

# MỤC LỤC

|                                                      |                                                                        |    |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----|
| PHẦN I ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH                            |                                                                        | 13 |
| CHƯƠNG 1 Hàm số lượng giác - Phương trình lượng giác |                                                                        | 15 |
| 1                                                    | Công thức lượng giác cần nắm                                           | 15 |
| A                                                    | Tóm tắt lý thuyết                                                      | 15 |
| 2                                                    | Hàm số lượng giác                                                      | 18 |
| A                                                    | Tóm tắt lý thuyết                                                      | 18 |
| B                                                    | Các dạng toán thường gặp                                               | 20 |
|                                                      | Dạng 2.1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác                       | 20 |
| 1                                                    | Bài tập vận dụng                                                       | 21 |
| 2                                                    | Bài tập tự luyện                                                       | 22 |
|                                                      | Dạng 2.2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác | 23 |
| 1                                                    | Ví dụ                                                                  | 23 |
| 2                                                    | Bài tập áp dụng                                                        | 24 |
| 3                                                    | Bài tập rèn luyện                                                      | 27 |
|                                                      | Dạng 2.3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác                       | 28 |
| 1                                                    | Ví dụ                                                                  | 28 |
| 2                                                    | Bài tập áp dụng                                                        | 29 |
| 3                                                    | Bài tập rèn luyện                                                      | 29 |
| CHƯƠNG 2 Hàm số lượng giác - phương trình lượng giác |                                                                        | 31 |
| 1                                                    | Phương trình lượng giác                                                | 31 |
| A                                                    | Phương trình lượng giác cơ bản                                         | 31 |
| 1                                                    | Ví dụ                                                                  | 31 |
| 2                                                    | Bài tập áp dụng                                                        | 32 |
| 3                                                    | Bài tập rèn luyện                                                      | 32 |

|   |                                                                    |    |
|---|--------------------------------------------------------------------|----|
| B | Một số kỹ năng giải phương trình lượng giác                        | 33 |
|   | Dạng 1.1. Sử dụng thành thạo cung liên kết                         | 33 |
| 1 | Ví dụ                                                              | 33 |
| 2 | Bài tập áp dụng                                                    | 34 |
| 3 | Bài tập rèn luyện                                                  | 38 |
|   | Dạng 1.2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng | 39 |
| 1 | Ví dụ                                                              | 39 |
| 2 | Bài tập áp dụng                                                    | 40 |
| 3 | Bài tập rèn luyện                                                  | 42 |
|   | Dạng 1.3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của $\sin$ và $\cos$             | 43 |
| 1 | Ví dụ                                                              | 43 |
| 2 | Bài tập áp dụng                                                    | 44 |
| 3 | Bài tập rèn luyện                                                  | 45 |
|   | Dạng 1.4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích       | 46 |
| 1 | Ví dụ                                                              | 46 |
| 2 | Bài tập áp dụng                                                    | 47 |
| 3 | Bài tập rèn luyện                                                  | 49 |

### **CHƯƠNG 3 Hàm số lượng giác - phương trình lượng giác** **69**

|   |                                                                           |    |
|---|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Phương trình lượng giác đưa về bậc hai và bậc cao cùng một hàm lượng giác | 69 |
|   | A Tóm tắt lý thuyết                                                       | 69 |
|   | B Dạng toán và bài tập                                                    | 69 |
| 1 | Ví dụ                                                                     | 69 |
| 2 | Bài tập vận dụng                                                          | 71 |
| 3 | Bài tập tự luyện                                                          | 79 |
| 2 | Phương trình bậc nhất đối với $\sin$ và $\cos$                            | 81 |
|   | A Tóm tắt lý thuyết                                                       | 81 |
|   | B Ví dụ và bài tập                                                        | 82 |
| 1 | Ví dụ                                                                     | 82 |

|                                    |                                                        |            |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------|
| 2                                  | Bài tập áp dụng                                        | 86         |
| 3                                  | Bài tập rèn luyện                                      | 90         |
| 3                                  | Phương trình lượng giác đẳng cấp (bậc 2, bậc 3, bậc 4) | 91         |
| A                                  | Tóm tắt lý thuyết                                      | 91         |
| B                                  | Ví dụ                                                  | 92         |
| C                                  | Bài tập áp dụng                                        | 93         |
| 4                                  | Phương trình lượng giác đối xứng                       | 99         |
| A                                  | Tóm tắt lý thuyết                                      | 99         |
| B                                  | Ví dụ                                                  | 99         |
| C                                  | Bài tập áp dụng                                        | 100        |
| D                                  | Bài tập rèn luyện                                      | 105        |
| 5                                  | Một số phương trình lượng giác khác                    | 105        |
| A                                  | Tóm tắt lý thuyết                                      | 105        |
| B                                  | Ví dụ                                                  | 106        |
| C                                  | Bài tập áp dụng                                        | 107        |
| D                                  | Bài tập rèn luyện                                      | 111        |
| 6                                  | Phương trình lượng giác có cách giải đặc biệt          | 111        |
| A                                  | Tóm tắt lý thuyết                                      | 111        |
| B                                  | Ví dụ                                                  | 112        |
| C                                  | Bài tập áp dụng                                        | 114        |
| D                                  | Bài tập rèn luyện                                      | 118        |
| 7                                  | Bài tập ôn cuối chương I                               | 119        |
| <b>CHƯƠNG 4 Tổ hợp và xác suất</b> |                                                        | <b>131</b> |
| 1                                  | Các quy tắc đếm cơ bản                                 | 131        |
| A                                  | Tóm tắt lý thuyết                                      | 131        |
| B                                  | Dạng toán và bài tập                                   | 132        |
| 1                                  | Ví dụ                                                  | 132        |

|                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------|-----|
| Dạng 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc cộng                        | 132 |
| Dạng 1.2. Bài toán sử dụng quy tắc nhân                        | 132 |
| Dạng 1.3. Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ                      | 133 |
| 1 Bài tập áp dụng                                              | 134 |
| 2 Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp                                 | 145 |
| A Tóm tắt lý thuyết                                            | 145 |
| B Ví dụ minh họa                                               | 146 |
| C Dạng toán và bài tập                                         | 148 |
| Dạng 2.1. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình | 148 |
| 1 Ví dụ                                                        | 148 |
| 2 Bài tập áp dụng                                              | 151 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                            | 153 |
| Dạng 2.2. Các bài toán sử dụng hoán vị                         | 154 |
| 1 Ví dụ                                                        | 154 |
| 2 Bài tập áp dụng                                              | 156 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                            | 157 |
| Dạng 2.3. Các bài toán sử dụng chỉnh hợp                       | 158 |
| 1 Ví dụ                                                        | 158 |
| 2 Bài tập áp dụng                                              | 160 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                            | 161 |
| Dạng 2.4. Các bài toán sử dụng tổ hợp                          | 162 |
| 1 Ví dụ                                                        | 162 |
| 2 Bài tập áp dụng                                              | 164 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                            | 165 |
| 3 Nhị thức Newton                                              | 167 |
| A Nhị thức Newton                                              | 167 |
| B Tam giác Pascal                                              | 167 |
| C Dạng toán và bài tập                                         | 168 |

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| Dạng 3.1. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước     | 168 |
| 1 Ví dụ minh họa                                                  | 168 |
| 2 Bài tập áp dụng                                                 | 170 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                               | 172 |
| Dạng 3.2. Tìm hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn $(a + b)^n$ | 173 |
| 1 Ví dụ                                                           | 173 |
| 2 Bài tập áp dụng                                                 | 175 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                               | 178 |
| Dạng 3.3. Chứng minh hoặc tính tổng                               | 181 |
| 1 Ví dụ                                                           | 181 |
| 2 Bài tập áp dụng                                                 | 183 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                               | 184 |
| 4 Biến cố và xác suất của biến cố                                 | 185 |
| A Phép thử                                                        | 185 |
| B Biến cố                                                         | 185 |
| C Xác suất                                                        | 186 |
| Dạng 4.1. Chọn hoặc sắp xếp đồ vật                                | 188 |
| D Lí thuyết                                                       | 188 |
| E Ví dụ                                                           | 188 |
| F Bài tập rèn luyện                                               | 190 |
| G Bài tập tự luyện                                                | 192 |
| Dạng 4.2. Chọn hoặc sắp xếp người                                 | 194 |
| H Lí thuyết                                                       | 195 |
| I Ví dụ                                                           | 195 |
| J Bài tập rèn luyện                                               | 196 |
| K Bài tập tự luyện                                                | 199 |
| Dạng 4.3. Chọn hoặc sắp xếp số                                    | 203 |
| L Lí thuyết                                                       | 203 |

|   |                           |     |
|---|---------------------------|-----|
| M | Ví dụ                     | 204 |
| N | Bài tập rèn luyện         | 206 |
| O | Bài tập tự luyện          | 209 |
| 5 | Các quy tắc tính xác suất | 215 |
| A | Tóm tắt lý thuyết         | 215 |
| 1 | Quy tắc cộng xác suất     | 215 |
| 2 | Quy tắc nhân xác suất     | 217 |
| B | Bài tập áp dụng           | 218 |
| 6 | Bài tập ôn chương 2       | 225 |

## **CHƯƠNG 5** Dãy số - Cấp số cộng - Cấp số nhân **233**

|   |                                                                  |     |
|---|------------------------------------------------------------------|-----|
| 1 | Phương pháp quy nạp toán học                                     | 233 |
| A | Tóm tắt lý thuyết                                                | 233 |
| B | Dạng toán và bài tập                                             | 233 |
|   | Dạng 1.1. Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n$ | 233 |
| 1 | Ví dụ                                                            | 233 |
| 2 | Bài tập áp dụng                                                  | 235 |
| 3 | Bài tập rèn luyện                                                | 239 |
| 2 | Dãy số                                                           | 244 |
| A | Tóm tắt lý thuyết                                                | 244 |
| 1 | Định nghĩa                                                       | 244 |
| 2 | Cách cho một dãy số                                              | 244 |
| 3 | Dãy số tăng, dãy số giảm                                         | 244 |
| 4 | Dãy số bị chặn                                                   | 244 |
| B | Dạng toán và bài tập                                             | 245 |
|   | Dạng 2.1. Tìm số hạng của dãy số cho trước                       | 245 |
| 1 | Ví dụ                                                            | 245 |
| 2 | Bài tập áp dụng                                                  | 246 |
| 3 | Bài tập rèn luyện                                                | 248 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| Dạng 2.2. Xét tính tăng, giảm của dãy số | 249 |
| 1 Ví dụ                                  | 249 |
| 2 Bài tập áp dụng                        | 250 |
| 3 Bài tập rèn luyện                      | 252 |
| Dạng 2.3. Tính bị chặn của dãy số        | 255 |
| 1 Ví dụ                                  | 255 |
| 2 Bài tập áp dụng                        | 256 |
| 3 Bài tập rèn luyện                      | 257 |
| 3 Cấp số cộng                            | 259 |
| A Tóm tắt lý thuyết                      | 259 |
| B Dạng toán và bài tập                   | 260 |
| 1 Ví dụ                                  | 260 |
| 2 Bài tập áp dụng                        | 262 |
| 4 Cấp số nhân                            | 279 |
| A Tóm tắt lý thuyết                      | 279 |
| B Dạng toán và bài tập                   | 279 |
| 1 Ví dụ                                  | 279 |
| 2 Bài tập áp dụng                        | 281 |
| 3 Bài tập rèn luyện                      | 285 |

