn k mà chị Thương đã chọn là bao nhiêu tháng?
- Câu 26.** Lãi suất gửi tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% / tháng. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên 0,9% / tháng. Đến tháng thứ 10, sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống 0,6% / tháng và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân

hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết rằng trong khoảng thời gian này bác Mạnh không rút tiền ra)

- Câu 27.** Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn thành phố A đạt xấp xỉ 905.300 người. Mỗi năm dân số thành phố tăng thêm 1,37%. Để thành phố A thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đi vào lớp 1 thì đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 (mỗi phòng 35 học sinh) gần nhất với số nào sau đây; biết rằng sự di cư đến, đi khỏi thành phố và trẻ tử vong trước 6 tuổi đều không đáng kể, ngoài ra trong năm sinh của lứa học sinh lớp 1 đó toàn thành phố có 2400 người chết.
- Câu 28.** Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $N = A.e^{rt}$ trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$) và t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 250 con và sau 12 giờ là 1500 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 216 lần số lượng vi khuẩn ban đầu?
- Câu 29.** Ông A vay ngân hàng 96 triệu đồng với lãi suất 1% tháng theo hình thức mỗi tháng trả góp số tiền giống nhau sao cho đúng hai năm thì hết nợ. Hỏi số tiền ông A trả hàng tháng là bao nhiêu? (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).
- Câu 30.** Ông Bình gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý, gửi trong 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong vòng 9 tháng. Tổng lợi tức ông Bình có được sau khi rút tiền ở hai ngân hàng là 27507768,13 đồng. Hỏi số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y là bao nhiêu?
- Câu 31.** Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất $r = 0,5\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó với tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.
- Câu 32.** Một người lập kế hoạch gửi tiết kiệm ngân hàng như sau : Đầu tháng 1 năm 2018 người đó gửi 10 triệu đồng; sau mỗi đầu tháng tiếp theo, người đó gửi số tiền nhiều hơn 10% so với số tiền đã gửi ở tháng liền trước đó. Biết rằng lãi suất ngân hàng không đổi là 0,5% một tháng và được tính theo hình thức lãi kép. Với kế hoạch như vậy, đến hết tháng 12 năm 2019, số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn).
- Câu 33.** Chị Lan có 400 triệu đồng đem đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được 1 năm, chị rút một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

Câu 34. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A: giá khoan của mét khoan đầu tiên là 8000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: giá khoan của mét khoan đầu tiên là 6000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 mét và 25 mét để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

-----Hết-----

A Lý thuyết

1. Khái niệm logarit.



Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$.

➤ Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$

➤ Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

➤ $\log_a b$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

Chú ý

(1) Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall \alpha$.

(2) $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$

(3) $\log_a a^b = b$

(4) $a^{\log_a b} = b$

2. Tính logarit bằng máy tính cầm tay.

Chú ý

(1) Logarit cơ số 10 được gọi là logarit thập phân. Ta viết $\log a$ hoặc $\lg a$ thay $\log_{10} a$.

(2) Logarit cơ số e được gọi là logarit tự nhiên. Ta viết $\ln a$ thay $\log_e a$.

3. Tính chất của phép tính logarit

Với $0 < a \neq 1; b, c > 0; \alpha \in \mathbb{R}$, khi đó:

(1) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

(2) $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

(3) $\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b$

(4) $a^{\log_a b} = b$

Chú ý

Đặc biệt với $a; b$ dương, $a \neq 1$ ta có:

$$(1) \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$(2) \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

4. Công thức đổi cơ số



Cho các số dương a, b, c với $a \neq 1; b \neq 1$. Ta có $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Chú ý

Đặc biệt ta có:

$$(1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1)$$

$$(2) \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \quad (m \neq 0)$$

B Bài tập

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức



Phương pháp

☑ Áp dụng các tính chất – công thức để biến đổi

01

Tính chất

① $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

② $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$

③ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích – tổng)

④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương – hiệu)

Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

02

Công thức “bay”

① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

03

Đổi cơ số

① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

② $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$



Ví dụ 1.1.

Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

Lời giải



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của biểu thức $A = 2\log_2 12 + 3\log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

Lời giải



Ví dụ 1.3.

Cho các số dương a, b và $a \neq 1$

Rút gọn biểu thức $K = \log_a b^2 + 2\log_{a^2} b^4 + 3\log_{a^3} b^6 - 4\log_{a^4} b^8$ ta được

Lời giải

Dạng 2. Biểu diễn logarit



Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 01.** Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số a và b .
- **Bước 02.** Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn x, y, z .
Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn x, y, z .
Ta tìm các ẩn này theo a, b
- **Bước 03.** Giải hệ tìm được tìm $x, y, z \dots$ theo a, b .
Từ đó tính được biểu thức theo các tham số a, b .

Các công thức nền tảng là $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$.



Ví dụ 2.1.

Cho $a = \log_2 14$. Biểu diễn $\log_{49} 16$ theo a

 *Lời giải*

.....



Ví dụ 2.2.

Tính $M = \log_4 1250$ theo a biết $a = \log_2 5$.

 *Lời giải*

.....



Ví dụ 2.3.

Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 25$ theo a và b .

 *Lời giải*

.....



Ví dụ 2.4.

Cho $\log_2 6 = a$; $\log_2 7 = b$. Hãy biểu diễn $\log_{18} 42$ theo a và b .

 *Lời giải*

.....



Ví dụ 2.5.

Cho $\log_3 2 = a$ và $\log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo a và b .

Lời giải

.....

.....



Ví dụ 2.6.

Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b

Lời giải

.....

.....

.....

.....

C Luyện tập

Câu 35. Tính giá trị biểu thức:

$$(1) K = \log_{2^{2018}} 4 - \frac{1}{1009} + \ln e^{2018}$$

$$(2) S = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$$

$$(3) P = \frac{1}{\log_{49} 5} - \frac{1}{\log_7 5}$$

$$(4) D = \frac{1}{\log_2 10 \cdot \log 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 10}$$

$$(5) P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$$

Câu 36. Tính giá trị biểu thức:

$$(1) P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$$

$$(2) E = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$(3) Q = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a^2}$$

$$(4) G = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a \sqrt{a}} \right)$$

$$(5) H = \log_a a^5 \sqrt[3]{a \sqrt{a}}$$

$$(6) X = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$$

Câu 37. Thực hiện các yêu cầu sau:

$$(1) \text{ Cho } \log_2 x = a. \text{ Tính giá trị của biểu thức } A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x \text{ theo } a.$$

$$(2) \text{ Cho } \log_5 x = a. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = 2 \log_{25} \frac{1}{x} - \log_{125} x^3 + \log_x 25$$

$$(3) \text{ Cho } \ln x = 2. \text{ Tính giá trị của biểu thức } T = 2 \ln(\sqrt{ex}) - \ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{x}}\right) + \ln 3 \cdot \log_3(ex^2)$$

$$(4) \text{ Cho } \log_5 2 = a, \log_5 3 = b. \text{ Tính giá trị của } M = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}.$$

$$(5) \text{ Cho } \log_a 3 = 2, \log_b 3 = \frac{1}{4} \text{ và } \log_{abc} 3 = \frac{2}{15}. \text{ Tính giá trị của } \log_c 3$$

$$(6) \text{ Cho } \log_x(x^2 y^3) = 1. \text{ Tính giá trị biểu thức } N = \log_{x^2 y^3} \frac{\sqrt[5]{x^3 y^2}}{xy^3}$$

Câu 38. Thực hiện các yêu cầu sau:

$$(1) \text{ Cho } x, y \text{ là hai số thực dương, } x \neq 1 \text{ thỏa } \log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8}, \log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y}. \text{ Tính } P = x^2 - y^2$$

$$(2) \text{ Cho các số thực dương } a; b \text{ thỏa } \log_2 a = x, \log_2 b = y. \text{ Tính } M = \log_2(a^2 b^3) \text{ theo } x; y$$

$$(3) \text{ Cho các số thực } a, b \text{ thỏa } 0 < a \neq 1; b > 0 \text{ và } \log_a(a^2 b^3) = 1. \text{ Tính } N = \log_{a^2 b^3} \frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{ab^3}$$

Câu 39. Cho $a; b$ là các số dương lớn hơn 1

(1) Thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 6ab$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

(2) Thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Tính $K = \log \frac{a+b}{3}$.

(3) Thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$. Tính $V = \log \frac{3a+b}{4}$.

Câu 40. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $\log_5 3 = a$; $\log_7 5 = b$. Tính $\log_{15} 105$ theo a và b .

(2) Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $\log_{25} 15$ theo a .

(3) Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a và b .

(4) Cho $\log_2 3 = a$, $\log_2 7 = b$. Tính $\log_2 2016$ theo a và b .

(5) Cho $\log_2 3 = a$, $\log_5 3 = b$. Tính $\log_{10} 3$ theo a và b .

(6) Cho $a = \log_2 6$, $b = \log_2 7$. Tính $\log_{18} 42$ theo a và b .

(7) Cho $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Tính $\log_6 45$ theo a và b .

(8) Cho $a = \log_3 4$, $b = \log_5 4$. Tính $\log_{12} 80$ theo a và b .

(9) Cho $a = \log_{25} 7$; $b = \log_2 5$. Tính $\log_5 \frac{49}{8}$ theo a , b .

(10) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$. Tính $\log_6 15$ theo a , b .

Câu 41. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính $\log_{12} 35$ theo a , b và c .

(2) Cho $\log_9 5 = a$; $\log_2 7 = b$; $\log_4 12 = c$. Tính $\log_{18} 4200$ theo a, b, c .

(3) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính của $\log_{12} 35$ theo a, b, c

(4) Cho $a = \log_3 5$, $b = \log_2 7$, $c = \log_2 3$. Tính $I = \frac{-1}{\log_{126}} \left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{149}{150} \right)$ theo a , b , c

(5) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$; $\log_7 2 = c$. Tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

Câu 42. Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p = \frac{9x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{3z}{x}$ là

Câu 43. Cho các số hạng dương a, b, c là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 a^{(b-c)} \cdot b^{(c-a)} \cdot c^{(a-b)}$

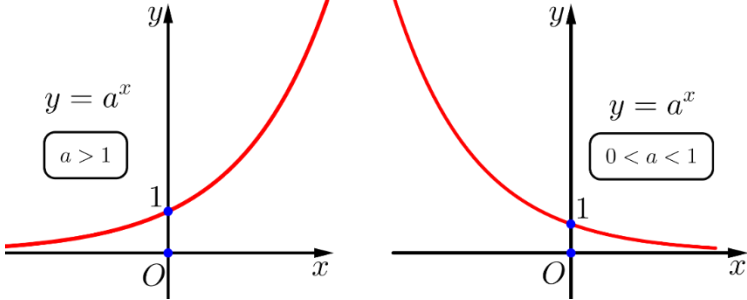
Câu 44. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

-----Hết-----

Hàm số mũ – Hàm số logarit

A Lý thuyết

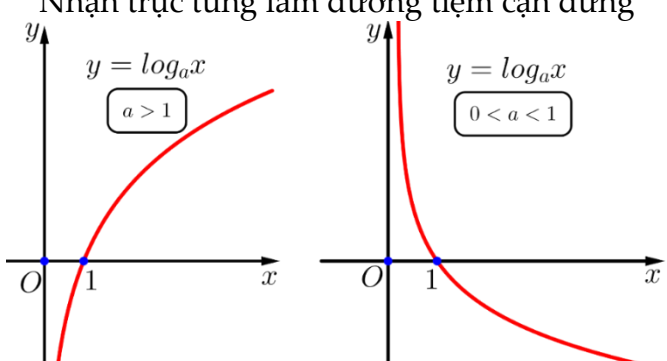
1. Hàm số mũ

<i>Tập xác định</i>	$D = \mathbb{R}$.	
<i>Tập giá trị</i>	$T = (0; +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.	
<i>Đơn điệu</i>	$a > 1$	Hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
<i>Đạo hàm</i>	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad \rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x \quad \rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$	
<i>Đồ thị</i>		

○ Nhận xét:

- (1) Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$) qua Oy .
- (2) Đồ thị đi qua điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$.
- (3) Đồ thị liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (4) Đồ thị nằm ở phía trên trục hoành.

2. Hàm số logarit

Tập xác định	$D = (0; +\infty)$.	
Tập giá trị	$T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải PT mà đặt $t = \log_a x$ thì t không có điều kiện.	
Đơn điệu	$a > 1$	Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
Đạo hàm	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$	
	$(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0) \quad \rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$	
	$(\ln^n u)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} u $	
Đồ thị	Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng 	

○ Nhận xét:

- (1) Đồ thị hàm số $y = \log_a x (a > 1)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x (0 < a < 1)$ qua Ox .
- (2) Đồ thị đi qua điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$.
- (3) Đồ thị liên tục trên $(0; +\infty)$.
- (4) Đồ thị nằm ở bên phải trục tung.

B Bài tập

Dạng 1. Tập xác định của hàm số



Phương pháp

Xét $1 \neq a > 0$: ☒ Hàm số $y = a^{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

☒ Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

Đặc biệt: với hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$ ta lưu ý “**mũ n**” của $f(x)$:

☐ Nếu $n:2 \rightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$:
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

☐ Nếu $n \not: 2 \rightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$:
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có “**mũ n**” ta chú ý xem “**n**” chẵn hay lẻ.



Ví dụ 1.1.

Tìm tập xác định của các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_2 (2x - 3)$

(2) $y = 7^{\sqrt{x-3}}$

(3) $y = \log_2 (x^2 - 9)$

Lời giải

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Tìm tập xác định của các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_{2021} (3 - x)$

(2) $y = \log_3 (2 - x)$

(3) $y = \ln (-x^2 + 3)$

Lời giải

.....

.....

.....



Ví dụ 1.3.

Tìm các giá trị thực của tham số m để các hàm số dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(1) $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$

(2) $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.4.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 2)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 2. Đạo hàm của hàm số



Phương pháp

○ Đạo hàm hàm số logarit:

$$\left(\log_a |x| \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u| \right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \Rightarrow \left[\left(\ln^n |u| \right)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} |u| \right]$$

$$\left(\ln x \right)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0) \Rightarrow \left(\ln |u| \right)' = \frac{u'}{u}$$

○ Đạo hàm hàm số mũ:

$$\left(a^x \right)' = a^x \cdot \ln a \Rightarrow \left(a^u \right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$\left(e^x \right)' = e^x \Rightarrow \left(e^u \right)' = e^u \cdot u'$$



Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_3(4x+1)$

(2) $y = 2^{2x^2+x}$

(3) $y = 2^{\sqrt{1-x}}$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Tính đạo hàm các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_3(4x+1)$

(2) $y = \log_5(x^2-3x)$

(3) $y = 10^{x^2-2x+5}$

(4) $y = e^{1-2x}$

(5) $y = \ln(1+\sqrt{x+1})$

(6) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3^{x^3-3x^2+2})$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.3.

Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho hàm số $y = \frac{2^x + 3^x}{4^x}$. Tính giá trị $y'(0)$.

(2) Cho hàm số $f(x) = \ln(x^4 + 1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 3. Sự biến thiên của hàm số



Phương pháp

	Hàm số Mũ $y = a^x$ ($1 \neq a > 0$)	Hàm số Logarit $y = \log_a x$ ($1 \neq a > 0$)
Đơn điệu	♦ $a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. ♦ $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.	♦ $a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. ♦ $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.



Ví dụ 3.1.

Xét sự biến thiên các hàm số sau:

(1) $y = \ln x$.

(2) $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$.

(3) $y = \log_{\pi} x$.

(4) $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Xét sự biến thiên các hàm số sau:

(1) $y = 5^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3) $y = \left(\pi - \sqrt{2}\right)^x$

(4) $y = \left(6 - \sqrt{5}\right)^x$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Hàm số $y = \ln(x^2 + x + 1)$ tăng trên khoảng nào dưới đây?

 *Lời giải*

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 4. Đồ thị của hàm số



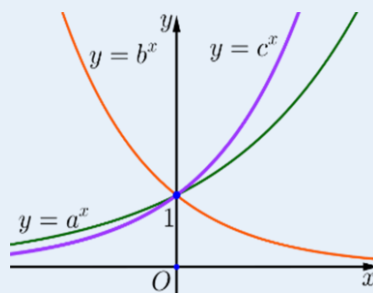
Phương pháp

○ Xét $1 \neq a > 0$		Hàm số Mũ $y = a^x$	Hàm số Logarit $y = \log_a x$
Cơ số	> 1	Càng gần Oy cơ số càng lớn.	Càng gần Ox cơ số càng lớn.
	$0 < a < 1$	Càng gần Oy cơ số càng bé.	Càng gần Ox cơ số càng bé.
Hình minh họa			
Nhận xét		Nằm bên trên Ox. Luôn đi qua điểm $(0; 1)$.	Nằm bên phải Oy. Luôn đi qua điểm $(1; 0)$.
		ĐT $y = a^x$ đối xứng $y = \log_a x$ qua $y = x$ (đường phân giác góc phần tư thứ nhất).	



Ví dụ 4.1.

Cho các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = c^x$ lần lượt có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy so sánh a, b, c .



Lời giải

.....

.....

.....

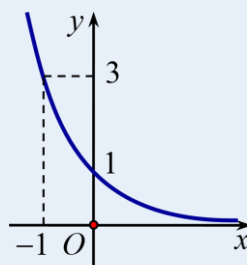
.....

.....



Ví dụ 4.2.

Cho các hàm số $y = (\sqrt{3})^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (\sqrt{2})^x$ và $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



Lời giải

.....

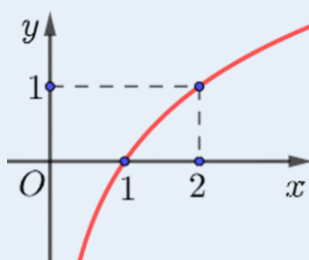
.....

.....



Ví dụ 4.3.

Cho các hàm số $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y = 2^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



Lời giải

.....

.....

.....

.....

C Luyện tập

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1) $y = \log_{2022}(3x+1)$

(3) $y = \log_5(4x-x^2)$

(5) $y = \log_3(x^2-4x+3)$

(2) $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$

(4) $y = \log_{2022}(3x-x^2)$

(6) $y = \log_{2021} \frac{x+3}{2-x}$

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1) $y = \ln(1-x)$

(3) $y = \log_7(3x+1)$

(5) $y = \log(x^2)$

(7) $y = 2^{x^2+2x-2022}$

(9) $y = \log(4x^2-9)$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(4) $y = \log_3(x+1)$

(6) $y = \log_3(3-2x)$

(8) $y = \log(2x^2-4x+2)$

(10) $y = \ln(-x^2+3x-2)$

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1) $y = e^{x^2+2x}$

(3) $y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$

(5) $y = \frac{e^x}{e^x-1}$

(7) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{e^{2017x}-1}$

(9) $y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$

(2) $y = \log \sqrt{x^2+x-12}$

(4) $y = \log_2(x^2-1) + \ln x$

(6) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} - \frac{9}{4}$

(8) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$

(10) $y = 2^{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số dưới đây xác định với mọi giá trị thực của x .

(1) $y = \log_2(x^2+2x+m-2)$

(3) $y = \log(x^2+mx+m+1)$

(5) $y = 2023 + \ln(x^2-4x+m-5)$

(7) $y = \log_{2e}(x^2+4x+(m-2)^2)$

(9) $y = \log_2(3x^2+2(m-1)x+m+4)$

(2) $y = \log_{12}(2x^2-mx-m)$

(4) $y = 2 - \ln(x^2+(m-1)x+m-1)$

(6) $y = \log_{12}(x^2-(m+2)x+8m+1)$

(8) $y = 2\sqrt{2023} + \lg(x^2+2mx+3m)$

(10) $y = \log_{2\sqrt{2}+1}(x^2+(m+1)x+2m+7)$

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số dưới đây xác định với mọi giá trị thực của x .

(1) $y = \log_{25}(mx^2 - 5x + 1)$

(2) $y = \log_2(mx^2 + 2x + 2)$

(3) $y = \log((m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3)$

(4) $y = \ln((m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2)$

(5) $y = \log((m-1)x^2 + (2m+1)x + m+1)$

(6) $y = \ln((2-m)x^2 - 2x + 1)$

(7) $y = \lg((m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m)$

(8) $y = \log_5((m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4)$

(9) $y = 2\sqrt{2} \log_{15}((m-3)x^2 + (m+2)x - 4)$

(10) $y = 2023 + \ln(2mx^2 + (m+1)x - 2)$

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số dưới đây có tập xác định $\mathbb{R}$?

(1) $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$

(2) $y = \frac{1}{2} \sqrt{\log((m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5)}$

Câu 7. Xét sự đơn điệu các hàm số dưới đây trên $(0; +\infty)$?

(1) $y = \log_{\sqrt{3}} x$

(2) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$

(3) $y = \log_{\frac{e}{3}} x$

(4) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

(5) $y = \log_{\sqrt{3}} x.$

(6) $y = \log_{3\sqrt{2}} x$

(7) $y = \log_{\pi} x$

(8) $y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$

Câu 8. Xét sự đơn điệu các hàm số dưới đây trên $\mathbb{R}$?

(1) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(3) $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$

(4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

(5) $y = (0,5)^x$

(6) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(7) $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$

(8) $y = (\sqrt{2})^x$

Câu 9. Tính đạo hàm các hàm số đã cho dưới đây.

(1) $f(x) = \log_3(\sin x)$

(2) $f(x) = \log_3(2x+1)$

(3) $f(x) = 2^{x^2-5x}$

(4) $f(x) = x.e^{x+1}$

(5) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $f(x) = \log_2(\cos x).$

(7) $f(x) = \frac{1}{1+x+\ln x}.$

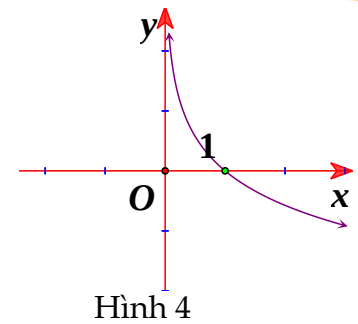
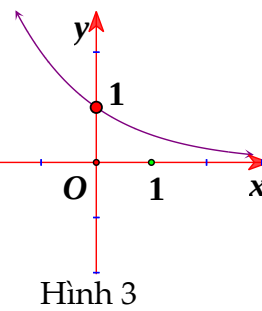
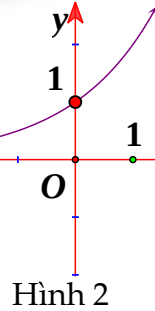
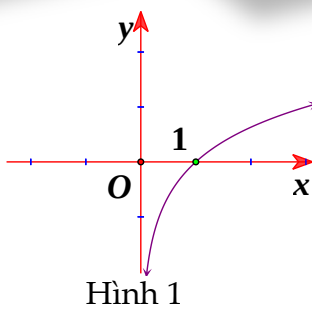
(8) $f(x) = x \ln(x+1)$

Câu 10. Thực hiện các yêu cầu sau:

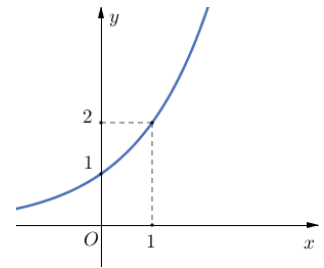
(1) Cho hàm số $y = e^{\sin x}$. Rút gọn biểu thức $K = y' \cos x - y \sin x - y''$

(2) Cho hàm số $y = -2017e^{-x} - 3.e^{-2x}$. Tính $y'' + 3y' + 2y$?

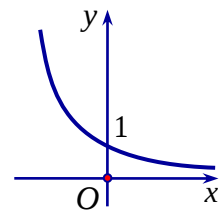
Câu 11. Cho số thực $a \in (0;1)$. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ là đường cong nào dưới đây?



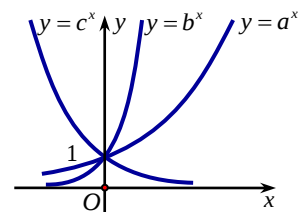
Câu 12. Cho các hàm số: $y = (\sqrt{2})^x$, $y = \log_2(2x)$, $y = 2^x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.
Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào



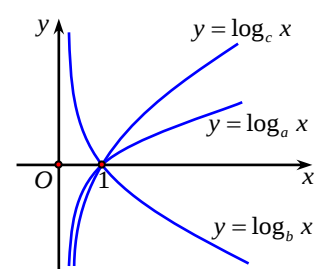
Câu 13. Cho các hàm số: $y = (\sqrt{2})^x$, $y = (0,8)^x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,4} x$.
Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào



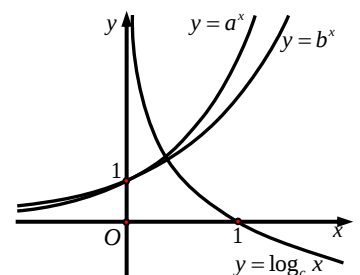
Câu 14. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình bên. So sánh các số a, b, c .



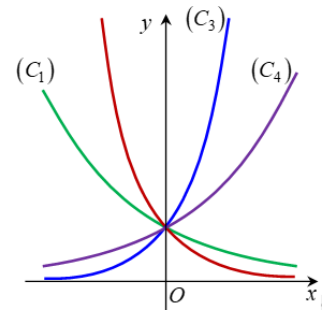
Câu 15. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. So sánh các số a, b, c .



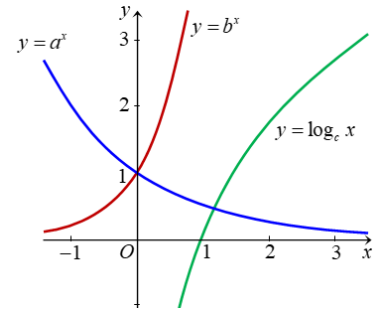
Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = a^x$; $y = b^x$; $y = \log_c x$ như hình vẽ. Tìm mối liên hệ của a, b, c .



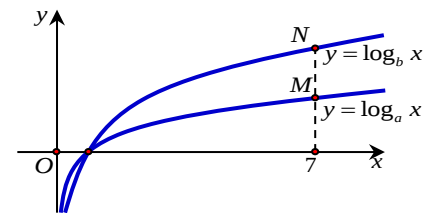
- Câu 17.** Cho bốn hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ (1), $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2), $y = 4^x$ (3), $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là 4 đường cong theo phía trên đồ thị, thứ tự từ trái qua phải là $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ như hình vẽ sau. Xác định thứ tự đồ thị của các hàm số (1), (2), (3), (4).



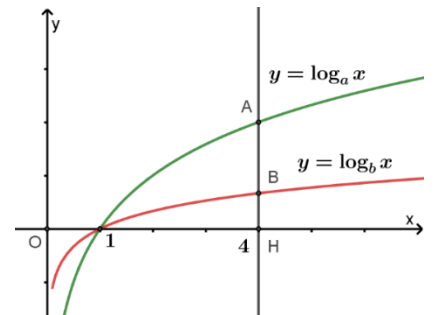
- Câu 18.** Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$.



- Câu 19.** Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H , M , N . Biết rằng $HM = MN$. Xác định mối liên hệ giữa a và b .



- Câu 20.** Cho điểm $H(4;0)$ đường thẳng $x = 4$ cắt hai đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại hai điểm A, B và sao cho $AB = 2BH$. Xác định mối liên hệ giữa a và b .



-----Hết-----

PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

A Lý thuyết

1. Phương trình mũ.

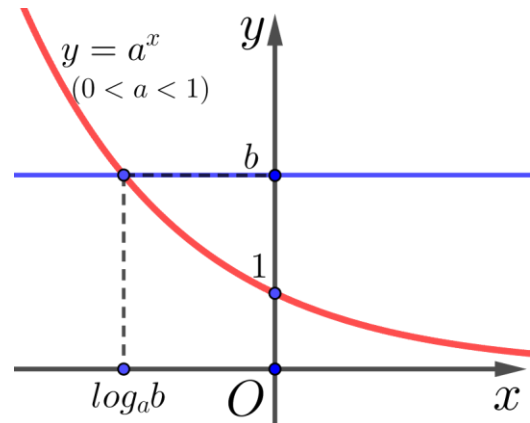
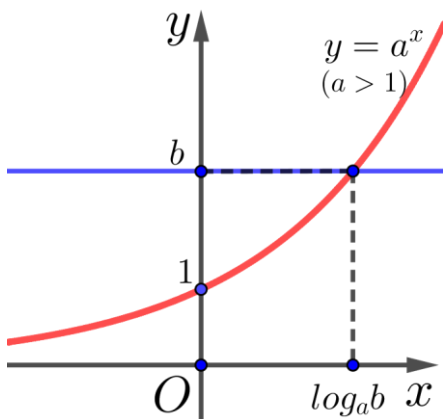


Phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Với a và b là các số cho trước.

⌘ *Nghiệm của phương trình mũ cơ bản*

Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Từ hình vẽ ta thấy với:

+ $b > 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = a^x$ tại điểm $(\log_a b; b)$.

+ $b \leq 0$ đường thẳng $y = b$ không cắt đường cong $y = a^x$.

Khi đó phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$):

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý

(1) Nếu $b = a^m$ thì ta có $a^x = a^m \Leftrightarrow x = m$.

(2) Tổng quát hơn $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

2. Phương trình logarit.

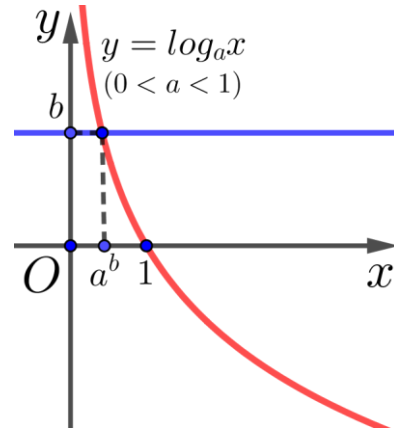
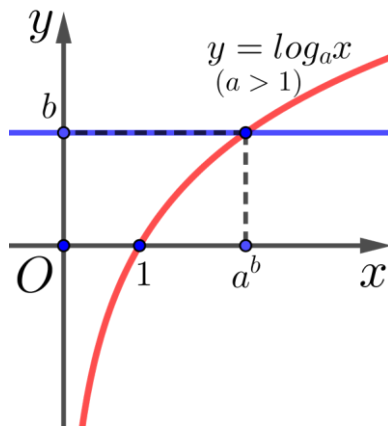


Phương trình logarit cơ bản có dạng: $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Với a và b là các số cho trước.

⌘ *Nghiệm của phương trình logarit cơ bản*

Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Từ hình vẽ ta thấy với:

+ $b > 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = \log_a x$ tại điểm $(a^b; b)$.

+ $b \leq 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = \log_a x$ tại điểm $(a^b; b)$.

Khi đó phương trình logarit cơ bản có dạng: $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất.



Chú ý

(1) Tổng quát $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

(2) Lưu ý để giải phương trình logarit trước hết đặt điều kiện $\begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \end{cases}$.

B Bài tập

Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản



Phương pháp

☑ Giải phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Khi đó $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Lưu ý:

- ☞ Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- ☞ Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.



Ví dụ 1.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $3^{\frac{1}{x}} = 4$

(2) $8^x = 4$

(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4}$

(4) $(\sqrt{2})^x = 2$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 2. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số



Phương pháp

☑ Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.



Ví dụ 2.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$

(2) $2^{(x-1)^2} = 4^x$

(3) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 3. Phương trình mũ dùng logarit hóa



Phương pháp

○ Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

○ Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.



Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $2^{x+1} = 8^x$

(2) $3^{4^x} = 4^{3^x}$

(3) $5^{2x+1} = \left(\frac{1}{125}\right)^{x+2}$

(4) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 4. Phương trình mũ đặt ẩn phụ cơ bản



Phương pháp

○ Biến đổi quy về dạng: $f[a^{g(x)}] = 0 (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

○ Thông thường sẽ gặp các cơ số: $\begin{cases} 9^x \longrightarrow t = 3^x \\ 4^x \longrightarrow t = 2^x ; t > 0. \\ 25^x \longrightarrow t = 5^x \end{cases}$



Ví dụ 4.1.

Biến đổi các phương trình sau với phép đặt cho trước.

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 2 = 0$, khi đặt $t = 2^x$

(2) $2^{2x+1} - 2^{x-1} - 1 = 0$, khi đặt $h = 2^x$

(3) $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$, khi đặt $u = 3^x$

(4) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 = 0$, khi đặt $m = 5^x$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 4.2.

Giải các phương trình sau:

(1) $4^x - 2^{x+2} - 3 = 0$

(2) $9^x - 5.3^x + 6 = 0$

(3) $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0$

(4) $2^{1+2x} + 15.2^x - 8 = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 5. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp



Phương pháp

○ Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.

○ Khi đó với phương trình mũ đẳng cấp có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$

○ Phương pháp làm như sau:

01	Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m \cdot \frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + n \cdot \frac{(a.b)^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + p \cdot \frac{b^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}\right]^2 + n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + p = 0$ $\Leftrightarrow m.t^2 + n.t + p = 0.$
02	Chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m \cdot \frac{a^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} + n \cdot \frac{(a.b)^{f(x)}}{a^{2f(x)}} + p \cdot \frac{b^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m + n \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} + p \cdot \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}\right]^2 = 0$ $\Leftrightarrow m + n.t + p.t^2 = 0.$

Lưu ý:

Đây là dạng sẽ có trong bài “Bất phương trình mũ”, lúc giải BPT mũ ta cần chú ý đến cơ số lớn hay bé hơn 1. Để giảm sai sót chúng ta hãy “chia 2 vế” cho **cơ số bé nhất !!!**



Ví dụ 5.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $8^x + 18^x = 2.27^x$

(2) $25^x + 15^x = 2.9^x$

(3) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$

(4) $2.49^x + 7.4^x - 9.14^x = 0$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 7. Phương trình logarit cơ bản



Phương pháp

☑ Giải phương trình logarit cơ bản: $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Khi đó $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

Lưu ý:

- ➔ Xác định điều kiện trước khi giải phương trình.
- ➔ Phương trình có nghiệm duy nhất.



Ví dụ 7.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2 x = 5$

(2) $\log_4 (x - 2) = 2$

(3) $\log_2 |x - 1| = 3$

(4) $\log_{\sqrt[4]{2}} (x^2 - 2)^2 = 8$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 8. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

 **Loại 1:** $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

 **Loại 2:** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$



Ví dụ 8.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

(2) $2\log_2(x^2 - x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

(3) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$

(4) $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 9. Phương trình logarit dùng mũ hóa



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về: $\log_a f(x) = g(x) \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$



Ví dụ 9.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_{x^2} (3 - 2x) = 1$

(2) $\log_{5-x} (x^2 - 2x + 64) = 2$

(3) $\log_2 (5^{x+1} - 25^x) = 2$

(4) $\log (25^x - 2^{2x+1}) = x$

(5) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$

(6) $\log_2 (4^x + 4) = x - \log_{0,5} (2^{x+1} - 3)$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 10. Phương trình logarit đặt ẩn phụ



Phương pháp

○ Biến đổi quy về dạng: $f(\log_a g(x)) = 0 \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a g(x) \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

Lưu ý: với $t = \log_a g(x)$ không có điều kiện của t .