## PHẦN II HÌNH HỌC

289

### CHƯƠNG 1 Phép biến hình

291

#### 1 Mở đầu về phép biến hình

291

##### A Tóm tắt lý thuyết

291

#### 2 Phép tịnh tiến

291

##### A Tóm tắt lý thuyết

291

##### B Dạng toán và bài tập

292

|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| Dạng 2.1. Xác định ảnh của một hình qua phép tịnh tiến          | 292 |
| 1 Ví dụ                                                         | 292 |
| 2 Bài tập áp dụng                                               | 293 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                             | 295 |
| Dạng 2.2. Xác định phép tịnh tiến khi biết ảnh và tạo ảnh       | 295 |
| 1 Ví dụ                                                         | 295 |
| 2 Bài tập áp dụng                                               | 296 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                             | 297 |
| Dạng 2.3. Các bài toán ứng dụng của phép tịnh tiến              | 297 |
| 1 Ví dụ                                                         | 298 |
| 2 Bài tập áp dụng                                               | 298 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                             | 299 |
| 3 Phép đối xứng trục (Bài đọc thêm)                             | 299 |
| A Định nghĩa                                                    | 299 |
| B Biểu thức tọa độ                                              | 299 |
| C Tính chất                                                     | 300 |
| D Trục đối xứng của một hình                                    | 300 |
| 4 Phép quay                                                     | 300 |
| A Tóm tắt lý thuyết                                             | 300 |
| B Dạng toán và bài tập                                          | 301 |
| Dạng 4.1. Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép quay             | 301 |
| 1 Ví dụ                                                         | 301 |
| 2 Bài tập áp dụng                                               | 301 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                             | 302 |
| Dạng 4.2. Tìm phương trình ảnh của một đường tròn qua phép quay | 302 |
| 1 Ví dụ                                                         | 302 |
| 2 Bài tập áp dụng                                               | 303 |
| 3 Bài tập rèn luyện                                             | 303 |

|                                                           |                                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5                                                         | Phép đối xứng tâm                                                         | 307        |
| A                                                         | Tóm tắt lý thuyết                                                         | 307        |
| 6                                                         | Phép vị tự và phép đồng dạng                                              | 308        |
| A                                                         | Tóm tắt lý thuyết                                                         | 308        |
| B                                                         | Dạng toán và bài tập                                                      | 310        |
|                                                           | Dạng 6.1. Phép vị tự trong hệ tọa độ $Oxy$                                | 310        |
| 1                                                         | Ví dụ                                                                     | 310        |
| 2                                                         | Bài tập áp dụng                                                           | 311        |
| <b>CHƯƠNG 2 Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian</b> |                                                                           | <b>315</b> |
| 1                                                         | Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng                                     | 315        |
| A                                                         | Tóm tắt lý thuyết                                                         | 315        |
| B                                                         | Dạng toán và bài tập                                                      | 317        |
|                                                           | Dạng 1.1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng                           | 317        |
| 1                                                         | Ví dụ                                                                     | 317        |
| 2                                                         | Bài tập áp dụng                                                           | 318        |
| 3                                                         | Bài tập tự luyện                                                          | 320        |
|                                                           | Dạng 1.2. Tìm giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$       | 321        |
| 1                                                         | Ví dụ                                                                     | 321        |
| 2                                                         | Bài tập áp dụng                                                           | 322        |
| 3                                                         | Bài tập rèn luyện                                                         | 328        |
|                                                           | Dạng 1.3. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $(\alpha)$ . | 329        |
| 1                                                         | Ví dụ                                                                     | 329        |
| 2                                                         | Bài tập áp dụng                                                           | 330        |
| 3                                                         | Bài tập tự luyện                                                          | 335        |
|                                                           | Dạng 1.4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng                                   | 335        |
| 1                                                         | Ví dụ                                                                     | 336        |
| 2                                                         | Bài tập áp dụng                                                           | 337        |
| 3                                                         | Bài tập rèn luyện                                                         | 342        |

|                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Dạng 1.5. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy                                  | 346        |
| 1 Ví dụ                                                                       | 346        |
| 2 Bài tập áp dụng                                                             | 346        |
| 3 Bài tập rèn luyện                                                           | 350        |
| <b>CHƯƠNG 3 Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song.</b> | <b>351</b> |
| 1 Hai đường thẳng song song.                                                  | 351        |
| A Tóm tắt lý thuyết                                                           | 351        |
| B Dạng toán và bài tập                                                        | 352        |
| Dạng 1.1. Chứng minh hai đường thẳng song song.                               | 352        |
| 1 Ví dụ                                                                       | 352        |
| 2 Bài tập áp dụng                                                             | 353        |
| 3 Bài tập rèn luyện                                                           | 354        |
| Dạng 1.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.    | 355        |
| 1 Ví dụ                                                                       | 355        |
| 2 Bài tập áp dụng                                                             | 357        |
| 3 Bài tập rèn luyện                                                           | 360        |
| 2 Đường thẳng song song với mặt phẳng                                         | 363        |
| A Tóm tắt lý thuyết                                                           | 363        |
| B Dạng toán và bài tập                                                        | 364        |
| Dạng 2.1. Chứng minh đường thẳng $a$ song song với mặt phẳng $(P)$            | 364        |
| 1 Ví dụ                                                                       | 364        |
| Dạng 2.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng                                    | 365        |
| Dạng 2.3. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng                        | 366        |
| 1 Bài tập áp dụng                                                             | 366        |
| 3 Hai mặt phẳng song song                                                     | 392        |
| A Tóm tắt lý thuyết                                                           | 392        |
| 1 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt                                | 392        |
| 2 Các định lý                                                                 | 392        |

|   |                          |     |
|---|--------------------------|-----|
| 3 | Ví dụ                    | 393 |
| B | Bài tập áp dụng          | 394 |
| 4 | Bài tập ôn cuối chương 2 | 402 |

---



PHẦN



---

# ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

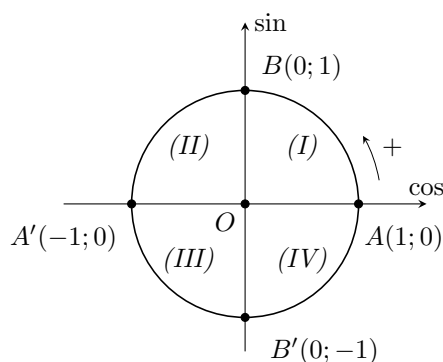


# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NHỚ

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



| Giá trị lượng giác | Góc phần tư |    |     |    |
|--------------------|-------------|----|-----|----|
|                    | I           | II | III | IV |
| $\sin \alpha$      | +           | +  | -   | -  |
| $\cos \alpha$      | +           | -  | -   | +  |
| $\tan \alpha$      | +           | -  | +   | -  |
| $\cot \alpha$      | +           | -  | +   | -  |

② Công thức lượng giác cơ bản

|                           |                                     |                                     |                     |
|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------|
| $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ | $\tan x \cot x = 1$ |
|---------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------------|

③ Cung góc liên kết

| Cung đối nhau                  | Cung bù nhau                        | Cung hơn kém $\pi$                  |
|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  | $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$  |
| $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$  |

| Cung phụ nhau                                           | Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$                             |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ |
| $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  |
| $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ |
| $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |

④ Công thức cộng

|                                                                      |                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$                          | $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$                          |
| $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$                          | $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$                          |
| $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$              | $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$              |
| $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ | $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ |

⑤ Công thức nhân đôi, công thức hạ bậc

| Công thức nhân đôi                                                                                   | Công thức hạ bậc                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$                                                           | $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$                               |
| $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$           | $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$                               |
| $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$                                             | $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$                |
| $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$                                             | $\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$                |
| Công thức nhân 3                                                                                     |                                                                            |
| $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$<br>$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ | $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ |

⑥ Công thức biến đổi tổng thành tích

|                                                             |                                                              |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ | $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ |
| $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ | $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$  |
| $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$         | $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$          |
| $\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$         | $\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$          |

**Đặt biệt**

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

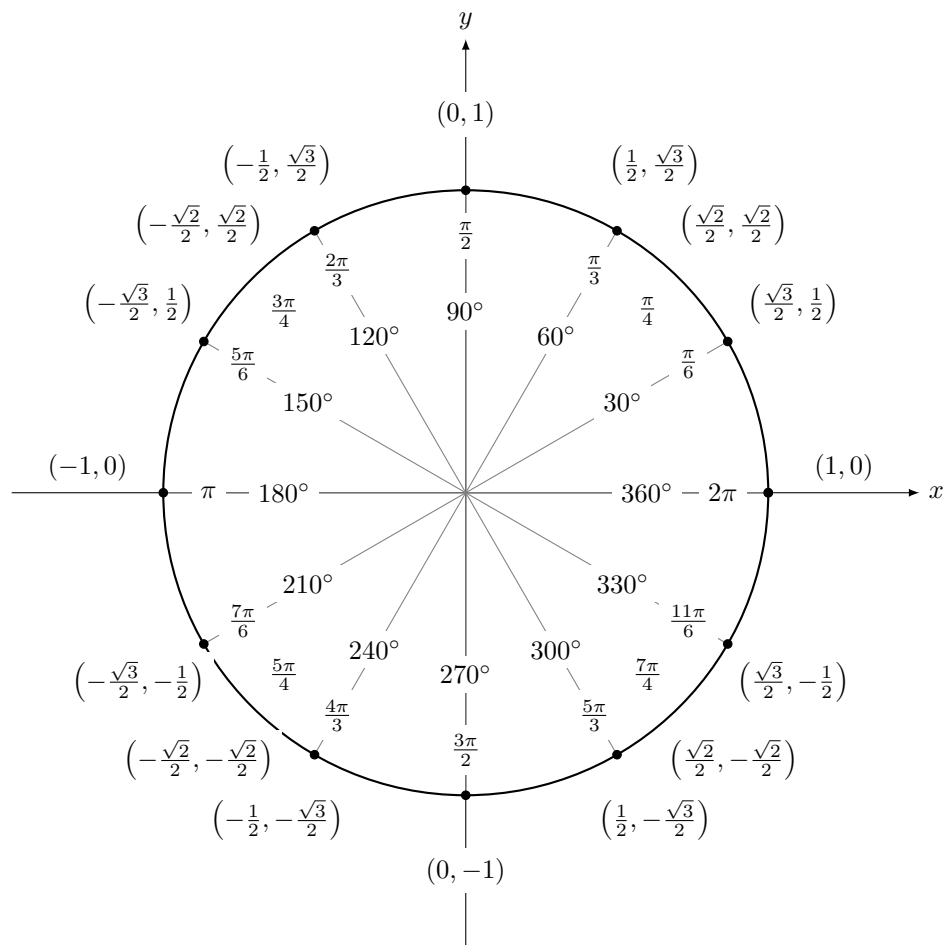
⑦ Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \end{aligned}$$

**Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt**

| độ            | 0°  | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 120°                  | 135°                  | 150°                  | 180°  | 360°   |
|---------------|-----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|--------|
| rad           | 0   | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$      | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$ | $2\pi$ |
| $\sin \alpha$ | 0   | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0     | 0      |
| $\cos \alpha$ | 1   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1    | 1      |
| $\tan \alpha$ | 0   | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | kxd             | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0     | 0      |
| $\cot \alpha$ | kxd | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1                    | $-\sqrt{3}$           | kxd   | kxd    |

Một điểm  $M$  thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ  $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$



## BÀI 2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### ① Tính chất của hàm số

##### a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $\mathcal{D}$  gọi là hàm số chẵn nếu với mọi  $x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = f(x)$ . Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Hàm số  $y = f(x)$  có tập xác định là  $\mathcal{D}$  gọi là hàm số lẻ nếu với mọi  $x \in \mathcal{D}$  thì  $-x \in \mathcal{D}$  và  $f(-x) = -f(x)$ . Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ  $O$  làm tâm đối xứng.

##### b) Hàm số đơn điệu

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $(a; b) \subset \mathbb{R}$ .

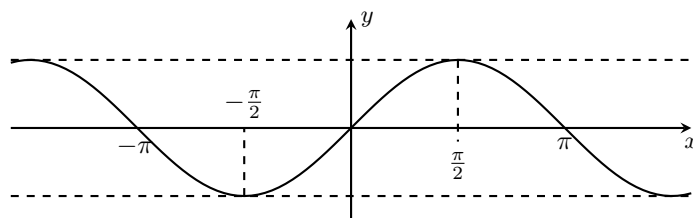
- Hàm số  $y = f(x)$  gọi là đồng biến trên  $(a; b)$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$  có  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  gọi là nghịch biến trên  $(a; b)$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$  có  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

##### c) Hàm số tuần hoàn

- Hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $\mathcal{D}$ , được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số  $T \neq 0$  sao cho với mọi  $x \in \mathcal{D}$  ta có  $(x + T) \in \mathcal{D}$  và  $(x - T) \in \mathcal{D}$  và  $f(x + T) = f(x)$ .
- Nếu có số dương  $T$  nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì  $T$  gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn  $f$ .

#### ② Hàm số $y = \sin x$

- Hàm số  $y = \sin x$  có tập xác định là  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \sin[f(x)]$  xác định  $\Leftrightarrow f(x)$  xác định.
- Tập giá trị  $T = [-1; 1]$ , nghĩa là  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{cases}$
- Hàm số  $y = f(x) = \sin x$  là hàm số lẻ vì  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ . Nên đồ thị hàm số  $y = \sin x$  nhận gốc tọa độ  $O$  làm tâm đối xứng.
- Hàm số  $y = \sin x$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = 2\pi$ , nghĩa là  $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ . Hàm số  $y = \sin(ax + b)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$ .
- Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$  và nghịch biến trên mỗi khoảng  $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = \sin x$  nhận các giá trị đặc biệt  $\begin{cases} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$
- Đồ thị hàm số

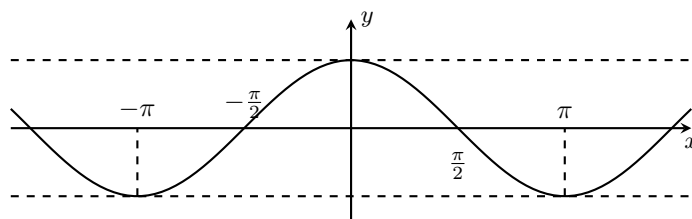


#### ③ Hàm số $y = \cos x$

- Hàm số  $y = \cos x$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \cos[f(x)]$  xác định  $\Leftrightarrow f(x)$  xác định.
- Tập giá trị  $T = [-1; 1]$ , nghĩa là  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$

- Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn vì  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$  nên đồ thị của hàm số nhận trục tung  $Oy$  làm trục đối xứng.
- Hàm số  $y = \cos x$  tuần hoàn với chu kì  $T_0 = 2\pi$ , nghĩa là  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ . Hàm số  $y = \cos(ax + b)$  tuần hoàn với chu kì  $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$ .
- Hàm số  $y = \cos x$  đồng biến trên các khoảng  $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  và nghịch biến trên các khoảng  $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = \cos x$  nhận các giá trị đặc biệt
 

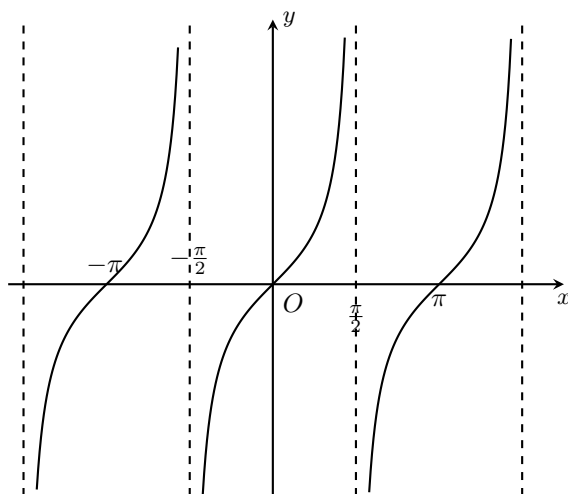
|   |                                                                      |
|---|----------------------------------------------------------------------|
| ○ | $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$                               |
| ○ | $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ . |
| ○ | $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$                |
- Đồ thị hàm số



④ Hàm số  $y = \tan x$

- Hàm số  $y = \tan x$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ , nghĩa là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$  hàm số  $y = \tan[f(x)]$  xác định  $\Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ; ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- Tập giá trị  $T = \mathbb{R}$ .
- Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số lẻ vì  $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$  nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .
- Hàm số  $y = \tan x$  tuần hoàn với chu kì  $T_0 = \pi \Rightarrow y = \tan(ax + b)$  tuần hoàn với chu kì  $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$ .
- Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên các khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = \tan x$  nhận các giá trị đặc biệt
 

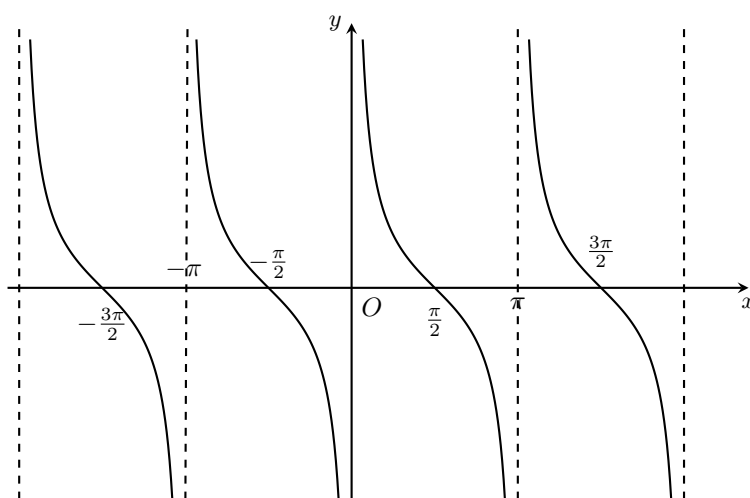
|   |                                                                                |
|---|--------------------------------------------------------------------------------|
| ○ | $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$                          |
| ○ | $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ . |
| ○ | $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$                                          |
- Đồ thị hàm số



⑤ Hàm số  $y = \cot x$

- Hàm số  $y = y = \cot x$  có tập xác định  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , nghĩa là  $x \neq k\pi \Rightarrow$  hàm số  $y = \cot[f(x)]$  xác định  $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ .
- Tập giá trị  $T = \mathbb{R}$ .
- Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ vì  $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$  nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ  $O$ .
- Hàm số  $y = y = \cot x$  tuần hoàn với chu kì  $T_0 = \pi \Rightarrow y = \cot(ax + b)$  tuần hoàn với chu kì  $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$ .
- Hàm số  $y = y = \cot x$  nghịch biến trên các khoảng  $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$ .
- Hàm số  $y = y = \cot x$  nhận các giá trị đặc biệt
 

|                                                                                                                                                                                          |                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\circ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$<br>$\circ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$<br>$\circ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}k\pi$ | $, k \in \mathbb{Z}.$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
- Đồ thị hàm số



## B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### DẠNG 2.1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

**Phương pháp giải:** Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:

- ①  $y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$ ; Điều kiện xác định:  $\cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .
- ②  $y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$ ; Điều kiện xác định:  $\sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .
- ③ Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:
  - $y = \frac{1}{P(x)}$ , điều kiện xác định là  $P(x) \neq 0$ .
  - $y = \sqrt[n]{P(x)}$ , điều kiện xác định là  $P(x) \geq 0$ .
  - $y = \frac{1}{\sqrt[n]{P(x)}}$ , điều kiện xác định là  $P(x) > 0$ .
- ④ Lưu ý rằng:  $-1 \leq \sin f(x); \cos f(x) \leq 1$  và  $A \cdot B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0. \end{cases}$
- ⑤ Với  $k \in \mathbb{Z}$ , ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

$$\begin{array}{ll} \text{---} \begin{cases} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} & \text{---} \begin{cases} \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \\ \text{---} \begin{cases} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases} & \text{---} \begin{cases} \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{array}$$

**VÍ DỤ 1.** Tìm tập xác định của hàm số:  $y = f(x) = \frac{\sin 3x}{\tan^2 x - 1} + \sqrt{\frac{2 - \cos x}{1 + \cos x}}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của hàm số: 
$$\begin{cases} \tan^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \frac{2 - \cos x}{1 + \cos x} \geq 0 \\ \cos x \neq -1. \end{cases}$$

Do  $-1 \leq \cos x \leq 1$  nên  $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 2 - \cos x \leq 3 \\ 0 \leq 1 + \cos x \leq 2 \end{cases}$ . Từ đó suy ra:  $\frac{2 - \cos x}{1 + \cos x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy hàm số xác định khi và chỉ khi  $\begin{cases} x \neq \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi. \end{cases}$ , nên  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + k2\pi \right\}$ . □

**VÍ DỤ 2.** Tìm tập xác định của hàm số:  $y = f(x) = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos x}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định của hàm số:  $\begin{cases} 4\pi^2 - x^2 \geq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\pi \leq x \leq 2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$  Vậy  $\mathcal{D} = \left\{ -2\pi \leq x \leq 2\pi; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ .

□

## 1 BÀI TẬP VẬN DỤNG

**BÀI 1.** Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

①  $y = \cos \frac{4}{x}$ .

②  $y = \cos \sqrt{2x}$ .

③  $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ .

④  $y = \frac{\tan 2x}{1 + \cos^2 x}$ .

⑤  $y = \frac{\tan 2x}{\sin x - 1}$ .

⑥  $y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$ .

⑦  $y = \sqrt{\frac{\cos x - 2}{1 - \sin x}}$ .

**Lời giải.**

① Điều kiện xác định:  $x \neq 0$ .

② Điều kiện xác định:  $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ .

③ Điều kiện xác định:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ .

④ Điều kiện xác định:  $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ .

⑤ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{cases}$

⑥ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \frac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \geq 0 \\ \sin x + 1 \neq 0. \end{cases}$

Do  $-1 \leq \sin x$ ;  $\cos x \leq 1$  nên  $\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1} \geq 0$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy hàm số xác định khi  $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

⑦ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \frac{\cos x - 2}{1 - \sin x} \geq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0. \end{cases}$

Do  $-1 \leq \sin x$ ;  $\cos x \leq 1$  nên  $\frac{\cos x - 2}{1 - \sin x} \leq 0$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là:  $\emptyset$ .

□

**BÀI 2.** Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

①  $y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}$ ..

②  $y = \sqrt{\pi^2 - 4x^2} + \tan 2x$ ..

③  $\frac{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}}$ ..

④  $y = \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$ ..

**Lời giải.**

① Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi \leq x \leq \pi \\ x \neq \frac{k\pi}{2}. \end{cases}$

② Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \pi^2 - 4x^2 \geq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}. \end{cases}$

③ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{5\pi}{8} + k2\pi. \end{cases}$

④ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi. \end{cases}$

□



## **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**BÀI 3.** Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

①  $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{\cos x + 1}}$ .

②  $y = \frac{\cot 2x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ .

③  $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$ .

④  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ .

⑤  $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x} + \tan x$ .

⑥  $y = \frac{x^2 + 1}{x \cos x}$ .

⑦  $y = \frac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x + 1}}$ .

**BÀI 4.** Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

①  $y = \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x - 2} \dots$

②  $y = \frac{\sqrt{3 - \sin 4x}}{\cos x + 1} \dots$

③  $y = \frac{3}{\cos x - \cos 3x} \dots$

④  $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan 2x \dots$

⑤  $y = \sqrt{2 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1} \dots$

⑥  $y = \frac{4}{\sin^2 x - \cos^2 x} \dots$

⑦  $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \dots$

⑧  $y = \frac{1 + \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{\tan^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} \dots$

**DẠNG 2.2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác**

*Phương pháp giải:*

— Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn

○  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{cases} \text{ hoặc } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1. \end{cases}$

○ Biến đổi đưa về dạng  $m \leq y \leq M$ .

— Kết luận:  $\max y = M$  và  $\min y = m$ .

**1** **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{5 - 2 \cos^2 x \sin^2 x}}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{5 - 2 \cos^2 x \sin^2 x}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2} (2 \cos x \sin x)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}}.$$

Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$  nên  $5 \geq 5 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \geq \frac{9}{2}$ . Suy ra  $\frac{4\sqrt{5}}{5} \leq y = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2} \sin^2 2x}} \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$ .

○  $y = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  khi  $\sin 2x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

○  $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$  khi  $\sin 2x = 1$  hoặc  $\sin 2x = -1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Vậy  $\min y = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  và  $\max y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ . □

**VÍ DỤ 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $f(x) = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 4 \cos 2x - 2$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 4 \cos 2x - 2 \\ &= 3 (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x - 4 (2 \cos^2 x - 1) - 2 \\ &= 5 - 6 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Do  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$  nên  $5 \geq f(x) = 5 - 6 \cos^2 x \geq -1$ .

○  $f(x) = 5$  khi  $\cos x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{2}$ .

○  $f(x) = -1$  khi  $\cos^2 x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

Vậy  $\max f(x) = 5$  và  $\min f(x) = -1$ . □

**VÍ DỤ 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 2, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + \cos^6 x + 2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 + 2 = 3 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$  nên  $3 \geq f(x) \geq \frac{9}{4}$ .

○  $f(x) = 3$  khi  $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2}$  hoặc  $x = 0$  (do  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ).

○  $f(x) = \frac{9}{4}$  khi  $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$  (do  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ).

Vậy  $\max f(x) = 3$  và  $\min f(x) = \frac{9}{4}$ . □



## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

①  $y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4$

②  $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$

③  $y = 3\sin^2 2x - 4$

④  $y = 4 - 5\sin^2 2x \cos^2 2x$

⑤  $y = 3 - 2|\sin 4x|$

**Lời giải.**

① Do  $-1 \leq \cos 2x \leq 1$  nên  $2 \leq 3 + \cos 2x \leq 4$ . Suy ra  $5\sqrt{2} + 4 \leq y = 5\sqrt{3 + \cos 2x} + 4 \leq 14$ .

○  $y = 5\sqrt{2} + 4$  khi  $\cos 2x = -1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{2}$ .

○  $y = 14$  khi  $\cos 2x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

Vậy  $\min y = 5\sqrt{2} + 4$  và  $\max y = 14$ .

② Do  $-1 \leq \cos 4x \leq 1$  nên  $\sqrt{2} \geq y = \sqrt{1 - \cos 4x} \geq 0$ .

○  $y = \sqrt{2}$  khi  $\cos 4x = -1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{4}$ .

○  $y = 0$  khi  $\cos 4x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

Vậy  $\max y = \sqrt{2}$  và  $\min y = 0$ .

③ Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$  nên  $-4 \leq y = 3\sin^2 2x - 4 \leq -1$ .

○  $y = -4$  khi  $\sin 2x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

○  $y = -1$  khi  $\sin^2 2x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Vậy  $\min y = -4$  và  $\max y = -1$ .

④ Ta có

$$y = 4 - 5\sin^2 2x \cos^2 2x = 4 - \frac{5}{4}(2\sin 2x \cos 2x)^2 = 4 - \frac{5}{4}\sin^2 2x.$$

Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$  nên  $4 \geq y \geq \frac{11}{4}$ .

○  $y = 4$  khi  $\sin 2x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

○  $y = \frac{11}{4}$  khi  $\sin^2 2x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Vậy  $\max y = 4$  và  $\min y = \frac{11}{4}$ .

◦  $y = 3$  khi  $\sin 4x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

Vậy  $\max y = 3$  và  $\min y = 1$ .



**BÀI 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

②  $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$

④  $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4$

⑥  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

⑦  $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 4$

**Lời giải.**

① Ta có

$$y = -\sin^2 x - \cos x + 2 = -(1 - \cos^2 x) - \cos x + 2 = \cos^2 x - \cos x + 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Do  $-1 \leq \cos x \leq 1$  nên  $-\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ .

$$\text{Suy ra } 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq y \leq 3.$$

◦  $y = \frac{3}{4}$  khi  $\cos x = \frac{1}{2}$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{3}$ .

○  $y = 3$  khi  $\cos x = -1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \pi$ .

Vậy  $\min y = \frac{3}{4}$  và  $\max y = 3$ .

② Ta có

$$y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 x) + 1 = \sin^4 x + 2\sin^2 x - 1 = (\sin^2 x + 1)^2 - 2.$$

Do  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$  nên  $1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2$ .

Suy ra  $1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$ .

◦  $y = -1$  khi  $\sin x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

○  $y = 2$  khi  $\sin^2 x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Vậy  $\min y = -1$  và  $\max y = 2$ .

③ Ta có

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = 4 - (\sin x - 1)^2.$$

Do  $-1 \leq \sin x \leq 1$  nên  $-2 \leq \sin x - 1 \leq 0$ .

Suy ra  $0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 0$ .

○  $y = 4$  khi  $\sin x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{2}$ .

•  $y = 0$  khi  $\sin x = -1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

Vậy  $\max y = 4$  và  $\min y = 0$ .

④ Ta có

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + 4 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 4 = 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 + 4 = 5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$  nên  $5 \geq y \geq \frac{9}{2}$ .

◦  $y = 5$  khi  $\sin 2x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

◦  $y = \frac{9}{2}$  khi  $\sin^2 2x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Vậy  $\max y = 5$  và  $\min y = \frac{9}{2}$ .

⑤ Ta có

$$y^2 = 2 - \cos 2x + \sin^2 x = 2 - (1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x = 3\sin^2 x + 1 \Rightarrow y = \sqrt{3\sin^2 x + 1}.$$

Do  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$  nên  $1 \leq 3\sin^2 x + 1 \leq 4$ .

Suy ra  $1 \leq y \leq 2$ .

◦  $y = 1$  khi  $\sin x = 0$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = 0$ .

◦  $y = 2$  khi  $\sin^2 x = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Vậy  $\min y = 1$  và  $\max y = 2$ .

⑥ Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$  nên  $1 \geq y \geq \frac{1}{4}$ .

◦  $y = 1$  khi  $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  hoặc  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  (do  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ).

◦  $y = \frac{1}{4}$  khi  $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$  (do  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ).

Vậy  $\max y = 1$  và  $\min y = \frac{1}{4}$ .

⑦ Ta có

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2 \Rightarrow y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 4.$$

Do  $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \leq 1$  nên  $2 \geq y \geq 6$ .

◦  $y = 2$  khi  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{-\pi}{3}$ .

◦  $y = 6$  khi  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$ , luôn tồn tại  $x$  thỏa mãn, chẳng hạn  $x = \frac{\pi}{6}$ .