Ví dụ 9.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

(2) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x = 5$

(3) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

(4) $\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$

(5) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2(x\sqrt{8}) - 3 = 0$

(6) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C Luyện tập

Câu 21. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_4(x-1)=3$

(3) $\log_2(x-5)=4$

(5) $\log_2(x^2-1)=3$

(7) $\log_{25}(x^2-1)=\log\sqrt{10}$

(9) $\log_3|x^2-4x|=2$

(2) $\log_2(1-x)=2$

(4) $\log_2(x^2-1)=3$

(6) $\log_3(x^2-7)=2$

(8) $\log_3(9-x^2)=\log_2 4$

(10) $\log_2\sqrt{x^2+5}=3$

Câu 22. Giải các phương trình sau:

(1) $\log(x^2-2x+2)=1$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)=\log_{\frac{1}{2}} 1$

(5) $\log_{0,25}(x^2-3x)=-1$

(7) $\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)$

(9) $(2x^2-5x+2)[\log_x(7x-6)-2]=0$

(2) $\log_3(x^2+2x)=1$

(4) $\log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$

(6) $\log_3[(x+3)(x-1)]=\frac{1}{\log_5 3}$

(8) $(x+3)\log_2(5-x^2)=0$

(10) $\log_2 x \cdot \log_3(2x-1)=2\log_2 x$

Câu 23. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2 x + \log_2(x-1)=1$

(3) $\log_3 x + \log_3(x-6)=\log_3 7$

(5) $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$

(7) $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$

(9) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$

(2) $\log_2 x + \log_2(x-3)=2$

(4) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$

(6) $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$

(8) $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$

(10) $\log_2 x + \log_2(x-1)=\ln e^2$

Câu 24. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2(x+1)=\log_{10} + \log_2(x-1)$

(3) $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=2022\log_{e^{2022}} e$

(5) $x+2=3^{\log_3(x^2-4)}$

(7) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

(9) $\log_{x^2}(x+3)=-\log_{x^2}(x-1)$

(2) $\log_3(6+x)+\log_3 9x-5=0$

(4) $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_5 125$

(6) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6-x}=2$

(8) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$

(10) $2^{\log_2(x^2+2x)} = 4^{\log_4(16+8x)}$

Câu 25. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2 x = \log_2(x^2-x)$

(2) $\log_2(x^2-1)=\log_2(2x)$

(3) $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 2022 \log_{e^{2022}} e$

(5) $\log(x^2 - x + 1) = -\log_{0,1}(2x-1)$

(7) $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = 0$

(9) $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$

(4) $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$

(6) $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1.$

(8) $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2 + 2) - 1$

(10) $3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$

Câu 26. Giải các phương trình sau:

(1) $\log(x + \sqrt{3}) - \log_{0,1}(x - \sqrt{3}) = 1$

(3) $\frac{1}{2} \log x^2 + \log(x+10) = 2 - \log 4$

(5) $\log(x-1)^2 + 2\log(x+1) = \log 4$

(7) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

(9) $2\log_{e^2}(x^2 + x - 2) = \log_{\frac{1}{e}}(x^2 - 7x + 12)$

(10) $\log_2(x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25) = 4\log_{16}(39x^2 + 70x + 3)$

(2) $\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_{\frac{1}{2}}(4x - 4) = 0$

(4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$

(6) $\log_2(x-1) \cdot \log_4(x-1) + \log_{0,5} 2 = \log_2 2$

(8) $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2 + 2) - 1$

Câu 27. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 = 0$

(3) $\log_3^3 x + \log_3^2 x + \log_3 x + 1 = 0$

(5) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$

(7) $\log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3}$

(9) $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$

(11) $3\log_2^2 x + \log_2 \frac{1}{x} - 1 = 0$

(2) $\log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 = 0$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_2 x^5 + 4 = 0$

(6) $\log_{36}^2 x + \log_{\frac{1}{36}} 36x + 1 = 0$

(8) $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$

(10) $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$

(12) $\log_2^2 x - \log_2 \sqrt{x^5} + 1 = 0$

Câu 28. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$

(3) $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$

(5) $x^{-\log_2^3 x + 3\log_2^2 x - 2\log_2 x - 1} = \frac{1}{x}$

(7) $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$

(2) $x = 3^{\log_3 x}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_2 x^5 + 4 = 0$

(6) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$

(8) $2\log(x+2) + \log 4 = \log x + 4\log 3$

$$(9) \left[\log_{\frac{1}{3}}(9x) \right]^2 + \log_3 \frac{x^2}{81} - 7 = 0$$

Câu 29. Giải các phương trình sau:

$$(1) 2^{2x^2-5x+3} = 1$$

$$(3) (\sqrt{2}-1)^{x^2-x-1} = \sqrt{2}+1$$

$$(5) 2^{x^2+4x+8} = 16$$

$$(7) 2^{x^2-3x+2} = 4$$

$$(9) 7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$$

Câu 30. Giải các phương trình sau:

$$(1) 2^x + 2.3^x - 6^x = 2$$

$$(3) 5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$$

$$(5) \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$$

$$(7) (1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$(9) 0,125.4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$$

Câu 31. Giải các phương trình sau:

$$(1) (7+4\sqrt{3})^{x^2+x-1} = (2+\sqrt{3})^{x-2}$$

$$(3) \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$$

$$(5) 3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$$

$$(7) 2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001.10^{51-x}$$

$$(9) 2^{x^2+x-1} - 2^{x^2-1} = 2^{2x} - 2^x$$

Câu 32. Giải các phương trình sau:

$$(1) 4^x - 6.2^x + 2 = 0$$

$$(3) 2.4^x - 9.2^x + 4 = 0$$

$$(5) 25^x - 20.5^{x-1} + 3 = 0$$

$$(7) 4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$$

$$(10) \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{\ln(x-1)} = 0$$

$$(2) 3^{-x^2+4x} = \frac{1}{243}$$

$$(4) (3-2\sqrt{2})^{2x} = 3+2\sqrt{2}$$

$$(6) e^{x^2-3x} = \frac{1}{e^2}$$

$$(8) 7^{4x^4-3x^2-1} = 1$$

$$(10) 3^{x^2-4x+5} = 9$$

$$(2) 2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$$

$$(4) \sqrt{2}^{x^2+2x+3} = 8^x$$

$$(6) \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$$

$$(8) 4^{x-1} = 8^{3-2x}$$

$$(10) \left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$$

$$(2) 2^{x^2+3x-2} = 16^{x+1}$$

$$(4) 2^{x+1} + 2^{x-2} = 36$$

$$(6) 2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$$

$$(8) 4^x + 4^{x+1} = 2^x + 2^{x+1}$$

$$(10) 3^x + 2^x.3 - 6^x = 3$$

$$(2) 3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$$

$$(4) 6^{2x-1} - 5.6^{x-1} + 1 = 0$$

$$(6) 3^{1-x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

$$(8) 3^{2x+10} - 6.3^{x+4} - 2 = 0$$

(9) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Câu 33. Giải các phương trình sau:

(1) $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

(3) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

(5) $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$

Câu 34. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1$

(3) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

(5) $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$

Câu 35. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Với các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6} \right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

(2) Cho $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$ với a, b là số nguyên dương. Tính $a+b$.

(10) $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0$

(2) $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$

(4) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$

(6) $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$

(2) $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + 1$

(4) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$

(6) $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$

-----Hết-----

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

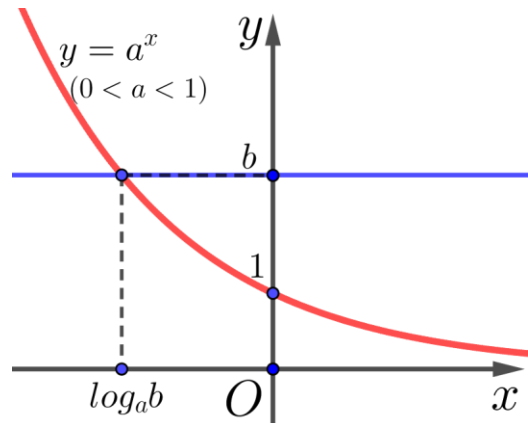
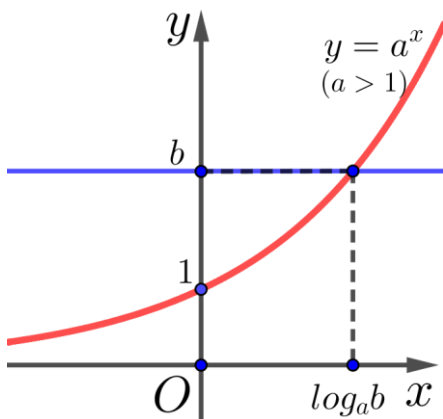
A Lý thuyết

1. Bất phương trình mũ.



Bất phương trình mũ cơ bản: $a^x > b$ hoặc $a^x < 0$; $a^x \geq b$; $a^x \leq b$, với $a > 0$, $a \neq 1$.
Với a và b là các số cho trước.

Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Xét bất phương trình $a^x > b$ (*).

Nghiệm của (*) là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ hình vẽ ta nhận được:

⌘ Nếu $b \leq 0$ thì $\forall x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (*).

⌘ Nếu $b > 0$ thì

- Với $a > 1$: nghiệm của (*) là $x > \log_a b$.
- Với $0 < a < 1$: nghiệm của (*) là $x < \log_a b$.

Chú ý

(1) Nếu $a > 1$: $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

(2) Nếu $0 < a < 1$: $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

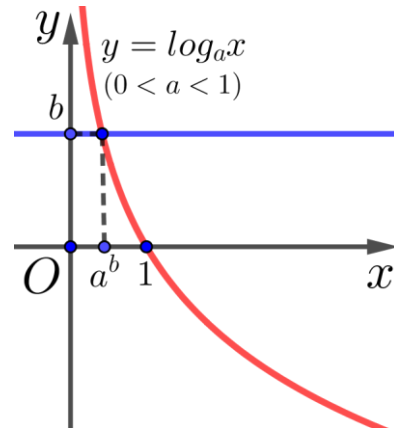
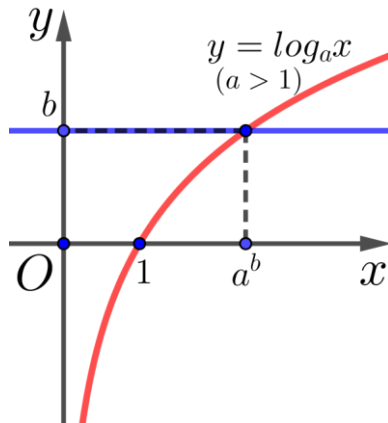
2. Bất phương trình logarit.



Bất phương trình logarit cơ bản: $\log_a x > b$ hoặc $\log_a x < 0$; $\log_a x \geq b$; $\log_a x \leq b$, với $a > 0, a \neq 1$.

Với a và b là các số cho trước.

Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Xét bất phương trình $\log_a x > b$ (*).

Điều kiện $x > 0$.

Nghiệm của (*) là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ hình vẽ ta nhận được:

⌘ Với $a > 1$ nghiệm của (*) là $x > a^b$.

⌘ Với $0 < a < 1$ nghiệm của (*) là $0 < x < a^b$.



Chú ý

(1) Nếu $a > 1$: $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

(2) Nếu $0 < a < 1$: $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

B Bài tập

Dạng 1. Bất phương trình mũ cơ bản

Phương pháp

Dạng 01.

$$a^x > b \quad (a > 0; a \neq 1)$$

$$b \leq 0$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

$$b > 0$$

$$a > 1$$

$$a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b.$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b.$$

Dạng 02.

$$a^x < b \quad (a > 0; a \neq 1)$$

$$b \leq 0$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\emptyset$.

$$b > 0$$

$$a > 1$$

$$a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b.$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b.$$



Ví dụ 1.1.

Giải các bất phương trình sau:

(1) $3^x \geq 9$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$

(3) $2^{x+2} = \sqrt{2^3}$

(4) $2^x > 3^{x+1}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 2. Bất phương trình mũ đưa về cùng cơ số



Phương pháp

- ☑ Với $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
- ☑ Với $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.



Ví dụ 2.1.

Giải các bất phương trình sau:

(1) $2^{2x-1} - 2^{-2} > 0$

(2) $2^{2(x+5)^2} \geq 4^{1-2x}$

(3) $\left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} < 5^{-2x}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} > \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{x-1}$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 3. Bất phương trình mũ dùng logarit hóa



Phương pháp

○ Bất phương trình $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, b > 0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$

○ Bất phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a > g(x)$.

Lưu ý: Khi lấy cơ số cần quan tâm cơ số " > 1 " hay " < 1 " để xác định dấu của BPT.



Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $2^{x+1} > 8^{x-1}$

(2) $3^{4^x} \leq 4^{3^x}$

(3) $5^{2x+1} > \left(\frac{1}{125}\right)^{x+25}$

(4) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{2x-1})$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۲



○ Biến đổi quy về dạng:

○ Thông thường sẽ gắ



Ví dụ 4.1.

Giải các bất phương trình sau:

$$(1) \quad 3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 > 0$$

$$(2) \quad 9^x - 5.3^x + 6 < 0$$

$$(3) \quad 4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 \geq 0$$

$$(4) \quad 3^x - 8.3^{\frac{x}{2}} + 15 < 0$$

~~✎~~ **Lời giải**

[illegible]

 Dạng 5. Bất phương trình logarit cơ bản



Phương pháp

☑ Giải bất phương trình logarit cơ bản: $\log_a x > b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a^b & \text{khi } a > 1 \\ x < a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$

Lưu ý: ➡ Xác định điều kiện trước khi giải bất phương trình.

➡ Khi lấy cơ số cần quan tâm cơ số " > 1 " hay " < 1 " để xác định dấu của BPT.



Ví dụ 5.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_{e^2} x > 5$

(2) $\log_4 (x - 20) < 2$

(3) $\log_2 |x - 1| = 3$

(4) $\log_{\sqrt[3]{2}} (x^2 - 2)^2 = 8$

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 6. Bất phương trình logarit đưa về cùng cơ số



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

✍ **Loại 1:** $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b \end{cases} \text{ khi } a > 1$

$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases} \text{ khi } 0 < a < 1$

✍ **Loại 2:** $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{ khi } a > 1$

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ khi } 0 < a < 1$



Ví dụ 6.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\ln(x+1) + \ln(x+3) > \ln(x+7)$

(2) $2\log_2(x^2 - x - 1) < \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

(3) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$

(4) $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

 Dạng 7. Bất phương trình logarit dùng mũ hóa



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất

phương trình logarit về: $\log_a f(x) > g(x) \xrightarrow{a>1} \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^{g(x)} \end{cases}$



Ví dụ 7.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2(2 \cdot 2^x + 1) > 2x$

(2) $\log(3 - 2x) > 2^{\log_2 \log x}$

 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 7.2.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_{5-x} (x^2 - 2x + 64) < 2$

(2) $\log_{x^2} (3 - 2x) > 1$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

۲



○

L



G.

$$(1) \log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 > 0$$

$$(2) \log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x < 5$$

(3) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 \geq 0$

(4) $\log_2 x - \log_x 64 > 1$

$$(5) \log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2(x\sqrt{8}) - 3 \geq 0$$

$$(6) \log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 < 0$$

 Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C Luyện tập

Câu 36. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$

(3) $3^{x^2-2x} < 27$

(5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} \geq 8$

(9) $2^{7x-2x^2} \geq 32$

(2) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$

(4) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$

(6) $3^{x-2} \leq 243$

(8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1$

(10) $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$

Câu 37. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-x^2-x+4} \leq 49$

(3) $7^{4x+4} \leq 7^{x^2+3x-2}$

(5) $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2+x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-1}$

(9) $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$

(4) $\left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \geq \frac{9}{7}$

(6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$

(8) $5^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$

(10) $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$

Câu 38. Giải các bất phương trình sau:

(1) $5^{x^2-3x} < 625$

(3) $e^{x^2-x-1} < \frac{1}{e}$

(5) $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \frac{1}{8}$

(4) $\left(\frac{e}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x+3}$

(6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$

(8) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3 > 3^x \cdot \sqrt{3}$

(9) $(0,6)^{\frac{1}{x}} \leq (0,6)^{\frac{1}{6}}$

Câu 39. Giải các bất phương trình sau:

(1) $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 \leq 0$

(3) $(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$

Câu 40. Giải các bất phương trình sau:

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$

(3) $4^{x+1} + 10 \cdot 2^x - 6 < 0$

(5) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

(7) $5^x + 5^{2-x} - 26 \leq 0$

(9) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$

Câu 41. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_3(x-1) > 2$

(3) $\log_3(2x-3) > 2$

(5) $\log_{2021}(2x-3) < 1$

(7) $\log_{0,2}(x-1) < 0$

(9) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2$

Câu 42. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$

(3) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x-4) > -2$

(5) $\log(\log_2 x) < 0$

(7) $\log_{0,2}(x-1) < 0$

(9) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2$

Câu 43. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_3(x-1) + \log_3(2x-1) \leq 1$

(10) $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$

(2) $(3+2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2}-1)^x > 3$

(4) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

(4) $4^x - 8 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x < 0$

(6) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$

(8) $2^x \geq 3 - \frac{2}{2^x}$

(10) $\left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{-x} + 8 \leq 0$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

(4) $\log_3(2x-3) > 2$

(6) $\log_3(4x-1) < 1$

(8) $\log_{0,5}(2x-1) > -2$

(10) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$

(2) $\log_{0,5}(\ln(x-2)) > -2$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1$

(6) $\log_3(4x-1) < 1$

(8) $\log_{0,5}(2x-1) > -2$

(10) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$

(2) $\log_3(x+1) > \log_3(2x-1)$

(3) $\log_{\frac{\pi}{5}}(3x-2) > \log_{\frac{\pi}{5}} 4$

(5) $\log(x-21) + \log x < 2$

(7) $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$

(9) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$

(4) $\ln(2x+1) \geq 1 + \ln(x-1)$

(6) $\log_{0,9}(x^2-9) > \log_{0,9}(8x)$

(8) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

(10) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5) + \log_2(x-1) > 0$

Câu 44. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\ln(x^2+1) - \ln(2x+4) > 0$

(2) $3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1) \leq 3$

(3) $\log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2)$

(4) $\frac{1}{2}\log_2(x^2+4x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+7}\right)$

(5) $\log_2(x+1) \cdot 2\log_2\sqrt{x+1} \cdot \log_2\sqrt[4]{4} > \frac{1}{2}$

(6) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x > \frac{2}{3}$

(7) $\log_3 x + \log_3(x+2) > \log_3 3^9$

(8) $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x < 2$

(9) $\log_2(2x-3) - \log_4\left(x - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

(10) $\log_{\sqrt{6}}(x-1) + 2\log_6(x-2) > 3^{\log_3 2}$

Câu 45. Giải các bất phương trình sau:

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

(3) $4^{x+1} + 10 \cdot 2^x - 6 < 0$

(4) $4^x - 8 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x < 0$

(5) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

(6) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$

(7) $5^x + 5^{2-x} - 26 \leq 0$

(8) $2^x \geq 3 - \frac{2}{2^x}$

(9) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$

(10) $\left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{-x} + 8 \leq 0$

Câu 46. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9$

(2) $\log_{2018} x \leq \log_x 2018$

(3) $(\log_2 4x-5) \log_2 x > 2$

(4) $\log_2^2 x - 8 \log_2 \sqrt{x} + 3 < 0$

-----Hết-----

Chương 06

HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 11

Biên soạn

LÊ MINH TÂM





⌘ Bài 01. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

A. Lý thuyết

1. Lũy thừa với số mũ nguyên.....	3
2. Căn bậc n.....	3
3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ	4
4. Lũy thừa với số mũ thực:.....	4

B. Bài tập

➤ Dạng 1. Tính giá trị biểu thức.....	5
➤ Dạng 2. Rút gọn biểu thức.....	7
➤ Dạng 3. So sánh.....	8
➤ Dạng 4. Bài toán lãi kép.....	9

C. Luyện tập

⌘ Bài 02. PHÉP TÍNH LOGARIT

A. Lý thuyết

1. Khái niệm logarit.	33
2. Tính logarit bằng máy tính cầm tay.	33
3. Tính chất của phép tính logarit.....	33
4. Công thức đổi cơ số	34

B. Bài tập

➤ Dạng 1. Tính giá trị biểu thức.....	35
➤ Dạng 2. Biểu diễn logarit	36

C. Luyện tập

⌘ Bài 03. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

A. Lý thuyết

1. Hàm số mũ.....	48
2. Hàm số logarit	49

B. Bài tập

➤ Dạng 1. Tập xác định của hàm số.....	50
➤ Dạng 2. Đạo hàm của hàm số	52
➤ Dạng 3. Sự biến thiên của hàm số	54
➤ Dạng 4. Đồ thị của hàm số.....	56

C. Luyện tập

⌘ Bài 04. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. Lý thuyết

1. Phương trình mũ.	75
2. Phương trình logarit.	76

B. Bài tập

☞ Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản.....	77
☞ Dạng 2. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số	78
☞ Dạng 3. Phương trình mũ dùng logarit hóa.....	79
☞ Dạng 4. Phương trình mũ đặt ẩn phụ cơ bản	80
☞ Dạng 5. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp.....	82
☞ Dạng 6. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1	84
☞ Dạng 7. Phương trình logarit cơ bản.....	86
☞ Dạng 8. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số	87
☞ Dạng 9. Phương trình logarit dùng mũ hóa.....	89
☞ Dạng 10. Phương trình logarit đặt ẩn phụ	91

C. Luyện tập

☞ Bài 05. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

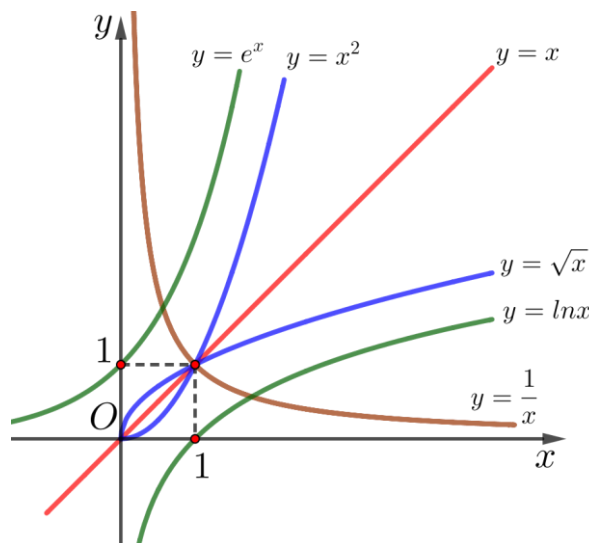
A. Lý thuyết

1. Bất phương trình mũ.....	125
2. Bất phương trình logarit.....	126

B. Bài tập

☞ Dạng 1. Bất phương trình mũ cơ bản.....	127
☞ Dạng 2. Bất phương trình mũ đưa về cùng cơ số	128
☞ Dạng 3. Bất phương trình mũ dùng logarit hóa.....	129
☞ Dạng 4. Bất phương trình mũ đặt ẩn phụ	130
☞ Dạng 5. Bất phương trình logarit cơ bản.....	131
☞ Dạng 6. Bất phương trình logarit đưa về cùng cơ số	132
☞ Dạng 7. Bất phương trình logarit dùng mũ hóa.....	134
☞ Dạng 8. Bất phương trình logarit đặt ẩn phụ.....	136

C. Luyện tập



A Lý thuyết

1. Lũy thừa với số mũ nguyên.



Định nghĩa:

Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa:

- Với a là số thực tùy ý: $a^n = a.a...a$ (n thừa số a).
- Với a là số thực khác 0: $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- Trong biểu thức a^m , a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

⌘ Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên dương. Với $a \neq 0$; $b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$$\textcircled{1} a^m . a^n = a^{m+n} \quad \textcircled{2} \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \textcircled{3} (ab)^m = a^m . b^m \quad \textcircled{4} \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$



Chú ý

- 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.
- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

2. Căn bậc n .



Định nghĩa:

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

- Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$

⌘ Ta có các tính chất sau (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa):

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ chẵn} \\ |a| & \text{khi } n \text{ lẻ} \end{cases} \quad \textcircled{2} \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} \quad \textcircled{3} \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$$

④ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Chú ý

n lẻ	$b \in \mathbb{R}$	♦ Có duy nhất một căn bậc n của b , ký hiệu $\sqrt[n]{b}$.
n chẵn	$b < 0$	♦ Không tồn tại căn bậc n của b
	$b = 0$	♦ Có một căn bậc n của b là 0
	$b > 0$	♦ Có hai bậc n của a là hai số đối nhau, ♦ Căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{b}$, căn có giá trị âm ký hiệu là $-\sqrt[n]{b}$.

✎ Nếu n chẵn thì $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa chỉ khi $b \geq 0$.

✎ Nếu n lẻ thì $\sqrt[n]{b}$ luôn có nghĩa với mọi số thực b .

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ



Định nghĩa:

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu là a^r , được xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ thực:



Định nghĩa:

Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là lũy thừa của số thực dương a với số mũ α .

✎ **Kí hiệu:** $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$ với $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$.

B Bài tập

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức

Phương pháp

- ☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.
- ☑ Chọn $a; b$ là các số thực dương và $\alpha; \beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

$$\textcircled{1} a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\textcircled{2} \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\textcircled{3} (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\textcircled{4} (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\textcircled{5} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$$



Ví dụ 1.1.

Đưa các biểu thức sau về dạng lũy thừa

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{a} \quad (a > 0)$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{16^{0,75}}$$

$$(3) \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (a, b > 0).$$

Lời giải

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{a} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}.$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}{16^{0,75}} = \frac{\left[2 \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{(2^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3} = 2^{\frac{-13}{6}}.$$

$$(3) \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{b^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{-2}{15}} \cdot b^{\frac{2}{15}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}}$$



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của biểu thức

$$(1) P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8}$$

$$(2) S = 27^{\frac{1}{3}}$$

$$(3) A = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-1,25}$$

Lời giải

$$(1) \text{ Ta có } P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{(-32)} = -2.$$

$$(2) \text{ Ta có } S = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

$$(3) A = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-1,25} = 27^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{27^2} + \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[3]{3^6} + \sqrt[4]{2^{20}} = 3^2 + 2^5 = 41$$



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của biểu thức

$$(1) A = \frac{3^4 \cdot 3^{-2} + 2^5 \cdot 2^{-4}}{2^4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3^5 \cdot 3^{-4}}$$

$$(2) B = \frac{3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (2^2)^{-3} \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}}{5^{-3} \cdot 25^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{25}\right)^{-1}}$$

Lời giải

$$(1) A = \frac{3^4 \cdot 3^{-2} + 2^5 \cdot 2^{-4}}{2^4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3^5 \cdot 3^{-4}} = \frac{3^2 + 2}{2^7 - 2 \cdot 3} = \frac{11}{122}$$

$$(2) B = \frac{3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (2^2)^{-3} \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}}{5^{-3} \cdot 25^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{25}\right)^{-1}} = \frac{3^2 + 2^2}{5 + 5^2} = \frac{13}{30}$$



Ví dụ 1.3.

Thực hiện các yêu cầu sau:

$$(1) \text{ Cho } 4^x + 4^{-x} = 7. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}.$$

$$(2) \text{ Cho } 9^x + 9^{-x} = 23. \text{ Khi đó biểu thức } A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b} \text{ với } \frac{a}{b} \text{ là phân số tối giản và } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } a.b.$$

Lời giải

$$(1) \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}.$$

$$4^x + 4^{-x} = 7 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 9 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 3. \text{ Suy ra } P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}} = \frac{5 + 3}{8 - 12} = -2.$$

$$(2) \text{ Biểu thức } A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b}. \text{ Tính } a.b.$$

$$9^x + 9^{-x} = 23 \Leftrightarrow (3^x + 3^{-x})^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{-x} = 5 \\ 3^x + 3^{-x} = -5 \end{cases} \text{ vì } 3^x + 3^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } 3^x + 3^{-x} = 5$$

$$\Rightarrow A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{5 + 5}{1 - 5} = \frac{-5}{2}.$$

Vậy $a.b = -10$.

 Dạng 2. Rút gọn biểu thức



Phương pháp

- ☑ Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của lũy thừa.
- ☑ Chọn $a; b$ là các số thực dương và $\alpha; \beta$ là các số thực tùy ý, ta có:

① $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

② $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

③ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$

④ $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$

⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha$



Ví dụ 2.1.

Rút gọn các biểu thức:

(1) $P = a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ với $a > 0$

(2) $Q = a^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{a}$ với $a > 0$

(3) $K = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}}$, với $x > 0$

(4) $M = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$

 Lời giải

(1) $P = a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{-\sqrt{2}+1} = a^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1} = a$.

(2) $Q = a^{\frac{7}{3}} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{7}{3}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}} = a^2$.

(3) $K = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.

(4) $M = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.



Ví dụ 2.2.

Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho a là một số thực dương. Viết biểu thức $P = a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

(2) Viết biểu thức $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}$ ($x > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

 Lời giải

(1) Ta có $P = a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{15}}$.

(2) $P = \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{4}}} = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{12}}$.

 Dạng 3. So sánh



Phương pháp

- (1) Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.
- (2) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.



Ví dụ 3.1.

Thực hiện các yêu cầu sau:

- (1) Cho $A = 199^{2023}$; $B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B .
- (2) Sắp theo $A = 3^{4999}$, $B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

 Lời giải

- (1) Cho $A = 199^{2023}$; $B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B .

$$B = \sqrt{199}^{2024} = 199^{\frac{1}{2} \cdot 2024} = 199^{1012}$$

Ta có $199 > 1$ nên $\rightarrow 199^{2023} > 199^{1012} \Rightarrow A > B$. Vậy $A > B$.

- (2) Sắp theo $A = 3^{4999}$, $B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

$$C = 1331^{1000} = (11^3)^{1000} = 11^{3000}$$

Ta có: $11 > 1$; $11^{4001} > 11^{2000} \Rightarrow B > C$

Lại có: $3^{4999} < 3^{5000} = (3^5)^{1000} = 243^{1000} < 1331^{1000} \Rightarrow A < C$

Vậy $B > C > A$.



Ví dụ 3.2.

Với những giá trị nào của a thì

- (1) $a^e > a^\pi$
- (2) $(a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}}$

 Lời giải

- (1) $a^e > a^\pi$

Điều kiện: $a > 0$

Vì $\begin{cases} e < \pi \\ a^e > a^\pi \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$. Vậy $0 < a < 1$.

- (2) $(a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}}$

Điều kiện: $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Vì $\begin{cases} 2 < \sqrt{5} \\ (a-1)^2 > (a-1)^{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$. Vậy $1 < a < 2$.

 Dạng 4. Bài toán lãi kép



Phương pháp

☑ Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

☑ Công thức: $T_n = T_0(1+r)^n$

 Trong đó:

T_n : Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;

n : Số kỳ hạn tính lãi;

r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.



Ví dụ 4.1.

Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4% / tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

 Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có sau đúng 6 tháng, người đó lĩnh được số tiền:

$$\text{Ta có: } A_n = A_0(1+r)^n = 100.000.000 \left(1 + \frac{0,4}{100}\right)^6 = 102.424.128$$



Ví dụ 4.2.

Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 243 101 250 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

 Lời giải

Gọi lãi suất kỳ hạn một năm của ngân hàng MSB là r . Áp dụng công thức lãi suất kép

$P = a(1+r)^n$ trong đó ta có :

$$243101250 = 200000000(1+r)^4 \Leftrightarrow (1+r)^4 = \frac{243101250}{200000000}$$

$$\Leftrightarrow 1+r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{243101250}{200000000}} - 1 \Leftrightarrow r = 0,05.$$



Ví dụ 4.3.

Ông Đại mới xin được việc làm nên gửi tiết kiệm vào ngân hàng với hình thức cứ mỗi đầu tháng đóng vào 5 triệu đồng với lãi suất 0,33%/ tháng. Tính số tiền mà ông Đại thu được từ ngân hàng sau 5 năm.

Lời giải

Với a là số tiền ông Đại đóng vào hàng tháng, $r\%$ lãi suất ông Đại gửi tiết kiệm hàng tháng.

Gọi P_n là số tiền mà ông Đại thu được sau n tháng ($n \geq 1$).

Suy ra

$$P_1 = a(1+r\%).$$

$$P_2 = (P_1 + a)(1+r\%) = a(1+r\%)^2 + a(1+r\%)$$

$$P_3 = (P_2 + a)(1+r\%) = a(1+r\%)^3 + a(1+r\%)^2 + a(1+r\%)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_n = (P_{n-1} + a)(1+r\%) = a(1+r\%)^n + a(1+r\%)^{n-1} + \dots + a(1+r\%)$$

Xét cấp số nhân có số hạng đầu là $u_1 = a(1+r\%)$ và công bội $q = 1+r\%$ thì

$$P_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Vậy số tiền ông Đại nhận được từ ngân hàng sau 5 năm là

$$P_{60} = u_1 \frac{1-q^{60}}{1-q} = 5.(1,0033) \cdot \frac{1-(1,0033)^{60}}{0,0033} \approx 332 \text{ triệu đồng.}$$



Ví dụ 4.4.

Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100 000 000 đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

Lời giải

Gọi m, r, T_n, a lần lượt là số tiền vay ngân hàng, lãi suất hàng tháng, tổng số tiền vay còn lại sau n tháng, số tiền trả đều đặn mỗi tháng.

- Sau khi hết tháng thứ nhất ($n=1$) thì còn lại: $T_1 = m(r+1) - a$.

- Sau khi hết tháng thứ hai ($n=2$) thì còn lại:

$$\begin{aligned} T_2 &= [m(r+1) - a](r+1) - a \\ &= m(r+1)^2 - a(r+1) - a = m(r+1)^2 - a(r+2) = m(r+1)^2 - \frac{a}{r}[(r+1)^2 - 1]. \end{aligned}$$

- Sau khi hết tháng thứ ba ($n=3$) thì còn:

$$T_3 = \left[m(r+1)^2 - \frac{a}{r}[(r+1)^2 - 1] \right](r+1) - a = m(r+1)^3 - \frac{a}{r}[(r+1)^3 - 1].$$

⋮

- Sau khi hết tháng thứ n thì còn lại: $T_n = m(r+1)^n - \frac{a}{r}[(r+1)^n - 1]$

$$\text{Áp dụng công thức trên, ta có } T_n = 0 \Leftrightarrow a = \frac{m(r+1)^n r}{(r+1)^n - 1} = \frac{12 \cdot 10^5 \left(\frac{1,2}{100} + 1 \right)^{60}}{\left(\frac{1,2}{100} + 1 \right)^{60} - 1}.$$



Ví dụ 4.5.

Lãi suất cho vay tại PVcomBank trong tháng 5/2022 rất ưu đãi, ở mức 5%/năm, được áp dụng trong 6 tháng đầu, từ tháng thứ 7 trở đi ấn định mức lãi 12%/năm. Tại ngân hàng này, thời hạn cho vay mua nhà tối đa là 20 năm, mức vay tối đa 85% giá trị tài sản đảm bảo. Một người có khả năng trả cố định hằng tháng là 15 triệu. Giả sử người đó có thể mượn người thân 15% giá trị căn nhà, nếu được sử dụng gói vay ở trên với thời hạn tối đa và mức vay tối đa thì có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa khoảng?

Lời giải

Gọi A là số tiền tối đa người này có thể vay, A_i là số tiền nợ sau tháng thứ i .

$r_1 = \frac{5\%}{12}$ là lãi suất/1 tháng, trong 6 tháng đầu

$r_2 = \frac{12\%}{12} = 1\%$ là lãi suất/1 tháng, từ tháng thứ 7 trở đi.

Sau 1 tháng, số tiền gốc và lãi là $A(1+r)$, người đó trả 15 triệu nên còn nợ:

$$A_1 = A(1+r) - 15$$

Sau tháng thứ 2:

$$A_2 = A_1(1+r_1) - 15 = (A(1+r_1) - 15)(1+r_1) - 15 = A(1+r_1)^2 - \frac{15}{r_1}[(1+r_1)^2 - 1]$$

$$\text{Sau tháng thứ 3: } A_3 = A(1+r_1)^3 - \frac{15}{r_1}[(1+r_1)^3 - 1]$$

.....

Sau tháng thứ 6: $A_6 = A(1+r_1)^6 - \frac{15}{r_1}[(1+r_1)^6 - 1]$.

Sau tháng thứ 7: $A_7 = A_6(1+r_2) - 15$

Sau tháng thứ 8: $A_8 = A_6(1+r_2)^2 - \frac{15}{r_2}[(1+r_2)^2 - 1]$

.....