Vậy  $\min y = 2$  và  $\max y = 6$ .

□

**BÀI 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

①  $y = \sin 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

②  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$

③  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

**Lời giải.**

① Do  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  nên  $2x \in [0; \pi]$ . Suy ra  $0 \leq y = \sin 2x \leq 1$

◦  $y = 0$  khi  $x = 0$  hoặc  $x = \frac{\pi}{2}$ .

◦  $y = 1$  khi  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Vậy  $\min y = 0$  và  $\max y = 1$ .

② Do  $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$  nên  $x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ . Suy ra  $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \leq y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

◦  $y = \frac{1}{2}$  khi  $x = -\frac{2\pi}{3}$  hoặc  $x = 0$ .

◦  $y = 1$  khi  $x = -\frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $\min y = \frac{1}{2}$  và  $\max y = 1$ .

③ Do  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$  nên  $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ . Suy ra  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ .

◦  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  khi  $x = \pm \frac{\pi}{4}$ .

◦  $y = 1$  khi  $x = -\frac{\pi}{8}$ .

Vậy  $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  và  $\max y = 1$ .

□

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

①  $y = \sqrt{4 - 2 \sin^5 2x} - 8$

②  $y = \frac{4}{1 + 3 \cos^2 x}$

③  $y = \frac{4}{\sqrt{5 - 2 \cos^2 x \sin^2 x}}$

④  $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2 \sin^2 3x}}$

⑤  $y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$

⑥  $y = \frac{4}{\sqrt{2 - \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)} + 3}$

⑦  $y = \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x}$

**BÀI 5.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

①  $y = \cos^2 x + 2 \cos 2x$

②  $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x$

③  $y = 2 \sin 2x (\sin 2x - 4 \cos 2x)$

④  $y = 3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 4 \cos 2x$

⑤  $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{5} \sin 2x + 3$

⑥  $y = (2 \sin x + \cos x)(3 \sin x - \cos x)$

⑦  $y = \sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x - 1$

⑧  $y = 1 - (\sin 2x + \cos 2x)^3$

⑨  $y = |5 \sin x + 12 \cos x - 10|$

⑩  $y = 2 \sin x + \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) - 1$

⑪  $y = 2 \left[ \cos 2x + \cos \left( 2x + \frac{2\pi}{3} \right) \right] + 3$

**BÀI 6.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

①  $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \forall x \in \left[ 0; \frac{\pi}{6} \right]$

②  $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x, \forall x \in \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right]$

③  $y = \cot \left( x + \frac{\pi}{4} \right), \forall x \in \left[ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right]$

### **DẠNG 2.3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác**

*Phương pháp giải*

— **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số lượng giác.

Nếu  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D \Rightarrow D$  là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.

— **Bước 2.** Tính  $f(-x)$ , nghĩa là sẽ thay  $x$  bằng  $-x$ , sẽ có 2 kết quả thường gặp sau

– Nếu  $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$  là hàm số chẵn.

– Nếu  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$  là hàm số lẻ.

**Lưu ý:**

— Nếu không là tập đối xứng ( $\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$ ) hoặc  $f(-x)$  không bằng  $f(x)$  hoặc  $-f(x)$  ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

— Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể  
 $\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a.$

## **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Xét tính chẵn lẻ của hàm số

①  $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$

②  $f(x) = \cos \sqrt{x^2 - 16}$

**Lời giải.**

① Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D = \mathbb{R}$  nên ta xét

$$f(-x) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f(x).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.

② Tập xác định  $D = (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ .

$$\forall x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -4] \\ x \in [4; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \in [4; +\infty) \\ -x \in (-\infty; -4] \end{cases} \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Xét } f(-x) = \cos \sqrt{(-x)^2 - 16} = \cos \sqrt{x^2 - 16} = f(x).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.

□

## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

①  $y = f(x) = \tan x + \cot x$

②  $y = f(x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$

③  $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$

**Lời giải.**

① Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \neq -\frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Xét } f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số lẻ.

② Tập xác định  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{-(k+1)\pi}{2} \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Xét } f(-x) = \tan^7(-2x) \cdot \sin(-5x) = (-\tan^7 2x) \cdot (-\sin 5x) = \tan^7 2x \cdot \sin 5x = f(x).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.

③ Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$  nên ta xét

$$f(-x) = \sin\left(-2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(-2x - \frac{9\pi}{2} + 9\pi\right) = -\sin\left(-2x - \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = f(x).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm số chẵn.

□

## BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 2.** Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

①  $y = f(x) = -2\cos^3\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

②  $y = f(x) = \sin^3(3x + 5\pi) + \cot(2x - 7\pi)$ .

③  $y = f(x) = \cot(4x + 5\pi)\tan(2x - 3\pi)$ .

④  $y = f(x) = \sin\sqrt{9-x^2}$ .

⑤  $y = f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$ .



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### A PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Với  $k \in \mathbb{Z}$ , ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau

$$\text{— } \sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi. \end{cases}$$

$$\text{— } \tan x = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$$

$$\text{— } \cot x = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$$

$$\text{— } \cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi. \end{cases}$$

Nếu đề bài cho dạng độ ( $\alpha^\circ$ ) thì ta sẽ chuyển  $k2\pi \rightarrow k360^\circ$ ,  $k\pi \rightarrow k180^\circ$ , với  $\pi = 180^\circ$ .  
Những trường hợp đặc biệt

$$\text{— } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\text{— } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$$

$$\text{— } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

$$\text{— } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{— } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$$

$$\text{— } \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$$

$$\text{— } \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

$$\text{— } \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\text{— } \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\text{— } \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\text{— } \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\text{— } \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

### 1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình

$$\textcircled{1} \sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

$$\textcircled{3} \tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}.$$

$$\textcircled{4} \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - 30^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k90^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

$$\textcircled{1} \sin x = \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\textcircled{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

$$\textcircled{4} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$\textcircled{5} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{6} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{5} \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{6} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

## **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 2.**

$$\textcircled{1} 2\sin(x + 30^\circ) + \sqrt{3} = 0.$$

$$\textcircled{2} \cot(4x + 35^\circ) = -1.$$

$$\textcircled{3} 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0.$$

$$\textcircled{4} (1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0.$$

$$\textcircled{5} \tan(x - 30^\circ) \cos(2x - 150^\circ) = 0.$$

⑥  $\sqrt{2} \sin 2x + 2 \cos x = 0.$

⑦  $\sin x + \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} = 0.$

⑧  $\sin 2x \cos 2x + \frac{1}{4} = 0.$

⑨  $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}.$

## **B** MỘT SỐ KỸ NĂNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### DẠNG 1.1. Sử dụng thành thạo cung liên kết

| <i>Cung đối nhau</i>                 | <i>Cung bù nhau</i>       | <i>Cung phụ nhau</i>                           |
|--------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------------|
| $\cos(-a) = \cos a$                  | $\sin(\pi - a) = \sin a$  | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$  |
| $\sin(-a) = -\sin a$                 | $\cos(\pi - a) = -\cos a$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$  |
| $\tan(-a) = -\tan a$                 | $\tan(\pi - a) = -\tan a$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$  |
| $\cot(-a) = -\cot a$                 | $\cot(\pi - a) = -\cot a$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$  |
| <i>Cung hơn kém <math>\pi</math></i> |                           | <i>Cung hơn kém <math>\frac{\pi}{2}</math></i> |
| $\sin(\pi + a) = -\sin a$            |                           | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$  |
| $\cos(\pi + a) = -\cos a$            |                           | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$ |
| $\tan(\pi + a) = \tan a$             |                           | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$ |
| $\cot(\pi + a) = \cot a$             |                           | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$ |
| <i>Tính chu kỳ</i>                   |                           |                                                |
| $\sin(x + k2\pi) = \sin x$           |                           | $\cos(x + k2\pi) = \cos x$                     |
| $\sin(x + \pi + k2\pi) = -\sin x$    |                           | $\cos(x + \pi + k2\pi) = -\cos x$              |
| $\tan(x + k\pi) = \tan x$            |                           | $\cot(x + k\pi) = \cot x$                      |

### **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

①  $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

②  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

**Lời giải.**

① Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

- ② Điều kiện:  $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} - x + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

①  $\sin 3x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ .

②  $\tan x \cdot \tan 3x + 1 = 0$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) &= -\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

② Điều kiện:  $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

Xét  $\tan 3x = 0$  không là nghiệm, khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\cot 3x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan x &= -\cot 3x \\ \Leftrightarrow \tan x &= \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x &= 3x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

□

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

①  $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ .

②  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$ .

③  $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0.$

④  $\cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

**Lời giải.**

① Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

② Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm

③ Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{5} = 2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

④ Điều kiện  $\begin{cases} 2x - \frac{3\pi}{4} \neq k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{2\pi}{3} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) &= \cot\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{3\pi}{4} &= -x + \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

①  $\cos(3x + 45^\circ) = -\cos x.$

②  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$

③  $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x.$

④  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0.$

⑤  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0.$

⑥  $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0.$

**Lời giải.**

① Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos(3x + 45^\circ) &= \cos(180^\circ - x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 45^\circ = 180^\circ - x + k360^\circ \\ 3x + 45^\circ = x - 180^\circ + k360^\circ \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 33,75^\circ + k90^\circ \\ x = -112,5^\circ + k180^\circ \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = 33,75^\circ + k90^\circ \\ x = -112,5^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{12} - k2\pi \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{12} - k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ Phương trình tương đương

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan(-x) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = -x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$

④ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = x - \pi + k2\pi \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \tan(-2x) \\ \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} &= -2x + k\pi \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0.$

②  $2\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x.$

③  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0.$

④  $2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos 5x + 1.$

⑤  $\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}.$

**Lời giải.**

① Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin 4x &= \cos 2x \Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

② Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos 8x + \cos 2x + \sin x &= \cos 8x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

③ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

④ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos 5x + \cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos 5x = \cos(\pi - x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi - x + k2\pi \\ 5x = x - \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + x\right) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{4\pi}{9} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{4\pi}{9} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

 **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 4.** Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

①  $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right).$

②  $\cos 2x = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$

③  $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot x.$

**BÀI 5.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

②  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0.$

③  $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$

④  $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0.$

⑤  $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

⑥  $\tan 2x \cdot \tan 3x = 1.$

**BÀI 6.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1.$

②  $\cot 2x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$

③  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}.$

④  $\cos 2x \cos x + \cos x = \sin 2x \sin x.$

⑤  $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2.$

 **DẠNG 1.2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng**

|                                                                   |                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ | $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ |
| $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ | $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$  |

 Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là  $\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}$ . Do đó khi sử dụng nên nhớ (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong phương trình cần giải.