Sau tháng thứ 240: $A_{240} = A_6(1+r_2)^{234} - \frac{15}{r_2}[(1+r_2)^{234} - 1]$

Vì phải trả hết nợ sau 20 năm nên $A_{240} = 0 \Leftrightarrow A_6 = \frac{15[(1+r_2)^{234} - 1]}{(1+r_2)^{234} r_2} \approx 1353,819328$

$$\Rightarrow A = \frac{A_6 + \frac{15}{r_1}[(1+r_1)^6 - 1]}{(1+r_1)^6} \approx 1409,163992.$$

Vậy người này có thể mua được căn nhà có giá trị tối đa là $\frac{A}{85\%} \approx 1657,83999$ triệu đồng
 $\approx 1,65784$ tỷ đồng

C Luyện tập

Câu 1. Tính giá trị biểu thức:

$$(1) E = 2^{3-\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$$

$$(2) P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$$

$$(3) N = 2019^{\sqrt{2020}} \cdot \left(\frac{1}{2019}\right)^{\sqrt{2020}-2}$$

$$(4) T = \left(2^{2020} + 2(1 - 2^{2019})\right)^{\sqrt[3]{2}}$$

$$(5) M = \frac{\left(2^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}{2^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-2}}$$

$$(6) Y = \frac{\sqrt[5]{5^2 \sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5 \sqrt{5}}} + \frac{5 \sqrt[3]{5}}{5^{-2}}$$

Lời giải

$$(1) E = 2^{3-\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}}$$

$$E = 2^{3-\sqrt{2}} \cdot 4^{\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}} \cdot (2^2)^{\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}} \cdot 2^{2\sqrt{2}} = 2^{3-\sqrt{2}+2\sqrt{2}} = 2^{3+\sqrt{2}}.$$

$$(2) P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$$

$$P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0} = \frac{2^2 + 5}{10^{-1} - 1} = \frac{9}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{\frac{-9}{10}} = -10.$$

$$(3) N = 2019^{\sqrt{2020}} \cdot \left(\frac{1}{2019}\right)^{\sqrt{2020}-2}$$

$$N = 2019^{\sqrt{2020}} \cdot \left(\frac{1}{2019}\right)^{\sqrt{2020}-2} = 2019^{\sqrt{2020} - \sqrt{2020} + 2} = 2019^2.$$

$$(4) T = \left(2^{2020} + 2(1 - 2^{2019})\right)^{\sqrt[3]{2}}$$

$$T = \left(2^{2020} + 2(1 - 2^{2019})\right)^{\sqrt[3]{2}} = \left(2^{2020} + 2 - 2^{2020}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}.$$

$$(5) M = \frac{\left(2^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}{2^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-2}}$$

$$M = \frac{\left(2^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}}{2^{1-\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{3}-2}} = \frac{2^{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}}{2^{-1}} = \frac{2}{2^{-1}} = 2^2.$$

$$(6) Y = \frac{\sqrt[5]{5^2 \sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5 \sqrt{5}}} + \frac{5 \sqrt[3]{5}}{5^{-2}}$$

$$Y = \frac{\sqrt[5]{5^2 \sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} + \frac{5\sqrt[3]{5}}{5^{-2}} = \frac{(5^2 \sqrt{5})^{\frac{1}{5}}}{(5\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}} + 5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^2 = \frac{(5^2 \cdot 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}}{(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}} + 5^{\frac{10}{3}} = \frac{5^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5}}}{5^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}}} + 5^{\frac{10}{3}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} + 5^{\frac{10}{3}} = 1 + 5^{\frac{10}{3}}$$

Câu 2. Tính giá trị biểu thức:

$$(1) P = (2\sqrt{6} - 5)^{2020} (2\sqrt{6} + 5)^{2021}$$

$$(2) S = (\sqrt{5} - 2)^{2020} \cdot (\sqrt{5} + 2)^{2021}$$

$$(3) T = (7 + 4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3} - 7)^{2019}$$

$$(4) W = (2\sqrt{5} - \sqrt{19})^{2018} (\sqrt{20} + \sqrt{19})^{2019}$$

$$(5) F = (3 + 2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019}$$

$$(6) G = (2 + 3\sqrt{2})^{100} \cdot (12\sqrt{2} + 22)^2 \cdot (22 - 12\sqrt{2})^{52}$$

Lời giải

$$(1) P = (2\sqrt{6} - 5)^{2020} (2\sqrt{6} + 5)^{2021}$$

$$P = (2\sqrt{6} - 5)^{2020} (2\sqrt{6} + 5)^{2021}$$

$$= (2\sqrt{6} - 5)^{2020} (2\sqrt{6} + 5)^{2020} \cdot (2\sqrt{6} + 5)$$

$$= \left[(2\sqrt{6} - 5)(2\sqrt{6} + 5) \right]^{2020} (2\sqrt{6} + 5) = (-1)^{2020} \cdot (2\sqrt{6} + 5) = 2\sqrt{6} + 5.$$

$$(2) S = (\sqrt{5} - 2)^{2020} \cdot (\sqrt{5} + 2)^{2021}$$

$$S = (\sqrt{5} - 2)^{2020} \cdot (\sqrt{5} + 2)^{2021} = \left[(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) \right]^{2020} (\sqrt{5} + 2) = \sqrt{5} + 2.$$

$$(3) T = (7 + 4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3} - 7)^{2019}$$

$$T = (7 + 4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3} - 7)^{2019}$$

$$= (7 + 4\sqrt{3}) \cdot \left[(4\sqrt{3} + 7)(4\sqrt{3} - 7) \right]^{2019} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot (-1)^{2019} = -7 - 4\sqrt{3}.$$

$$(4) W = (2\sqrt{5} - \sqrt{19})^{2018} (\sqrt{20} + \sqrt{19})^{2019}$$

$$W = (2\sqrt{5} - \sqrt{19})^{2018} (\sqrt{20} + \sqrt{19})^{2019} = (2\sqrt{5} - \sqrt{19})^{2018} (\sqrt{20} + \sqrt{19})^{2018} (\sqrt{20} + \sqrt{19}) = \sqrt{20} + \sqrt{19}$$

$$(5) F = (3 + 2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019}$$

$$F = (3 + 2\sqrt{2})^{2018} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019}$$

$$= (1 + \sqrt{2})^{4036} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019}$$

$$= (1 + \sqrt{2})^{2017} \cdot (1 + \sqrt{2})^{2019} \cdot (\sqrt{2} - 1)^{2019} = (1 + \sqrt{2})^{2017} \left((1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) \right)^{2019} = (1 + \sqrt{2})^{2017}.$$

$$\begin{aligned} (6) \quad G &= (2 + 3\sqrt{2})^{100} \cdot (12\sqrt{2} + 22)^2 \cdot (22 - 12\sqrt{2})^{52} \\ G &= (2 + 3\sqrt{2})^{100} \cdot (12\sqrt{2} + 22)^2 \cdot (22 - 12\sqrt{2})^{52} \\ &= (12\sqrt{2} + 22)^{50} \cdot (12\sqrt{2} + 22)^2 \cdot (22 - 12\sqrt{2})^{52} \\ &= (12\sqrt{2} + 22)^{52} \cdot (22 - 12\sqrt{2})^{52} = \left[(12\sqrt{2} + 22)(22 - 12\sqrt{2}) \right]^{52} = 196^{52} \end{aligned}$$

Câu 3. Thu gọn các biểu thức sau (biết rằng các biểu thức luôn có nghĩa):

$$(1) \quad P = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^5}}}$$

$$(2) \quad Q = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}}$$

$$(3) \quad E = \left(\sqrt{x^3} \right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{3}-1}$$

$$(4) \quad S = \frac{x - 9x^{-1}}{\sqrt{x} - 3x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$(5) \quad V = \frac{x^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{3}{4}} \right)}{\sqrt{x^5} (\sqrt{x} - x)}$$

$$(6) \quad T = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x}}} : \sqrt[24]{x^5}$$

Lời giải

$$(1) \quad P = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^5}}}$$

$$\text{Ta có: } P = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^5}}} = \left(x^3 \left(x \left(x^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^3 \left(x^{\frac{8}{3}} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{11}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{11}{6}}.$$

$$(2) \quad Q = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{6}} = x^{\frac{5}{2}}.$$

$$(3) \quad E = \left(\sqrt{x^3} \right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{3}-1}$$

$$\text{Ta có } E = \left(\sqrt{x^3} \right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{3}-1} = \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)^{\sqrt{3}-1} = x^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+3} \cdot x^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+3-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{7+2\sqrt{3}}{2}}.$$

$$(4) \quad S = \frac{x - 9x^{-1}}{\sqrt{x} - 3x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$S = \frac{x - 9x^{-1}}{\sqrt{x} - 3x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x - 9x^{-1}}{x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x - 9\frac{1}{x}}{x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^2 - 9}{x \cdot x^{\frac{1}{2}} (x - 3)} = \frac{(x+3)(x-3)}{x^{\frac{1}{2}} (x-3)} = \frac{x+3}{\sqrt{x}}.$$

$$(5) V = \frac{x^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{3}{4}} \right)}{\sqrt{x^5} (\sqrt{x} - x)}$$

$$\text{Ta có: } V = \frac{x^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{5}{4}} - x^{\frac{3}{4}} \right)}{\sqrt{x^5} (\sqrt{x} - x)} = \frac{x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{4}} \left(x^{\frac{1}{2}} - 1 \right)}{x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{2}} \right)} = \frac{x^{\frac{13}{12}}}{-x^3} = -x^{-\frac{23}{12}}.$$

$$(6) T = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x}} : \sqrt[24]{x^5}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x}} : \sqrt[24]{x^5} \\ &= \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{x^2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}} : x^{\frac{5}{24}} \\ &= \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^{-\frac{3}{2}}}} : x^{\frac{5}{24}} \\ &= \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^5} \cdot x^{-\frac{3}{8}}} : x^{\frac{5}{24}} = \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^{\frac{37}{8}}}} : x^{\frac{5}{24}} = \sqrt{x^3 \cdot x^{\frac{37}{24}}} : x^{\frac{5}{24}} = \sqrt{x^{\frac{109}{24}}} : x^{\frac{5}{24}} = x^{\frac{109}{48}} : x^{\frac{5}{24}} = x^{\frac{33}{16}}. \end{aligned}$$

Câu 4. Thu gọn các biểu thức sau (biết rằng các biểu thức luôn có nghĩa):

$$(1) M = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}}$$

$$(2) B = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$(3) E = \left(\sqrt{x^3} \right)^{\sqrt{3}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{3}-1}$$

$$(4) X = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[5]{ab} \right)}$$

$$(5) P = \frac{x^{\frac{7}{6}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{7}{6}}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} \cdot \left(\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^5} \right)$$

$$(6) R = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$$

$$(7) F = \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} - \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}}$$

$$(8) E = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} - \sqrt[3]{ab}$$

Lời giải

$$(1) M = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2} \right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}}$$

$$M = \frac{(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{\sqrt[3]{a^6 \cdot b^3}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{a^2 b} = ab$$

$$(2) B = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}}$$

$$B = \sqrt[5]{\frac{a}{b} \sqrt[3]{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{30}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

$$(3) V = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{15}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$$

$$V = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{2}{15}} \cdot \sqrt[5]{\frac{b}{a} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{2}{15}} \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{3}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{2}{15}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{15}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{15}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{2}{15}} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$(4) X = \frac{(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[5]{ab})}$$

$$X = \frac{(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}} \cdot b^6}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[5]{ab})} = \frac{\left(a^{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}\right)^4}{\sqrt[3]{a^6 \cdot b^3}} \cdot \frac{1}{(ab)^{\frac{1}{5}}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{a^2 \cdot b} \cdot (ab)^{-\frac{1}{5}} = ab \cdot (ab)^{-\frac{1}{5}} = ab^{\frac{4}{5}}$$

$$(5) P = \frac{x^{\frac{7}{6}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{7}{6}}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} \cdot (\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^5})$$

$$P = \frac{x^{\frac{7}{6}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{7}{6}}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}} \cdot (\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^5}) = \frac{xy \left(x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{6}} + y^{\frac{1}{6}}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{5}{2}}\right) = xy \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{5}{2}} \cdot y^{\frac{7}{2}}.$$

$$(6) Z = \frac{\sqrt[3]{a}(\sqrt{a} - \sqrt{a^5})}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}}\right)}$$

$$Z = \frac{\sqrt[3]{a}(\sqrt{a} - \sqrt{a^5})}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}}\right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}}\right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} (1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{12}} (1 - a)} = \frac{a^{\frac{5}{6}} (1 + a)}{a^{\frac{5}{6}}} = 1 + a.$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad F &= \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} - \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} \\
 F &= \frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} - \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} \\
 &= \frac{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}}{\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}} - \frac{\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}}{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}} = \frac{a^n + b^n}{b^n - a^n} - \frac{b^n - a^n}{a^n + b^n} = \frac{(a^n + b^n)^2 - (b^n - a^n)^2}{b^{2n} - a^{2n}} = \frac{4a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad E &= \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} - \sqrt[3]{ab} \\
 E &= \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} - \sqrt[3]{ab} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} - (ab)^{\frac{1}{3}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} - (ab)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - (ab)^{\frac{1}{3}} = 0
 \end{aligned}$$

Câu 5. Thu gọn các biểu thức sau (biết rằng các biểu thức luôn có nghĩa):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad F &= \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 & (2) \quad P &= \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} (a^2 b^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6 \\
 (3) \quad Q &= \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} & (4) \quad O &= \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}} \right) \\
 (5) \quad K &= \frac{2}{a+b} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2} & (6) \quad Z &= \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad L &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (2^x - 2^{-x})^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (2^x - 2^{-x})^2} + 1} \\
 (8) \quad U &= \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - \sqrt{xy}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3} \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}
 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 (1) \quad F &= \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 \\
 F &= \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2
 \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab} \right] : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2$$

$$= (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 = 1$$

$$(2) P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} (a^2 b^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$$

$$P = \left\{ a^{\frac{1}{3}} \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} (a^2 b^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^6$$

$$= a^2 \left[a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} (a^2 b^2)^{\frac{2}{3}} \right]^{-3} = a^2 \left[a^{\frac{3}{2}} b (a^2 b^2)^{-2} \right] = a^{\frac{7}{2}} \cdot b \cdot a^{-4} \cdot b^{-4} = a^{-\frac{1}{2}} b^{-3} = \frac{1}{\sqrt{ab^3}}.$$

$$(3) Q = \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}}$$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 1)^2} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{2}{a - 1}$$

$$(4) O = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$O = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}} \right) \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \left(\left(2a^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \left(3b^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}} \right) = \left(4a^{\frac{1}{2}} - 9b^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}} \right) = \left(4a^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(9b^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 16a - 81b.$$

$$(5) K = \frac{2}{a+b} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2}$$

$$K = \frac{2}{a+b} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2} = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \left[\frac{4ab + a^2 + b^2 - 2ab}{4ab} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{a+b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{2\sqrt{ab}} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

$$(6) R = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$$

$$R = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$$

$$= \frac{(\sqrt[4]{a})^2 - (\sqrt[4]{b})^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2 \cdot (\sqrt[4]{a})^2 + 2 \cdot \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$$

$$= \frac{[\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}] \cdot [\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}]}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot [\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}]}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - 2 \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}$$

$$(7) L = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} + 1}$$

$$L = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}{2}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{2^{4x} + 2 \cdot 2^{2x} + 1}{2^{2x}}} - 2}{\sqrt{\frac{2^{4x} + 2 \cdot 2^{2x} + 1}{2^{2x}}} + 2} = \frac{\sqrt{(2^{2x} + 1)^2 - 2 \cdot 2^x}}{\sqrt{(2^{2x} + 1)^2 + 2 \cdot 2^x}} = \frac{\sqrt{(2^x - 1)^2}}{\sqrt{(2^x + 1)^2}} = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

$$(8) U = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - \sqrt{xy}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3} \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$U = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - \sqrt{xy}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3} \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x})^3 \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x})^3 \sqrt{y}}{x+y} - \frac{2y}{x-y} = \frac{2}{x-y} \cdot x - \frac{2y}{x-y} = 2$$

Câu 6. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Biết $4^x + 4^{-x} = 6$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{\frac{2^x + 2^{-x} + 3}{16^x + 16^{-x} + 2}}$.

(2) Biết $9^x + 9^{-x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3^x + 3^{-x} + 2}{1 - 3^x - 3^{-x}}$.

Lời giải

(1) Biết $4^x + 4^{-x} = 6$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{\frac{2^x + 2^{-x} + 3}{16^x + 16^{-x} + 2}}$.

Ta có $(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 = 8 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 2\sqrt{2}$.

$4^x + 4^{-x} = 6 \Leftrightarrow (4^x + 4^{-x})^2 = 36 \Leftrightarrow 16^x + 16^{-x} = 34$.

Vậy $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{2} + 3}{36}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{6}$.

(2) Biết $9^x + 9^{-x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{3^x + 3^{-x} + 2}{1 - 3^x - 3^{-x}}$.

Ta có $(3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 2 + 9^{-x} = 5 \Rightarrow 3^x + 3^{-x} = \sqrt{5}$.

Vậy $P = \frac{\sqrt{5} + 2}{1 - \sqrt{5}}$.

Câu 7. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $A = 199^{200}$; $B = 2003^{150}$ và $C = 40000^{100}$. So sánh A , B và C .

(2) Sắp theo $A = 3^{390}$, $B = 11^{210}$ và $C = 121^{100}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

(3) Viết các số $A = 2^{100}$; $B = 3^{75}$ và $C = 5^{50}$ theo thứ tự từ bé đến lớn.

(4) Hãy sắp xếp $A = \frac{1}{100}$; $B = \left(\frac{99}{1000}\right)^2$; $C = \left(\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{1000^2}\right)^2$ theo thứ tự từ bé đến lớn.

Lời giải

(1) Cho $A = 199^{200}$; $B = 2003^{150}$ và $C = 40000^{100}$. So sánh A , B và C .

$C = 40000^{100} = 200^{200} = 2^{600} \cdot 5^{400}$

Ta có $0 < 199 < 200 \rightarrow 199^{200} < 200^{200} \Rightarrow A < C$

Lại có: $2003 > 2000 > 0 \rightarrow 2003^{150} > 2000^{150} = (2^4 \cdot 5^3)^{150} = 2^{600} \cdot 5^{450} > 2^{600} \cdot 5^{400} \Rightarrow B > C$

Vậy $A < C < B$.

(2) Sắp theo $A = 3^{390}$, $B = 11^{210}$ và $C = 121^{100}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

Ta có: $11^{210} > 11^{200} = (11^2)^{100} = 121^{100} \Rightarrow B > C$

Lại có: $3^{390} < 3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100} < 121^{100} \Rightarrow A < C$

Vậy $B > C > A$.

(3) Viết các số $A = 2^{100}$; $B = 3^{75}$ và $C = 5^{50}$ theo thứ tự từ bé đến lớn.

$$2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50} < 5^{50} \quad (1)$$

$$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25} > 25^{25} = (5^2)^{25} = 5^{50} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$.

(4) Hãy sắp xếp $A = \frac{1}{100}$; $B = \left(\frac{99}{1000}\right)^2$; $C = \left(\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{1000^2}\right)^2$ theo thứ tự từ bé đến lớn.

$$\text{Do } 0 < \frac{99}{1000} < \frac{100}{1000} = \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{99}{1000}\right)^2 < \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} \Rightarrow B < A \quad (1)$$

Với $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, ta có:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}^*, n > 1.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{11^2} < \frac{1}{10} - \frac{1}{11}; \dots; \frac{1}{1000^2} < \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{1000^2} < \frac{1}{10} - \frac{1}{1000} = \frac{99}{1000}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{1000^2}\right)^2 < \left(\frac{99}{1000}\right)^2 \text{ hay } C < B \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $C < B < A$.

Câu 8. Với những giá trị nào của a thì

$$(1) \sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$$

$$(2) (a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(3) (a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(4) (a-1)^{-2} > (a-1)^{\sqrt{2}}$$

$$(5) (2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7}$$

$$(6) (a^2-1)^{\sqrt{2}} \geq (a^2-1)^{\pi^2}$$

Lời giải

$$(1) \sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$$

Điều kiện: $a > 0$

$$\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt[15]{a^7}\right)^{15} > \left(\sqrt[5]{a^2}\right)^{15} \Leftrightarrow a^7 > a^6$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 7 > 6 \\ a^7 > a^6 \end{cases} \Rightarrow a > 1.$$

Vậy $a > 1$.

$$(2) (a-1)^{\frac{2}{3}} > (a-1)^{\frac{1}{3}}$$

Điều kiện: $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

$$\text{Vì } \begin{cases} -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2.$$

Vậy $1 < a < 2$.

$$(3) (a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}}$$

Điều kiện: $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

$$\text{Vì } \begin{cases} -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}} \leq (a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \text{ nên } a-1 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Vậy $a \geq 2$.

$$(4) (a-1)^{-2} > (a-1)^{\sqrt{2}}$$

Điều kiện: $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

$$\text{Vì } \begin{cases} -2 < \sqrt{2} \\ (a-1)^{-2} > (a-1)^{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ nên } 0 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2.$$

Vậy $1 < a < 2$.

$$(5) (2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7}$$

Điều kiện: $2a-3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$

$$\text{Vì } \begin{cases} -3 > -7 \\ (2a-3)^{-3} \geq (2a-3)^{-7} \end{cases} \text{ nên } 2a-3 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2.$$

Vậy $a \geq 2$.

$$(6) (a^2-1)^{\sqrt{2}} \geq (a^2-1)^{\pi^2}$$

Điều kiện: $a^2-1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < -1 \end{cases}$

$$\text{Vì } \begin{cases} \sqrt{2} < \pi^2 \\ (a^2-1)^{\sqrt{2}} \geq (a^2-1)^{\pi^2} \end{cases} \text{ nên } a^2-1 \leq 1 \Leftrightarrow a^2-2 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}.$$

Vậy $a \in [-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}]$.

Câu 9. So sánh hai số a và b , biết:

$$(1) (\sqrt{2}-1)^a > \sqrt{2}+1 > (\sqrt{2}-1)^b$$

$$(2) (\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^b$$

Lời giải

$$(1) (\sqrt{2}-1)^a > \sqrt{2}+1 > (\sqrt{2}-1)^b$$

Ta có $(\sqrt{2}-1)^a > \sqrt{2}+1 > (\sqrt{2}-1)^b \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^{-1} > (\sqrt{2}-1)^b \Leftrightarrow a < -1 < b$.

$$(2) (\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^b$$

Do $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ nên ta có: $(\sqrt{2}-1)^a > (\sqrt{2}-1)^b \Leftrightarrow a < b$

Câu 10. Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị biểu thức $R = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{ax^3}{y} + \frac{ax^3}{z}} = \sqrt[3]{ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{ax^3 \cdot 1} = x\sqrt[3]{a} \\ \Rightarrow A &= x\sqrt[3]{a} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} = \frac{A}{x} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } A = y\sqrt[3]{b} \Rightarrow \sqrt[3]{b} = \frac{A}{y} \quad (2)$$

$$A = z\sqrt[3]{c} \Rightarrow \sqrt[3]{c} = \frac{A}{z} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) cộng vế với vế ta được: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}$

Câu 11. Bác Hiếu đầu tư 100 triệu đồng vào một công ti theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,25% năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì bác Hiếu thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử lãi suất hàng năm không đổi và làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi số tiền bác Hiếu gửi ban đầu là M , Lãi suất định kì là r , số tiền bác lãnh sau 5 là $T = M(1+r)^5$.

Số tiền lãi là $S = T - M = M(1+r)^5 - M = 99.10^6 \left((1+8,25\%)^5 - 1 \right) \approx 48154897$ đồng.

Vậy số tiền lãi bác nhận được là 48,155 triệu đồng.

Câu 12. Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% / năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất,

ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% / năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc và lãi tính từ lúc gửi tiền ban đầu là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Lời giải

Lãi suất cho chu kỳ đầu (3 kỳ hạn đầu tiên) là $\frac{8,4\% \cdot 3}{12} = 2,1\%$.

Lãi suất cho chu kỳ cuối (4 kỳ hạn cuối) là $\frac{12\% \cdot 3}{12} = 3\%$.

Vậy số tiền ông thu được là $50 \cdot (1,021)^3 \cdot (1,03)^4 = 59.895.767$ đồng.

Câu 13. Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất là 6,9% / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào nhất sau đây ?

Lời giải

Số tiền thu được là $8 \cdot 10^7 (1 + 6,9\%)^5 \approx 111\,680\,000$ đồng.

Câu 14. Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng

Lời giải

Ta có công thức lãi kép $T = A(1+r)^n$. Tiền lãi của ông Tú sau 3 năm sẽ là tiền gốc cộng lãi trừ đi số tiền gốc ban đầu.

Ta có : $A(1+6,5\%)^3 - A \geq 30 \Leftrightarrow A \geq \frac{30}{(1,065)^3 - 1} \approx 144,26$ triệu.

Câu 15. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới bác Năm đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng với lãi suất $x\%$ trên một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác Năm đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền làm tròn là 129.512.000 đồng. Khẳng định nào sau đây đúng?

Lời giải

Lãi suất mỗi tháng là $\frac{x}{12}\%$. Theo công thức lãi kép, ta có

$$100 \cdot \left(1 + \frac{x}{12}\%\right)^{24} = 129,512 \Rightarrow \frac{x}{12}\% = \sqrt[24]{\frac{129,512}{100}} - 1 \approx 0,0108.$$

Vậy $x \approx 13$.

- Câu 16.** Do thời tiết ngày càng khắc nghiệt và nhà cách xa trường học, nên một thầy giáo muốn đúng 5 năm nữa có 500 triệu đồng để mua ô tô đi làm. Để đạt nguyện vọng, thầy có ý định mỗi tháng dành ra một số tiền cố định gửi vào ngân hàng (hình thức lãi kép) với lãi suất 0,5%/tháng. Hỏi số tiền ít nhất cần dành ra mỗi tháng để gửi tiết kiệm là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số tiền ít nhất mà thầy giáo cần dành ra mỗi tháng để gửi tiền tiết kiệm là x (đồng).

Số tiền tiết kiệm gửi vào ngân hàng sau 60 tháng là

$$T_{60} = x(1,005^1 + 1,005^2 + \dots + 1,005^{60}) \cdot 1,005 \cdot \frac{1,005^{60} - 1}{0,005}$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } x \cdot 1,005 \cdot \frac{1,005^{60} - 1}{0,005} = 5 \cdot 10^8 \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 10^8 \cdot 0,005}{1,005(1,005^{60} - 1)} = 7130747.$$

- Câu 17.** Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,6%/tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào dưới đây? (biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

Lời giải

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 1 là $100 \cdot 1,006 - 0,5$ (triệu đồng).

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 2 là

$$(100 \cdot 1,006 - 0,5) \cdot 1,006 - 0,5 = 100 \cdot (1,006)^2 - 0,5(1 + 1,006) \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 3 là

$$100 \cdot (1,006)^3 - 0,5[1 + 1,006 + (1,006)^2] \text{ (triệu đồng)}.$$

Cứ như vậy, số tiền còn lại trong tài khoản sau tháng thứ 36 là

$$\begin{aligned} & 100 \cdot (1,006)^{36} - 0,5[1 + 1,006 + (1,006)^2 + \dots + (1,006)^{35}] = 100 \cdot (1,006)^{36} - 0,5 \cdot \frac{1 - (1,006)^{36}}{1 - 1,006} \\ & = 104,0050268 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

- Câu 18.** Chị Lan có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai loại kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, chị rút ra một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

Số tiền chị Lan thu được ở năm thứ nhất là

+ Gửi theo kì hạn theo quý: $200000000(1+r_1)^4 = A$

+ Gửi theo hạn theo tháng: $200000000(1+r_2)^{12} = B$

Số tiền chị Lan thu được ở sau năm thứ hai là

+ Gửi kì hạn theo quý: $\frac{A}{2}(1+r_1)^4$

+ Gửi kì hạn theo tháng: $\left(\frac{A}{2} + B\right)(1+r_2)^{12}$

Số tiền lãi chị Lan thu được là $\frac{A}{2}(1+r_1)^4 + \left(\frac{A}{2} + B\right)(1+r_2)^{12} - 400000000 = 74813000$

(đồng)

Câu 19. Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi kép 1% trên tháng. Sau hai năm 3 tháng (tháng thứ 28) người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Hỏi người đó được rút về bao nhiêu tiền ?

Lời giải

Gọi a là số tiền cứ đầu mỗi tháng gửi tiết kiệm ngân hàng, r là lãi suất kép trên tháng.

T_n là số tiền thu được cả gốc lẫn lãi sau n tháng.

Cuối tháng thứ 1: $a(1+r)$.

Cuối tháng thứ 2: $a(1+r) + a(1+r)^2$.

Cuối tháng thứ 3: $a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3$.

...

Cuối tháng thứ n : $a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \dots + a(1+r)^n$.

$$\Rightarrow T_n = a[(1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^n] = a(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \Rightarrow T_n = \frac{a}{r}(1+r)[(1+r)^n - 1].$$

$$\text{Ta áp dụng công thức } T_n = \frac{a}{r}(1+r)[(1+r)^n - 1] = \frac{1}{0,01}(1,01)[(1,01)^{27} - 1].$$

Câu 20. Bác Hiếu đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thức lãi kép với lãi suất 8,25% năm. Hỏi sau 5 năm mới rút tiền lãi thì bác Hiếu thu được bao nhiêu tiền lãi? (Giả sử lãi suất hàng năm không đổi và làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi số tiền bác Hiếu gửi ban đầu là M , Lãi suất định kì là r , số tiền bác lãnh sau 5 là

$$T = M(1+r)^5.$$

$$\text{Số tiền lãi là } S = T - M = M(1+r)^5 - M = 99.10^6 \left((1+8,25\%)^5 - 1 \right) \approx 48154897 \text{ đồng.}$$

Vậy số tiền lãi bác nhận được là 48,155 triệu đồng.

- Câu 21.** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% / năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% / năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc và lãi tính từ lúc gửi tiền ban đầu là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

Lời giải

Lãi suất cho chu kỳ đầu (3 kỳ hạn đầu tiên) là $\frac{8,4\%.3}{12} = 2,1\%$.

Lãi suất cho chu kỳ cuối (4 kỳ hạn cuối) là $\frac{12\%.3}{12} = 3\%$.

Vậy số tiền ông thu được là $50.(1,021)^3.(1,03)^4 = 59.895.767$ đồng.

- Câu 22.** Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất là 6,9% / năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó có rút được cả gốc và lãi số tiền gần với con số nào nhất sau đây ?

Lời giải

Số tiền thu được là $8.10^7(1+6,9\%)^5 \approx 111\,680\,000$ đồng.

- Câu 23.** Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng

Lời giải

Ta có công thức lãi kép $T = A(1+r)^n$. Tiền lãi của ông Tú sau 3 năm sẽ là tiền gốc cộng lãi trừ đi số tiền gốc ban đầu.

Ta có : $A(1+6,5\%)^3 - A \geq 30 \Leftrightarrow A \geq \frac{30}{(1,065)^3 - 1} \approx 144,26$ triệu.

- Câu 24.** Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7% / năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ sổ tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người đó nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hàng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền được nhập vào thành tiền gốc và số tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn một năm tiếp theo).

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có số tiền nhận được sau 18 năm là.

$500000000(1+0,07)^{18} = 1.689.966.000(\text{VNĐ})$.

- Câu 25.** Vào 4 năm trước, chị Thương có gửi vào ngân hàng một số tiền là 20 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kỳ hạn. Số tiền hiện tại chị nhận được là 29,186792 triệu đồng. Biết

rằng, lãi suất ngân hàng tại thời điểm mà chị Thương gửi tiền là $0,8\%/tháng$. Hỏi kỳ hạn k mà chị Thương đã chọn là bao nhiêu tháng?

Lời giải

Đặt $a = 0,8\% = 0,008$, $N_0 = 20$ triệu, $N = 29,186792$ triệu.

Đổi 4 năm = 48 tháng.

Chị Thương gửi kỳ hạn k tháng nên lãi suất mỗi kỳ là ka , số chu kỳ tính lãi trong 48 tháng là $\frac{48}{k}$

Áp dụng công thức tính lãi kép, số tiền chị Thương nhận được cả gốc và lãi là

$$N = N_0(1 + ak)^{\frac{48}{k}}$$

Thay số và thử $k = 4$, ta được đẳng thức đúng.

Câu 26. Lãi suất gửi tiết kiệm của các ngân hàng trong thời gian qua liên tục thay đổi. Bác Mạnh gửi vào một ngân hàng số tiền 5 triệu đồng với lãi suất $0,7\%/tháng$. Sau sáu tháng gửi tiền, lãi suất tăng lên $0,9\%/tháng$. Đến tháng thứ 10, sau khi gửi tiền, lãi suất giảm xuống $0,6\%/tháng$ và giữ ổn định. Biết rằng nếu bác Mạnh không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (ta gọi là lãi kép). Sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền là bao nhiêu? (biết rằng trong khoảng thời gian này bác Mạnh không rút tiền ra)

Lời giải

Gọi A là số tiền gửi ban đầu; $r\%$ là lãi suất trên một kỳ gửi; N là số kỳ gửi và C là số tiền thu được cả gốc và lãi sau N kỳ. Khi đó ta có công thức tính $C = A\left(1 + \frac{r}{100}\right)^N$. Áp

dụng công thức này vào bài toán, ta có sau một năm gửi tiền, bác Mạnh rút được số tiền (đồng) là:

$$C = 5 \cdot 10^6 \cdot (1 + 0,007)^6 \cdot (1 + 0,009)^3 \cdot (1 + 0,006)^3 = 5452733,453$$

Câu 27. Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn thành phố A đạt xấp xỉ 905.300 người. Mỗi năm dân số thành phố tăng thêm $1,37\%$. Để thành phố A thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đi vào lớp 1 thì đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 (mỗi phòng 35 học sinh) gần nhất với số nào sau đây; biết rằng sự di cư đến, đi khỏi thành phố và trẻ tử vong trước 6 tuổi đều không đáng kể, ngoài ra trong năm sinh của lứa học sinh lớp 1 đó toàn thành phố có 2400 người chết.

Lời giải

Từ năm 2011 đến năm 2018 (năm có học sinh vào lớp 1 của năm học 2024 – 2025) dân số tăng

$$905300(1 + 0,0137)^8 - 905300(1 + 0,0137)^7 + 2400 \approx 16042,0367 \text{ người.}$$

Đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 là

$$\frac{16042,0367}{35} \approx 458 \text{ phòng.}$$

- Câu 28.** Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $N = A.e^{rt}$ trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$) và t là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 250 con và sau 12 giờ là 1500 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 216 lần số lượng vi khuẩn ban đầu?

Lời giải

Theo công thức ta có $1500 = 250.e^{12r} \Leftrightarrow e^{12r} = 6 \Leftrightarrow r = \frac{1}{12} \ln 6$.

Khi đó $54000 = 250.e^{\frac{t}{12} \ln 6} \Leftrightarrow 6^{\frac{t}{12}} = 216 \Leftrightarrow \frac{t}{12} = \log_6 216 = 3 \Leftrightarrow t = 36 \text{ giờ.}$

- Câu 29.** Ông A vay ngân hàng 96 triệu đồng với lãi suất 1% tháng theo hình thức mỗi tháng trả góp số tiền giống nhau sao cho đúng hai năm thì hết nợ. Hỏi số tiền ông A trả hàng tháng là bao nhiêu? (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Đặt $T = 96$ triệu đồng, $r = 1\%$, số tiền ông A phải trả hàng tháng là m .

Số tiền gốc sau 1 tháng là $T + T.r - m = T(1+r) - m$.

Số tiền gốc sau 2 tháng là $[T(1+r) - m] + [T(1+r) - m]r - m = T(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]$.

Số tiền gốc sau 3 tháng là

$$T(1+r)^2 - m[(1+r) + 1] + \{T(1+r)^2 - m[(1+r) + 1]\}r - m = T(1+r)^3 - m[(1+r)^2 + (1+r) + 1]$$

Tương tự, số tiền sau 24 tháng là :

$$T(1+r)^{24} - m[(1+r)^{23} + (1+r)^{22} + (1+r)^{21} + \dots + 1] = 0 \text{ (vì hết nợ)}$$

$$\text{Do đó } m = \frac{T(1+r)^{24}}{\left[(1+r)^{23} + (1+r)^{22} + (1+r)^{21} + \dots + 1 \right]} = \frac{Tr}{1 - \frac{1}{1+r}} \simeq 4,519.$$

- Câu 30.** Ông Bình gửi tổng cộng 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý, gửi trong 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong vòng 9 tháng. Tổng lợi tức ông Bình có được sau khi rút tiền ở hai ngân hàng là 27507768,13 đồng. Hỏi số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

Lời giải

Đổi 15 tháng = 5 quý.

Gọi số tiền gửi trong ngân hàng X là x triệu đồng và trong ngân hàng Y là $320 - x$ triệu đồng. Khi đó tổng lợi tức mà ông nhận được ở hai ngân hàng là :

$$x(1+2,1\%)^5 + (320-x)(1+0,73\%)^9 = 27507768,13.$$

Giải ra $x=140$ triệu đồng.

Vậy số tiền ông Bình lần lượt gửi ở hai ngân hàng X và Y lần lượt là 140 triệu đồng và 180 triệu đồng.

Câu 31. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép, lãi suất $r=0,5\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm tổng tiền có được của tháng trước đó với tiền lãi của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

Lời giải

Gọi T_0, r, n, T_n lần lượt là số tiền gốc ban đầu, lãi suất một tháng, số tháng gửi ngân hàng và tổng số tiền có được sau n tháng gửi.

Theo giả thiết $T_0=100$ triệu, $r=0,5\%$, $T_n \geq 125$.

$$\text{Ta có: } T_n = T_0(1+r)^n \Rightarrow (1+r)^n = \frac{T_n}{T_0} \Rightarrow n = \log_{1+r} \frac{T_n}{T_0} \Rightarrow n \geq \log_{1+0,5\%} \frac{125}{100} \approx 44,74.$$

Vậy cần ít nhất 45 tháng để người đó có nhiều hơn 125 triệu.

Câu 32. Một người lập kế hoạch gửi tiết kiệm ngân hàng như sau : Đầu tháng 1 năm 2018 người đó gửi 10 triệu đồng; sau mỗi đầu tháng tiếp theo, người đó gửi số tiền nhiều hơn 10% so với số tiền đã gửi ở tháng liền trước đó. Biết rằng lãi suất ngân hàng không đổi là 0,5% mỗi tháng và được tính theo hình thức lãi kép. Với kế hoạch như vậy, đến hết tháng 12 năm 2019, số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn).

Lời giải

Với $A=10$ triệu, $a=0,1$, $r=0,005$

Đầu tháng 2: $A(1+r) + A(1+a)$.

Đầu tháng 3: $A(1+r)^2 + A(1+a)(1+r) + A(1+a)^2$.

Đầu tháng 4: $A(1+r)^3 + A(1+r)^2(1+a) + A(1+r)(1+a)^2 + A(1+a)^3$.

.....

Đầu tháng n : $A \left[(1+r)^{n-1} + A(1+r)^{n-2}(1+a) + \dots + A(1+r)(1+a)^{n-2} + A(1+a)^{n-1} \right]$.

Hết tháng n : $A \left[(1+r)^{n-1} + A(1+a)^{n-2}(1+r) + \dots + A(1+a)(1+r)^{n-2} + A(1+a)^{n-1} \right] (1+r)$.

Gọi B là số tiền của người đó trong tài khoản tiết kiệm đến hết tháng 12 năm 2019

Khi đó $n=24$.

$$\text{Ta có } B = A \cdot \frac{(1+a)^n - (1+r)^n}{a-r} (1+r) = 922.756.392,2.$$

Câu 33. Chị Lan có 400 triệu đồng đem đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo thể thức lãi kép. Chị gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý, 200 triệu đồng còn lại chị gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được 1 năm, chị rút một nửa số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi vào loại kì hạn theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, chị Lan thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi (làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải

Số tiền 200 triệu đồng tính theo kì hạn quý sau 1 năm là : $200 \cdot (2,1\% + 1)^4$ (triệu đồng).