 **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình  $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0.$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin 3x + \sin x &= 0 \Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \sin 3x(2 \cos 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 2 \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k\pi \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + l\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm  $x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$  □

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0.$

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 \cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 &= 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow 4 \cos 2x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3} \\ x = \pi + m2\pi \end{cases} \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}$ ,  $(k, l \in \mathbb{Z})$ .  $\square$

## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ .
- ②  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$ .
- ③  $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0$ .
- ④  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có

$$\begin{aligned}
 \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{k\pi}{2}$ ,  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi$ ,  $(k, l \in \mathbb{Z})$ .

- ② Ta có

$$\begin{aligned}
 \cos x + \cos 3x + \cos 5x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos 2x + \cos 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow \cos 3x(2 \cos 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ 2 \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi$ ,  $(k, l \in \mathbb{Z})$ .

③ Ta có

$$\begin{aligned}
 1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \sin x + 2 \sin^2 x = 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos 2x + \sin x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\sin x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ \cos 2x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} &(k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = x + \frac{\pi}{2} + l2\pi \\ 2x = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} &(k, l \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm  $x = \frac{k\pi}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi$ ,  $x = \frac{7\pi}{6} + m2\pi$ , ( $k, m \in \mathbb{Z}$ ).

④ Ta có

$$\begin{aligned}
 \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{7x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) &= 0 \Leftrightarrow 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x = \pi + k2\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1.$

②  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$

③  $\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x = 1.$

④  $4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x = 0.$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned}
 \sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x &= 1 \Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \\
 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x - \cos 2x &= 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \sin 3x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \sin 3x - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}$ , ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

② Ta có

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 1 + \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x \\ \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x &= 2 \cos^2 x + \cos x \Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) - \cos x(2 \cos x + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

③ Ta có

$$\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) - 2 \sin 2x - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin x - 2 \sin 2x - (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = 0 \\ 2 \sin 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{12} + l\pi, x = \frac{7\pi}{12} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$ .

④ Ta có

$$4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 4 \sin 3x + \sin 5x + \sin x - \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin 3x + 2 \sin 3x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2 \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 3 + 2 \cos 2x = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$ .

□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ .

②  $\sin x - 4 \cos x + \sin 3x = 0$ .

③  $\cos 3x + 2 \sin 2x - \cos x = 0$ .

④  $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$ .

**BÀI 4.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin 5x + \sin 3x + 2 \cos x = 1 + \sin 4x$ .

②  $\cos 2x - \sin 3x + \cos 5x = \sin 10x + \cos 8x$ .

③  $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$ .

④  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ .

📁 DẠNG 1.3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos

Sử dụng công thức hạ bậc

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

$$\textcircled{4} \cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

⚠️ Đối với công thức hạ bậc của sin và cosin

— Mỗi lần hạ bậc xuất hiện  $\frac{1}{2}$  và cung góc tăng gấp đôi.

— Mục đích cả việc hạ bậc để triệt tiêu hằng số không mong muốn và nhóm hạng tử thích hợp để sau khi áp dụng công thức (tổng thành tích sau khi hạ bậc) sẽ xuất hiện nhân tử chung hoặc làm bài toán đơn giản hơn.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình  $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2} \cos 10x$ .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin^2 2x - \cos^2 8x &= \frac{1}{2} \cos 10x \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 16x}{2} = \frac{1}{2} \cos 10x \\ \Leftrightarrow \cos 16x + \cos 4x - \cos 10x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos 10x \cos 6x - \cos 10x = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 10x = 0 \\ 2 \cos 6x - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \\ x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$ . □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$ .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \cos^2 4x &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 4x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 4x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos 4x(2 \cos 4x + 2 \cos 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \cos 4x(4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ \cos 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + l\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + l\pi, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$ . □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ .

②  $\cos^2 \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4}$ .

③  $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ .

④  $4\sin^2 x - 1 = 0$ .

⑤  $\sin^2 \left( 3x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin^2 \left( \frac{7\pi}{4} - x \right)$ .

⑥  $\cos^4 x + \sin^4 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}$ .

Lời giải.

① Ta có

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$ .

② Ta có

$$\cos^2 \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos \left( 4x - \frac{\pi}{2} \right)}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .

③ Ta có

$$\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

④ Ta có

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos 2x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

⑤ Ta có

$$\begin{aligned} \sin^2 \left( 3x + \frac{2\pi}{3} \right) &= \sin^2 \left( \frac{7\pi}{4} - x \right) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos \left( 6x + \frac{4\pi}{3} \right)}{2} = \frac{1 - \cos \left( \frac{7\pi}{2} - 2x \right)}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \left( 6x + \frac{4\pi}{3} \right) &= \cos \left( \frac{7\pi}{2} - 2x \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + \frac{4\pi}{3} = \frac{7\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 6x + \frac{4\pi}{3} = -\left( \frac{7\pi}{2} - 2x \right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{29\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \frac{13\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, x = -\frac{29\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .

⑥ Ta có

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 + \left[\frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow (1 + \cos 2x)^2 + (1 + \cos 2x)^2 &= 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x + 4 \cos 2x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos 2x = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

□

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$ .
- ②  $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$ .
- ③  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$ .
- ④  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$ .
- ⑤  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ .
- ⑥  $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$ .
- ⑦  $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{8}$ .
- ⑧  $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\sin^2 4x + \cos^2 6x = \sin 10x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .
- ②  $\cos 3x + \sin 7x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2}\right) - 2 \cos^2 \frac{9x}{2}$ .
- ③  $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ .
- ④  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$ .
- ⑤  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \frac{7}{4}$ .
- ⑥  $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 10x\right), \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
- ⑦  $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ .
- ⑧  $\tan^2 x + \sin^2 2x = 4 \cos^2 x$ .
- ⑨  $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$ .
- ⑩  $4 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ .

**DẠNG 1.4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích**

Đa số đề thi, kiểm tra thường là những phương trình đưa về tích số. Do đó, trước khi giải ta phải quan sát xem chúng có những lượng nhân tử chung nào, sau đó định hướng để tách, ghép, nhóm phù hợp. Một số lượng nhân tử thường gặp:

1. Các biểu thức có nhân tử chung với  $\cos x \pm \sin x$  thường gặp là:

$$\begin{aligned} & \text{— } 1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2 \\ & \text{— } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \\ & \text{— } \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) \\ & \text{— } \cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x) \\ & \text{— } 1 \pm \tan x = 1 \pm \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x} \\ & \text{— } 1 \pm \cot x = 1 \pm \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x \pm \cos x}{\sin x} \\ & \text{— } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) \\ & \text{— } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

2. Nhìn dưới góc độ hằng đẳng thức số 3, dạng  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , chẳng hạn:

$$\begin{aligned} & \text{— } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \end{cases} \\ & \text{— } \cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x) \\ & \text{— } \sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ & \text{— } \cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x) \\ & \text{— } 3 - 4 \cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 4 \sin^2 x - 1 = (2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) \\ & \text{— } \sin 2x = 1 + \sin 2x - 1 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1) \\ & \text{— } 2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = 3 \cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{3} \cos x - \sin x)(\sqrt{3} \cos x + \sin x) \end{aligned}$$

3. Phân tích tam thức bậc hai dạng:  $f(X) = aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$  với  $X$  có thể là  $\sin x, \cos x$  và  $X_1, X_2$  là hai nghiệm của  $f(X) = 0$

**1 VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình  $2 \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & \text{Ta có: } 2 \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow (2 \cos x - \sin 2x) + (\sqrt{3} \sin x - \sqrt{3}) = 0 \\ & \Leftrightarrow 2 \cos x (1 - \sin x) + \sqrt{3} (\sin x - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (1 - \sin x) (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ Vậy phương trình có nghiệm là: } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $\cos 2x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $\cos 2x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$   
 $\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$  Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  □

**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình  $(\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) - \sin 2x = 0$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $(\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) - \sin 2x = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) + (1 - \sin 2x) - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x - 1)(\sin x - \cos x + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x + 1)(-2\sin x + \cos x + \sin x - \cos x - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x + 1)(-\sin x - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x + 1 = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = k2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  □

**VÍ DỤ 4.** Giải phương trình  $(2\sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x + \sqrt{3}) = 1 - 4\cos^2 x$ .

**Lời giải.**

Ta có:  $(2\sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x + \sqrt{3}) = 1 - 4\cos^2 x$   
 $\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x + \sqrt{3}) = 1 - 4(1 - \sin^2 x)$   
 $\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x + \sqrt{3}) = 4\sin^2 x - 3$   
 $\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x + \sqrt{3}) = (2\sin x - \sqrt{3})(2\sin x + \sqrt{3}) = 0$   
 $\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})(\sin x \cos x - 2\sin x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (2\sin x - \sqrt{3})\sin x(\cos x - 2) = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  □



**BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$ .
- ②  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$ .
- ③  $\sin x + \cos x = \cos 2x$ .
- ④  $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$ .

**Lời giải.**

① Ta có:  $\sin 2x - \sqrt{3} \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② Ta có:  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ Ta có:  $\sin x + \cos x = \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

④ Ta có

$$\text{Ta có: } \cos 2x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + 2 \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (1 + 2 \cos x)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $(\tan x + 1) \sin^2 x + \cos 2x = 0.$

②  $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x.$

③  $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

④  $\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 1 + \cot x.$

**Lời giải.**

① Ta có:  $(\tan x + 1) \sin^2 x + \cos 2x = 0$   
 $\Leftrightarrow \left( \frac{\sin x}{\cos x} + 1 \right) \sin^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \sin^2 x + \cos x (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = 2(\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② Ta có:  $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$   
 $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x + \sin 2x = 1 + \cos x$   
 $\Leftrightarrow \sin 2x \cos x + \sin 2x = 1 + \cos x$   
 $\Leftrightarrow \sin 2x(1 + \cos x) = 1 + \cos x$   
 $\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$   
 Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ Ta có:  $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$   
 $\Leftrightarrow \sin 2x + \cos x - \sin x + \cos x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0$   
 $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos x - (\sin x + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow 2 \cos x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$   
 Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

④ Ta có Điều kiện:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 Ta có:  $\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 1 + \cot x$   
 $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos 2x) - (\sin x + \cos x) = 0$   
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \cos 2x = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
 Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

□

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right).$
- ②  $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right).$
- ③  $(2 \cos x + 1)(\cos 2x + 2 \sin x - 2) = 3 - 4 \sin^2 x.$
- ④  $(2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3) = 3 - 4 \cos^2 x.$

**BÀI 4.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4.$

②  $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2 \cos x) + 2 \sin^2 x = 0.$

③  $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x.$

④  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

**BÀI 5.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 1.$

②  $4 \sin 2x \sin x + 2 \sin 2x - 2 \sin x = 4 - 4 \cos^2 x.$

③  $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4.$

④  $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2 \cos x) + 2 \sin^2 x = 0.$

⑤  $(2 \cos x + 1)(\sin 2x + 2 \sin x - 2) = 4 \cos^2 x - 1.$

⑥  $(2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3) = 4 \sin^2 x - 1.$

⑦  $(2 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) + 4 \cos^2 x = 3.$

⑧  $(2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 1) = 3 - 4 \cos^2 x.$

⑨  $\sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x + 2).$

⑩  $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x.$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + n\pi \end{cases}, (k, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = k\pi$  và  $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$  với  $k, n \in \mathbb{Z}$ .

② Ta có

$$\begin{aligned}
 4 \sin 2x \sin x + 2 \sin 2x - 2 \sin x &= 4 - 4 \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \sin 2x(2 \sin x + 1) - 2 \sin x(2 \sin x + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(4 \sin x \cos x - 2 \sin x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(2 \cos x - 1) \sin x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k_1 \pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k_3 2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k_4 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là  $x = k_1 \pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ ,  $x = \frac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$  và  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k_4 2\pi$  với  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ .

③ Ta có

$$\begin{aligned}
 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x &= 4 \Leftrightarrow 6\sqrt{3} \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cot x = \sqrt{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k'\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  và  $x = \frac{\pi}{6} + k'\pi$ , với  $k, k' \in \mathbb{Z}$ .

④ Ta có

$$\begin{aligned}
 &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2 \cos x) + 2 \sin^2 x = 0 \\
 \Leftrightarrow &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2 \cos x) + 2(1 - \cos^2 x) = 0 \\
 \Leftrightarrow &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2 \cos x + 2 - 2 \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow &\cos x = -1 \\
 \Leftrightarrow &x = \pi + k2\pi.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là  $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
 & (2 \cos x + 1)(\sin 2x + 2 \sin x - 2) = 4 \cos^2 x - 1 \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x + 1)(\sin 2x + 2 \sin x - 2) = (2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1) \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x + 1)(\sin 2x + 2 \sin x - 2 - 2 \sin x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k_1 2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k_1 2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k_2 \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{4} + k_2 \pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
 & (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3) = 4 \sin^2 x - 1 \\
 \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3) = (2 \sin x + 1)(2 \sin x - 1) \\
 \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 3 - 2 \sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(\cos 2x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_3 \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{2} + k_3 \pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
 & (2 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) + 4 \cos^2 x = 3 \\
 \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) + 1 - 4 \sin^2 x = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(4 \sin x \cos x + 1 - 1 - 2 \sin x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = k_3 \pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k_4 \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là  $x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$ ,  $x = k_3 \pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k_4 \pi$  với  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ .

⑧ Ta có

$$\begin{aligned} & (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 1) = 3 - 4 \cos^2 x \\ \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 1) = 4 \sin^2 x - 1 \\ \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 1 - 2 \sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k_3 \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$  và  $x = \frac{\pi}{4} + k_3 \frac{\pi}{2}$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑨ Ta có

$$\begin{aligned} & \sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x + 2) \\ \Leftrightarrow & \sin 2x = \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos x - 1 \\ \Leftrightarrow & \sin^2 x - 1 + \sin x \cos x + \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x - 1)(\sin x + 1) + \cos x(\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x + 1)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k' 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x = k' 2\pi$ , với  $k, k' \in \mathbb{Z}$ .

⑩ Ta có

$$\begin{aligned}
 & 2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x \\
 \Leftrightarrow & 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos 2x + 1 = \sqrt{3} \cos x - \sin x \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k_3 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{3} + k_1\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{6} + k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

□

**BÀI 6.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$ .

②  $\sin 2x + \sqrt{3} = 2 \cos x + \sqrt{3} \sin x$

③  $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$ .

④  $\sin 2x - \sin x = 2 - 4 \cos x$ .

⑤  $\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0$ .

⑥  $\sin 2x - 2 \sin x - 2 \cos x + 2 = 0$ .

⑦  $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$ .

⑧  $\sin 2x - \cos 2x = 2 \sin x - 1$ .

⑨  $\sin 2x + 2 \sin x + 1 = \cos 2x$ .

⑩  $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$ .

⑪  $\sin 2x - \sin x + 2 \cos 2x = 1 - 4 \cos x$ .

⑫  $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x.$

⑬  $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x).$

⑭  $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x.$

⑮  $\sin 2x + 2 \sin^2 x = \sin x + \cos x.$

⑯  $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3} \cos 2x \sin x.$

⑰  $\cos 3x - \cos x = 2 \sin x \cos 2x.$

⑱  $2 \sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1.$

⑲  $\cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x.$

⑳  $\tan x = \sin 2x - 2 \cot 2x.$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} & \sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x \\ \Leftrightarrow & \sin x - 2 + 4 \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x - 2)(1 - 2 \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

② Ta có

$$\begin{aligned} & \sin 2x + \sqrt{3} = 2 \cos x + \sqrt{3} \sin x \\ \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x - 2 \cos x + \sqrt{3} - \sqrt{3} \sin x = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x - 1)(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$  với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

③ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2} \sin x - 2 - 2\sqrt{2} \cos x + 2 \sin x \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{2}) + 2 \cos x(\sin x - \sqrt{2}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x - \sqrt{2})(2 \cos x + \sqrt{2}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

④ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x - \sin x = 2 - 4 \cos x \\
 \Leftrightarrow & \sin x(2 \cos x - 1) + 2(2 \cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x - 1)(\sin x + 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k'2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k'2\pi$ , với  $k, k' \in \mathbb{Z}$ .

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x - 2 \sin x - 2 \cos x + 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x(\cos x - 1) - 2(\cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k'2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k'2\pi$ , với  $k, k' \in \mathbb{Z}$ .

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x - 6 \sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x (\cos x + \sin x - 3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x = 0, (\text{do } \cos x + \sin x - 3 \neq 0) \\
 \Leftrightarrow & x = k\pi.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm  $x = k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin x - 1 \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x + 1 - \cos 2x - 2 \sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x - 2 \sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x (\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = k_1\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$  với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x + 2 \sin x + 1 = \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x (\cos x + \sin x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1 \pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1 \pi \\ x = \pi + k_2 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1 \pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k_2 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = k_1 \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi$  với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑩ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin x (1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos^2 x - \cos x + (\sin 2x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x (\sin 2x - 1) + (\sin 2x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pi + k 2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k' \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \pi + k 2\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + k' \pi$  với  $k, k' \in \mathbb{Z}$ .

⑪ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x - \sin x + 2 \cos 2x = 1 - 4 \cos x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x \cos x - \sin x + 4 \cos^2 x - 3 + 4 \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x (2 \cos x - 1) + 2 \cos x (2 \cos x - 1) + 3(2 \cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x - 1)(\sin x + 2 \cos x + 3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x + 2 \cos x + 3 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mà  $\sin x + 2 \cos x \geq -3$ , đẳng thức xảy ra khi  $\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$  hệ này vô nghiệm. Suy ra phương trình

$\sin x + 2 \cos x + 3 = 0$  vô nghiệm.

Do đó  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

⑫ Ta có

$$\begin{aligned}
 & (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin x(2 \cos x - 1) \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x - \sin x + 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k_1 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k_1 2\pi \\ x = \pi + k_2 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k_3 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k_1 2\pi$ ,  $x = \pi + k_2 2\pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{2} + k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑬ Điều kiện  $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2}$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 & \tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{\sin x \cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\
 \Leftrightarrow & 1 = 2 \sin x \cos x (\sin 2x + \cos 2x) \\
 \Leftrightarrow & 1 = \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & 1 - \sin^2 2x = 2 \sin 2x \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x(1 - 2 \sin 2x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k_2 \pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k_3 \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{12} + k_2 \pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{12} + k_3 \pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑭ Ta có

$$\begin{aligned}
 & (1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \cos x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) (1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ ,  $x = k_2 2\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑮ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x + 2 \sin^2 x = \sin x + \cos x \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin x (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x)(2 \sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

16 Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3} \cos 2x \sin x \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos 2x \cos x = 2\sqrt{3} \cos 2x \sin x \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x(\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + k_2\pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

17 Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos 3x - \cos x = 2 \sin x \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & -2 \sin 2x \sin x = 2 \sin x \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 0 \\ \tan 2x = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k_1\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k_2\frac{\pi}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = k_1\pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{8} + k_2\frac{\pi}{2}$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

18 Ta có

$$\begin{aligned}
 & 2 \sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sin^2 x - \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin x + \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + k'2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k'\frac{2\pi}{3}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = k2\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + k'\frac{2\pi}{3}$ , với  $k, k' \in \mathbb{Z}$ .

**19** Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x \\
 \Leftrightarrow & \cos^2 x + \sin x = \cos x + \sin^2 x \\
 \Leftrightarrow & \sin x - \cos x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) \\
 \Leftrightarrow & (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan x = 1 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ ,  $x = k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

**20** Điều kiện  $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 & \tan x = \sin 2x - 2 \cot 2x \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x - \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin^2 x = \sin^2 2x - 2 \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & 1 - \cos 2x = \sin^2 2x - 2 \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & 1 - \sin^2 2x = -\cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos^2 2x + \cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k_2 \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k_2 \pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

□

**BÀI 7.** Giải các phương trình lượng giác sau:

**①**  $\cos x + 2 \sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2 \sin x$ .

**②**  $2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4 \sin x(1 + \cos 2x)$ .

**③**  $1 - \sin x \cos x = 2 \left( \sin x - \cos^2 \frac{x}{2} \right)$ .

④  $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1.$

⑤  $\sin \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

⑥  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) - \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

⑦  $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x.$

⑧  $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x).$

⑨  $2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0.$

⑩  $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4} \cos 2x.$

⑪  $\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2} \sin x = 0.$

⑫  $\tan 2x + \cot x = 8 \cos^2 x.$

⑬  $3 \sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8 \cos x) = 3 \cos x.$

⑭  $2 \sin x(2 \cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2.$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} & \cos x + 2 \sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2 \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos x - 2 + 2 \sin x((1 - \cos x)^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos x - 2 + 2 \sin x \cos x(\cos x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\cos x - 2)(\sin 2x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sin 2x = -1 \\ \Leftrightarrow & x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