Số tiền 200 triệu đồng tính theo kì hạn tháng sau 1 năm là : $200 \cdot (0,73\% + 1)^{12}$ (triệu đồng).

Do sau giả thiết suy ra số tiền tính theo quý lấy lãi tiếp tục trong 1 năm được

$$A = 100(2,1\% + 1)^4 \cdot (2,1\%)^4 \text{ (triệu đồng)}.$$

Tương tự số tiền tính theo tháng lấy lãi kép tiếp tục trong 1 năm được

$$B = \left[200 \cdot (0,73\% + 1)^{12} + 100(2,1\% + 1)^4 \cdot (1 + 0,73\%)^{12} \right] \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy số tiền chị lãi là : $M = A + B = 74,813$ (triệu đồng).

Câu 34. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A: giá khoan của mét khoan đầu tiên là 8000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cơ sở B: giá khoan của mét khoan đầu tiên là 6000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 mét và 25 mét để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

Lời giải

Chi phí cơ sở A khoan giếng 20 mét và 25 mét lần lượt là: $20 \cdot 8000 + 19 \cdot 20 \cdot 250 = 255000$ đồng và $25 \cdot 8000 + 24 \cdot 25 \cdot 250 = 350000$ đồng.

Chi phí cơ sở B khoan giếng 20 mét và 25 mét lần lượt là:

$$6000 \cdot \frac{1,07^{20} - 1}{0,07} = 245972,9539 \text{ đồng và } 6000 \cdot \frac{1,07^{25} - 1}{0,07} = 379494,2263 \text{ đồng}.$$

Vậy giếng 20 mét chọn B, còn giếng 25 mét chọn A.

-----Hết-----

A Lý thuyết

1. Khái niệm logarit.



Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$.

➤ Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$

➤ Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

➤ $\log_a b$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

Chú ý

(1) Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall \alpha$.

(2) $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$

(3) $\log_a a^b = b$

(4) $a^{\log_a b} = b$

2. Tính logarit bằng máy tính cầm tay.

Chú ý

(1) Logarit cơ số 10 được gọi là logarit thập phân. Ta viết $\log a$ hoặc $\lg a$ thay $\log_{10} a$.

(2) Logarit cơ số e được gọi là logarit tự nhiên. Ta viết $\ln a$ thay $\log_e a$.

3. Tính chất của phép tính logarit

Với $0 < a \neq 1; b, c > 0; \alpha \in \mathbb{R}$, khi đó:

(1) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

(2) $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

(3) $\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b$

(4) $a^{\log_a b} = b$

Chú ý

Đặc biệt với $a; b$ dương, $a \neq 1$ ta có:

$$(1) \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$(2) \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

4. Công thức đổi cơ số



Cho các số dương a, b, c với $a \neq 1; b \neq 1$. Ta có $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Chú ý

Đặc biệt ta có:

$$(1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1)$$

$$(2) \log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b \quad (m \neq 0)$$

B Bài tập

Dạng 1. Tính giá trị biểu thức

Phương pháp

☑ Áp dụng các tính chất – công thức để biến đổi

01

Tính chất

① $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

② $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$

③ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (Tích – tổng)

④ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (Thương – hiệu)

Đặc biệt : với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$

02

Công thức “bay”

① $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

② $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

03

Đổi cơ số

① $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

② $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$



Ví dụ 1.1.

Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

Lời giải

Ta có $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2 \log_a 4} = a^{\log_a 4^2} = 4^2 = 16$.



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của biểu thức $A = 2 \log_2 12 + 3 \log_2 5 - \log_2 15 - \log_2 150$.

Lời giải

$$A = \log_2 12^2 + \log_2 5^3 - (\log_2 15 + \log_2 150) = \log_2 12^2 \cdot 5^3 - \log_2 15 \cdot 150 = \log_2 \frac{18000}{2250} = \log_2 8 = 3$$



Ví dụ 1.3.

Cho các số dương a, b và $a \neq 1$

Rút gọn biểu thức $K = \log_a b^2 + 2 \log_{a^2} b^4 + 3 \log_{a^3} b^6 - 4 \log_{a^4} b^8$ ta được

Lời giải

$$K = \log_a b^2 + 2 \log_{a^2} b^4 + 3 \log_{a^3} b^6 - 4 \log_{a^4} b^8 = 2 \log_a b + 4 \log_a b + 6 \log_a b - 8 \log_a b = 4 \log_a b$$

Dạng 2. Biểu diễn logarit



Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước sau

- **Bước 01.** Biến đổi các biểu thức logarit phụ thuộc vào tham số a và b .
- **Bước 02.** Đặt các biểu thức logarit của các số nguyên tố là các ẩn x, y, z .
Từ đó ta thu được phương trình hoặc hệ phương trình với các ẩn x, y, z .
Ta tìm các ẩn này theo a, b
- **Bước 03.** Giải hệ tìm được tìm $x, y, z \dots$ theo a, b .
Từ đó tính được biểu thức theo các tham số a, b .

Các công thức nền tảng là $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ và $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$.



Ví dụ 2.1.

Cho $a = \log_2 14$. Biểu diễn $\log_{49} 16$ theo a

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{49} 16 = \log_{7^2} 2^4 = 2 \log_7 2 = 2 \cdot \frac{1}{\log_2 7} = \frac{2}{\log_2 \left(\frac{14}{2}\right)} = \frac{2}{\log_2 14 - \log_2 2} = \frac{2}{a-1}.$$



Ví dụ 2.2.

Tính $M = \log_4 1250$ theo a biết $a = \log_2 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \log_4 1250 = \frac{1}{2} \log_2 (5^4 \cdot 2) = \frac{1}{2} (4 \log_2 5 + 1) = \frac{1}{2} + 2a.$$



Ví dụ 2.3.

Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 25$ theo a và b .

Lời giải

$$\log_6 45 = \frac{\log_3 (5 \cdot 3^2)}{\log_3 (2 \cdot 3)} = \frac{\log_3 5 + 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{\frac{1}{b} + 2}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a + 2ab}{ab + b}.$$



Ví dụ 2.4.

Cho $\log_2 6 = a$; $\log_2 7 = b$. Hãy biểu diễn $\log_{18} 42$ theo a và b .

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_{18} 42 = \frac{\log_2 42}{\log_2 18} = \frac{\log_2 (6 \cdot 7)}{\log_2 \left(\frac{36}{2}\right)} = \frac{\log_2 6 + \log_2 7}{\log_2 6^2 - \log_2 2} = \frac{a+b}{2a-1}.$$



Ví dụ 2.5.

Cho $\log_3 2 = a$ và $\log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo a và b .

Lời giải

$$\log_{10} 60 = \frac{\log_3 60}{\log_3 10} = \frac{\log_3 (4 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_3 (2 \cdot 5)} = \frac{2\log_3 2 + \log_3 5 + 1}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{2a + b + 1}{a + b}.$$



Ví dụ 2.6.

Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b

Lời giải

$$\text{Đầu tiên ta có hệ } \begin{cases} a = \log_5 18 = \log_5 2 + 2\log_5 3 \\ b = \log_5 60 = 2\log_5 2 + \log_5 3 + 1 \end{cases}$$

Đặt $x = \log_5 2$ và $y = \log_5 3$ từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 2 = \frac{-a + 2b - 2}{3} \\ y = \log_5 3 = \frac{2a - b + 1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Nên } \log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3} = \frac{-a + 2b - 2}{2a - b + 1}.$$

C Luyện tập

Câu 35. Tính giá trị biểu thức:

$$(1) K = \log_{2^{2018}} 4 - \frac{1}{1009} + \ln e^{2018}$$

$$(2) S = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$$

$$(3) P = \frac{1}{\log_{49} 5} - \frac{1}{\log_7 5}$$

$$(4) D = \frac{1}{\log_2 10 \cdot \log 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 10}$$

$$(5) P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$$

Lời giải

$$(1) K = \log_{2^{2018}} 4 - \frac{1}{1009} + \ln e^{2018}$$

$$\text{Ta có: } \log_{2^{2018}} 4 - \frac{1}{1009} + \ln e^{2018} = \log_{2^{2018}} 2^2 - \frac{1}{1009} + 2018 = \frac{2}{2018} - \frac{1}{1009} + 2018 = 2018.$$

$$(2) S = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$$

$$\text{Ta có } S = 2^{\log_4 9 + \log_2 5} = 2^{\log_4 9} \cdot 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15.$$

$$(3) P = \frac{1}{\log_{49} 5} - \frac{1}{\log_7 5}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{\log_{49} 5} - \frac{1}{\log_7 5} = \log_5 49 - \log_5 7 = \log_5 7.$$

$$(4) D = \frac{1}{\log_2 10 \cdot \log 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 10}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } D &= \frac{1}{\log_2 10 \cdot \log 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 10} \\ &= \frac{1}{\log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 10} = \frac{1}{\log_2 4 \cdot \log_4 10} = \frac{1}{\log_2 10} = \log_{10} 2 = \log 2. \end{aligned}$$

$$(5) P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ)$$

$$\text{Ta có: } \tan(90^\circ - \alpha) = \cot(\alpha)$$

$$\begin{aligned} P &= \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 89^\circ) \\ &= \log(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ) \\ &= \log[\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 45^\circ \dots \tan(90^\circ - 2^\circ) \cdot \tan(90^\circ - 1^\circ)] \\ &= \log(\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \dots \tan 45^\circ \dots \cot 2^\circ \cdot \cot 1^\circ) \\ &= \log((\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ)(\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ) \dots \tan 45^\circ) = 1 \cdot \log 1 = 0. \end{aligned}$$

Câu 36. Tính giá trị biểu thức:

(1) $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$

(2) $E = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right)$

(3) $Q = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a^2}$

(4) $G = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \right)$

(5) $H = \log_a a^{\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

(6) $X = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$

Lời giải

(1) $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$

Ta có $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = (6\log_a b) \cdot (4\log_b a) = 24$.

(2) $E = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right)$

Ta có $E = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right) = \log_b b^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_b b = \frac{5}{2}$.

(3) $Q = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a^2}$

Ta có $Q = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a^2} = \frac{1}{\log_a a^2} = \frac{1}{2}$

(4) $G = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}} \right)$

Ta có $G = \log_a \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] = \log_a \left(a^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \log_a a = \frac{3}{2}$.

(5) $H = \log_a a^{\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

Ta có $H = \log_a a^{\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}}$

$$= \log_a a \cdot \left[\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot a \right]^{\frac{1}{5}} = \log_a a \cdot \left[\left(a^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot a \right]^{\frac{1}{5}} = \log_a a \cdot a^{\frac{3}{10}} = \log_a a^{\frac{13}{10}} = \frac{13}{10}$$

(6) $X = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$

Ta có $X = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = (6\log_a b) \cdot (4\log_b a) = 24$.

Câu 37. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $\log_2 x = a$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$ theo a .

(2) Cho $\log_5 x = a$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2\log_{25} \frac{1}{x} - \log_{125} x^3 + \log_x 25$

(3) Cho $\ln x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2\ln(\sqrt{ex}) - \ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{x}}\right) + \ln 3 \cdot \log_3(ex^2)$

(4) Cho $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Tính giá trị của $M = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$.

(5) Cho $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \frac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$. Tính giá trị của $\log_c 3$

(6) Cho $\log_x(x^2 y^3) = 1$. Tính giá trị biểu thức $N = \log_{x^2 y^3} \frac{\sqrt[5]{x^3 y^2}}{xy^3}$

Lời giải

(1) Cho $\log_2 x = a$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$ theo a .

Ta có $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x = 2\log_2 x - \frac{3}{2}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \log_2 x = a$.

(2) Cho $\log_5 x = a$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2\log_{25} \frac{1}{x} - \log_{125} x^3 + \log_x 25$

Ta có $\log_5 x = a \Leftrightarrow x = 5^a \Rightarrow P = 2\log_{25} \frac{1}{5^a} - \log_{125} 5^{3a} + \log_{5^a} 25 = -a - a + \frac{2}{a} = \frac{2(1-a^2)}{a}$.

(3) Cho $\ln x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $T = 2\ln(\sqrt{ex}) - \ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{x}}\right) + \ln 3 \cdot \log_3(ex^2)$

Ta có $T = \ln(ex) - (2 - \ln \sqrt{x}) + \ln(ex^2) = (1 + \ln x) - 2 + \frac{1}{2}\ln x + 1 + 2\ln x = \frac{7}{2}\ln x = 7$.

(4) Cho $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Khi đó giá trị của $M = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ là

Ta có $M = \log_5 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}} = \log_5 \frac{2^2 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}}}$

$= \log_5 \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}}} = \log_5 2^{\frac{5}{2}} - \log_5 3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}a - \frac{1}{2}\log_5 3 - \frac{1}{2}\log_5 5 = \frac{5}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = \frac{5a - b - 1}{2}$.

(5) Cho $\log_a 3 = 2$, $\log_b 3 = \frac{1}{4}$ và $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$. Tính giá trị của $\log_c 3$

Ta có $\log_a 3 = 2 \Rightarrow \log_3 a = \frac{1}{2}$, $\log_b 3 = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_3 b = 4$.

Khi đó ta có $\log_{abc} 3 = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 a + \log_3 b + \log_3 c} = \frac{2}{15}$.

$\Leftrightarrow \frac{2}{9 + 2\log_3 c} = \frac{2}{15} \Leftrightarrow 2\log_3 c + 9 = 15 \Leftrightarrow \log_3 c = 3 \Leftrightarrow \log_c 3 = \frac{1}{3}$.

Vậy $\log_c 3 = \frac{1}{3}$.

(6) Cho $\log_x (x^2 y^3) = 1$. Tính giá trị biểu thức $N = \log_{x^2 y^3} \frac{\sqrt[5]{x^3 y^2}}{xy^3}$

$$\log_x (x^2 y^3) = 1 \Leftrightarrow 2 + 3\log_x y = 1 \Leftrightarrow \log_x y = -\frac{1}{3}.$$

Ta lại có $\log_x (x^2 y^3) = 1 \Leftrightarrow x^2 y^3 = a \Leftrightarrow xy^3 = 1$.

$$N = \log_{x^2 y^3} \frac{\sqrt[5]{x^3 y^2}}{xy^3}$$

$$= \log_{x^2 y^3} \sqrt[5]{x^3 y^2} = \frac{1}{5} \log_{x^2 y^3} x^3 y^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\log_x x^3 + \log_x y^2}{\log_x x^2 + \log_x y^3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7}{15}.$$

Câu 38. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho x, y là hai số thực dương, $x \neq 1$ thỏa $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8}$, $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y}$. Tính $P = x^2 - y^2$

(2) Cho các số thực dương $a; b$ thỏa $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Tính $M = \log_2 (a^2 b^3)$ theo $x; y$

(3) Cho các số thực a, b thỏa $0 < a \neq 1; b > 0$ và $\log_a (a^2 b^3) = 1$. Tính $N = \log_{a^2 b^3} \frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{ab^3}$

Lời giải

(1) Cho x, y là hai số thực dương, $x \neq 1$ thỏa $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8}$, $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y}$. Tính $P = x^2 - y^2$.

Ta có: $\log_{\sqrt[3]{x}} y = \frac{3y}{8} \Leftrightarrow \log_x y = \frac{y}{8}$; $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{32}{y} \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{16}{y}$.

Mà $\log_2 y = \log_2 x \cdot \log_x y = \frac{16}{y} \cdot \frac{y}{8} = 2 \Rightarrow y = 4$.

Suy ra: $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

Vậy $P = x^2 - y^2 = 16^2 - 4^2 = 240$.

(2) Cho các số thực dương $a; b$ thỏa $\log_2 a = x$, $\log_2 b = y$. Tính $M = \log_2 (a^2 b^3)$ theo $x; y$

Theo tính chất Logarit: $M = \log_2 (a^2 b^3) = \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2\log_2 a + 3\log_2 b = 2x + 3y$.

(3) Cho các số thực a, b thỏa $0 < a \neq 1; b > 0$ và $\log_a (a^2 b^3) = 1$. Tính $N = \log_{a^2 b^3} \frac{\sqrt[5]{a^3 b^2}}{ab^3}$

$$\log_a (a^2 b^3) = 1 \Leftrightarrow 2 + 3\log_a b = 1 \Leftrightarrow \log_a b = -\frac{1}{3}.$$

Ta lại có $\log_a (a^2 b^3) = 1 \Leftrightarrow a^2 b^3 = a \Leftrightarrow ab^3 = 1$.

$$N = \log_{a^2b^3} \frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{ab^3}$$

$$= \log_{a^2b^3} \sqrt[5]{a^3b^2} = \frac{1}{5} \log_{a^2b^3} a^3b^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\log_a a^3 + \log_a b^2}{\log_a a^2 + \log_a b^3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7}{15}.$$

Câu 39. Cho $a; b$ là các số dương lớn hơn 1

(1) Thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 6ab$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

(2) Thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Tính $K = \log \frac{a+b}{3}$.

(3) Thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$. Tính $V = \log \frac{3a+b}{4}$.

Lời giải

(1) Thỏa mãn $a^2 + 9b^2 = 6ab$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

Ta có $a^2 + 9b^2 = 6ab \Leftrightarrow (a - 3b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 3b$.

Khi đó $M = \frac{1 + 2 \log_{12} 3b + \log_{12} b}{2 \log_{12} 6b} = \frac{\log_{12} 12b + \log_{12} 3b}{\log_{12} 36b^2} = \frac{\log_{12} 36b^2}{\log_{12} 36b^2} = 1$.

(2) Thỏa mãn $a^2 + b^2 = 7ab$. Tính $K = \log \frac{a+b}{3}$.

Ta có $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{9} = ab$

$\Rightarrow \log \left(\frac{a+b}{3} \right)^2 = \log(ab) \Leftrightarrow 2 \log \frac{a+b}{3} = \log a + \log b \Leftrightarrow K = \log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$

(3) Thỏa mãn $9a^2 + b^2 = 10ab$. Tính $V = \log \frac{3a+b}{4}$.

Ta có $9a^2 + b^2 = 10ab \Leftrightarrow 9a^2 + 6ab + b^2 = 16ab \Leftrightarrow (3a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \frac{(3a+b)^2}{16} = ab$

$\rightarrow \log \frac{(3a+b)^2}{16} = \log(ab)$

$\Leftrightarrow 2 \log \frac{3a+b}{4} = \log a + \log b \Leftrightarrow V = \log \frac{3a+b}{4} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$.

Câu 40. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $\log_5 3 = a$; $\log_7 5 = b$. Tính $\log_{15} 105$ theo a và b .

(2) Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $\log_{25} 15$ theo a .

(3) Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a và b .

- (4) Cho $\log_2 3 = a, \log_2 7 = b$. Tính $\log_2 2016$ theo a và b .
 (5) Cho $\log_2 3 = a, \log_5 3 = b$. Tính $\log_{10} 3$ tính theo a và b .
 (6) Cho $a = \log_2 6, b = \log_2 7$. Tính $\log_{18} 42$ theo a và b .
 (7) Cho $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Tính $\log_6 45$ theo a và b .
 (8) Cho $a = \log_3 4, b = \log_5 4$. Tính $\log_{12} 80$ theo a và b .
 (9) Cho $a = \log_{25} 7; b = \log_2 5$. Tính $\log_5 \frac{49}{8}$ theo a, b .
 (10) Cho $\log_2 3 = a; \log_3 5 = b$. Tính $\log_6 15$ theo a, b .

Lời giải

- (1) Cho $\log_5 3 = a; \log_7 5 = b$. Tính $\log_{15} 105$ theo a và b .

$$\log_{15} 105 = \frac{\log_5 105}{\log_5 15} = \frac{\log_5 3 + \log_5 7 + 1}{\log_5 3 + 1} = \frac{a + \frac{1}{b} + 1}{a + 1} = \frac{1 + b + ab}{(1 + a)b}.$$

- (2) Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $\log_{25} 15$ theo a .

$$\log_{15} 3 = \frac{1}{\log_3 15} = \frac{1}{1 + \log_3 5} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1 - a}{a}.$$

$$\log_{25} 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 25} = \frac{1 + \log_3 5}{2 \log_3 5} = \frac{1}{2(1 - a)}.$$

- (3) Cho $\log_{27} 5 = a, \log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Tính $\log_6 35$ theo a và b .

$$\text{Ta có: } \log_{27} 5 = a \Leftrightarrow \frac{1}{3} \log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a.$$

$$\log_6 35 = \frac{\log_3 35}{\log_3 6} = \frac{\log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1} = \frac{3a + b}{\frac{1}{c} + 1} = \frac{(3a + b)c}{1 + c}.$$

- (4) Cho $\log_2 3 = a, \log_2 7 = b$. Tính $\log_2 2016$ theo a và b .

$$\text{Ta có } \log_2 2016 = \log_2 (2^5 \cdot 3^2 \cdot 7) = \log_2 2^5 + \log_2 3^2 + \log_2 7 = 5 + 2\log_2 3 + \log_2 7.$$

$$\text{Do đó } \log_2 2016 = 5 + 2a + b.$$

- (5) Cho $\log_2 3 = a, \log_5 3 = b$. Tính $\log_{10} 3$ tính theo a và b .

$$\text{Với } \log_2 3 = a, \log_5 3 = b \text{ ta có } \log_3 2 = \frac{1}{a} = a^{-1}, \log_3 5 = \frac{1}{b} = b^{-1}.$$

$$\text{Do đó } \log_{10} 3 = \frac{1}{\log_3 10} = \frac{1}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{ab}{b + a}.$$

- (6) Cho $a = \log_2 6, b = \log_2 7$. Tính $\log_{18} 42$ theo a và b .

$$\log_{18} 42 = \frac{\log_2 42}{\log_2 18} = \frac{\log_2 (6 \cdot 7)}{\log_2 \left(\frac{6^2}{2} \right)} = \frac{\log_2 6 + \log_2 7}{\log_2 6^2 - \log_2 2} = \frac{\log_2 6 + \log_2 7}{2\log_2 6 - \log_2 2} = \frac{a+b}{2a-1}.$$

(7) Cho $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Tính $\log_6 45$ theo a và b .

$$\log_6 45 = \frac{\log_3 (5 \cdot 3^2)}{\log_3 (2 \cdot 3)} = \frac{\log_3 5 + 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{\frac{1}{b} + 2}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a + 2ab}{ab + b}.$$

(8) Cho $a = \log_3 4$, $b = \log_5 4$. Tính $\log_{12} 80$ theo a và b .

$$\text{Ta có } \log_{12} 80 = \log_{12} (4^2 \cdot 5) = \log_{12} 4^2 + \log_{12} 5 = 2\log_{12} 4 + \frac{1}{\log_5 12}.$$

$$= \frac{2}{\log_4 12} + \frac{1}{\log_5 4 + \log_5 3} = \frac{2}{\log_4 4 + \log_4 3} + \frac{1}{b + \log_5 3}.$$

$$\text{Từ } a = \log_3 4 \Rightarrow \log_4 3 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_5 3 = \log_5 4 \cdot \log_4 3 = b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}.$$

$$\Rightarrow \log_{12} 80 = \frac{2}{1 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{b + \frac{b}{a}} = \frac{2a}{a+1} + \frac{a}{b(a+1)} = \frac{a+2ab}{ab+b}.$$

(9) Cho $a = \log_{25} 7$; $b = \log_2 5$. Tính $\log_5 \frac{49}{8}$ theo a, b .

$$* a = \log_{25} 7 \Leftrightarrow 2a = \log_5 7.$$

$$* b = \log_2 5 \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \log_5 2.$$

$$\text{Ta có } \log_5 \frac{49}{8} = \log_5 49 - \log_5 8.$$

$$\Leftrightarrow \log_5 \frac{49}{8} = 2\log_5 7 - 3\log_5 2 \Leftrightarrow \log_5 \frac{49}{8} = 2.2a - 3 \cdot \frac{1}{b} \Leftrightarrow \log_5 \frac{49}{8} = \frac{4ab-3}{b}.$$

(10) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$. Tính $\log_6 15$ theo a, b .

$$\text{Ta có } \log_6 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 6} = \frac{\log_2 5 \cdot 3}{\log_2 2 \cdot 3} = \frac{\log_2 5 + \log_2 3}{1 + \log_2 3} = \frac{\log_2 3 \cdot \log_3 5 + \log_2 3}{1 + \log_2 3} = \frac{ab + a}{a+1} = \frac{a(b+1)}{a+1}$$

Câu 41. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính $\log_{12} 35$ theo a, b và c .

(2) Cho $\log_9 5 = a$; $\log_2 7 = b$; $\log_4 12 = c$. Tính $\log_{18} 4200$ theo a, b, c .

(3) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính của $\log_{12} 35$ theo a, b, c

(4) Cho $a = \log_3 5$, $b = \log_2 7$, $c = \log_2 3$. Tính $I = \frac{-1}{\log 126} \left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{149}{150} \right)$ theo a, b, c

(5) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$; $\log_7 2 = c$. Tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

Lời giải

(1) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính $\log_{12} 35$ theo a, b và c .

$$\log_{27} 5 = a \Rightarrow \log_3 5 = 3a, \log_8 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b,$$

$$\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = 3ac,$$

$$\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{3b}{c}.$$

$$\log_{12} 35 = \log_{12} 7 + \log_{12} 5 = \frac{1}{\log_7 12} + \frac{1}{\log_5 12} = \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 3} + \frac{1}{2\log_5 2 + \log_5 3}$$

(2) Cho $\log_9 5 = a$; $\log_2 7 = b$; $\log_4 12 = c$. Tính $\log_{18} 4200$ theo a, b, c .

$$\text{Ta có: } c = \log_4 12 = \frac{\log_2 12}{\log_2 4} = \frac{2 + \log_2 3}{2} \Leftrightarrow \log_2 3 = 2c - 2.$$

$$a = \log_9 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 9} = \frac{\log_2 5}{2\log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 5 = 2a\log_2 3 = 2a(2c - 2) = 4ac - 4a.$$

$$\text{Khi đó: } \log_{18} 4200 = \frac{\log_2 4200}{\log_2 18} = \frac{\log_2 (2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7)}{\log_2 (2 \cdot 3^2)} = \frac{3 + \log_2 3 + 2\log_2 5 + \log_2 7}{1 + 2\log_2 3}$$

$$= \frac{3 + 2c - 2 + 2(4ac - 4a) + b}{1 + 2(2c - 2)} = \frac{8ac - 8a + b + 2c + 1}{4c - 3}.$$

(3) Cho $\log_{27} 5 = a$; $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Tính của $\log_{12} 35$ theo a, b, c

$$\log_{27} 5 = a \Rightarrow \log_3 5 = 3a, \log_8 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b,$$

$$\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = 3ac,$$

$$\log_3 7 = \frac{\log_2 7}{\log_2 3} = \frac{3b}{c}.$$

$$\log_{12} 35 = \log_{12} 7 + \log_{12} 5 = \frac{1}{\log_7 12} + \frac{1}{\log_5 12} = \frac{1}{2\log_7 2 + \log_7 3} + \frac{1}{2\log_5 2 + \log_5 3}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_3 7}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\log_2 5} + \frac{1}{\log_3 5}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3b} + \frac{c}{3b}} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3ac} + \frac{1}{3a}} = \frac{3b + 3ac}{c + 2}.$$

(4) Cho $a = \log_3 5$, $b = \log_2 7$, $c = \log_2 3$. Tính $I = \frac{-1}{\log 126} \left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{149}{150} \right)$ theo a, b, c

Từ giả thiết suy ra $\log_2 5 = \log_2 3 \log_3 5 = ac$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } I &= \frac{-1}{\log 126} \cdot \log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{149}{150} \right) = \frac{\log 150}{\log 126} \\
 &= \log_{126} 150 = \frac{\log_2 150}{\log_2 126} \\
 &= \frac{1 + \log_2 3 + 2 \log_2 5}{1 + 2 \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{1 + c + 2a}{1 + 2c + b}.
 \end{aligned}$$

(5) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$; $\log_7 2 = c$. Tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \log_{140} 63 &= \log_{140} (3^2 \cdot 7) \\
 &= 2 \log_{140} 3 + \log_{140} 7. \\
 &= \frac{2}{\log_3 140} + \frac{1}{\log_7 140} \\
 &= \frac{2}{\log_3 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)} + \frac{1}{\log_7 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)} = \frac{2}{2 \log_3 2 + \log_3 5 + \log_3 7} + \frac{1}{2 \log_7 2 + \log_7 5 + 1}
 \end{aligned}$$

Từ đề bài suy ra

$$\log_3 2 = \frac{1}{\log_2 3} = \frac{1}{a}; \quad \log_7 5 = \log_7 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 5 = abc.$$

$$\log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{\log_7 2 \cdot \log_2 3} = \frac{1}{ac}.$$

$$\log_{140} 63 = \frac{2}{\frac{2}{a} + b + \frac{1}{ac}} + \frac{1}{2c + abc + 1} = \frac{2ac + 1}{abc + 2c + 1}.$$

Câu 42. Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p = \frac{9x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{3z}{x}$ là

Lời giải

x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân nên ta có $xz = y^2$ (1).

$\log_a x, \log_{\sqrt{a}} y, \log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên:

$$\log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z = 2 \log_{\sqrt{a}} y \Leftrightarrow \log_a x + 3 \log_a z = 4 \log_a y \Leftrightarrow xz^3 = y^4 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $x = y = z$.

$$\text{Vậy } p = \frac{9x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{3z}{x} = 9 + 1 + 3 = 13.$$

Câu 43. Cho các số hạng dương a, b, c là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_2 a^{(b-c)} \cdot b^{(c-a)} \cdot c^{(a-b)}$

Lời giải

Ta có a, b, c là số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng và một cấp số nhân nên:

$$\begin{cases} a = u_1 + (m-1)d = a_1 \cdot q^{m-1} \\ b = u_1 + (n-1)d = a_1 \cdot q^{n-1} \\ c = u_1 + (p-1)d = a_1 \cdot q^{p-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = (m-n)d \\ b - c = (n-p)d \\ c - a = (p-m)d \end{cases} \text{ . Do đó } P = \log_2 a^{(b-c)} \cdot b^{(c-a)} \cdot c^{(a-b)}$$

$$= \log_2 \left(a_1 q^{(m-1)} \right)^{(n-p)d} \cdot \left(a_1 q^{(p-1)} \right)^{(m-n)d} = \log_2 a_1^0 q^0 = 0$$

Câu 44. Gọi n là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương, $x \neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P = 2n + 3$.

Lời giải

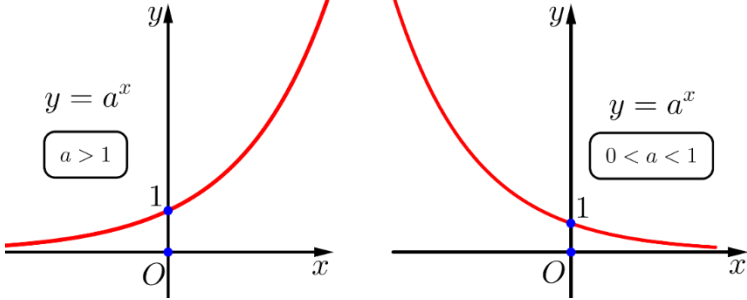
$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \frac{1}{\log_{3^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} &= \frac{190}{\log_3 x} \\ \Leftrightarrow \log_x 3 + 2\log_x 3 + 3\log_x 3 + \dots + n\log_x 3 &= 190\log_x 3 \\ \Leftrightarrow \log_x 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) &= 190\log_x 3 \\ \Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 190 \\ \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} &= 190 \\ \Leftrightarrow n^2 + n - 380 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 19 \\ n = -20 \end{cases} \Rightarrow n = 19 \text{ (do } n \text{ nguyên dương)} \Rightarrow P = 2n + 3 = 41 \end{aligned}$$

-----Hết-----

Hàm số mũ – Hàm số logarit

A Lý thuyết

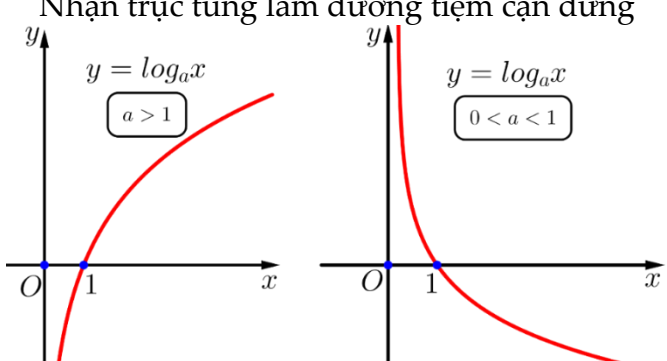
1. Hàm số mũ

<i>Tập xác định</i>	$D = \mathbb{R}$.	
<i>Tập giá trị</i>	$T = (0; +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.	
<i>Đơn điệu</i>	$a > 1$	Hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
<i>Đạo hàm</i>	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad \rightarrow (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $(e^x)' = e^x \quad \rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$	
<i>Đồ thị</i>		

○ Nhận xét:

- (1) Đồ thị hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) đối xứng với đồ thị hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$) qua Oy .
- (2) Đồ thị đi qua điểm $(0; 1)$ và $(1; a)$.
- (3) Đồ thị liên tục trên $\mathbb{R}$.
- (4) Đồ thị nằm ở phía trên trục hoành.

2. Hàm số logarit

Tập xác định	$D = (0; +\infty)$.	
Tập giá trị	$T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải PT mà đặt $t = \log_a x$ thì t không có điều kiện.	
Đơn điệu	$a > 1$	Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
	$0 < a < 1$	Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D , khi đó: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
Đạo hàm	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$	
	$(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0) \quad \rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$	
	$(\ln^n u)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} u $	
Đồ thị	Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng 	

○ Nhận xét:

- (1) Đồ thị hàm số $y = \log_a x (a > 1)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y = \log_a x (0 < a < 1)$ qua Ox .
- (2) Đồ thị đi qua điểm $(1; 0)$ và $(a; 1)$.
- (3) Đồ thị liên tục trên $(0; +\infty)$.
- (4) Đồ thị nằm ở bên phải trục tung.

B Bài tập

Dạng 1. Tập xác định của hàm số



Phương pháp

Xét $1 \neq a > 0$: ☒ Hàm số $y = a^{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

☒ Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

Đặc biệt: với hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$ ta lưu ý “**mũ n**” của $f(x)$:

☐ Nếu $n:2 \rightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$:
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

☐ Nếu $n \nmid 2 \rightarrow$ ĐKXĐ của hàm số $y = \log_{g(x)} [f(x)]^n$:
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tóm lại nếu $f(x)$ hoặc $g(x)$ có “**mũ n**” ta chú ý xem “**n**” chẵn hay lẻ.



Ví dụ 1.1.

Tìm tập xác định của các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_2(2x-3)$

(2) $y = 7^{\sqrt{x-3}}$

(3) $y = \log_2(x^2-9)$

Lời giải

(1) $y = \log_2(2x-3)$

Điều kiện $\Leftrightarrow 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. Vậy tập xác định là $D = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

(2) $y = 7^{\sqrt{x-3}}$

Điều kiện: $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Vậy tập xác định là $D = [3; +\infty)$.

(3) $y = \log_2(x^2-9)$

Điều kiện $x^2-9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -3 \end{cases}$. Vậy tập xác định là $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.



Ví dụ 1.2.

Tìm tập xác định của các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_{2021}(3-x)$

(2) $y = \log_3(2-x)$

(3) $y = \ln(-x^2+3)$

 Lời giải

(1) $y = \log_{2021}(3-x)$

Điều kiện $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$. Vậy tập xác định $D = (-\infty; 3)$.

(2) $y = \log_3(2-x)$

Điều kiện: $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$. Vậy tập xác định $D = (-\infty; 2)$

(3) $y = \ln(-x^2 + 3)$

Điều kiện xác định: $-x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Vậy tập xác định $D = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$



Ví dụ 1.3.

Tìm các giá trị thực của tham số m để các hàm số dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(1) $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$

(2) $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$

 Lời giải

(1) $y = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+mx+1}}}$

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + mx + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

(2) $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (-1)^2 - (-m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0$.



Ví dụ 1.4.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 2)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

 Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 2x - m + 2 > 0$.

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ nên có 2022 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

 Dạng 2. Đạo hàm của hàm số



Phương pháp

○ Đạo hàm hàm số logarit:

$$\left(\log_a |x| \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u| \right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \Rightarrow \boxed{\left(\ln^n |u| \right)' = n \cdot \frac{u'}{u} \cdot \ln^{n-1} |u|}$$

$$\left(\ln x \right)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0) \Rightarrow \left(\ln |u| \right)' = \frac{u'}{u}$$

○ Đạo hàm hàm số mũ:

$$\left(a^x \right)' = a^x \cdot \ln a \Rightarrow \left(a^u \right)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$\left(e^x \right)' = e^x \Rightarrow \left(e^u \right)' = e^u \cdot u'$$



Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_3(4x+1)$

(2) $y = 2^{2x^2+x}$

(3) $y = 2^{\sqrt{1-x}}$

 **Lời giải**

(1) $y = \log_3(4x+1)$

Ta có $y' = \left(\log_3(4x+1) \right)' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$.

(2) $y = 2^{2x^2+x}$

Ta có $y' = \left(2^{2x^2+x} \right)' = 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2 \cdot (2x^2+x)' = (4x+1)2^{2x^2+x} \ln 2$.

(3) $y = 2^{\sqrt{1-x}}$

Ta có $y' = 2^{\sqrt{1-x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\sqrt{1-x} \right)' = 2^{\sqrt{1-x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}$ hay $y' = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} \cdot 2^{\sqrt{1-x}}$



Ví dụ 2.2.

Tính đạo hàm các hàm số dưới đây:

(1) $y = \log_3(4x+1)$

(2) $y = \log_5(x^2-3x)$

(3) $y = 10^{x^2-2x+5}$

(4) $y = e^{1-2x}$

(5) $y = \ln(1+\sqrt{x+1})$

(6) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3^{x^3-3x^2+2})$

 **Lời giải**

(1) $y = \log_3(4x+1)$

Ta có $\left(\log_3(4x+1) \right)' = \frac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$

(2) $y = \log_5(x^2 - 3x)$

Ta có $\Rightarrow y' = (\log_5(x^2 - 3x))' = \frac{2x-3}{(x^2-3x)\ln 5}$.

(3) $y = 10^{x^2-2x+5}$

Ta có $y' = (x^2 - 2x + 5)' \cdot 10^{x^2-2x+5} \cdot \ln 10 = (2x-2) \cdot 10^{x^2-2x+5} \cdot \ln 10$.

(4) $y = e^{1-2x}$

Ta có $y' = e^{1-2x} \cdot (1-2x)' = -2e^{1-2x}$.

(5) $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$

Ta có $(\ln(1 + \sqrt{x+1}))' = \frac{(1 + \sqrt{x+1})'}{(1 + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$.

(6) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3^{x^3-3x^2+2})$

Ta có: $y = \log_{\frac{1}{2}}(3^{x^3-3x^2+2}) = (x^3 - 3x^2 + 2) \log_{\frac{1}{2}} 3 \rightarrow y' = (3x^2 - 6x) \log_{\frac{1}{2}} 3 = -3x(x-2) \log_2 3$



Ví dụ 2.3.

Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho hàm số $y = \frac{2^x + 3^x}{4^x}$. Tính giá trị $y'(0)$.

(2) Cho hàm số $f(x) = \ln(x^4 + 1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

(1) $y = \frac{2^x + 3^x}{4^x}$.

Ta có $y = \frac{2^x + 3^x}{4^x} = \frac{1}{2^x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x \rightarrow y' = \left(\frac{1}{2^x} + \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)' = \frac{1}{2^x} \cdot \ln \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{4}$

$y'(0) = \frac{1}{2^0} \cdot \ln \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4} = \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = \ln \frac{3}{8}$.

(2) $f(x) = \ln(x^4 + 1)$

Ta có: $f'(x) = \frac{(x^4 + 1)'}{x^4 + 1} = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \Rightarrow f'(1) = \frac{4 \cdot 1^3}{1^4 + 1} = 2$.

 Dạng 3. Sự biến thiên của hàm số



Phương pháp

	Hàm số Mũ $y = a^x$ ($1 \neq a > 0$)	Hàm số Logarit $y = \log_a x$ ($1 \neq a > 0$)
Đơn điệu	$a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.	$a > 1 \rightarrow$ HS đồng biến. $0 < a < 1 \rightarrow$ HS nghịch biến.



Ví dụ 3.1.

Xét sự biến thiên các hàm số sau:

(1) $y = \ln x$.

(2) $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$.

(3) $y = \log_{\pi} x$.

(4) $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$

 Lời giải

(1) $y = \ln x$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$e > 1 \rightarrow$ hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

(2) $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$.

TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$0 < 1 - \sqrt{\frac{2018}{2019}} < 1 \rightarrow$ hàm số $y = \log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

(3) $y = \log_{\pi} x$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$\pi > 1 \rightarrow$ hàm số $y = \log_{\pi} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

(4) $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$4 - \sqrt{3} > 1 \rightarrow$ hàm số $y = \log_{4-\sqrt{3}} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$



Ví dụ 3.2.

Xét sự biến thiên các hàm số sau:

(1) $y = 5^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3) $y = (\pi - \sqrt{2})^x$

(4) $y = (6 - \sqrt{5})^x$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$+\infty$	0	$+\infty$	

Lời giải

(1) $y = 5^x$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$5 > 1 \rightarrow$ hàm số $y = 5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$0 < \frac{1}{2} < 1 \rightarrow$ hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

(3) $y = (\pi - \sqrt{2})^x$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$\pi - \sqrt{2} > 1 \rightarrow$ hàm số $y = (\pi - \sqrt{2})^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

(4) $y = (6 - \sqrt{5})^x$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$6 - \sqrt{5} > 1 \rightarrow$ hàm số $y = (6 - \sqrt{5})^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$



Ví dụ 3.2.

Hàm số $y = \ln(x^2 + x + 1)$ tăng trên khoảng nào dưới đây?

Lời giải

Hàm số $y = \ln(x^2 + x + 1)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$

Suy ra, hàm số tăng trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Dạng 4. Đồ thị của hàm số



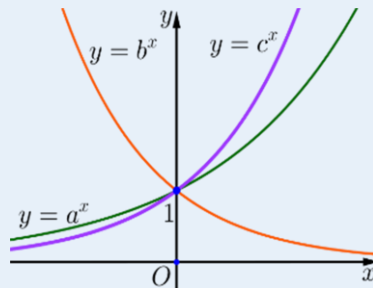
Phương pháp

○ Xét $1 \neq a > 0$		Hàm số Mũ $y = a^x$	Hàm số Logarit $y = \log_a x$
Cơ số	> 1	Càng gần Oy cơ số càng lớn.	Càng gần Ox cơ số càng lớn.
	$0 < a < 1$	Càng gần Oy cơ số càng bé.	Càng gần Ox cơ số càng bé.
Hình minh họa			
Nhận xét		Nằm bên trên Ox. Luôn đi qua điểm $(0; 1)$.	Nằm bên phải Oy. Luôn đi qua điểm $(1; 0)$.
		ĐT $y = a^x$ đối xứng $y = \log_a x$ qua $y = x$ (đường phân xác góc phần tư thứ nhất).	



Ví dụ 4.1.

Cho các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ và $y = c^x$ lần lượt có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hãy so sánh a, b, c .



Lời giải

Ta thấy $y = b^x$ là hàm số mũ nghịch biến nên $0 < b < 1$.

$y = a^x, y = c^x$ là hàm số mũ đồng biến nên $a, c > 1$.

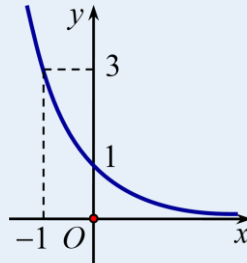
Và đồ thị $y = c^x$ gần trục Oy hơn $y = a^x$ nên $a > c$.

Từ đó $c > a > b$.



Ví dụ 4.2.

Cho các hàm số $y = (\sqrt{3})^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = (\sqrt{2})^x$ và $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



Lời giải

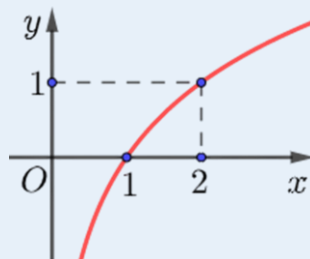
Dựa vào đồ thị, hàm số nghịch biến loại $y = (\sqrt{3})^x$ và $y = (\sqrt{2})^x$.

Và đồ thị đi qua điểm $(-1; 3)$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Ví dụ 4.3.

Cho các hàm số $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y = 2^x$. Đồ thị hàm số dưới đây là của hàm số nào đã cho?



Lời giải

Dựa vào đồ thị, thấy rằng:

+ Đây là dạng đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ nên loại $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $y = 2^x$.

+ Hàm số đồng biến loại $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

+ Đồ thị đi qua điểm $(2; 1)$ nên đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$.

C **Luyện tập**

Câu 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1) $y = \log_{2022}(3x+1)$

(2) $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$

(3) $y = \log_5(4x-x^2)$

(4) $y = \log_{2022}(3x-x^2)$

(5) $y = \log_3(x^2-4x+3)$

(6) $y = \log_{2021} \frac{x+3}{2-x}$

Lời giải

(1) $y = \log_{2022}(3x+1)$

Điều kiện: $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Vậy tập xác định $D = \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

(2) $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$

Điều kiện $\frac{x-3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \end{cases}$. Vậy tập xác định $D = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

(3) $y = \log_5(4x-x^2)$

Điều kiện $4x-x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$. Vậy tập xác định $D = (0; 4)$.

(4) $y = \log_{2022}(3x-x^2)$

Điều kiện $3x-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 3)$. Vậy $D = (0; 3)$

(5) $y = \log_3(x^2-4x+3)$

Điều kiện $x^2-4x+3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$. Vậy tập xác định $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

(6) $y = \log_{2021} \frac{x+3}{2-x}$

Điều kiện $\frac{x+3}{2-x} > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$. Vậy tập xác định $D = (-3; 2)$.

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1) $y = \ln(1-x)$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3) $y = \log_7(3x+1)$

(4) $y = \log_3(x+1)$

(5) $y = \log(x^2)$

(6) $y = \log_3(3-2x)$

(7) $y = 2^{x^2+2x-2022}$

(8) $y = \log(2x^2-4x+2)$

(9) $y = \log(4x^2 - 9)$

(10) $y = \ln(-x^2 + 3x - 2)$

Lời giải

(1) $y = \ln(1-x)$

Điều kiện $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Vậy tập xác định $D = (-\infty; 1)$

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số mũ nên có tập xác định $D = (-\infty; +\infty)$.

(3) $y = \log_7(3x+1)$

Điều kiện $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Vậy tập xác định $D = \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

(4) $y = \log_3(x+1)$

Điều kiện $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Vậy tập xác định $D = (-1; +\infty)$.

(5) $y = \log(x^2)$

Điều kiện $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(6) $y = \log_3(3-2x)$

Điều kiện $3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. Vậy tập xác định $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

(7) $y = 2^{x^2+2x-2022}$

Hàm số $y = 2^{x^2+2x-2022}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

(8) $y = \log(2x^2 - 4x + 2)$

Điều kiện $2x^2 - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(9) $y = \log(4x^2 - 9)$

Điều kiện $4x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy tập xác định $D = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

(10) $y = \ln(-x^2 + 3x - 2)$

Điều kiện $-x^2 + 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$. Vậy tập xác định $D = (1; 2)$

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

(1) $y = e^{x^2+2x}$

(2) $y = \log \sqrt{x^2 + x - 12}$

$$(3) y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$$

$$(5) y = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$(7) y = \frac{\sqrt{x+1}}{e^{2017x} - 1}$$

$$(9) y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$$

$$(4) y = \log_2 (x^2 - 1) + \ln x$$

$$(6) y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} - \frac{9}{4}$$

$$(8) y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$$

$$(10) y = 2^{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\frac{1}{e^x + 1}\right)$$

Lời giải

$$(1) y = e^{x^2+2x}$$

Hàm số $y = e^{x^2+2x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$(2) y = \log \sqrt{x^2 + x - 12}$$

Điều kiện $x^2 + x - 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 3 \end{cases}$. Vậy tập xác định $D = (-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$

$$(3) y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$$

Điều kiện $\frac{x+3}{2-x} > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$. Vậy tập xác định $D = (-3; 2)$

$$(4) y = \log_2 (x^2 - 1) + \ln x$$

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Vậy tập xác định $D = (1; +\infty)$

$$(5) y = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Điều kiện $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$. Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(6) y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x} - \frac{9}{4}$$

Điều kiện $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$$(7) y = \frac{\sqrt{x+1}}{e^{2017x} - 1}$$

Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ e^{2017x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$

$$(8) y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x-1)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2. \text{ Vậy tập xác định } D = (1; 2)$$

$$(9) y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}. \text{ Vậy tập xác định } D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$$

$$(10) y = 2^{2\sqrt{x}} \cdot \ln\left(\frac{1}{e^x + 1}\right)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1}{e^x + 1} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \\ e^x + 1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Vậy tập xác định } D = [0; +\infty).$$

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số dưới đây xác định với mọi giá trị thực của x .

$$(1) y = \log_2(x^2 + 2x + m - 2)$$

$$(2) y = \log_{12}(2x^2 - mx - m)$$

$$(3) y = \log(x^2 + mx + m + 1)$$

$$(4) y = 2 - \ln(x^2 + (m-1)x + m - 1)$$

$$(5) y = 2023 + \ln(x^2 - 4x + m - 5)$$

$$(6) y = \log_{12}(x^2 - (m+2)x + 8m + 1)$$

$$(7) y = \log_{2e}(x^2 + 4x + (m-2)^2)$$

$$(8) y = 2\sqrt{2023} + \lg(x^2 + 2mx + 3m)$$

$$(9) y = \log_2(3x^2 + 2(m-1)x + m + 4)$$

$$(10) y = \log_{2\sqrt{2}+1}(x^2 + (m+1)x + 2m + 7)$$

Lời giải

$$(1) y = \log_2(x^2 + 2x + m - 2)$$

Hàm số $y = \log_2(x^2 + 2x + m - 2)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 + 2x + m - 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 2 < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy $m > 3$.

$$(2) y = \log_{12}(2x^2 - mx - m)$$

Hàm số $y = \log_{12}(2x^2 - mx - m)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$2x^2 - mx - m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = (-m)^2 - 4.2.(-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8m < 0 \Leftrightarrow -8 < m < 0.$$

Vậy $-8 < m < 0$.

$$(3) y = \log(x^2 + mx + m + 1)$$

Hàm số $y = \log(x^2 + mx + m + 1)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 + mx + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 < 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} < m < 2 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } 2 - 2\sqrt{2} < m < 2 + 2\sqrt{2}.$$

$$(4) y = 2 - \ln(x^2 + (m-1)x + m-1)$$

Hàm số $y = 2 - \ln(x^2 + (m-1)x + m-1)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 + (m-1)x + m-1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5.$$

$$\text{Vậy } 1 < m < 5.$$

$$(5) y = 2023 + \ln(x^2 - 4x + m - 5)$$

Hàm số $y = 2023 + \ln(x^2 - 4x + m - 5)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 - 4x + m - 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 16 - 4(m-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 9.$$

$$\text{Vậy } m > 9.$$

$$(6) y = \log_{12}(x^2 - (m+2)x + 8m+1)$$

Hàm số $y = \log_{12}(x^2 - (m+2)x + 8m+1)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 - (m+2)x + 8m+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 7.$$

$$\text{Vậy } 0 < m < 7.$$

$$(7) y = \log_{2e}(x^2 + 4x + (m-2)^2)$$

Hàm số $y = \log_{2e}(x^2 + 4x + (m-2)^2)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 + 4x + (m-2)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = 16 - 4(m-2)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2-m+2)(2+m-2) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

$$\text{Vậy } 0 < m < 4.$$

$$(8) y = 2\sqrt{2023} + \lg(x^2 + 2mx + 3m)$$

Hàm số $y = 2\sqrt{2023} + \lg(x^2 + 2mx + 3m)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 + 2mx + 3m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3.$$

Vậy $0 < m < 3$.

$$(9) y = \log_2(3x^2 + 2(m-1)x + m + 4)$$

Hàm số $y = \log_2(x^2 + 2x + m - 2)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$3x^2 + 2(m-1)x + m + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 5m - 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{69}}{2} < m < \frac{5 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{5 - \sqrt{69}}{2} < m < \frac{5 + \sqrt{69}}{2}.$$

$$(10) y = \log_{2\sqrt{2}+1}(x^2 + (m+1)x + 2m + 7)$$

Hàm số $y = \log_{2\sqrt{2}+1}(x^2 + (m+1)x + 2m + 7)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$x^2 + (m+1)x + 2m + 7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 > 0 \\ \Delta = (m+1)^2 - 4(2m+7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 6m - 27 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Vậy $-3 < m < 9$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số dưới đây xác định với mọi giá trị thực của x .

$$(1) y = \log_{25}(mx^2 - 5x + 1)$$

$$(2) y = \log_2(mx^2 + 2x + 2)$$

$$(3) y = \log((m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3)$$

$$(4) y = \ln((m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2)$$

$$(5) y = \log((m-1)x^2 + (2m+1)x + m + 1)$$

$$(6) y = \ln((2-m)x^2 - 2x + 1)$$

$$(7) y = \lg((m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m)$$

$$(8) y = \log_5((m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4)$$

$$(9) y = 2\sqrt{2} \log_{15}((m-3)x^2 + (m+2)x - 4)$$

$$(10) y = 2023 + \ln(2mx^2 + (m+1)x - 2)$$

Lời giải

$$(1) y = \log_{25}(mx^2 - 5x + 1)$$

Hàm số $y = \log_{25}(mx^2 - 5x + 1)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = mx^2 - 5x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• **Trường hợp 1:** $m=0$. Khi đó: $f(x) = -5x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$. Vậy $m=0$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq 0$. Khi đó:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta = (-5)^2 - 4(m) \cdot (1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 25 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{25}{4}.$$

Vậy $m > \frac{25}{4}$.

(2) $y = \log_2(mx^2 + 2x + 2)$

Hàm số $y = \log_2(mx^2 + 2x + 2)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = mx^2 + 2x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

• **Trường hợp 1:** $m = 0$. Khi đó: $f(x) = 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Vậy $m = 0$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq 0$. Khi đó:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta = (1)^2 - 4(m) \cdot (2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 1 - 8m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{8}.$$

Vậy $m > \frac{1}{8}$.

(3) $y = \log((m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3)$

Hàm số $y = \log((m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

• **Trường hợp 1:** $m = -1$. Khi đó: $f(x) = 4x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$. Vậy $m = -1$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq -1$. Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m+1 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -2m^2 - 2m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -2m^2 - 2m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \text{ hoặc } m > 1 \end{cases}$$

Vậy $m > 1$.

(4) $y = \ln((m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2)$

Hàm số $y = \ln((m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = (m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m-1)x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 1 \end{cases}$

Với $m = -5$. Khi đó: $f(x) = 12x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{6}$. Vậy $m = -5$ (không thỏa).

Với $m = 1$. Khi đó: $f(x) = 2 > 0$. Vậy $m = 1$ (thỏa).

• **Trường hợp 2:** $a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -5 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m^2 + 4m - 5 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 2(m^2 + 4m - 5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 5 > 0 \\ -m^2 - 10m + 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \\ m < -11 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -11 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m < -11 \\ m > 1 \end{cases}$.

(5) $y = \log((m-1)x^2 + (2m+1)x + m+1)$

Hàm số $y = \log((m-1)x^2 + (2m+1)x + m+1)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:
 $(m-1)x^2 + (2m+1)x + m+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

• **Trường hợp 1:** $a = 0 \Leftrightarrow m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó: $f(x) = 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$. Vậy $m = 1$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $a \neq 0 \Leftrightarrow m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 > 0 \\ \Delta = (2m+1)^2 - 4(m-1)(m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 4m+5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in \emptyset$.

(6) $y = \ln((2-m)x^2 - 2x + 1)$

Hàm số $y = \ln((2-m)x^2 - 2x + 1)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = (2-m)x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

• **Trường hợp 1:** $m = 2$. Khi đó: $f(x) = -2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Vậy $m = 2$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq 2$. Khi đó:

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-m > 0 \\ \Delta' = (-1)^2 - (2-m).1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Vậy $1 < m < 2$.

(7) $y = \lg((m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m)$

Hàm số $y = \lg((m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$(m-2)x^2 + 2(m+1)x + 2m > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

• **Trường hợp 1:** $m=2$. Khi đó: $f(x) = 6x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$. Vậy $m=2$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq 2$. Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-2 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - (m-2) \cdot 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -m^2 + 6m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 3 - \sqrt{10} \Leftrightarrow m > 3 + \sqrt{10} \\ m > 3 + \sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy $m > 3 + \sqrt{10}$.

$$(8) y = \log_5((m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4)$$

Hàm số $y = \log_5((m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = (m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

• **Trường hợp 1:** $m=-2$. Khi đó: $f(x) = 6x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$. Vậy $m=-2$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq -2$. Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m+2 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 4(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m^2 - 6m - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -1 < m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 7$$

Vậy $-1 < m < 7$.

$$(9) y = 2\sqrt{2} \log_{15}((m-3)x^2 + (m+2)x - 4)$$

Hàm số $y = 2\sqrt{2} \log_{15}((m-3)x^2 + (m+2)x - 4)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = (m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

• **Trường hợp 1:** $m=3$. Khi đó: $f(x) = 5x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{5}$. Vậy $m=3$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq 3$. Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-3 > 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4(m-3) \cdot (-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m^2 + 20m - 44 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -22 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in \emptyset$.

$$(10) y = 2023 + \ln(2mx^2 + (m+1)x - 2)$$

Hàm số $y = 2023 + \ln(2mx^2 + (m+1)x - 2)$ xác định với mọi giá trị thực của x khi:

$$f(x) = 2mx^2 + (m+1)x - 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

• **Trường hợp 1:** $m=0$. Khi đó: $f(x) = x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Vậy $m=0$ (không thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq 0$. Khi đó: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m > 0 \\ \Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot (2m) \cdot (-2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 + 18m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -9 - \sqrt{79} < m < -9 + \sqrt{79} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy $m \in \emptyset$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số dưới đây có tập xác định $\mathbb{R}$?

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$$

$$(2) y = \frac{1}{2} \sqrt{\log((m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5)}$$

Lời giải

$$(1) y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$$

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\log_3(x^2 - 2x + 3m) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3m > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3m - 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$$

$$(2) y = \frac{1}{2} \sqrt{\log((m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5)}$$

Điều kiện: $\log((m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 5 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Đặt } f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4$$

• **Trường hợp 1:** $m = -1$. Khi đó: $f(x) = 4 \geq 0$. Vậy $m = -1$ (thỏa).

• **Trường hợp 2:** $m \neq -1$. Khi đó: $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m+1 > 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - 4(m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ \Delta' = (m+1)(m-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3.$$

Kết hợp 2 trường hợp trên thì $-1 \leq m \leq 3$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 7. Xét sự đơn điệu các hàm số dưới đây trên $(0; +\infty)$?

$$(1) y = \log_{\sqrt{3}} x$$

$$(2) y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$$

$$(3) y = \log_{\frac{e}{3}} x$$

$$(4) y = \log_{\frac{1}{4}} x$$

$$(5) y = \log_{\sqrt{3}} x.$$

$$(6) y = \log_{3\sqrt{2}} x$$

$$(7) y = \log_{\pi} x$$

$$(8) y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$$

Lời giải

(1) $y = \log_{\sqrt{3}} x$

Ta có : $\sqrt{3} > 1$ nên hàm số $\log_{\sqrt{3}} x$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(2) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$

Ta có : $0 < \frac{\pi}{6} < 1$ nên hàm số $\log_{\frac{\pi}{6}} x$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$

(3) $y = \log_{\frac{e}{3}} x$

Ta có : $0 < \frac{e}{3} < 1$ nên hàm số $\log_{\frac{e}{3}} x$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$

(4) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

Ta có : $0 < \frac{1}{4} < 1$ nên hàm số $\log_{\frac{1}{4}} x$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$

(5) $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

Ta có $\sqrt{3} > 1$ nên hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

(6) $y = \log_{3\sqrt{2}} x$

Ta có $3\sqrt{2} > 1$ nên hàm số $y = \log_{3\sqrt{2}} x$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

(7) $y = \log_{\pi} x$

Ta có $\pi > 1$ nên hàm số $y = \log_{\pi} x$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

(8) $y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$

Ta có $0 < \frac{e}{\pi} < 1$ nên hàm số $y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$ **Câu 8.** Xét sự đơn điệu các hàm số dưới đây trên $\mathbb{R}$?

(1) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(3) $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$

(4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

(5) $y = (0,5)^x$

(6) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(7) $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$

(8) $y = (\sqrt{2})^x$

Lời giải

(1) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

Ta có: $\frac{\pi}{3} > 1 \rightarrow y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ta có: $\frac{1}{3} < 1 \rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(3) $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$

Ta có: $\frac{2}{e} < 1 \rightarrow y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

Ta có: $\frac{\pi}{4} < 1 \rightarrow y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(5) $y = (0,5)^x$

Ta có: $0,5 < 1 \rightarrow y = (0,5)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(6) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Ta có: $\frac{2}{3} < 1 \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(7) $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$

Ta có: $\frac{e}{\pi} < 1 \rightarrow y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

(8) $y = (\sqrt{2})^x$

Ta có: $\sqrt{2} > 1 \rightarrow y = (\sqrt{2})^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Tính đạo hàm các hàm số đã cho dưới đây.

(1) $f(x) = \log_3(\sin x)$

(2) $f(x) = \log_3(2x+1)$

(3) $f(x) = 2^{x^2-5x}$

(4) $f(x) = x.e^{x+1}$

(5) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $f(x) = \log_2(\cos x)$

(7) $f(x) = \frac{1}{1+x+\ln x}$

(8) $f(x) = x \ln(x+1)$

Lời giải

(1) $f(x) = \log_3(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x \cdot \ln 3} = \frac{\cos x}{\sin x \cdot \ln 3} = \frac{\cot x}{\ln 3}.$$

(2) $f(x) = \log_3(2x+1)$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \cdot \ln 3} = \frac{2}{(2x+1) \cdot \ln 3}.$$

(3) $f(x) = 2^{x^2-5x}$

$$f'(x) = 2^{x^2-5x} (x^2-5x)' \ln 2 = 2^{x^2-5x} (2x-5) \ln 2.$$

(4) $f(x) = x \cdot e^{x+1}$

$$f'(x) = x' \cdot e^{x+1} + x \cdot (e^{x+1})' = e^{x+1} + x \cdot e^{x+1} (x+1)' = e^{x+1} + x \cdot e^{x+1} = (1+x) \cdot e^{x+1}.$$

(5) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+1} \right)' \cdot e^{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot e^{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}.$$

(6) $f(x) = \log_2(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)'}{\cos x \cdot \ln 2} = \frac{-\sin x}{\cos x \cdot \ln 2}.$$

(7) $f(x) = \frac{1}{1+x+\ln x}$

$$f'(x) = -\frac{1+\frac{1}{x}}{(1+x+\ln x)^2} = -\frac{x+1}{x(1+x+\ln x)^2}.$$

(8) $f(x) = x \ln(x+1)$

$$f'(x) = \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)\ln(x+1) + x}{x+1}.$$

Câu 10. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Cho hàm số $y = e^{\sin x}$. Rút gọn biểu thức $K = y' \cos x - y \sin x - y''$

(2) Cho hàm số $y = -2017e^{-x} - 3e^{-2x}$. Tính $y'' + 3y' + 2y$?

Lời giải

(1) Cho hàm số $y = e^{\sin x}$. Rút gọn biểu thức $K = y' \cos x - y \sin x - y''$

Đạo hàm cấp một: $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$.

Đạo hàm cấp hai: $y'' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}$.

Khí đó $K = y' \cos x - y \sin x - y'' = \cos^2 x \cdot e^{\sin x} - \sin x \cdot e^{\sin x} - (-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}) = 0$.

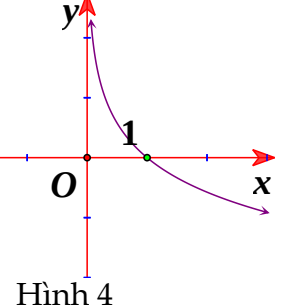
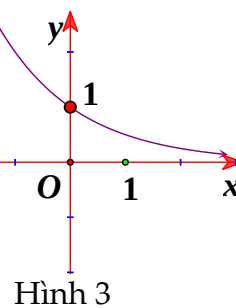
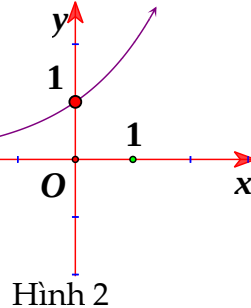
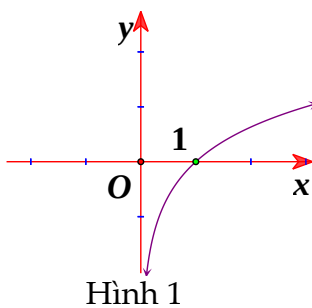
(2) Cho hàm số $y = -2017e^{-x} - 3e^{-2x}$. Tính $y'' + 3y' + 2y$?

Đạo hàm cấp một: $y' = 2017e^{-x} + 6e^{-2x}$.

Đạo hàm cấp hai: $y'' = -2017e^{-x} - 12e^{-2x}$.

Khi đó $y'' + 3y' + 2y = -2017e^{-x} - 12e^{-2x} + 3(2017e^{-x} + 6e^{-2x}) + 2(-2017e^{-x} - 3e^{-2x}) = 0$.

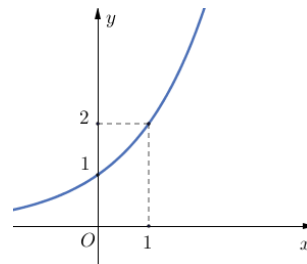
Câu 11. Cho số thực $a \in (0;1)$. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ là đường cong nào dưới đây?



Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ là đường cong nằm bên phải trục tung; đi qua điểm $(1;0)$ và hàm số nghịch biến với $a \in (0;1)$ suy ra đồ thị hàm số $y = \log_a x$ là hình 4.

Câu 12. Cho các hàm số: $y = (\sqrt{2})^x$, $y = \log_2(2x)$, $y = 2^x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào



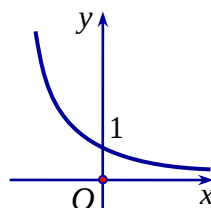
Lời giải

Thấy rằng:

+ Đồ thị là đường cong hàm số $y = a^x$ nên loại $y = \log_2(2x)$ và $y = \frac{1}{2}x + 1$.

+ Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(1;2) \Rightarrow y = 2^x$.

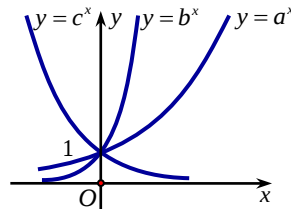
Câu 13. Cho các hàm số: $y = (\sqrt{2})^x$, $y = (0,8)^x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,4} x$. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào



Lời giải

+ Đồ thị là đường cong hàm số $y = a^x$ nên loại $y = \log_2 x$ và $y = \log_{0,4} x$.

+ Hình bên là đồ thị của hàm mũ có cơ số nhỏ hơn 1 nên chọn $y = (0,8)^x$. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình bên. So sánh các số a, b, c .



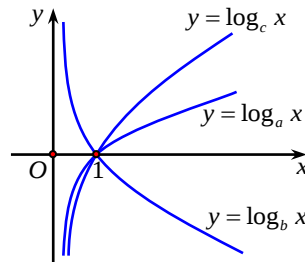
Lời giải

Đồ thị hàm số $y = c^x$ đi xuống nên hàm số $y = c^x$ nghịch biến, suy ra $0 < c < 1$.

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ đi lên do đó hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ đồng biến, suy ra $a > 1$ và $b > 1$.

Với $x = 1$ ta thấy $b > a$. Suy ra $c < 1 < a < b$.

Câu 15. Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. So sánh các số a, b, c .



Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên suy ra $0 < b < 1$.

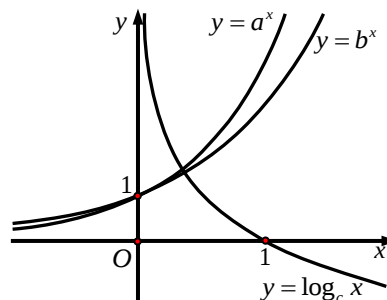
Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_c x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$\Rightarrow a, c > 1$

Xét $x > 1$: $\log_c x > \log_a x \Rightarrow \log_c x > \frac{1}{\log_x a} \Rightarrow \log_c x \cdot \log_x a > 1 \Leftrightarrow \log_c a > 1 \Leftrightarrow a > c$.

Suy ra $b < c < a$.

Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = a^x$; $y = b^x$; $y = \log_c x$ như hình vẽ. Tìm mối liên hệ của a, b, c .



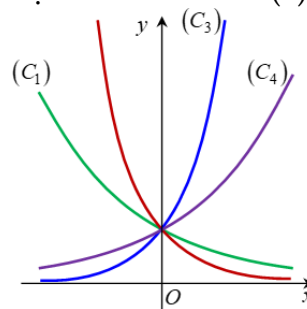
Lời giải

Nhận xét hàm số $y = \log_c x$ nghịch biến nên $c < 1$.

Hàm số $y = a^x$; $y = b^x$ đồng biến nên $a > 1$, $b > 1$.

Xét tại $x=1$ đồ thị hàm số $y = a^x$ có tung độ lớn hơn tung độ của đồ thị hàm số $y = b^x$ nên $a > b$. Vậy $a > b > 1 > c$.

Câu 17. Cho bốn hàm số $y = (\sqrt{3})^x$ (1), $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$ (2), $y = 4^x$ (3), $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (4) có đồ thị là 4 đường cong theo phía trên đồ thị, thứ tự từ trái qua phải là $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ như hình vẽ sau. Xác định thứ tự đồ thị của các hàm số (1), (2), (3), (4).



Lời giải

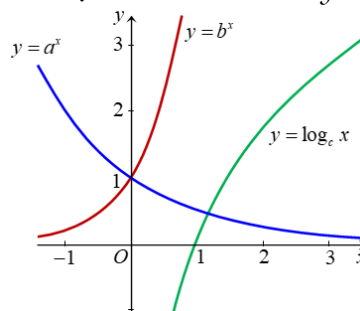
Ta có $y = (\sqrt{3})^x$ và $y = 4^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên hàm đồng biến nên nhận đồ thị là (C_3) hoặc (C_4)

Lấy $x=2$ ta có $(\sqrt{3})^2 < 4^2$ nên đồ thị $y = 4^x$ là (C_3) và đồ thị $y = (\sqrt{3})^x$ là (C_4) .

Ta có đồ thị hàm số $y = 4^x$ và $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ đối xứng nhau qua Oy nên đồ thị $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là (C_2) . Còn lại (C_1) là đồ thị của $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$.

Vậy (1)– (C_4) , (2)– (C_1) , (3)– (C_3) , (4)– (C_2)

Câu 18. Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = \log_c x$.



Lời giải

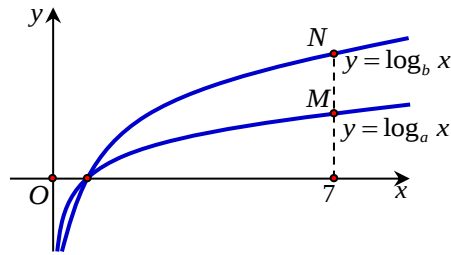
Ta thấy hàm số $y = a^x$ nghịch biến $\Rightarrow 0 < a < 1$.

Hàm số $y = b^x, y = \log_c x$ đồng biến $\Rightarrow b > 1, c > 1$

$\Rightarrow a < b, a < c$ nên loại A, C

Nếu $b = c$ thì đồ thị hàm số $y = b^x$ và $y = \log_c x$ phải đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất $y = x$ nên loại D

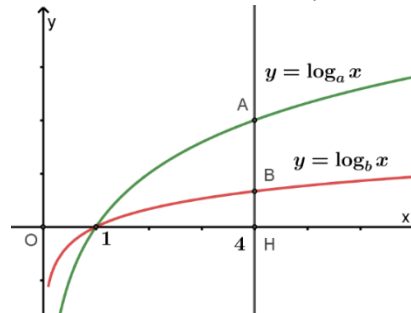
Câu 19. Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H, M, N . Biết rằng $HM = MN$. Xác định mối liên hệ giữa a và b .



Lời giải

Ta có $MH = MN \Leftrightarrow HN = 2MH \Leftrightarrow \log_b 7 = 2\log_a 7 \Leftrightarrow \log_b 7 = \log_{\sqrt{a}} 7 \Leftrightarrow b = \sqrt{a} \Leftrightarrow a = b^2$.

Câu 20. Cho điểm $H(4;0)$ đường thẳng $x = 4$ cắt hai đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại hai điểm A, B và sao cho $AB = 2BH$. Xác định mối liên hệ giữa a và b .



Lời giải

Ta có $AB = 2BH \Leftrightarrow AH = 3BH$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\Rightarrow \log_a 4 = 3\log_b 4 \Leftrightarrow \log_a 4 = \log_{\sqrt[3]{b}} 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{b} = a \Leftrightarrow b = a^3$.

-----Hết-----

PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

A Lý thuyết

1. Phương trình mũ.

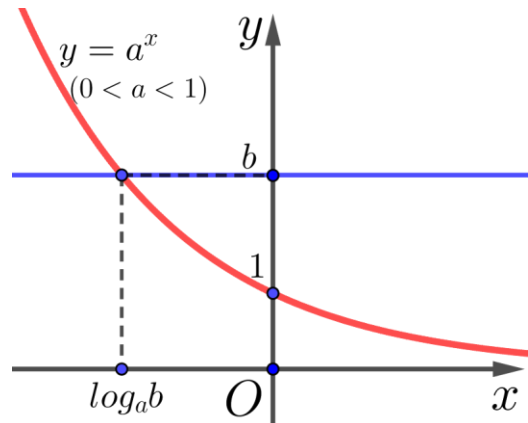
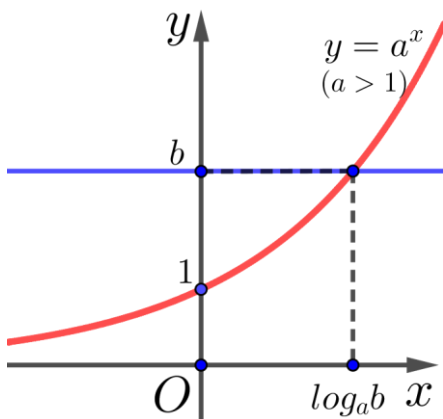


Phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Với a và b là các số cho trước.

⌘ *Nghiệm của phương trình mũ cơ bản*

Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Từ hình vẽ ta thấy với:

+ $b > 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = a^x$ tại điểm $(\log_a b; b)$.

+ $b \leq 0$ đường thẳng $y = b$ không cắt đường cong $y = a^x$.

Khi đó phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$):

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý

(1) Nếu $b = a^m$ thì ta có $a^x = a^m \Leftrightarrow x = m$.

(2) Tổng quát hơn $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

2. Phương trình logarit.

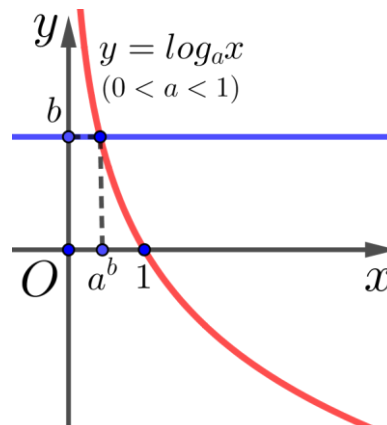
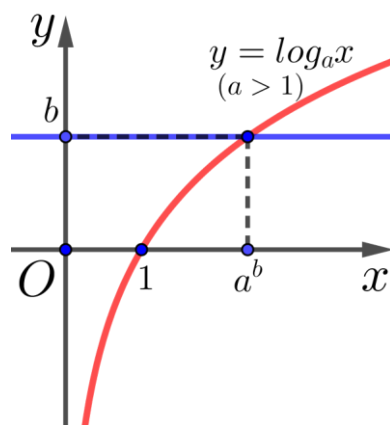


Phương trình logarit cơ bản có dạng: $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Với a và b là các số cho trước.

⌘ *Nghiệm của phương trình logarit cơ bản*

Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Từ hình vẽ ta thấy với:

+ $b > 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = \log_a x$ tại điểm $(a^b; b)$.

+ $b \leq 0$ đường thẳng $y = b$ cắt đường cong $y = \log_a x$ tại điểm $(a^b; b)$.

Khi đó phương trình logarit cơ bản có dạng: $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất.



Chú ý

(1) Tổng quát $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

(2) Lưu ý để giải phương trình logarit trước hết đặt điều kiện $\begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \end{cases}$.

B Bài tập

Dạng 1. Phương trình mũ cơ bản



Phương pháp

☑ Giải phương trình mũ cơ bản: $a^x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Khi đó $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Lưu ý:

- ☞ Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.
- ☞ Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.



Ví dụ 1.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $3^{\frac{1}{x}} = 4$

(2) $8^x = 4$

(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4}$

(4) $(\sqrt{2})^x = 2$

Lời giải

(1) $3^{\frac{1}{x}} = 4$

Ta có $3^{\frac{1}{x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log_3 4 \Leftrightarrow x = \log_4 3$.

(2) $8^x = 4$

Ta có: $8^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_8 4 \Leftrightarrow x = \log_{2^3} 2^2 = \frac{2}{3}$

(3) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4}$

Ta có: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$

(4) $(\sqrt{2})^x = 2$

Ta có: $(\sqrt{2})^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\sqrt{2}} 2 \Leftrightarrow x = 2$

 Dạng 2. Phương trình mũ đưa về cùng cơ số



Phương pháp

☑ Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.



Ví dụ 2.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$

(2) $2^{(x-1)^2} = 4^x$

(3) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$

 Lời giải

(1) $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0$

Ta có $2^{2x-1} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -1$

(2) $2^{(x-1)^2} = 4^x$

Ta có $2^{(x-1)^2} = 4^x \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} = 2^{2x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

(3) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x$

Ta có $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x \Leftrightarrow 5^{-2(x+1)} = 5^{3x} \Leftrightarrow -2(x+1) = 3x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$

Ta có $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = (2\sqrt{2})^{x+2}$

$\Leftrightarrow (2^{-2})^{2x-1} = \left(2.2^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{-4x+2} = 2^{\frac{3(x+2)}{2}} \Leftrightarrow -4x+2 = \frac{3(x+2)}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{11}$

 Dạng 3. Phương trình mũ dùng logarit hóa



Phương pháp

○ Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

○ Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a = g(x)$.



Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $2^{x+1} = 8^x$

(2) $3^{4^x} = 4^{3^x}$

(3) $5^{2x+1} = \left(\frac{1}{125}\right)^{x+2}$

(4) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$

 Lời giải

(1) $2^{x+1} = 8^x$

Ta có $2^{x+1} = 8^x \Leftrightarrow x+1 = x \log_2 8 \Leftrightarrow x+1 = 3x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

(2) $3^{4^x} = 4^{3^x}$

Ta có $4^x = 3^x \cdot \log 4$

$\Leftrightarrow x = \log_4 (3^x \cdot \log_3 4) \Leftrightarrow x = x \cdot \log_4 3 + \log_4 (\log_3 4) \Leftrightarrow x = \frac{\log_4 (\log_3 4)}{1 - \log_4 3}$.

(3) $5^{2x+1} = \left(\frac{1}{125}\right)^{x+2}$

Ta có $5^{2x+1} = \left(\frac{1}{125}\right)^{x+2}$

$\Leftrightarrow 2x+1 = (x+2) \log_5 \frac{1}{125} \Leftrightarrow 2x+1 = -3(x+2) \Leftrightarrow 5x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{5}$.

(4) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$

Ta có $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{x-1})^5$

$\Leftrightarrow (2 \cdot 5)^x = 0,2 \cdot 10^{5x-5} \Leftrightarrow x = \log 0,2 + 5x - 5 \Leftrightarrow 4x = 6 - \log 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \log 2$.

 Dạng 4. Phương trình mũ đặt ẩn phụ cơ bản



Phương pháp

○ Biến đổi quy về dạng: $f[a^{g(x)}] = 0 (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

○ Thông thường sẽ gặp các cơ số: $\begin{cases} 9^x \longrightarrow t = 3^x \\ 4^x \longrightarrow t = 2^x ; t > 0. \\ 25^x \longrightarrow t = 5^x \end{cases}$



Ví dụ 4.1.

Biến đổi các phương trình sau với phép đặt cho trước.

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 2 = 0$, khi đặt $t = 2^x$

(2) $2^{2x+1} - 2^{x-1} - 1 = 0$, khi đặt $h = 2^x$

(3) $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$, khi đặt $u = 3^x$

(4) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 = 0$, khi đặt $m = 5^x$

 Lời giải

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 2 = 0$, khi đặt $t = 2^x$

Ta có $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 2 = 0$

Đặt $t = 2^x$, ta được phương trình $t^2 - 6t + 2 = 0$

(2) $2^{2x+1} - 2^{x-1} - 1 = 0$, khi đặt $h = 2^x$

Ta có $2^{2x+1} - 2^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - \frac{2^x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 2^x - 2 = 0$

Đặt $h = 2^x$ ta được phương trình $4h^2 - h - 2 = 0$.

(3) $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$, khi đặt $u = 3^x$

Ta có: $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^x - 3 \cdot 3^x - 30 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 9^x - 3^x - 10 = 0$

Đặt $u = 3^x$ ta được phương trình $3u^2 - u - 10 = 0$.

(4) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 = 0$, khi đặt $m = 5^x$

Ta có: $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3 \cdot 5^2 \cdot 5^x + 32 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75 \cdot 5^x + 32 = 0$

Đặt $m = 5^x$ ta được phương trình $m^2 - 75m + 32 = 0$.



Ví dụ 4.2.

Giải các phương trình sau:

(1) $4^x - 2^{x+2} - 3 = 0$

(2) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

(3) $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

(4) $2^{1+2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0$

 Lời giải

(1) $4^x - 2^{x+2} - 3 = 0$

Ta có $4^x - 2^{x+2} - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x \cdot 2^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 3 = 0 (*)$.

Đặt $t = 2^x (t > 0)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - \sqrt{7} < 0 (L) \\ t = 2 + \sqrt{7} > 0 (N) \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 2 + \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{7})$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \log_2(2 + \sqrt{7})$.

(2) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

Ta có $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 = 0 (*)$

Đặt $t = 3^x > 0$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 (N) \\ t = 3 (N) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3^x = 2 \\ t = 3^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1; x = \log_3 2$.

(3) $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

Ta có $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow 4(2^2)^x - 18 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 4(2^x)^2 - 18 \cdot 2^x + 8 = 0 (*)$

Đặt $t = 2^x > 0$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 4t^2 - 18t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 (N) \\ t = 1/2 (N) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1; x = 2$.

(4) $2^{1+2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0$

Ta có $2^{1+2x} + 15 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(2^2)^x + 15 \cdot 2^x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2(2^x)^2 + 15 \cdot 2^x - 8 = 0 (*)$

Đặt $t = 2^x > 0$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow 2t^2 + 15t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} (N) \\ t = -8 (L) \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

Dạng 5. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với phương trình đẳng cấp



Phương pháp

○ Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.

○ Khi đó với phương trình mũ đẳng cấp có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$

○ Phương pháp làm như sau:

01	Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m \cdot \frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + n \cdot \frac{(a.b)^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + p \cdot \frac{b^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}\right]^2 + n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + p = 0$ $\Leftrightarrow m.t^2 + n.t + p = 0.$
02	Chia 2 vế cho $a^{2f(x)}$, đặt $\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} = t > 0$.	$m \cdot \frac{a^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} + n \cdot \frac{(a.b)^{f(x)}}{a^{2f(x)}} + p \cdot \frac{b^{2f(x)}}{a^{2f(x)}} = 0$ $\Leftrightarrow m + n \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)} + p \cdot \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}\right]^2 = 0$ $\Leftrightarrow m + n.t + p.t^2 = 0.$

Lưu ý:

Đây là dạng sẽ có trong bài “Bất phương trình mũ”, lúc giải BPT mũ ta cần chú ý đến cơ số lớn hay bé hơn 1. Để giảm sai sót chúng ta hãy “chia 2 vế” cho **cơ số bé nhất !!!**



Ví dụ 5.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $8^x + 18^x = 2.27^x$

(2) $25^x + 15^x = 2.9^x$

(3) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$

(4) $2.49^x + 7.4^x - 9.14^x = 0$

Lời giải

(1) $8^x + 18^x = 2.27^x$

$8^x + 18^x = 2.27^x$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0 \\ 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

(2) $25^x + 15^x = 2.9^x$

$$25^x + 15^x = 2.9^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{5}{3}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{5}{3}\right)^x > 0 \\ t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$.

(3) $6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0$

$$6.4^x - 13.6^x + 6.9^x = 0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{2}{3}\right)^x (t > 0) \\ \left[\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1; x=-1$.

(4) $2.49^x + 7.4^x - 9.14^x = 0$

$$2.49^x + 7.4^x - 9.14^x = 0 \Leftrightarrow 2.\left(\frac{7}{2}\right)^x + 7 - 9\left(\frac{7}{2}\right)^{2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \left(\frac{7}{2}\right)^x (t > 0) \\ \left[\begin{aligned} \left(\frac{7}{2}\right)^x &= 1 \\ \left(\frac{7}{2}\right)^x &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1; x=0$.

Dạng 6. Phương trình mũ đặt ẩn phụ với tích hai cơ số bằng 1



Phương pháp

- Phương trình đẳng cấp có dạng: $m.X^2 + n.XY + p.Y^2 = 0$.
- Phương trình mũ ta xét có dạng: $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$ (*) trong đó $a.b = 1$.
- Phương pháp làm như sau:

$$\text{Vì } a.b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \longrightarrow \text{Đặt } t = a^{f(x)}, t > 0 \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow m.t + n.\frac{1}{t} + p = 0 \Leftrightarrow m.t^2 + n + p.t = 0.$$



Ví dụ 6.1.

Giải các phương trình sau:

$$(1) (\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$(2) (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$$

$$(3) (3-2\sqrt{2})^x + 3.(3+2\sqrt{2})^x = 12+4\sqrt{2}$$

$$(4) (3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3.2^x$$

Lời giải

$$(1) (\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{Thấy } (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1. \text{ Đặt } t = (\sqrt{2}+1)^x \rightarrow (\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{t}, t > 0$$

$$\text{Phương trình trở thành: } \frac{1}{t} + t - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2}+1 \\ t = \sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}+1 \Leftrightarrow x=1 \\ (\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)^x = (\sqrt{2}+1)^{-1} \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}.$$

$$(2) (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$$

$$\text{Thấy } (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1. \text{ Đặt } t = (2+\sqrt{3})^x \rightarrow (2-\sqrt{3})^x = \frac{1}{t}, t > 0$$

$$\text{Phương trình trở thành: } t + \frac{1}{t} = 4$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2+\sqrt{3} \\ t = 2-\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2+\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=1 \\ (2+\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3} \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x = (2+\sqrt{3})^{-1} \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$(3) \quad (3-2\sqrt{2})^x + 3 \cdot (3+2\sqrt{2})^x = 12 + 4\sqrt{2}$$

Thấy $(3-2\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{2}) = 1$. Đặt $t = (3-2\sqrt{2})^x \rightarrow (3+2\sqrt{2})^x = \frac{1}{t}, t > 0$

Phương trình trở thành: $t + 3 \cdot \frac{1}{t} - (12 + 4\sqrt{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - (12 + 4\sqrt{2})t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 6 + 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{164 + 96\sqrt{2}}}{2} \\ t = 6 + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{164 + 96\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-2\sqrt{2})^x = 6 + 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{164 + 96\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \\ (3-2\sqrt{2})^x = 6 + 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{164 + 96\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow x = -1 + \log_{3-2\sqrt{2}} 3 = -1 - \log_{3+2\sqrt{2}} 3 \end{cases}$$

$$(4) \quad (3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3 \cdot 2^x$$

$$(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x = 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 3 \quad (*).$$

$$\text{Thấy } \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}.$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x \rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}, t > 0$$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1}{t} = 3$

$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

 Dạng 7. Phương trình logarit cơ bản



Phương pháp

☑ Giải phương trình logarit cơ bản: $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Khi đó $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

Lưu ý:

- ➔ Xác định điều kiện trước khi giải phương trình.
- ➔ Phương trình có nghiệm duy nhất.



Ví dụ 7.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2 x = 5$

(2) $\log_4 (x-2) = 2$

(3) $\log_2 |x-1| = 3$

(4) $\log_{\sqrt[4]{2}} (x^2-2)^2 = 8$

 Lời giải

(1) $\log_2 x = 5$

$$\text{Ta có: } \log_2 x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 2^5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 32$$

(2) $\log_4 (x-2) = 2$

$$\text{Ta có } \log_4 (x-2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x-2 = 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18.$$

(3) $\log_2 |x-1| = 3$

$$\text{Ta có } \log_2 |x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ |x-1| = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x-1=8 \\ x-1=-8 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \begin{cases} x=9 \\ x=-7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

(4) $\log_{\sqrt[4]{2}} (x^2-2)^2 = 8$

$$\text{Ta có } \log_{\sqrt[4]{2}} (x^2-2)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2 \neq 0 \\ (x^2-2)^2 = (\sqrt[4]{2})^8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{2} \\ (x^2-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{2} \\ \begin{cases} x^2=4 \\ x^2=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\sqrt{2} \\ \begin{cases} x=-2 \vee x=2 \\ x^2=0 \end{cases} \end{cases}$$

Dạng 8. Phương trình logarit đưa về cùng cơ số



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

✎ **Loại 1:** $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

✎ **Loại 2:** $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$



Ví dụ 8.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

(2) $2\log_2(x^2 - x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

(3) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$

(4) $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$

Lời giải

(1) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

Điều kiện $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

$\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow \ln[(x+1)(x+3)] = \ln(x+7) \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = x+7 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=1$.

(2) $2\log_2(x^2 - x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$2\log_2(x^2 - x - 1) = \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2 - x - 1) = 2\log_2(x-1)$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 1) = \log_2(x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = x-1 \Leftrightarrow x=2$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=2$.

$$(3) \log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+12 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -12 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(x+12) \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+12) = 2 \log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+12) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (L)} \\ x = 4 \text{ (N)} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 4$.

$$(4) \log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+4 > 0 \\ 14-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 14$$

$$\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+4) + 2\log_{3^2}(14-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+4) + \log_3(14-x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x+4) \cdot (14-x)] = 4$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(14-x) = 3^4 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 56 = 3^4 \Leftrightarrow x = 5$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = 5$.

Dạng 9. Phương trình logarit dùng mũ hóa



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các

phương trình logarit về: $\log_a f(x) = g(x) \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$



Ví dụ 9.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_{x^2} (3 - 2x) = 1$

(2) $\log_{5-x} (x^2 - 2x + 64) = 2$

(3) $\log_2 (5^{x+1} - 25^x) = 2$

(4) $\log (25^x - 2^{2x+1}) = x$

(5) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$

(6) $\log_2 (4^x + 4) = x - \log_{0,5} (2^{x+1} - 3)$

Lời giải

(1) $\log_{x^2} (3 - 2x) = 1$

Điều kiện $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 3 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$

$\log_{x^2} (3 - 2x) = 1 \Leftrightarrow 3 - 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-3\}$.

(2) $\log_{5-x} (x^2 - 2x + 64) = 2$

Điều kiện $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ 5 - x \neq 1 \\ x^2 - 2x + 64 > 0 \ \forall x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$

$\log_{5-x} (x^2 - 2x + 64) = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 64 = (5 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 64 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 8x = -39 \Leftrightarrow x = -\frac{39}{8}$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{-\frac{39}{8}\right\}$.

(3) $\log_2 (5^{x+1} - 25^x) = 2$

Điều kiện $5^{x+1} - 25^x > 0$.

$$\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2 \Leftrightarrow 5^{x+1} - 25^x = 4 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5 4 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; \log_5 4\}$.

(4) $\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$

Điều kiện $25^x - 2^{2x+1} > 0$.

$$\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$$

$$\Leftrightarrow 25^x - 2 \cdot 4^x = 10^x \Leftrightarrow 1 - 2\left(\frac{4}{25}\right)^x - \left(\frac{10}{25}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{2}{5}\right)^x = t \quad (t > 0). \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (L)} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{2}} 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{\log_{\frac{5}{2}} 2\right\}$.

(5) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$

Điều kiện $9 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 9 \Leftrightarrow x < \log_2 9$.

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^3 \cdot \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x - (2^x)^2 - 8 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } 2^x = t \quad (t > 0). \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } -t^2 + 9t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (N)} \\ t = 1 \text{ (N)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 3\}$.

(6) $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{0,5}(2^{x+1} - 3)$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4^x + 4 > 0 \quad \forall x \\ 2^{x+1} - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \log_2 3 - 1.$$

$$\log_2(4^x + 4) = x - \log_{0,5}(2^{x+1} - 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(2^x)^2 + 4}{2 \cdot 2^x - 3} = x \Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 + 4}{2 \cdot 2^x - 3} = 2^x \Rightarrow -(2^x)^2 + 3 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } 2^x = t \quad (t > 0). \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } -t^2 + 3t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (L)} \\ t = 4 \text{ (N)} \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2\}$.

Dạng 10. Phương trình logarit đặt ẩn phụ



Phương pháp

○ Biến đổi quy về dạng: $f(\log_a g(x)) = 0 \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a g(x) \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

Lưu ý: với $t = \log_a g(x)$ không có điều kiện của t .



Ví dụ 9.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

(2) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x = 5$

(3) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

(4) $\log(25^x - 2^{2x+1}) = x$

(5) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2(x\sqrt{8}) - 3 = 0$

(6) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

Lời giải

(1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

$\xrightarrow{\log_3 x = t} t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3 \\ t = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27 \end{cases} \Rightarrow S = \{3; 27\}.$

(2) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x = 5$

Điều kiện $x > 0$

$\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x = 5 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 4\log_2 x - 5 = 0$

$\xrightarrow{t = \log_2 x} t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \Leftrightarrow \log_2 x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{32} \\ t = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4 \end{cases} \Rightarrow S = \{\frac{1}{32}; 4\}$

(3) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

Điều kiện $\begin{cases} \log_3 x \geq 0 \\ x > 0 \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

$3\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x - 3\sqrt[3]{\log_3 x} + 2 = 0$

$\xrightarrow{t = \sqrt[3]{\log_3 x} (t \geq 0)} t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9 \\ t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3^1 = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{3; 9\}.$

(4) $\log_2 x - \log_x 64 = 1$

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_2 x - \log_x 64 = 1 \Leftrightarrow \log_2 x - 6\log_x 2 = 1$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x (t \neq 0)} t - \frac{6}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8 \\ t = -2 \Rightarrow \log_2 x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ 8; \frac{1}{4} \right\}.$$

(5) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2 (x\sqrt{8}) - 3 = 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2 (x\sqrt{8}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x)^2 + \log_2 x + \log_2 \sqrt{8} - 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow 4(\log_2 x)^2 + \log_2 x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x} 8t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} \\ t = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{3}{4}} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ 2^{\frac{1}{2}}; 2^{-\frac{3}{4}} \right\}$$

(6) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow \log_3^2 x = t-1]{\sqrt{\log_3^2 x + 1} = t (t \geq 1)} t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 (N) \\ t = -3 (L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 1 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = \sqrt{3} \\ \log_3 x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{\sqrt{3}} \\ x = 3^{-\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ 3^{\sqrt{3}}; 3^{-\sqrt{3}} \right\}$$

C **Luyện tập**

Câu 21. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_4(x-1)=3$

(3) $\log_2(x-5)=4$

(5) $\log_2(x^2-1)=3$

(7) $\log_{25}(x^2-1)=\log\sqrt{10}$

(9) $\log_3|x^2-4x|=2$

(2) $\log_2(1-x)=2$

(4) $\log_2(x^2-1)=3$

(6) $\log_3(x^2-7)=2$

(8) $\log_3(9-x^2)=\log_2 4$

(10) $\log_2\sqrt{x^2+5}=3$

Lời giải

(1) $\log_4(x-1)=3$

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Phương trình $\log_4(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=4^3 \Leftrightarrow x=65$.

(2) $\log_2(1-x)=2$

Điều kiện: $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

Phương trình $\log_2(1-x)=2 \Leftrightarrow 1-x=4 \Leftrightarrow x=-3$.

(3) $\log_2(x-5)=4$

Điều kiện: $x-5>0 \Leftrightarrow x>5$

Phương trình $\log_2(x-5)=4 \Leftrightarrow x-5=16 \Leftrightarrow x=21$.

(4) $\log_2(x^2-1)=3$

Điều kiện: $x^2-1>0 \Leftrightarrow x>1$ hoặc $x<-1$

Phương trình $\log_2(x^2-1)=3 \Leftrightarrow x^2-1=8 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

(5) $\log_2(x^2-1)=3$

Điều kiện: $x^2-1>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases}$

Phương trình $\log_2(x^2-1)=3 \Leftrightarrow x^2-1=8 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

(6) $\log_3(x^2-7)=2$

Điều kiện: $x^2-7>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>\sqrt{7} \\ x<-\sqrt{7} \end{cases}$

Phương trình $\log_3(x^2-7)=2 \Leftrightarrow x^2-7=9 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases}$.

(7) $\log_{25}(x^2-1)=\log\sqrt{10}$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_{25}(x^2 - 1) = \log \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \log_{25}(x^2 - 1) = \frac{1}{2} \log 10 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 25^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases}$$

$$(8) \log_3(9 - x^2) = \log_2 4$$

$$\text{Điều kiện: } 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$

$$\text{Phương trình } \log_3(9 - x^2) = \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(9 - x^2) = \log_2 2^2 \Leftrightarrow \log_3(9 - x^2) = 2 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(9) \log_3 |x^2 - 4x| = 2$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_3 |x^2 - 4x| = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 |x^2 - 4x| = 2 \Leftrightarrow |x^2 - 4x| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 9 \\ x^2 - 4x = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 9 = 0 \\ x^2 - 4x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$(10) \log_2 \sqrt{x^2 + 5} = 3$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 + 5 > 0 \forall x$$

$$\text{Phương trình } \log_2 \sqrt{x^2 + 5} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 64 \Leftrightarrow x^2 = 59 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{59} \\ x = -\sqrt{59} \end{cases}$$

Câu 22. Giải các phương trình sau:

$$(1) \log(x^2 - 2x + 2) = 1$$

$$(2) \log_3(x^2 + 2x) = 1$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$(4) \log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$$

$$(5) \log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$$

$$(6) \log_3[(x+3)(x-1)] = \frac{1}{\log_5 3}$$

$$(7) \log_2(2x-1)^2 = 2\log_2(x-2)$$

$$(8) (x+3)\log_2(5-x^2) = 0$$

$$(9) (2x^2 - 5x + 2)[\log_x(7x-6) - 2] = 0$$

$$(10) \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2\log_2 x$$

Lời giải

$$(1) \log(x^2 - 2x + 2) = 1$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 2x + 2 > 0 \forall x$$

$$\text{Phương trình } \log(x^2 - 2x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$(2) \log_3(x^2 + 2x) = 1$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_3(x^2 + 2x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3^1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$(3) \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 5x + 7 > 0 \forall x$$

$$\text{Phương trình } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$(4) \log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

$$\text{Phương trình } \log_4 x^2 - \log_2 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x^2 = 1 + \log_2 3 \Leftrightarrow \log_2 x^2 = 2 + \log_2 6 \Leftrightarrow x^2 = 6^2 \Leftrightarrow x = \pm 6$$

$$(5) \log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } \log_{0,25}(x^2 - 3x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x = (0,25)^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$(6) \log_3[(x+3)(x-1)] = \frac{1}{\log_5 3}$$

$$\text{Điều kiện: } (x+3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } \log_3[(x+3)(x-1)] = \frac{1}{\log_5 3} \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(7) \log_2(2x-1)^2 = 2\log_2(x-2)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} (2x-1)^2 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \neq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$\text{Phương trình } \log_2(2x-1)^2 = 2\log_2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(2x-1) = 2\log_2(x-2) \Leftrightarrow 2x-1 = x-2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (Loại)}$$

$$(8) (x+3)\log_2(5-x^2) = 0$$

$$\text{Điều kiện: } 5-x^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}.$$

$$\text{Phương trình } (x+3)\log_2(5-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \log_2(5-x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ 5-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \text{ (L)} \\ x=\pm 2 \text{ (N)} \end{cases}.$$

$$(9) (2x^2-5x+2)[\log_x(7x-6)-2] = 0$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 7x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x > \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{6}{7} < x \neq 1 \text{ (*).}$$

$$\text{Phương trình } (2x^2-5x+2)[\log_x(7x-6)-2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+2=0 & (1) \\ \log_x(7x-6)-2=0 & (2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (N)} \\ x=\frac{1}{2} \text{ (L)} \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_x(7x-6)-2=0 \Leftrightarrow 7x-6=x^2 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (L)} \\ x=6 \text{ (N)} \end{cases}.$$

$$(10) \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2\log_2 x$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Phương trình } \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3(2x-1) - 2\log_2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot [\log_3(2x-1) - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_3(2x-1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

Câu 23. Giải các phương trình sau:

$$(1) \log_2 x + \log_2(x-1) = 1$$

$$(2) \log_2 x + \log_2(x-3) = 2$$

$$(3) \log_3 x + \log_3(x-6) = \log_3 7$$

$$(4) \log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$$

(5) $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$

(7) $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$

(9) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$

(6) $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$

(8) $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$

(10) $\log_2 x + \log_2(x-1) = \ln e^2$

Lời giải

(1) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Phương trình $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_2[x(x-1)] = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$

Kết hợp với điều kiện ta được: $x = 2$.

(2) $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$

Phương trình $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2 \Leftrightarrow \log_2[x(x-3)] = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}.$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 4$.

(3) $\log_3 x + \log_3(x-6) = \log_3 7$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x-6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6.$

Phương trình $\log_3 x + \log_3(x-6) = \log_3 7$

$$\Leftrightarrow \log_3[x(x-6)] = \log_3 7 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 7$.

(4) $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = 3 \Leftrightarrow x^2-1=8 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3$.

(5) $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$

Điều kiện: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1/3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1/3.$

$$\text{Phương trình } \log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x+1).2]=\log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2(x+1)=3x-1 \Leftrightarrow x=3.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=3$.

$$(6) \log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

$$\text{Phương trình } \log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{2x+1}{x-1}=1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1}=3 \Leftrightarrow x=4$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=4$.

$$(7) \log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1>0 \\ 4x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}.$$

$$\text{Phương trình } \log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1) \Leftrightarrow 3(x+1)=4x+1 \Leftrightarrow x=2$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=2$.

$$(8) \log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

$$\text{Phương trình } \log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+1)=\log_3[3 \cdot (x-1)] \Leftrightarrow 2x+1=3x-3 \Leftrightarrow x=4$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=4$

$$(9) \ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \\ x>-7 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1$$

$$\text{Phương trình } \ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$$

$$\Leftrightarrow \ln[(x+1)(x+3)]=\ln(x+7) \Leftrightarrow (x+1)(x+3)=x+7 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=1$

$$(10) \log_2 x + \log_2(x-1) = \ln e^2$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Ta có: } \log_2 x + \log_2 (x-1) = \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 (x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_2 (x-1)x = 2 \Leftrightarrow x(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

Câu 24. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2 (x+1) = \log 10 + \log_2 (x-1)$

(2) $\log_3 (6+x) + \log_3 9x - 5 = 0$

(3) $\log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 2022 \log_{e^{2022}} e$

(4) $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-2) = \log_5 125$

(5) $x+2 = 3^{\log_3 (x^2-4)}$

(6) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6-x} = 2$

(7) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

(8) $\log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_4 x + \log_8 x = 13$

(9) $\log_{x^2} (x+3) = -\log_{x^2} (x-1)$

(10) $2^{\log_2 (x^2+2x)} = 4^{\log_4 (16+8x)}$

Lời giải

(1) $\log_2 (x+1) = \log 10 + \log_2 (x-1)$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Phương trình } \log_2 (x+1) = \log 10 + \log_2 (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+1) = 1 + \log_2 (x-1) \Leftrightarrow \log_2 (x+1) = \log_2 2 \cdot (x-1) \Leftrightarrow x+1 = 2x-2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3$.

(2) $\log_3 (6+x) + \log_3 9x - 5 = 0$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 6+x > 0 \\ 9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Phương trình } \log_3 (6+x) + \log_3 9x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (6+x) + \log_3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x(6+x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -9 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3$.

(3) $\log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 2022 \log_{e^{2022}} e$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Phương trình } \log_3 (2x+1) - \log_3 (x-1) = 2022 \log_{e^{2022}} e$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3(x-1) + \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x+1) = \log_3(3x-3) \Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3 \Leftrightarrow x = 4.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 4$.

$$(4) \log_2(x-1) + \log_2(x-2) = \log_5 125$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x-1) + \log_2(x-2) = \log_5 125$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3x + 2) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } x = \frac{3 + \sqrt{33}}{2}.$$

$$(5) x + 2 = 3^{\log_3(x^2 - 4)}$$

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } x + 2 = 3^{\log_3(x^2 - 4)} \Leftrightarrow x + 2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3$.

$$(6) \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6-x} = 2$$

$$\text{Điều kiện: } \frac{1}{6-x} > 0 \Leftrightarrow 6-x > 0 \Leftrightarrow x < 6$$

$$\text{Phương trình } \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{6-x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{6-x} = \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{6-x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{29}{5}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } x = \frac{29}{5}.$$

$$(7) \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$$

$$\text{Điều kiện: } x > 0$$

$$\text{Phương trình } \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 11 \Leftrightarrow \frac{11}{6} \cdot \log_2 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 64$.

(8) $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$

Điều kiện: $x > 0$

Phương trình $\log_{\sqrt{2}} x + 4\log_4 x + \log_8 x = 13$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} x + 4\log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 13$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x + 2\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 13 \Leftrightarrow \frac{13}{3}\log_2 x = 13 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 8$.

(9) $\log_{x^2}(x+3) = -\log_{x^2}(x-1)$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 1 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Phương trình $\log_{x^2}(x+3) = -\log_{x^2}(x-1)$

$$\Leftrightarrow \log_{x^2}(x+3) + \log_{x^2}(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \emptyset$.

(10) $2^{\log_2(x^2+2x)} = 4^{\log_4(16+8x)}$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ 16 + 8x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Phương trình $2^{\log_2(x^2+2x)} = 4^{\log_4(16+8x)} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 16 + 8x \Leftrightarrow (x+2)(x-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -2 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 8$.

Câu 25. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2 x = \log_2(x^2 - x)$

(2) $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x)$

(3) $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 2022 \log_{e^{2022}} e$

(4) $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$

(5) $\log(x^2 - x + 1) = -\log_{0,1}(2x - 1)$

(6) $\log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$

(7) $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$

(8) $\log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2 + 2) - 1$

$$(9) \log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$$

$$(10) 3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$$

Lời giải

$$(1) \log_2 x = \log_2(x^2 - x)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow x > 1. \\ x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_2 x = \log_2(x^2 - x) \Leftrightarrow x = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 2$.

$$(2) \log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \Leftrightarrow x > 1. \end{cases} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1 + \sqrt{2}$.

$$(3) \log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 2022 \log_{e^{2022}} e$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \Leftrightarrow x > 1. \end{cases} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1 + \sqrt{2}$.

$$(4) \log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 4x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \Leftrightarrow x > 3. \end{cases} \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 7$.

$$(5) \log(x^2 - x + 1) = -\log_{0,1}(2x - 1)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Phương trình } \log(x^2 - x + 1) = -\log_{0,1}(2x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 - x + 1) = \log_{0,1}(2x - 1) \Leftrightarrow (x^2 - x + 1) = (2x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1; x = 2$.

$$(6) \log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1.$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Phương trình } \log_{\sqrt{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2[2(x+1)] \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 2 + \sqrt{5}$.

$$(7) \log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \end{cases} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Phương trình } \log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 4x) = \log_3(2x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1$.

$$(8) \log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2 + 2) - 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

$$\text{Phương trình } \log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2 + 2) - 1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = \frac{x^2+2}{2} \Leftrightarrow x^2+2x+1-\frac{x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=0$.

$$(9) \log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$$

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Phương trình } \log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = -\frac{1}{2} \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2 x + \log_2 x + \log_2 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2 x + \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow \log_2 x^3 + \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow \log_2 (3x^3) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

$$(10) 3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$$

$$\text{Phương trình } 3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 3\log_3(x-1) + 3\log_3(x-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(x-5) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x-1)(x-5)] = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3 + \sqrt{7}$.

Câu 26. Giải các phương trình sau:

$$(1) \log(x + \sqrt{3}) - \log_{0,1}(x - \sqrt{3}) = 1$$

$$(2) \log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_{\frac{1}{2}}(4x - 4) = 0$$

$$(3) \frac{1}{2} \log x^2 + \log(x+10) = 2 - \log 4$$

$$(4) \log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$$

$$(5) \log(x-1)^2 + 2\log(x+1) = \log 4$$

$$(6) \log_2(x-1) \cdot \log_4(x-1) + \log_{0,5} 2 = \log_2 2$$

$$(7) \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$

$$(8) \log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2+2) - 1$$

$$(9) 2\log_{e^2}(x^2+x-2) = \log_{\frac{1}{e}}(x^2-7x+12)$$

$$(10) \log_2(x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25) = 4\log_{16}(39x^2 + 70x + 3)$$

Lời giải

$$(1) \log(x + \sqrt{3}) - \log_{0,1}(x - \sqrt{3}) = 1$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x + \sqrt{3} > 0 \\ x - \sqrt{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$$

$$\text{Phương trình } \log(x + \sqrt{3}) - \log_{0,1}(x - \sqrt{3}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log(x + \sqrt{3}) + \log(x - \sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow \log(x^2 - 3) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 5$.

$$(2) \log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_{\frac{1}{2}}(4x - 4) = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 4x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_{\frac{1}{2}}(4x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4x + 3) + \log_2(4x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x^2 - 4x + 3)(4x - 4)] = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 20x^2 + 28x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \emptyset$.

$$(3) \frac{1}{2}\log x^2 + \log(x + 10) = 2 - \log 4$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x + 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -10 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \frac{1}{2}\log x^2 + \log(x + 10) = 2 - \log 4.$$

$$\Leftrightarrow \log|x| + \log(x + 10) = \log 25 \Leftrightarrow \log(|x| \cdot (x + 10)) = \log 25 (*)$$

$$\bullet \text{ Với } x > 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow x^2 + 10x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 5\sqrt{2} \\ x = -5 - 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } -10 < x < 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow -x^2 - 10x - 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = -5 + 5\sqrt{2}; x = -5$.

$$(4) \log_{\sqrt{3}}(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \neq x > 2.$$

$$\text{Phương trình } \log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4| = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4) = 1 \\ (x-2)(x-4) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 7 = 0 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3 + \sqrt{2}; x = 3$.

$$(5) \log(x-1)^2 + 2\log(x+1) = \log 4$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -1 \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình } \log(x-1)^2 + 2\log(x+1) = \log 4.$$

$$\Leftrightarrow 2\log|x-1| + 2\log(x+1) = 2\log 2 \Leftrightarrow \log(|x-1| \cdot (x+1)) = \log 2 \quad (*).$$

$$\bullet \text{ Với } x > 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow x^2 - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Với } -1 < x < 1 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow -x^2 - 1 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \sqrt{3}$.

$$(6) \log_2(x-1) \cdot \log_4(x-1) + \log_{0.5} 2 = \log_2 2$$

$$\text{Điều kiện: } x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x-1) \cdot \log_4(x-1) + \log_{0.5} 2 = \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \cdot \log_4(x-1) = \log_2 2 + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \cdot \log_4(x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \cdot \frac{1}{2} \log_2(x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\log_2(x-1)]^2 = 2 \Leftrightarrow [\log_2(x-1)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) = 2 \\ \log_2(x-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \\ x-1 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 5; x = \frac{5}{4}$.

$$(7) \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$

Điều kiện $x > 0$.

$$\text{Phương trình } \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_3 x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \\ \log_3 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 9; x = \frac{1}{9}$.

$$(8) \log_{\sqrt{2}}(x+1) = \log_2(x^2+2) - 1$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

$$\text{Phương trình } \frac{1}{2} \ln x^2 + \ln(x-4) = \ln 10^2 - \ln 4.$$

$$\Leftrightarrow \ln|x| + \ln(x-4) = \ln 25 \Leftrightarrow \ln(|x| \cdot (x-4)) = \ln 25 (*)$$

$$\bullet \text{ Với } x > 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow x(x-4) = 25 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{29} \\ x = 2 - \sqrt{29} \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Với } x < 0 \text{ thì } (*) \Leftrightarrow -x(x-4) = 25 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 25 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 2 + \sqrt{29}$.

$$(9) 2\log_{e^2}(x^2+x-2) = \log_{\frac{1}{e}}(x^2-7x+12)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2+x-2 > 0 \\ x^2-7x+12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4 \\ x < 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \\ x > 4 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } 2\log_{e^2}(x^2+x-2) = \log_{\frac{1}{e}}(x^2-7x+12)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+x-2) = -\ln(x^2-7x+12)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+x-2) + \ln(x^2-7x+12) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2-7x+12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \emptyset$.

$$(10) \log_2(x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25) = 4\log_{16}(39x^2 + 70x + 3)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25 > 0 \\ 39x^2 + 70x + 3 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Phương trình } \log_2(x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25) = 4\log_{16}(39x^2 + 70x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25) = \log_2(39x^2 + 70x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 14x^3 + 100x^2 - 12x + 25 = 39x^2 + 70x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 14x^3 + 61x^2 - 82x + 22 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 2)(x^2 - 8x + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{7} \\ x = 4 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3 \pm \sqrt{7}; x = 4 \pm \sqrt{5}$.

Câu 27. Giải các phương trình sau:

$$(1) \log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 = 0$$

$$(2) \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 = 0$$

$$(3) \log_3^3 x + \log_3^2 x + \log_3 x + 1 = 0$$

$$(4) \log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_2 x^5 + 4 = 0$$

$$(5) \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$$

$$(6) \log_{36}^2 x + \log_{\frac{1}{36}} 36x + 1 = 0$$

$$(7) \log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3}$$

$$(8) \log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$$

$$(9) \log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$$

$$(10) \log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$$

$$(11) 3\log_2^2 x + \log_2 \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$(12) \log_2^2 x - \log_2 \sqrt{x^5} + 1 = 0$$

Lời giải

$$(1) \log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 = 0$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^2 x - 6\log_3 x + 8 = 0 \xrightarrow{t=\log_3 x} t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 4 \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 81 \\ x = 9 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 81; x = 9$.

$$(2) \log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 = 0$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2 x + 2\log_2 x + 1 = 0 \xrightarrow{t=\log_2 x} t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \frac{1}{2}$.

$$(3) \log_3^3 x + \log_3^2 x + \log_3 x + 1 = 0$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^3 x + \log_3^2 x + \log_3 x + 1 = 0 \xrightarrow{t=\log_3 x} t^3 + t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \frac{1}{3}$.

$$(4) \log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_2 x^5 + 4 = 0$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_2 x^5 + 4 = 0 \Leftrightarrow (-\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x} t^2 - 5t + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2 \\ \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 2; x = 16$.

$$(5) \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow (-\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_3 x} t^2 - 5t + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 \\ \log_3 x = 4 \Rightarrow x = 3^4 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3; x = 3^4$.

$$(6) \log_{36}^2 x + \log_{\frac{1}{36}} 36x + 1 = 0$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{36}^2 x + \log_{\frac{1}{36}} 36x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_{36}^2 x - (1 + \log_{36} x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_{36}^2 x - \log_{36} x = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_{36} x} t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{36} x = 1 \Rightarrow x = 36 \\ \log_{36} x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 36; x = 1$.

$$(7) \log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3}$$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^2 x = \log_3 \frac{x^4}{3} \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4\log_3 x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_3 x} t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2-\sqrt{3} \\ t=2+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2-\sqrt{3} \\ \log_3 x = 2+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{2-\sqrt{3}} \\ x = 3^{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3^{2-\sqrt{3}}; x = 3^{2+\sqrt{3}}$.

$$(8) \log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$$

Điều kiện: $x > 0; x \neq 1$.

$$\log_x (125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow (\log_x 125 + \log_x x) \left(\frac{1}{2} \log_5 x \right)^2 = 1 \Leftrightarrow (3 \log_x 5 + 1) \log_5^2 x = 4$$

$$\xrightarrow{t=\log_5 x} \left(\frac{3}{t} + 1 \right) t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 1 \\ \log_5 x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{1}{625} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=5; x=\frac{1}{625}$.

(9) $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$$

$$\Leftrightarrow [1 + \log_2(2x)]^2 - 2\log_2(2x) = 5 \Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=2; x=\frac{1}{8}$.

(10) $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2(2x) - 5\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x} t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \log_2 x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ x = 2^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}; x = 2^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

(11) $3\log_2^2 x + \log_2 \frac{1}{x} - 1 = 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$3\log_2^2 x + \log_2 \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x} 3t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ t = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ \log_2 x = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}} \\ x = 2^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 2^{\frac{1+\sqrt{13}}{6}}; x = 2^{\frac{1-\sqrt{13}}{6}}$.

(12) $\log_2^2 x - \log_2 \sqrt{x^5} + 1 = 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2 x - \log_2 \sqrt{x^5} + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x^{\frac{5}{2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \frac{5}{2} \log_2 x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x} 1t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\sqrt{2} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=4; x=\sqrt{2}$.

Câu 28. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$

(2) $x = 3^{\log_3 x}$

(3) $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - \log_2 x^5 + 4 = 0$

(5) $x^{-\log_2^3 x + 3\log_2^2 x - 2\log_2 x - 1} = \frac{1}{x}$

(6) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$

(7) $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$

(8) $2\log(x+2) + \log 4 = \log x + 4\log 3$

(9) $\left[\log_{\frac{1}{3}}(9x)\right]^2 + \log_3 \frac{x^2}{81} - 7 = 0$

(10) $\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{\ln(x-1)} = 0$

Lời giải

(1) $\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1$

Điều kiện $3 \cdot 2^x > 1$.

$$\log_2(3 \cdot 2^x - 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = 2 \cdot (2^x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=0; x=-1$.

(2) $x = 3^{\log_3 x}$

Điều kiện $x > 0$

Ta có $x = 3^{\log_3 x} \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^{\log_3 x} \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 x \Leftrightarrow x > 0$

(3) $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$

Điều kiện $2^x < 5$

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x=0; x=2$.

(4) $\log_5(3 \cdot 5^x - 1) = 2x + 1$

Điều kiện $3 \cdot 5^x > 1$.

$$\log_5(3 \cdot 5^x - 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 5^x - 1 = 5^{2x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot 5^x - 1 = 2 \cdot (5^x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 0; x = \sqrt{5}$.

$$(5) \quad x^{-\log_2^3 x + 3\log_2^2 x - 2\log_2 x - 1} = \frac{1}{x}$$

Điều kiện $x > 0$.

$$x^{-\log_2^3 x + 3\log_2^2 x - 2\log_2 x - 1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\log_2^3 x + 3\log_2^2 x - 2\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1; x = 2; x = 4$.

$$(6) \quad \log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$$

Điều kiện $2^x < 9 \Leftrightarrow x < \log_2 9$.

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2^x = 2^{3-x} \Leftrightarrow 9 - 2^x = \frac{8}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 0; x = 3$.

$$(7) \quad \log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$$

Điều kiện $3^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \log_3(3^{x+1} - 1) = 2x - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^{x+1} - 1) + \log_3 2 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(3^{x+1} - 1) \cdot 2] = 2x$$

$$\Leftrightarrow (3^{x+1} - 1) \cdot 2 = 3^{2x} \Leftrightarrow 6 \cdot 3^x - 2 = 3^{2x} \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 + \sqrt{7} \\ 3^x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3(3 + \sqrt{7}) \\ x = \log_3(3 - \sqrt{7}) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_3(3 + \sqrt{7}); x = \log_3(3 - \sqrt{7})$.

$$(8) \quad 2\log(x+2) + \log 4 = \log x + 4\log 3$$

Điều kiện $x > 0$.

$$2\log(x+2) + \log 4 = \log x + 4\log 3$$

$$\Leftrightarrow \log(x+2)^2 + \log 4 = \log x + \log 81$$

$$\Leftrightarrow \log \left[4(x+2)^2 \right] = \log(81x) \Leftrightarrow 4(x+2)^2 = 81x \Leftrightarrow 4x^2 - 65x + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 16 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \frac{1}{4}; x = 16$.

$$(9) \left[\log_{\frac{1}{3}}(9x) \right]^2 + \log_3 \frac{x^2}{81} - 7 = 0$$

Điều kiện $x > 0$.

$$\left[\log_{\frac{1}{3}}(9x) \right]^2 + \log_3 \frac{x^2}{81} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2 - \log_3 x)^2 + \log_3 x^2 - \log_3 81 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x + 6\log_3 x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3^{-7} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3; x = 3^{-7}$.

$$(10) \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{\ln(x-1)} = 0$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-1 > 0 \\ \ln(x-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{\ln(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 3$.

Câu 29. Giải các phương trình sau:

$$(1) 2^{2x^2-5x+3} = 1$$

$$(2) 3^{-x^2+4x} = \frac{1}{243}$$

$$(3) (\sqrt{2}-1)^{x^2-x-1} = \sqrt{2}+1$$

$$(4) (3-2\sqrt{2})^{2x} = 3+2\sqrt{2}$$

$$(5) 2^{x^2+4x+8} = 16$$

$$(6) e^{x^2-3x} = \frac{1}{e^2}$$

$$(7) 2^{x^2-3x+2} = 4$$

$$(8) 7^{4x^4-3x^2-1} = 1$$

$$(9) 7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$$

$$(10) 3^{x^2-4x+5} = 9$$

Lời giải

$$(1) 2^{2x^2-5x+3} = 1$$

Phương trình $2^{2x^2-5x+3}=1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{cases}$

(2) $3^{-x^2+4x}=\frac{1}{243}$

Phương trình $3^{-x^2+4x}=\frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{-x^2+4x}=3^{-5} \Leftrightarrow -x^2+4x=-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=5 \end{cases}$

(3) $(\sqrt{2}-1)^{x^2-x-1}=\sqrt{2}+1$

Phương trình $(\sqrt{2}-1)^{x^2-x-1}=\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)^{x^2-x-1}=(\sqrt{2}-1)^{-1} \Leftrightarrow x^2-x-1=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

(4) $(3-2\sqrt{2})^{2x}=3+2\sqrt{2}$

Phương trình $(3-2\sqrt{2})^{2x}=3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})^{2x}=(3-2\sqrt{2})^{-1} \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

(5) $2^{x^2+4x+8}=16$

Phương trình $2^{x^2+4x+8}=16 \Leftrightarrow 2^{x^2+4x+8}=2^4 \Leftrightarrow x^2+4x+8=4 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$

(6) $e^{x^2-3x}=\frac{1}{e^2}$

Phương trình $e^{x^2-3x}=\frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{x^2-3x}=e^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x=-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

(7) $2^{x^2-3x+2}=4$

Phương trình $2^{x^2-3x+2}=4 \Leftrightarrow x^2-3x+2=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

(8) $7^{4x^4-3x^2-1}=1$

Phương trình $7^{4x^4-3x^2-1}=1 \Leftrightarrow 7^{4x^4-3x^2-1}=7^0 \Leftrightarrow 4x^4-3x^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

(9) $7^{x^2-x+\frac{3}{2}}=49\sqrt{7}$

Phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}}=49\sqrt{7}$
 $\Leftrightarrow 7^{x^2-x+\frac{3}{2}}=7^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2-x+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(10) $3^{x^2-4x+5}=9$

Phương trình $3^{x^2-4x+5}=9 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+5}=3^2 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Câu 30. Giải các phương trình sau:

(1) $2^x + 2 \cdot 3^x - 6^x = 2$

(3) $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

(5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

(7) $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

(9) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

(2) $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$

(4) $\sqrt{2}^{x^2+2x+3} = 8^x$

(6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

(8) $4^{x-1} = 8^{3-2x}$

(10) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$

Lời giải

(1) $2^x + 2 \cdot 3^x - 6^x = 2$

Phương trình $2^x + 2 \cdot 3^x - 6^x = 2$

$$\Leftrightarrow 2^x - 6^x = 2 - 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 2^x (1 - 3^x) = 2(1 - 3^x) \Leftrightarrow (1 - 3^x)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

(2) $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$

Phương trình $2^{x^2-x+8} = 4^{1-3x}$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x+8} = 2^{2(1-3x)} \Leftrightarrow x^2 - x + 8 = 2 - 6x \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

(3) $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

Phương trình $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 5^x - 5^x = 2 \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4 \cdot 5^x = 10 \cdot 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

(4) $\sqrt{2}^{x^2+2x+3} = 8^x$

Phương trình $\sqrt{2}^{x^2+2x+3} = 8^x$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(x^2+2x+3)} = 2^{3x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2+2x+3) = 3x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

(5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

Phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2x} \Leftrightarrow 4x = 6 - 2x \Leftrightarrow x = 1.$

(6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

Phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6-2x} \Leftrightarrow 4x = 6 - 2x \Leftrightarrow x = 1.$

(7) $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

Phương trình $(1,5)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{5x-7} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5x+7} \Leftrightarrow x+1 = -5x+7 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

(8) $4^{x-1} = 8^{3-2x}$

Phương trình $4^{x-1} = 8^{3-2x} \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^{9-6x} \Leftrightarrow 2x-2 = 9-6x \Leftrightarrow 8x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}$

(9) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

Phương trình $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

$\Leftrightarrow 2^{-3} \cdot 2^{4x-9} = \left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x} \Leftrightarrow 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x} \Leftrightarrow 4x-9 = \frac{5}{2}x \Leftrightarrow x = 6$

(10) $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$

Phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-3x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow -2x+1 = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Câu 31. Giải các phương trình sau:

(1) $(7+4\sqrt{3})^{x^2+x-1} = (2+\sqrt{3})^{x-2}$

(2) $2^{x^2+3x-2} = 16^{x+1}$

(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

(4) $2^{x+1} + 2^{x-2} = 36$

(5) $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$

(6) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$

(7) $2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot 10^{51-x}$

(8) $4^x + 4^{x+1} = 2^x + 2^{x+1}$

(9) $2^{x^2+x-1} - 2^{x^2-1} = 2^{2x} - 2^x$

(10) $3^x + 2^x \cdot 3 - 6^x = 3$

Lời giải

$$(1) \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-2}$$

Phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-2}$

$$\Leftrightarrow \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2(x^2+x-1)} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2) 2^{x^2+3x-2} = 16^{x+1}$$

Phương trình $2^{x^2+3x-2} = 16^{x+1}$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+3x-2} = 2^{4x+4} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$(3) \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$$

Phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3$

$$(4) 2^{x+1} + 2^{x-2} = 36$$

Phương trình $2^{x+1} + 2^{x-2} = 36$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2^2} = 36 \Leftrightarrow \frac{8 \cdot 2^x + 2^x}{4} = 36 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^x = 36 \cdot 4 \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4$$

$$(5) 3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$$

Phương trình $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8} = 3^{4x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 8 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(6) 2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$$

Phương trình $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$

$$(7) 2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot 10^{51-x}$$

Phương trình $2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot 10^{51-x}$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 5)^{8-x^2} = 10^{-3} \cdot 10^{51-x} \Leftrightarrow 10^{8-x^2} = 10^{2-5x} \Leftrightarrow 8-x^2 = 2-5x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$(8) 4^x + 4^{x+1} = 2^x + 2^{x+1}$$

Phương trình $4^x + 4^{x+1} = 2^x + 2^{x+1}$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4 \cdot 4^x = 2^x + 2 \cdot 2^x \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x = 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{3}{5}$$

(9) $2^{x^2+x-1} - 2^{x^2-1} = 2^{2x} - 2^x$

Phương trình $2^{x^2+x-1} - 2^{x^2-1} = 2^{2x} - 2^x$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}(2^x - 1) = 2^x(2^x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1)(2^{x^2-1} - 2^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 = 0 \\ 2^{x^2-1} - 2^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^{x^2-1} = 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

(10) $3^x + 2^x \cdot 3 - 6^x = 3$

Phương trình $3^x + 2^x \cdot 3 - 6^x = 3$

$$\Leftrightarrow 3^x + 3 \cdot 2^x - 6^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (1 - 2^x)(3^x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2^x = 0 \\ 3^x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Câu 32. Giải các phương trình sau:

(1) $4^x - 6 \cdot 2^x + 2 = 0$

(2) $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$

(3) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

(4) $6^{2x-1} - 5 \cdot 6^{x-1} + 1 = 0$

(5) $25^x - 20 \cdot 5^{x-1} + 3 = 0$

(6) $3^{1-x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x$

(7) $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$

(8) $3^{2x+10} - 6 \cdot 3^{x+4} - 2 = 0$

(9) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

(10) $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0$

Lời giải

(1) $4^x - 6 \cdot 2^x + 2 = 0$

Phương trình $4^x - 6 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + \sqrt{7} \\ 2^x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2(3 + \sqrt{7}) \\ x = \log_2(3 - \sqrt{7}) \end{cases}$

(2) $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$

Phương trình $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x + \frac{3}{3^x} = 10$

$$\xrightarrow{t=3^x (t>0)} 3t + \frac{3}{t} = 10 \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$$

(3) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

Phương trình $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

$$\xrightarrow{t=2^x (t>0)} 2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

(4) $6^{2x-1} - 5.6^{x-1} + 1 = 0$

Phương trình $6^{2x-1} - 5.6^{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}.6^{2x} - \frac{5}{6}.6^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 6^{2x} - 5.6^x + 6 = 0$

$$\xrightarrow{t=2^x (t>0)} t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 2 \\ 6^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_6 2 \\ x = \log_6 3 \end{cases}$$

(5) $25^x - 20.5^{x-1} + 3 = 0$

Phương trình $25^x - 20.5^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - \frac{20}{5}.5^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 4.5^x + 3 = 0$

$$\xrightarrow{t=5^x (t>0)} t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_5 3 \end{cases}$$

(6) $3^{1-x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x$

Phương trình $3^{1-x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow 3.3^{-x} = 2 + (3^{-x})^2 \Leftrightarrow (3^{-x})^2 - 3.3^{-x} + 2 = 0$

$$\xrightarrow{t=3^{-x} (t>0)} t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-x} = 1 \\ 3^{-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_3 2 \end{cases}$$

(7) $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$

Phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0 \Leftrightarrow 4^{x-1} + 16.2^{x-1} - 4 = 0$

$$\xrightarrow{t=2^{x-1} (t>0)} t^2 + 16t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -8 + 2\sqrt{17} \\ t = -8 - 2\sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow 2^{x-1} = -8 + 2\sqrt{17} \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 (-8 + 2\sqrt{17})$$

(8) $3^{2x+10} - 6.3^{x+4} - 2 = 0$

Phương trình $3^{2x+10} - 6.3^{x+4} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+5)} - 2.3^{x+5} - 2 = 0$

$$\xrightarrow{t=3^{x+5} (t>0)} t^2 - 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{3} \\ t = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x+5} = 1 + \sqrt{3} \\ 3^{x+5} = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + \log_3 (1 + \sqrt{3}) \\ (L) \end{cases}$$

(9) $4^x - 6.2^x + 8 = 0$

Phương trình $4^x - 6.2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6.2^x + 8 = 0$

$$\xrightarrow{t=2^x (t>0)} t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

(10) $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$

Phương trình $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 18 \cdot 3^x + 27 = 0$

$$\xrightarrow{t=3^x (t>0)} t^2 - 18t + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 + 3\sqrt{6} \\ t = 9 - 3\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 + 3\sqrt{6} \\ 3^x = 9 - 3\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_3(9 + 3\sqrt{6}) \\ x = \log_3(9 - 3\sqrt{6}) \end{cases}$$

Câu 33. Giải các phương trình sau:

(1) $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

(2) $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$

(3) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

(4) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$

(5) $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$

(6) $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$

Lời giải

(1) $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

Phương trình $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$

$$\Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^{-x} = 30 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^x + 9 \cdot \frac{1}{3^x} - 30 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot (3^x)^2 - 30 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$\xrightarrow{t=3^x (t>0)} 9t^2 - 30t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

(2) $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$

Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 9^x - 6^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$.

$$\xrightarrow{\left(\frac{3}{2}\right)^x = t (t>0)} t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2.$$

(3) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

Phương trình $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

$$\xrightarrow[t=(\sqrt{2}+1)^x = \frac{1}{t}]{t=(\sqrt{2}-1)^x; t>0} t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{2} \\ t = -1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-1)^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = -1 \\ (\sqrt{2}-1)^x = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

(4) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$

Ta có: $(2-\sqrt{3})^x \cdot (2+\sqrt{3})^x = 1$.

Phương trình $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$.

$$\frac{t=(2-\sqrt{3})^x, t>0}{\Rightarrow (2+\sqrt{3})^x = \frac{1}{t}} \rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + \sqrt{3} \\ t = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1 \\ (2-\sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}.$$

(5) $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$

Phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8 \Leftrightarrow 4^{1+x} + 4^{1-x} = 4(2^{1+x} - 2^{1-x}) + 8$

$$\frac{t=2^{1+x}-2^{1-x}}{\Rightarrow t^2=4^{1+x}+4^{1-x}-8} \rightarrow t^2 = 4t \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+x}-2^{1-x}=0 \\ 2^{1+x}-2^{1-x}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{1+x}=2^{1-x} & (1) \\ 2^{2x}-2 \cdot 2^x-1=0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 1+x=1-x \Leftrightarrow x=0$

(2) $\Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$

$$\frac{t=2^x (t>0)}{\rightarrow} t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1-\sqrt{2} (L) \\ t=1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(1 + \sqrt{2})$$

(6) $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$

Phương trình $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{(x^2-4x+3)+(x^2+7x+6)} + 1$.

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - 4x + 3 \\ b = x^2 + 7x + 6 \end{cases}$, ta được phương trình:

$$5^a + 5^b = 5^{a+b} + 1 \Leftrightarrow 5^a + 5^b = 5^a \cdot 5^b + 1 \Leftrightarrow (1-5^a)(1-5^b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a = 1 \\ 5^b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 + 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \\ x = -6 \end{cases}.$

Câu 34. Giải các phương trình sau:

(1) $\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1$

(2) $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + 1$

(3) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

(4) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$

(5) $4^{1+x} + 4^{1-x} = 2(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 8$

(6) $5^{x^2-4x+3} + 5^{x^2+7x+6} = 5^{2x^2+3x+9} + 1$

Lời giải

(1) $\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1$

Điều kiện $25^x - 3 \cdot 5^x + 15 > 0$

Phương trình $\log_5(25^x - 3 \cdot 5^x + 15) = x + 1$

$$\Leftrightarrow 25^x - 3 \cdot 5^x + 15 = 5^{x+1} \Leftrightarrow 25^x - 8 \cdot 5^x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 3 \\ 5^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_5 3; x = 1$.

(2) $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + 1$

Điều kiện $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x > 0 \forall x$

$$\text{Phương trình } \log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 6^{x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\right)^x = t, (t > 0)} 3t^2 - 6t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3+\sqrt{3}}{3}; x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$

Điều kiện $3^{x+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

$$\text{Phương trình } \log_3(3^{x+1} - 1) = 2x + \log_{\frac{1}{3}} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^{x+1} - 1) = \log_3 3^{2x} - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^{x+1} - 1) = \log_3 \frac{3^{2x}}{2} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 1 = \frac{3^{2x}}{2} \Leftrightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 2 = 0.$$

$$\xrightarrow{t = 3^x, t > 0} t^2 - 6t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 + \sqrt{7} \\ t = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 + \sqrt{7} \\ 3^x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3(3 + \sqrt{7}) \\ x = \log_3(3 - \sqrt{7}) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_3(3 + \sqrt{7}); x = \log_3(3 - \sqrt{7})$.

(4) $\log_5(9 - 5^x) = 1 - x$

Điều kiện $9 - 5^x > 0 \Leftrightarrow x < \log_5 9$

$$\text{Phương trình } \log_5(9 - 5^x) = 1 - x \Leftrightarrow 9 - 5^x = 5^{1-x} \Leftrightarrow 5^{2x} - 9 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$\xrightarrow{t = 5^x, t > 0} t^2 - 9t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{9+\sqrt{61}}{2} \\ t = \frac{9-\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = \frac{9+\sqrt{61}}{2} \\ 5^x = \frac{9-\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 \frac{9+\sqrt{61}}{2} \\ x = \log_5 \frac{9-\sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_5 \frac{9+\sqrt{61}}{2}; x = \log_5 \frac{9-\sqrt{61}}{2}$.

(5) $\log_2(6-2^x) = 1-x$

Điều kiện $6-2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 6 \Leftrightarrow x < \log_2 6$

Phương trình $\log_2(6-2^x) = 1-x \Leftrightarrow 6-2^x = 2^{1-x} \Leftrightarrow 6-2^x = \frac{2}{2^x} \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6.2^x + 2 = 0$

$$\xrightarrow{t=2^x, t>0} t^2 - 6t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 + \sqrt{7} \\ t = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + \sqrt{7} \\ 2^x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2(3 + \sqrt{7}) \\ x = \log_2(3 - \sqrt{7}) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_2(3 + \sqrt{7}); x = \log_2(3 - \sqrt{7})$.

(6) $\log(8.5^x + 20^x) = x + \log 25$

Điều kiện $8.5^x + 20^x > 0 \forall x$

Phương trình $\log(8.5^x + 20^x) = x + \log 25 \Leftrightarrow 8.5^x + 20^x = 25.10^x \Leftrightarrow 8 + 4^x = 25.2^x$

$$\xrightarrow{t=2^x, t>0} t^2 - 25t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{25-\sqrt{593}}{2} \\ t = \frac{25+\sqrt{593}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{25-\sqrt{593}}{2} \\ 2^x = \frac{25+\sqrt{593}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2\left(\frac{25-\sqrt{593}}{2}\right) \\ x = \log_2\left(\frac{25+\sqrt{593}}{2}\right) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = \log_2\left(\frac{25-\sqrt{593}}{2}\right); x = \log_2\left(\frac{25+\sqrt{593}}{2}\right)$.

Câu 35. Thực hiện các yêu cầu sau:

(1) Với các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

(2) Cho $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$ với a, b là số nguyên dương. Tính $a+b$.

Lời giải

(1) Với các số thực x, y dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6}\right)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$

$$\text{Đặt } t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 \left(\frac{x+y}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x+y = 6.4^t \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } 9^t + 6^t = 6 \cdot 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2.$$

(2) Cho $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$ với a, b là số nguyên dương. Tính $a+b$.

$$\text{Đặt } \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y) = t \Rightarrow x = 9^t; y = 6^t; x+y = 4^t$$

$$\text{Khi đó } 9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a=1; b=5 \Rightarrow a+b=6.$$

-----Hết-----

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT

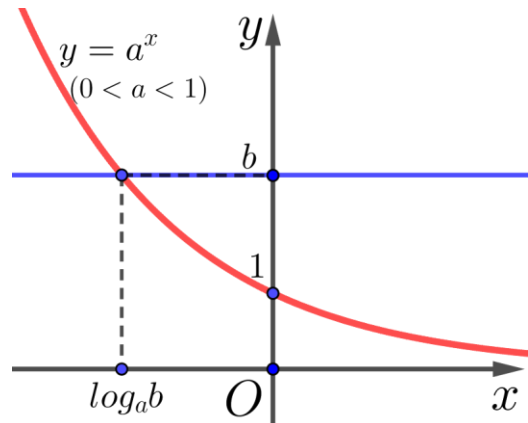
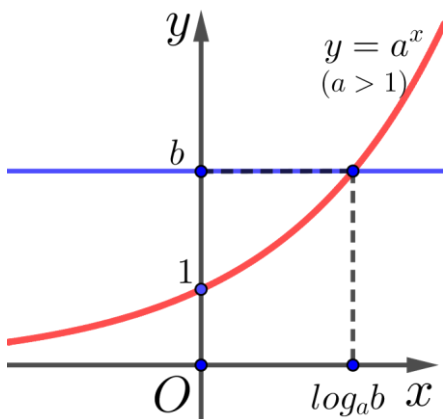
A Lý thuyết

1. Bất phương trình mũ.



Bất phương trình mũ cơ bản: $a^x > b$ hoặc $a^x < 0$; $a^x \geq b$; $a^x \leq b$, với $a > 0$, $a \neq 1$.
Với a và b là các số cho trước.

Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Xét bất phương trình $a^x > b$ (*).

Nghiệm của (*) là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ hình vẽ ta nhận được:

⌘ Nếu $b \leq 0$ thì $\forall x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (*).

⌘ Nếu $b > 0$ thì

- Với $a > 1$: nghiệm của (*) là $x > \log_a b$.
- Với $0 < a < 1$: nghiệm của (*) là $x < \log_a b$.

Chú ý

(1) Nếu $a > 1$: $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

(2) Nếu $0 < a < 1$: $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

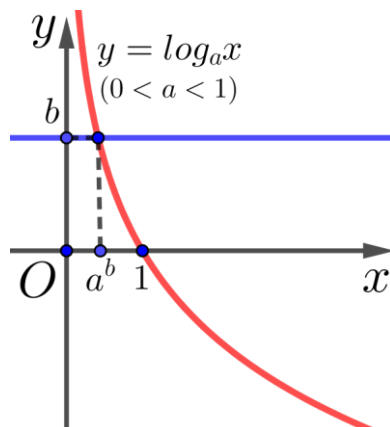
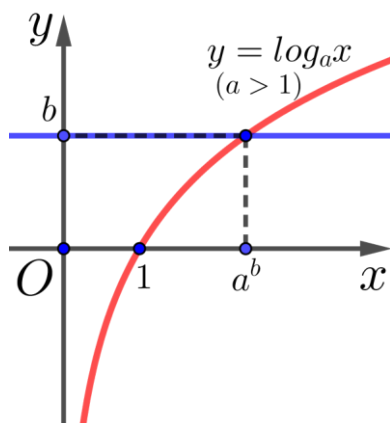
2. Bất phương trình logarit.



Bất phương trình logarit cơ bản: $\log_a x > b$ hoặc $\log_a x < 0$; $\log_a x \geq b$; $\log_a x \leq b$, với $a > 0, a \neq 1$.

Với a và b là các số cho trước.

Cho đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như hình.



Xét bất phương trình $\log_a x > b$ (*).

Điều kiện $x > 0$.

Nghiệm của (*) là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ hình vẽ ta nhận được:

⌘ Với $a > 1$ nghiệm của (*) là $x > a^b$.

⌘ Với $0 < a < 1$ nghiệm của (*) là $0 < x < a^b$.



Chú ý

(1) Nếu $a > 1$: $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

(2) Nếu $0 < a < 1$: $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

B Bài tập

Dạng 1. Bất phương trình mũ cơ bản

Phương pháp

Dạng 01.

$$a^x > b \quad (a > 0; a \neq 1)$$

$$b \leq 0$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

$$b > 0$$

$$a > 1$$

$$a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b.$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b.$$

Dạng 02.

$$a^x < b \quad (a > 0; a \neq 1)$$

$$b \leq 0$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\emptyset$.

$$b > 0$$

$$a > 1$$

$$a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b.$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b.$$



Ví dụ 1.1.

Giải các bất phương trình sau:

(1) $3^x \geq 9$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$

(3) $2^{x+2} = \sqrt{2^3}$

(4) $2^x > 3^{x+1}$

Lời giải

(1) $3^x \geq 9$

Ta có $3^x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq \log_3 9 \Leftrightarrow x \geq 2$.

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4$

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

(3) $2^{x+2} < \sqrt{2^3}$

Ta có: $2^{x+2} < \sqrt{2^3} \Leftrightarrow 2^{x+2} < 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x+2 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

(4) $2^x > 3^{x+1}$

Ta có: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow 2^x > 3 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.

Dạng 2. Bất phương trình mũ đưa về cùng cơ số



Phương pháp

- ☑ Với $a > 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.
- ☑ Với $0 < a < 1$: $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.



Ví dụ 2.1.

Giải các bất phương trình sau:

(1) $2^{2x-1} - 2^{-2} > 0$

(2) $2^{2(x+5)^2} \geq 4^{1-2x}$

(3) $\left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} < 5^{-2x}$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} > \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{x-1}$

Lời giải

(1) $2^{2x-1} - 2^{-2} > 0$

Ta có $2^{2x-1} - 2^{-2} > 0 \Leftrightarrow 2^{2x-1} > 2^{-2} \Leftrightarrow 2x-1 > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

(2) $2^{2(x+5)^2} \geq 4^{1-2x}$

Ta có $2^{2(x+5)^2} \geq 4^{1-2x} \Leftrightarrow 4^{(x+5)^2} \geq 4^{1-2x} \Leftrightarrow (x+5)^2 \geq 1-2x \Leftrightarrow x^2 + 4x + 24 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) $\left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} < 5^{-2x}$

Ta có $\left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} < 5^{-2x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} < \frac{1}{5^{2x}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{3x+1} < \left(\frac{1}{25}\right)^x \Leftrightarrow 3x+1 > x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} > \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{x-1}$

Ta có $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} > \left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{x-1}$

$\Leftrightarrow (2^{-2})^{2x-1} > \left(\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-4x+2} > 2^{\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}} \Leftrightarrow -4x+2 > \frac{1}{4}x-\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{17}{4}x > -\frac{9}{4} \Leftrightarrow x < \frac{9}{17}$

Dạng 3. Bất phương trình mũ dùng logarit hóa



Phương pháp

○ Bất phương trình $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, b > 0 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$

○ Bất phương trình $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} > \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \cdot \log_a b$
hoặc $\log_b a^{f(x)} > \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \log_b a > g(x)$.

Lưu ý: Khi lấy cơ số cần quan tâm cơ số " > 1 " hay " < 1 " để xác định dấu của BPT.



Ví dụ 3.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $2^{x+1} > 8^{x-1}$

(2) $3^{4^x} \leq 4^{3^x}$

(3) $5^{2x+1} > \left(\frac{1}{125}\right)^{x+25}$

(4) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{2x-1})$

Lời giải

(1) $2^{x+1} > 8^{x-1}$

Ta có $2^{x+1} > 8^{x-1} \Leftrightarrow x+1 > (x-1)\log_2 8 \Leftrightarrow x+1 > 3(x-1) \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < -2$.

(2) $3^{4^x} \leq 4^{3^x}$

Ta có $3^{4^x} \leq 4^{3^x} \Leftrightarrow 4^x \log_3 3 \leq 3^x \log_3 4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq \log_3 4 \Leftrightarrow x \leq \log_{\frac{4}{3}} (\log_3 4)$.

(3) $5^{2x+1} > \left(\frac{1}{125}\right)^{x+25}$

Ta có $5^{2x+1} > \left(\frac{1}{125}\right)^{x+25}$

$\Leftrightarrow 2x+1 > (x+25)\log_5 \frac{1}{125} \Leftrightarrow 2x+1 > -3(x+25) \Leftrightarrow 5x > -76 \Leftrightarrow x > -\frac{76}{5}$.

(4) $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{2x-1})$

Ta có $2^x \cdot 5^x = 0,2 \cdot (10^{2x-1})$

$\Leftrightarrow 10^x \geq \frac{1}{5} \cdot 10^{2x-1}$

$\Leftrightarrow x \geq \log \frac{1}{5} + (2x-1) \Leftrightarrow -x \geq -\log 5 - 1 \Leftrightarrow x \leq \log 5 + \log 10 \Leftrightarrow x \leq \log 50$

 Dạng 4. Bất phương trình mũ đặt ẩn phụ



Phương pháp

○ Biến đổi quy về dạng: $f[a^{g(x)}] < b \xrightarrow{a>1} \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) < b \end{cases}$.

○ Thông thường sẽ gặp các cơ số: $\begin{cases} 9^x \longrightarrow t = 3^x \\ 4^x \longrightarrow t = 2^x ; t > 0. \\ 25^x \longrightarrow t = 5^x \end{cases}$



Ví dụ 4.1.

Giải các bất phương trình sau:

(1) $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 > 0$

(2) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0$

(3) $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0$

(4) $3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 < 0$

 Lời giải

(1) $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 > 0$

Ta có $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 > 0$

$\xrightarrow{t=3^x, t>0} 3t^2 - 4t + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 1 \\ 3^x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

(2) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0$

Ta có $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0 \Leftrightarrow (3^2)^x - 5 \cdot 3^x + 6 < 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 < 0 (*)$

$\xrightarrow{t=3^x, t>0} t^2 - 5t + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 3 \Leftrightarrow \log_3 2 < x < 1$

(3) $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0$

Ta có $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4(2^2)^x - 18 \cdot 2^x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4(2^x)^2 - 18 \cdot 2^x + 8 \geq 0$

$\xrightarrow{t=2^x, t>0} 4t^2 - 18t + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 4 \\ 2^x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{cases}$

(4) $3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 < 0$

Ta có $3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 < 0 \Leftrightarrow 3^x - 8 \cdot \sqrt{3^x} + 15 < 0$.

$\xrightarrow{t=\sqrt{3^x}, t>0} t^2 - 8t + 15 < 0 \Leftrightarrow 3 < t < 5 \Leftrightarrow 3 < \sqrt{3^x} < 5 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3 < x < \log_{\sqrt{3}} 5 \Leftrightarrow 2 < x < 2 \log_3 5$

Dạng 5. Bất phương trình logarit cơ bản



Phương pháp

☑ Giải bất phương trình logarit cơ bản: $\log_a x > b \Leftrightarrow \begin{cases} x > a^b & \text{khi } a > 1 \\ x < a^b & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$.

Lưu ý: ➔ Xác định điều kiện trước khi giải bất phương trình.

➔ Khi lấy cơ số cần quan tâm cơ số "> 1" hay "< 1" để xác định dấu của BPT.



Ví dụ 5.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_{e^2} x > 5$

(2) $\log_4 (x-20) < 2$

(3) $\log_2 |x-1| = 3$

(4) $\log_{\sqrt[3]{2}} (x^2-2)^2 = 8$

Lời giải

(1) $\log_{e^2} x > 5$

$$\text{Ta có: } \log_{e^2} x > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > (e^2)^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > e^{10} \end{cases} \Leftrightarrow x > e^{10}$$

(2) $\log_4 (x-20) < 2$

$$\text{Ta có } \log_4 (x-20) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 20 \\ x-20 < 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 20 \\ x < 36 \end{cases} \Leftrightarrow 20 < x < 36.$$

(3) $\log_2 |x-1| > 2$

$$\text{Ta có } \log_2 |x-1| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ |x-1| > 2^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x-1)^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x > 1 + \sqrt{3} \\ x < 1 - \sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 + \sqrt{3} \\ x < 1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

(4) $\log_3 (x^2-1)^2 > 2$

$$\text{Ta có } \log_3 (x^2-1)^2 > 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \neq 0 \\ (x^2-1)^2 > 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x^4 - 2x^2 - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \begin{cases} x^2 > 4 \\ x^2 < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}.$$

Dạng 6. Bất phương trình logarit đưa về cùng cơ số



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất phương trình logarit về các dạng cơ bản sau:

✍ **Loại 1:** $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^b \end{cases} \text{ khi } a > 1$

$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^b \end{cases} \text{ khi } 0 < a < 1$

✍ **Loại 2:** $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{ khi } a > 1$

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ khi } 0 < a < 1$



Ví dụ 6.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\ln(x+1) + \ln(x+3) > \ln(x+7)$

(2) $2\log_2(x^2 - x - 1) < \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

(3) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$

(4) $\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) = 4$

Lời giải

(1) $\ln(x+1) + \ln(x+3) > \ln(x+7)$

Điều kiện $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 > 0 \\ x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$

$\ln(x+1) + \ln(x+3) > \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow \ln[(x+1)(x+3)] > \ln(x+7) \Leftrightarrow (x+1)(x+3) > x+7 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -4 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$.

(2) $2\log_2(x^2 - x - 1) < \log_{\sqrt{2}}(x-1)$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$2\log_2(x^2 - x - 1) < \log_{\sqrt{2}}(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x^2 - x - 1) < 2\log_2(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - x - 1) < \log_2(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2 \right).$$

$$(3) \log_4(x+12) \cdot \log_x 2 \geq 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+12 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -12 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(x+12) \cdot \frac{1}{\log_2 x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+12) \geq 2\log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x+12) \geq \log_2 x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 4$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là } S = (0; 4] \setminus \{1\}.$$

$$(4) \log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) \leq 4$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+4 > 0 \\ 14-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 14$$

$$\log_3(x+4) + 2\log_9(14-x) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+4) + 2\log_{3^2}(14-x) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+4) + \log_3(14-x) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x+4) \cdot (14-x)] \leq 4 \Leftrightarrow (x+4)(14-x) \leq 3^4 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 25 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là } S = (-4; 14).$$

Dạng 7. Bất phương trình logarit dùng mũ hóa



Phương pháp

☑ Cho $1 \neq a > 0$. Với điều kiện các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ xác định, ta thường đưa các bất phương trình logarit về: $\log_a f(x) > g(x) \xrightarrow{a>1} \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^{g(x)} \end{cases}$



Ví dụ 7.1.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_2(2 \cdot 2^x + 1) > 2x$

(2) $\log(3 - 2x) > 2^{\log_2 \log x}$

Lời giải

(1) $\log_2(2 \cdot 2^x + 1) > 2x$

Điều kiện $2 \cdot 2^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\log_2(2 \cdot 2^x + 1) > 2x$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + 1 > 2^{2x}$

$\Leftrightarrow -2^{2x} + 2 \cdot 2^x + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < 2^x < 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < 2^x < 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < x < \log_2(1 + \sqrt{2})$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (1; \log_2(1 + \sqrt{2}))$.

(2) $\log(3 - 2x) > 2^{\log_2 \log x}$

Điều kiện $\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$.

$\log(3 - 2x) > 2^{\log_2 \log x} \Leftrightarrow \log(3 - 2x) > \log x \Leftrightarrow 3 - 2x > x \Leftrightarrow 3x < 3 \Leftrightarrow x < 1$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (-\infty; 1)$.



Ví dụ 7.2.

Giải các phương trình sau:

(1) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 64) < 2$

(2) $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$

Lời giải

(1) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 64) < 2$

Điều kiện $\begin{cases} 5 - x > 0 \\ 5 - x \neq 1 \\ x^2 - 2x + 64 > 0 \forall x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Trường hợp 1: $5-x > 1 \Leftrightarrow x < 4$

$$\log_{5-x}(x^2 - 2x + 64) < 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 64 < (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 64 < 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 8x < -39 \Leftrightarrow x < -\frac{39}{8}$$

$$\text{Khi đó } x < -\frac{39}{8}$$

Trường hợp 2: $0 < 5-x < 1 \Leftrightarrow 4 < x < 5$

$$\log_{5-x}(x^2 - 2x + 64) < 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 64 > (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 64 > 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow 8x > -39 \Leftrightarrow x > -\frac{39}{8}$$

$$\text{Khi đó } x \in \emptyset$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm } S = \left(-\infty; -\frac{39}{8}\right).$$

$$(2) \log_{x^2}(3-2x) > 1$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Thì } \log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow 3-2x > x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

$$\text{Khi đó } -3 < x < -1$$

$$\text{Trường hợp 2: } 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Thì } \log_{x^2}(3-2x) > 1 \Leftrightarrow 3-2x < x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } x \in \emptyset$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm } S = (-3; -1).$$

Dạng 8. Bất phương trình logarit đặt ẩn phụ



Phương pháp

○ Biến đổi quy về dạng: $f(\log_a g(x)) > b \xrightarrow{a>1} \begin{cases} t = \log_a g(x) \\ f(t) > b \end{cases}$.

Lưu ý: với $t = \log_a g(x)$ không có điều kiện của t .



Ví dụ 8.1.

Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 > 0$

(2) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x < 5$

(3) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 \geq 0$

(4) $\log_2 x - \log_x 64 > 1$

(5) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2(x\sqrt{8}) - 3 \geq 0$

(6) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 < 0$

Lời giải

(1) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 > 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 > 0 \xrightarrow{\log_3 x = t} t^2 - 4t + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 1 \\ \log_3 x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 27 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (0; 3) \cup (27; +\infty)$.

(2) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x < 5$

Điều kiện $x > 0$

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 2\log_{\sqrt{2}} x < 5 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 4\log_2 x - 5 < 0$$

$$\xrightarrow{t = \log_2 x} t^2 + 4t - 5 < 0 \Leftrightarrow -5 < t < 1 \Leftrightarrow -5 < \log_2 x < 1 \Leftrightarrow 2^{-5} < x < 2$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (2^{-5}; 2)$.

(3) $\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 \geq 0$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \log_3 x \geq 0 \\ x > 0 \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$3\sqrt[3]{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x - 3\sqrt[3]{\log_3 x} + 2 \geq 0$$

$$\xrightarrow{t = \sqrt[3]{\log_3 x} (t \geq 0)} t^3 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \geq 8 \\ 0 \leq \log_3 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = [1; 3] \cup [9; +\infty)$.

(4) $\log_2 x - \log_x 64 > 1$

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_2 x - \log_x 64 > 1 \Leftrightarrow \log_2 x - 6\log_x 2 > 1$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x (t \neq 0)} t - \frac{6}{t} > 1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t - 6}{t} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < 0 \\ 3 < t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \log_2 x < 0 \\ 3 < \log_2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-2} < x < 1 \\ 2^3 < x \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (2^{-2}; 1) \cup (2^3; +\infty)$.

(5) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2 (x\sqrt{8}) - 3 \geq 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_{\sqrt{2}}^2 x + \log_2 (x\sqrt{8}) - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\log_2 x)^2 + \log_2 x + \log_2 \sqrt{8} - 3 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 8(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 \geq 0$$

$$\xrightarrow{t=\log_2 x} 8t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ t \leq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq \frac{1}{2} \\ \log_2 x \leq -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2^{\frac{1}{2}} \\ x \leq 2^{-\frac{3}{4}} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = \left(0; 2^{-\frac{3}{4}}\right] \cup \left[2^{\frac{1}{2}}; +\infty\right)$

(6) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 < 0$

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 < 0$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow \log_3^2 x = t-1]{\sqrt{\log_3^2 x + 1} = t (t \geq 1)} t^2 + t - 6 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq t < 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{\log_3^2 x + 1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\log_3^2 x + 1} < 2 \\ \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét } \sqrt{\log_3^2 x + 1} < 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 1 < 4 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < \log_3 x < \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{-\sqrt{3}} < x < 3^{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Xét } \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \log_3^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \sqrt{\log_3^2 x + 1} < 2 \\ \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-\sqrt{3}} < x < 3^{\sqrt{3}} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm $S = (3^{-\sqrt{3}}; 3^{\sqrt{3}}) \setminus \{1\}$

C Luyện tập

Câu 36. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$

(2) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$

(3) $3^{x^2-2x} < 27$

(4) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$

(5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

(6) $3^{x-2} \leq 243$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} \geq 8$

(8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1$

(9) $2^{7x-2x^2} \geq 32$

(10) $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$

Lời giải

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$

(2) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$

Ta có $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

(3) $3^{x^2-2x} < 27$

Ta có $3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} < 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

(4) $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x$

Ta có $11^{\sqrt{x+6}} \geq 11^x \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x+6 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+6 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x < 0 \\ x \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 3$

(5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}$

Ta có $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \Leftrightarrow 2x - 4 < x + 1 \Leftrightarrow x < 5$.

(6) $3^{x-2} \leq 243$

Ta có $3^{x-2} \leq 243 = 3^5 \Leftrightarrow x-2 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 7$.

$$(7) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} \geq 8$$

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} \geq 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2+4x \leq -3 \Leftrightarrow x^2+4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$.

$$(8) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1$$

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1 \Leftrightarrow x^2-4x-12 < \log_{\frac{1}{3}}(1) \Leftrightarrow x^2-4x-12 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6$

$$(9) 2^{7x-2x^2} \geq 32$$

Ta có $2^{7x-2x^2} \geq 32 \Leftrightarrow 2^{7x-2x^2} \geq 2^5 \Leftrightarrow -2x^2+7x-5 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

$$(10) 5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$$

Ta có $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow x+1 > \log_5 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Câu 37. Giải các bất phương trình sau:

$$(1) \left(\frac{1}{7}\right)^{-x^2-x+4} \leq 49$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$$

$$(3) 7^{4x+4} \leq 7^{x^2+3x-2}$$

$$(4) \left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \geq \frac{9}{7}$$

$$(5) 2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$$

$$(6) \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$$

$$(7) \left(\frac{1}{2}\right)^{2+x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-1}$$

$$(8) 5^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$$

$$(9) (5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$$

$$(10) \left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$$

Lời giải

$$(1) \left(\frac{1}{7}\right)^{-x^2-x+4} \leq 49$$

Ta có $\left(\frac{1}{7}\right)^{-x^2-x+4} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \Leftrightarrow -x^2-x+4 \geq -2 \Leftrightarrow -x^2-x+6 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$.

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 17x + 11 \leq 7 - 5x \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(3) 7^{4x+4} \leq 7^{x^2+3x-2}$$

$$\text{Ta có: } 7^{4x+4} \leq 7^{x^2+3x-2} \Leftrightarrow 4x+4 \leq x^2+3x-2 \Leftrightarrow x^2-x-6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 3 \end{cases}.$$

$$(4) \left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \geq \frac{9}{7}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{9}{7}\right)^{3x-2x^2} \geq \frac{9}{7} \Leftrightarrow 3x-2x^2 \geq 1 \Leftrightarrow -2x^2+3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$(5) 2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$$

$$\text{Ta có } 2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x \leq \frac{4}{3} \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$(6) \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2x-4 < -x^2-3x+2 \Leftrightarrow x^2+5x-6 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < 1.$$

$$(7) \left(\frac{1}{2}\right)^{2+x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-1}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{2}\right)^{2+x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x-1} \Leftrightarrow 2+x \geq x^2-x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

$$(8) 5^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$$

$$\text{Ta có } 5^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x} \Leftrightarrow 5^{4+x^2} < 5^{-x^2+6x} \Leftrightarrow 4+x^2 < -x^2+6x \Leftrightarrow 2x^2-6x+4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$(9) (5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$$

$$\text{Ta có } (5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$$

$$\Leftrightarrow (5)^{4+x^2} < (5)^{-x^2+6x} \Leftrightarrow 4+x^2 < -x^2+6x \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$(10) \left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{4}\right)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow 2^{-2x} > 2^{\frac{2x}{x+1}} \Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

Câu 38. Giải các bất phương trình sau:

$$(1) 5^{x^2-3x} < 625$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \frac{1}{8}$$

$$(3) e^{x^2-x-1} < \frac{1}{e}$$

$$(4) \left(\frac{e}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x+3}$$

$$(5) \left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$$

$$(6) \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$$

$$(7) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$$

$$(8) \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3 > 3^x \cdot \sqrt{3}$$

$$(9) (0,6)^{\frac{1}{x}} \leq (0,6)^{\frac{1}{6}}$$

$$(10) \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$$

Lời giải

$$(1) 5^{x^2-3x} < 625$$

$$\text{Ta có } 5^{x^2-3x} < 625 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x} < 5^4 \Leftrightarrow x^2-3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \frac{1}{8}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{-x^2-2x} < 2^{-3} \Leftrightarrow -x^2-2x < -3 \Leftrightarrow -x^2-2x+3 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 1 < x \end{cases}.$$

$$(3) e^{x^2-x-1} < \frac{1}{e}$$

$$\text{Ta có } e^{x^2-x-1} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x^2-x-1} < e^{-1} \Leftrightarrow x^2-x-1 < -1 \Leftrightarrow x^2-x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

$$(4) \left(\frac{e}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x+3}$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{e}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{e}{2}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow x-1 \leq 2x+3 \Leftrightarrow x \geq -4.$$

$$(5) \left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2}$$

Ta có: $\left(\frac{7}{11}\right)^{3x+2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{7}\right)^{-3x-2} \leq \left(\frac{11}{7}\right)^{x^2} \Leftrightarrow -3x-2 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2. \end{cases}$

(6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$

Điều kiện: $x \geq -2$.

Ta có: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \Leftrightarrow x > 2. \\ x > 2 \end{cases}$

(7) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x}$

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} > 2^{4-3x} \Leftrightarrow 2^{2-x^2} > 2^{4-3x} \Leftrightarrow 2-x^2 > 4-3x \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

(8) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3 > 3^x \cdot \sqrt{3}$

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 3 > 3^x \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{3^x} > \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$

(9) $(0,6)^{\frac{1}{x}} \leq (0,6)^{\frac{1}{6}}$

Ta có $(0,6)^{\frac{1}{x}} \leq (0,6)^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{6-x}{6x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 6$.

(10) $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$

Ta có $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{2} \geq 2x+1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \leq -5$.

Câu 39. Giải các bất phương trình sau:

(1) $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 \leq 0$

(2) $(3+2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2}-1)^x > 3$

(3) $(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$

(4) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

Lời giải

(1) $(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 \leq 0$

Nhận xét: $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$ và $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$.

$$(7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 \leq 0 \xrightarrow{t=(2+\sqrt{3})^x, t>0} t^2 - \frac{3}{t} + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

$$(2) (3+2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2}-1)^x > 3$$

Nhận xét: $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1 \Rightarrow \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ và $(\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$.

$$(3+2\sqrt{2})^x - 2(\sqrt{2}-1)^x > 3 \xrightarrow[\rightarrow (3+2\sqrt{2})^x = \frac{1}{t^2}]{t=(\sqrt{2}-1)^x, t>0} \frac{1}{t^2} - 2t > 3$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 + 3t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{2}\right)(t+1)^2 > 0 \Leftrightarrow t > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \log_{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2}.$$

$$(3) (\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$$

Điều kiện $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$$(\sqrt{5}-2)^{\frac{2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{\frac{-2x}{x-1}} \leq (\sqrt{5}+2)^x \Leftrightarrow -\frac{2x}{x-1} \leq x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} + x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x > 1 \end{cases}.$$

$$(4) (2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

Ta có $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow (7+2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{x^2-2x-1} + \frac{1}{(2+\sqrt{3})^{x^2-2x-1}} \leq 4(2+\sqrt{3})$$

$$\xrightarrow{t=(2+\sqrt{3})^{x^2-2x-1}, t>0} (7+4\sqrt{3})t + \frac{1}{t} \leq 4(2+\sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow (7+4\sqrt{3})t^2 - 4(2+\sqrt{3})t + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \leq t \leq 1 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{-2} \leq t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{-2} \leq (2+\sqrt{3})^{x^2-2x-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Câu 40. Giải các bất phương trình sau:

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$

(3) $4^{x+1} + 10 \cdot 2^x - 6 < 0$

(5) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

(7) $5^x + 5^{2-x} - 26 \leq 0$

(9) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

(4) $4^x - 8 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x < 0$

(6) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$

(8) $2^x \geq 3 - \frac{2}{2^x}$

(10) $\left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{-x} + 8 \leq 0$

Lời giải

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$

Ta có $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 4^x - 6 \cdot 2^x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \log_2 5$.

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

Ta có $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

$\xrightarrow{t=\left(\frac{1}{2}\right)^x, t>0} t^2 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-1) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

(3) $4^{x+1} + 10 \cdot 2^x - 6 < 0$

Ta có $4^{x+1} + 10 \cdot 2^x - 6 < 0$

$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 + 10 \cdot 2^x - 6 < 0 \Leftrightarrow (4 \cdot 2^x - 2)(2^x + 3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x < \frac{1}{2} \\ 2^x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-1} \Leftrightarrow x < -1$

(4) $4^x - 8 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x < 0$

Ta có $4^x - 8 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 6 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3}} 6 < x < \log_{\frac{2}{3}} 2$.

(5) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

Ta có $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

(6) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$

Ta có $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow (3^{x-1})^2 - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-1} \geq 1 \\ 3^{x-1} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

(7) $5^x + 5^{2-x} - 26 \leq 0$

$$\text{Ta có } 5^x + 5^{2-x} - 26 \leq 0 \Leftrightarrow 5^x + \frac{25}{5^x} - 26 \leq 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 25 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 5^x \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$(8) \quad 2^x \geq 3 - \frac{2}{2^x}$$

$$\text{Ta có } 2^x \geq 3 - \frac{2}{2^x} \Leftrightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq 1 \vee 2^x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1.$$

$$(9) \quad 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$$

$$\text{Ta có } 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

$$(10) \quad \left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{-x} + 8 \leq 0$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{-x} + 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{e}{2}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \left(\frac{e}{2}\right)^x \leq 4 \Leftrightarrow \log_{\frac{e}{2}} 2 \leq x \leq \log_{\frac{e}{2}} 4.$$

Câu 41. Giải các bất phương trình sau:

$$(1) \log_3(x-1) > 2$$

$$(2) \left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$$

$$(3) \log_3(2x-3) > 2$$

$$(4) \log_3(2x-3) > 2$$

$$(5) \log_{2021}(2x-3) < 1$$

$$(6) \log_3(4x-1) < 1$$

$$(7) \log_{0,2}(x-1) < 0$$

$$(8) \log_{0,5}(2x-1) > -2$$

$$(9) \log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2$$

$$(10) \log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$$

Lời giải

$$(1) \log_3(x-1) > 2$$

Điều kiện $x > 1$.

$$\text{Ta có } \log_3(x-1) > 2 \Leftrightarrow x-1 > 3^2 \Leftrightarrow x > 10.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x > 10$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0$$

Điều kiện $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0 \Leftrightarrow 2x+1 < 1 \Leftrightarrow x < 0$

Kết hợp với điều kiện ta được $-\frac{1}{2} < x < 0$

(3) $\log_3(2x-3) > 2$

Điều kiện $2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Ta có: $\log_3(2x-3) > 2 \Leftrightarrow 2x-3 > 9 \Leftrightarrow x > 6$.

Kết hợp với điều kiện ta được $x > 6$

(4) $\log_2(3x-1) > 3$

Điều kiện $3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$.

Ta có $\log_2(3x-1) > 3 \Leftrightarrow 3x-1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$

Kết hợp với điều kiện ta được $x > 3$

(5) $\log_{2021}(2x-3) < 1$

Điều kiện $2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Ta có $\log_{2021}(2x-3) < 1 \Leftrightarrow 2x-3 < 2021 \Leftrightarrow x < 1012$.

Kết hợp với điều kiện ta được $\frac{3}{2} < x < 1012$

(6) $\log_3(4x-1) < 1$

Ta có $\log_3(4x-1) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1 > 0 \\ 4x-1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 1$.

(7) $\log_{0,2}(x-1) < 0$

Ta có $\log_{0,2}(x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

(8) $\log_{0,5}(2x-1) > -2$

Ta có $\log_{0,5}(2x-1) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < (0,5)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$.

(9) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2$

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2 \Leftrightarrow 0 < x+2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow -2 < x \leq 2$.

(10) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$

Ta có $\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x+6}{x} > 0 \\ \frac{4x+6}{x} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{-3}{2} \\ \frac{4x+6}{x} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{-3}{2} \\ \frac{3x+6}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{-3}{2} \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < -\frac{3}{2}$$

Câu 42. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$

(2) $\log_{0,5}(\ln(x-2)) > -2$

(3) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x-4) > -2$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1$

(5) $\log(\log_2 x) < 0$

(6) $\log_3(4x-1) < 1$

(7) $\log_{0,2}(x-1) < 0$

(8) $\log_{0,5}(2x-1) > -2$

(9) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -2$

(10) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{4x+6}{x} \geq 0$

Lời giải

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1$

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 2 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

(2) $\log_{0,5}(\ln(x-2)) > -2$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 2 \\ \ln(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

$$\text{Ta có } \log_{0,5}(\ln(x-2)) > -2 \Leftrightarrow \ln(x-2) < (0,5)^{-2} \Leftrightarrow x-2 < e^4 \Leftrightarrow x < e^4 + 2$$

(3) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x-4) > -2$

$$\text{Ta có } \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x-4) > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} \\ 2x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 < 2 \\ 2x-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1$

Điều kiện $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1 \Leftrightarrow x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $1 < x < \frac{3}{2}$

(5) $\log(\log_2 x) < 0$

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có $\log(\log_2 x) < 0 \Leftrightarrow \log_2 x < 1 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $1 < x < 2$

(6) $\log_2^2\left(\frac{x-1}{10}\right) \leq 4$

Điều kiện $\frac{x-1}{10} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có $\log_2^2\left(\frac{x-1}{10}\right) \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq \log_2\left(\frac{x-1}{10}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{x-1}{10} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq x \leq 41$.

Kết hợp với điều kiện ta được $\frac{9}{2} \leq x \leq 41$

(7) $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0$

Điều kiện $2x^2 - x + 1 > 0 \forall x$.

Ta có $\log_{\frac{2}{3}}(2x^2 - x + 1) < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta được $\begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

(8) $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)(2x+1) < 0$

Điều kiện $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$

Ta có $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)(2x+1) < 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 > 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta được $x > \frac{5}{2}$

(9) $\log_3(-x^2 + 9) \geq 2$

Điều kiện $-x^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Ta có $\log_3(-x^2 + 9) \geq 2 \Leftrightarrow -x^2 + 9 \geq 3^2 \Leftrightarrow -x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 0$

(10) $\log_4(x^2 + 2x - 3) < \frac{1}{2}$

Ta có $\log_4(x^2 + 2x - 3) < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 + 2x - 3 < 4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x^2 + 2x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \\ -1 - \sqrt{6} < x < -1 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{6} < x < -3 \\ 1 < x < -1 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Câu 43. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_3(x-1) + \log_3(2x-1) \leq 1$

(2) $\log_3(x+1) > \log_3(2x-1)$

(3) $\log_{\frac{\pi}{5}}(3x-2) > \log_{\frac{\pi}{5}} 4$

(4) $\ln(2x+1) \geq 1 + \ln(x-1)$

(5) $\log(x-21) + \log x < 2$

(6) $\log_{0,9}(x^2-9) > \log_{0,9}(8x)$

(7) $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$

(8) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

(9) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$

(10) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5) + \log_2(x-1) > 0$

Lời giải

(1) $\log_3(x-1) + \log_3(2x-1) \leq 1$

Điều kiện $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ta có $\log_3(x-1) + \log_3(2x-1) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)] \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1) \leq 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq x \leq 2.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $1 < x \leq 2$

(2) $\log_3(x+1) > \log_3(2x-1)$

Ta có $\log_3(x+1) > \log_3(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x+1 > 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$

(3) $\log_{\frac{\pi}{5}}(3x-2) > \log_{\frac{\pi}{5}} 4$

Ta có $\log_{\frac{\pi}{5}}(3x-2) > \log_{\frac{\pi}{5}} 4 \Leftrightarrow 0 < 3x-2 < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 2$.

(4) $\ln(2x+1) \geq 1 + \ln(x-1)$

Điều kiện $x > 1$

Ta có $\ln(2x+1) \geq 1 + \ln(x-1)$

$$\Leftrightarrow \ln(2x+1) \geq \ln[e(x-1)] \Leftrightarrow 2x+1 \geq e(x-1) \Leftrightarrow x(e-2) \leq e+1 \Leftrightarrow x \leq \frac{e+1}{e-2}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $1 < x \leq \frac{e+1}{e-2}$

(5) $\log(x-21) + \log x < 2$

Điều kiện $x > 21$.

Ta có $\log(x-21) + \log x < 2$

$$\Leftrightarrow \log[x(x-21)] < 2 \Leftrightarrow x(x-21) < 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 21x - 100 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 25$$

Kết hợp điều kiện ta được $21 < x < 25$.

(6) $\log_{0,9}(x^2-9) > \log_{0,9}(8x)$

Điều kiện $\begin{cases} x^2-9 > 0 \\ 8x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

Ta có $\log_{0,9}(x^2-9) > \log_{0,9}(8x) \Leftrightarrow x^2-9 < 8x \Leftrightarrow x^2-8x-9 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 9$.

Kết hợp với điều kiện ta được $3 < x < 9$.

(7) $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$

Điều kiện $\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$

Ta có $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x) \Leftrightarrow 2x+3 < 1-x \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $-\frac{3}{2} < x < -\frac{2}{3}$.

(8) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

Ta có $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+7} > \log_2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} > x+1 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6 < 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

Kết hợp điều kiện ta được $-1 < x < 2$

(9) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \log_3(11-2x) \geq \log_3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ 11-2x \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases}.$$

$$(10) \log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5) + \log_2(x-1) > 0$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2-6x+5 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5) + \log_2(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x^2-6x+5) + \log_2(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2-6x+5) < \log_2(x-1) \Leftrightarrow x^2-6x+5 < x-1 \Leftrightarrow x^2-7x+6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6.$$

Kết hợp điều kiện ta được $1 < x < 6$

Câu 44. Giải các bất phương trình sau:

$$(1) \ln(x^2+1) - \ln(2x+4) > 0$$

$$(2) 3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1) \leq 3$$

$$(3) \log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2) \quad (4) \frac{1}{2}\log_2(x^2+4x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+7}\right)$$

$$(5) \log_2(x+1) \cdot 2\log_2\sqrt{x+1} \cdot \log_2\sqrt[4]{4} > \frac{1}{2}$$

$$(6) \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x > \frac{2}{3}$$

$$(7) \log_3 x + \log_3(x+2) > \log_3 3^9$$

$$(8) \log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x < 2$$

$$(9) \log_2(2x-3) - \log_4\left(x - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$$

$$(10) \log_{\sqrt{6}}(x-1) + 2\log_6(x-2) > 3^{\log_3 2}$$

Lời giải

$$(1) \ln(x^2+1) - \ln(2x+4) > 0$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2+1 > 0 \forall x \\ 2x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2.$$

$$\text{Ta có } \ln(x^2+1) - \ln(2x+4) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+1) > \ln(2x+4) \Leftrightarrow x^2+1 > 2x+4 \Leftrightarrow x^2-2x-3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta được } \begin{cases} -2 < x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$(2) 3\log_3(x-1) + \log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1) \leq 3$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có } 3\log_3(x-1) + 3\log_3(2x-1) \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(2x-1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x-1)(2x-1)] \leq 1 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1) \leq 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq x \leq 2.$$

Kết hợp điều kiện ta được $1 < x \leq 2$.

$$(3) \log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2)$$

Điều kiện $5 > x > 2$

$$\text{Ta có } \log_2(x+1) - 2\log_4(5-x) < 1 - \log_2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) - 2\log_{2^2}(5-x) < \log_2 2 - \log_2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x+1}{5-x} < \log_2 \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{5-x} < \frac{2}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 10 - 2x \Leftrightarrow x^2 + x - 12 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 3$$

Kết hợp điều kiện ta được $2 < x < 3$.

$$(4) \frac{1}{2} \log_2(x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+7}\right)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x > 1 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < x < -5 \\ x > 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{2} \log_2(x^2 + 4x - 5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^2 + 4x - 5} > \log_2(x+7)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x - 5} > x + 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 > x^2 + 14x + 49 \Leftrightarrow x < \frac{-27}{5}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $-7 < x < -\frac{27}{5}$

$$(5) \log_2(x+1).2\log_2 \sqrt{x+1}. \log_2 \sqrt[4]{4} > \frac{1}{2}$$

Điều kiện $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$\text{Ta có } \log_2(x+1).2\log_2 \sqrt{x+1}. \log_2 \sqrt[4]{4} > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1). \frac{1}{2}. \log_2(x-1) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\log_2(x-1))^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) > 1 \\ \log_2(x-1) < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} x > 3 \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$

$$(6) \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x > \frac{2}{3}$$

Điều kiện $x > 0$.

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x > \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{3} \log_3 x \cdot \frac{1}{4} \log_3 x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 2 \\ \log_3 x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < \frac{1}{9} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} x > 9 \\ 0 < x < \frac{1}{9} \end{cases}$

$$(7) \log_3 x + \log_3 (x+2) > \log_3 3^9$$

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Ta có : $\log_3 x + \log_3 (x+2) > \log_3 3^9$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x(x+2)) > \log_3 3^9 \Leftrightarrow x(x+2) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 - \sqrt{10} \\ x > -1 + \sqrt{10} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x > -1 + \sqrt{10}$

$$(8) \log_2 (x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x < 2$$

Điều kiện $x > 3$.

Ta có $\log_2 (x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x < 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x-3) + \log_2 x < 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [(x-3)x] < 2 \Leftrightarrow (x-3)x < 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

Kết hợp điều kiện ta được $3 < x < 4$

$$(9) \log_2 (2x-3) - \log_4 \left(x - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$$

Điều kiện: $x > \frac{3}{2}$.

Ta có $\log_2 (2x-3) - \log_4 \left(x - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x-3) > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x-3)^2 > \log_2 2 + \log_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x-3)^2 > \log_2 (2x-1) \Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{5}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x > \frac{5}{2}$

(10) $\log_{\sqrt{6}}(x-1) + 2\log_6(x-2) > 3^{\log_3 2}$

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Ta có $\log_{\sqrt{6}}(x-1) + 2\log_6(x-2) > 3^{\log_3 2}$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{6}}(x-1) + \frac{1}{2} \log_6(x-2) > 3^{\log_3 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{6}}(x-1) + \log_{\sqrt{6}}(x-2) > 3^{\log_3 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{6}}(x-1)(x-2) > 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x > 4$

Câu 45. Giải các bất phương trình sau:

(1) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3 \leq 0$

(3) $4^{x+1} + 10 \cdot 2^x - 6 < 0$

(4) $4^x - 8 \cdot 6^x + 12 \cdot 9^x < 0$

(5) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

(6) $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 \leq 0$

(7) $5^x + 5^{2-x} - 26 \leq 0$

(8) $2^x \geq 3 - \frac{2}{2^x}$

(9) $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 2 \leq 0$

(10) $\left(\frac{e^2}{4}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^{-x} + 8 \leq 0$

Lời giải

(1) $\ln^2 x + 2 \ln x - 3 < 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\ln^2 x + 2 \ln x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < \ln x < 1 \Leftrightarrow e^{-3} < x < e \Leftrightarrow \frac{1}{e^3} < x < e$.

Kết hợp điều kiện ta được $\frac{1}{e^3} < x < e$

(2) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \leq 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 6 \leq 0$

$$\xrightarrow{t=\log_{0,2} x} t^2 - t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3 \Rightarrow -2 \leq \log_{0,2} x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} \leq x \leq 25$$

Kết hợp điều kiện ta được $\frac{1}{125} \leq x \leq 25$

(3) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \geq 0$.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 3 \\ \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ x \leq 2 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} x \geq 8 \\ 0 < x \leq 2 \end{cases}$

(4) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases}$

(5) $\log_{\frac{1}{5}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{5}} x - 3 > 0$

Ta có $\log_{\frac{1}{5}}^2 x - 2\log_{\frac{1}{5}} x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{5}} x < -1 \\ \log_{\frac{1}{5}} x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 0 < x < \frac{1}{125} \end{cases}$.

(6) $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow 2^{-1} \leq x \leq 2^6$.

Kết hợp điều kiện ta được $2^{-1} \leq x \leq 2^6$

(7) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases}$

(8) $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0$

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$.

Kết hợp với điều kiện ta được $\frac{1}{2} \leq x \leq 64$.

(9) $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x - 5 \geq 0$

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log_2^2(2x) - 5\log_2 x - 5 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 5\log_2 x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 16 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 16 \end{cases}$

(10) $\log_3^2(3x) - 5\log_3 x - 5 \leq 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_3^2(3x) - 5\log_3 x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow (1 + \log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 5 \leq 0$.

$$\xrightarrow{t = \log_3 x} (1 + t)^2 - 5t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 4 \Rightarrow -1 \leq \log_3 x \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 81.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\frac{1}{3} \leq x \leq 81$

Câu 46. Giải các bất phương trình sau:

(1) $\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9$

(2) $\log_{2018} x \leq \log_x 2018$

(3) $(\log_2 4x - 5)\log_2 x > 2$

(4) $\log_2^2 x - 8\log_2 \sqrt{x} + 3 < 0$

Lời giải

(1) $\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9$

Ta có $\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (\log_2 x + 1)^2 + (\log_2 x - 2) < 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x + 3\log_2 x - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -5 < \log_2 x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{32} < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{32} < x < 4.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\frac{1}{32} < x < 4$

(2) $\log_{2018} x \leq \log_x 2018$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có $\log_{2018} x \leq \log_x 2018 \Leftrightarrow \log_{2018} x \leq \frac{1}{\log_{2018} x}$

$$\xrightarrow{t=\log_{2018} x, t \neq 0} t \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{t^2-1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 1 \\ t \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \log_{2018} x \leq 1 \\ \log_{2018} x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2018 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2018} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} 1 < x \leq 2018 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2018} \end{cases}$

(3) $(\log_2 4x-5)\log_2 x > 2$

Điều kiện: $\begin{cases} \log_2 4x-5 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8$

Ta có $(\log_2 4x-5)\log_2 x > 2$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x-3)\log_2 x-2 > 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2-3\log_2 x-2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > 2 \\ \log_2 x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $\begin{cases} x \geq 8 \\ 0 < x \leq 2 \end{cases}$

(4) $\log_2^2 x - 8\log_2 \sqrt{x} + 3 < 0$

Điều kiện $x > 0$.

Ta có $\log_2^2 x - 8\log_2 \sqrt{x} + 3 < 0$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 8\log_2 x^{\frac{1}{2}} + 3 < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < \log_2 x < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8.$$

Kết hợp điều kiện ta được $2 < x < 8$

-----Hết-----