② Ta có

$$\begin{aligned} & 2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4 \sin x(1 + \cos 2x) \\ \Leftrightarrow & 2 \cos x + 2 \sin 2x = 1 + 8 \sin x \cos^2 x \\ \Leftrightarrow & 2 \cos x + 2 \sin 2x = 1 + 4 \sin 2x \cos x \\ \Leftrightarrow & 2 \sin 2x(1 - 2 \cos x) - (1 - 2 \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \sin 2x - 1)(1 - 2 \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k_3 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là  $x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

③ Ta có

$$\begin{aligned} 1 - \sin x \cos x &= 2 \left( \sin x - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 1 - \sin x \cos x &= 2 \sin x - 2 \cos^2 \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - \sin x \cos x &= 2 \sin x - 1 - \cos x \\ \Leftrightarrow 2 + \cos x - \sin x(\cos x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 + \cos x)(1 - \sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2} + k2\pi. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

④ Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2x + \cos x - \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x - \sin x + \cos x &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) + 2 \cos x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2 \cos x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k_2 2\pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑤ Ta có

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x + \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x + \sin x + \cos x &= 1 \\ \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x) &= (\sin x + \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 1 - \sin x - \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2 \sin x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k_1 \pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{4} + k_1 \pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{2}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \cos x - \sin 2x - \cos 2x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \cos x - (\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x)(1 - \sin x - \cos x - \cos x + \sin x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x)(1 - 2\cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - 2\cos x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k_22\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$ ,  $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_22\pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = \sin x + \cos x \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x) \sin 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2\frac{\pi}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$ ,  $x = k_2\frac{\pi}{2}$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x) \\
 \Leftrightarrow & \sin^3 x - 2\sin^5 x + \cos^3 x - 2\cos^5 x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin^3 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^3 x(1 - 2\cos^2 x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin^3 x \cos 2x - \cos^3 x \cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = \cos x \\ \sin 2x = -2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ .

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}
 & 2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(1 - \cos^2 x)(\sin x - 1) + (1 + \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos x)(2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \cos x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos x)(2(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos x)(\sin x + \cos x)(2 - \sin x - \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos x)(\sin x + \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = -1 \\ \tan x = -1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pi + k_1 2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k_2 \pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \pi + k_1 2\pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + k_2 \pi$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑩ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4} \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin^8 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^8 x(1 - 2\cos^2 x) = \frac{5}{4} \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin^8 x \cos 2x - \cos^8 x \cos 2x = \frac{5}{4} \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x(4(\sin^8 x - \cos^8 x) - 5) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét phương trình  $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sin^8 x = \frac{5}{4} + \cos^8 x \geq \frac{5}{4} > 1$  vô lý, suy ra phương trình  $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4}$  vô nghiệm.  
Do đó  $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

⑪ Ta có

$$\begin{aligned}
 & \sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2} \sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2} \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \sin x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin x \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + k_1 2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x + k_2 2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k_1 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k_2 \frac{2\pi}{3}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k_1 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{12} + k_2 \frac{2\pi}{3}$ , với  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

⑫ Điều kiện  $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ta có} \\ x \neq k\pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \tan 2x + \cot x = 8 \cos^2 x \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8 \cos^2 x \\ \Leftrightarrow & \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 8 \cos 2x \sin x \cos^2 x \\ \Leftrightarrow & \cos x = 2 \sin 4x \cos x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 4x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑬ Ta có

$$\begin{aligned} & 3 \sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8 \cos x) = 3 \cos x \\ \Leftrightarrow & 9 \sin x - 12 \sin^3 x + 2 + 3 \sin x - 8 \sin x \cos x - 3 \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & 12 \sin x - 12 \sin^3 x + 2 - 8 \sin x \cos x - 3 \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & 12 \sin x \cos^2 x - 8 \sin x \cos x + 2 - 3 \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & 4 \sin x \cos x(3 \cos x - 2) - (3 \cos x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (3 \cos x - 2)(2 \sin 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = \frac{2}{3} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + k_1 2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là  $x = \pm \arccos\left(\frac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

⑭ Ta có

$$\begin{aligned} & 2 \sin x(2 \cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2 \\ \Leftrightarrow & 4 \sin x \cos 2x + 2 \sin x + 2 \sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & 4 \sin x \cos 2x - 2 \cos 2x + 2 \sin x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \cos 2x + 1)(2 \sin x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k_3\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là  $x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k_3 \pi$ , với  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$ .

□

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ BẬC HAI VÀ BẬC CAO CÙNG MỘT HÀM LƯỢNG GIÁC

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cùng góc giống nhau, chẳng hạn:

| Dạng                            | Đặt ẩn phụ   | Điều kiện                     |
|---------------------------------|--------------|-------------------------------|
| $a \sin^2 X + b \sin X + c = 0$ | $t = \sin X$ | $-1 \leq t \leq 1$            |
| $a \cos^2 X + b \cos X + c = 0$ | $t = \cos X$ | $-1 \leq t \leq 1$            |
| $a \tan^2 X + b \tan X + c = 0$ | $t = \tan X$ | $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ |
| $a \cot^2 X + b \cot X + c = 0$ | $t = \cot X$ | $X \neq k\pi$                 |

Nếu đặt  $t = \sin^2 x, \cos^2 x$  hoặc  $t = |\sin x|, |\cos x|$  thì điều kiện là  $0 \leq t \leq 1$ .

### B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

#### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình:  $4 \cos^2 x - 4 \sin x - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 4 \cos^2 x - 4 \sin x - 1 &= 0 \Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 x) - 4 \sin x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 4 - 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0.
 \end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(2t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình:  $\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0.\end{aligned}$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \cos x = \frac{1}{2} \\ t = \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

□

**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình  $3 \cos 2x + 7 \sin x + 2 = 0$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}3 \cos 2x + 7 \sin x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 3(1 - 2 \sin^2 x) + 7 \sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6 \sin^2 x - 7 \sin x - 5 = 0.\end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$6t^2 - 7t - 5 = 0 \Leftrightarrow (3t - 5)(2t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{3} \\ t = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$

□

**VÍ DỤ 4.** Giải phương trình:  $4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 4 \sin^4 x + 5(1 - \sin^2 x) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 1 = 0.\end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin^2 x$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow (4t - 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = 1. \end{cases}$$

Vì  $0 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x = \pm \frac{1}{2} \\ t = \sin x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

□

**VÍ DỤ 5.** Giải phương trình:  $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

$$\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 12 \sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2 \sin^2 x)^2 - 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) + 12 \sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 4 \sin^2 x + 4 \sin^4 x - 4 \sin^2 x + 4 \sin^4 x + 12 \sin^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8 \sin^4 x + 4 \sin^2 x = 0. \end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin^2 x$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$8t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t(2t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $0 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). □

**VÍ DỤ 6.** Giải phương trình:  $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Ta có:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\sin^2 x}{2 \cos^2 x} + \frac{4 \cos x}{2 \cos^2 x} - \frac{5 \cos^2 x}{2 \cos^2 x} = 0. \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + 4 \cos x - 5 \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

So sánh hai nghiệm với điều kiện thỏa mãn. Vậy  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$  □



## BÀI TẬP VẬN DỤNG

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ .
- ②  $4 \sin^2 x + 12 \sin x - 7 = 0$ .
- ③  $2\sqrt{2} \sin^2 x - (2 + \sqrt{2}) \sin x + 1 = 0$ .
- ④  $-2 \sin^3 x + \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$ .
- ⑤  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ .
- ⑥  $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$ .
- ⑦  $2 \cos^2 x + (\sqrt{2} - 2) \cos x = \sqrt{2}$ .
- ⑧  $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos x = \sqrt{6}$ .
- ⑨  $\tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$ .
- ⑩  $2 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ .
- ⑪  $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0$ .
- ⑫  $3 \cot^2 x + 2\sqrt{3} \cot x + 1 = 0$ .
- ⑬  $\sqrt{3} \cot^2 x - (1 + \sqrt{3}) \cot x + 1 = 0$ .
- ⑭  $\sqrt{3} \cot^2 x + (1 - \sqrt{3}) \cot x - 1 = 0$ .

**Lời giải.**

① Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t + 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{2} \\ t = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } \begin{cases} t = \sin x = \frac{-1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

② Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 12t - 7 = 0 \Leftrightarrow (2t + 7)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-7}{2} \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } t = \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

③ Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\sqrt{2}t^2 - 2t - \sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(\sqrt{2}t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } \begin{cases} t = \sin x = \frac{1}{2} \\ t = \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

④ Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$-2t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (-t + 1)(t + 1)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } \begin{cases} t = \sin x = 1 \\ t = \sin x = -1 \\ t = \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

⑤ Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑦ Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + \sqrt{2}t - 2t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑧ Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 2\sqrt{3}t + 2\sqrt{2}t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow (2t+\sqrt{2})(2t-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \cos x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ t = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑨ Đặt  $t = \tan x$  ( $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t+\sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{3}$$

Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $t = \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

- ⑩ Đặt  $t = \tan x$  ( $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ t = \frac{\sqrt{3}+3}{2} \end{cases}$$

Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $\begin{cases} t = \tan x = \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ t = \tan x = \frac{\sqrt{3}+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan \frac{\sqrt{3}-3}{2} + k\pi \\ x = \arctan \frac{\sqrt{3}+3}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

- ⑪ Đặt  $t = \tan x$  ( $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - \sqrt{3}t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \sqrt{3} \end{cases}$$

Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $\begin{cases} t = \tan x = -1 \\ t = \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

- ⑫ Đặt  $t = \cot x$  ( $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + 2\sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Với  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $t = \cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

- ⑬ Đặt  $t = \cot x$  ( $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(\sqrt{3}t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Với  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $\begin{cases} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

- ⑭ Đặt  $t = \cot x$  ( $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 + t - \sqrt{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t\sqrt{3}+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Với  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $\begin{cases} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0.$
- ②  $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$
- ③  $3 - 4 \cos^2 x = \sin x(2 \sin x + 1).$
- ④  $-\sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0.$
- ⑤  $-2 \sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0.$

⑥  $2 \cos^2 2x + 5 \sin 2x + 1 = 0.$

⑦  $3 \sin^2 x + 2 \cos^4 x - 2 = 0.$

⑧  $4 \sin^4 x + 2 \cos^2 x = 7.$

⑨  $4 \cos^4 x = 4 \sin^2 x - 1$

⑩  $4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0.$

**Lời giải.**

① Ta có:

$$6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -6 \sin^2 x + 5 \sin x + 4 = 0.$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành

$$-6t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② Ta có:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ Ta có:

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cos^2 x = \sin x(2 \sin x + 1) &\Leftrightarrow 3 - 4(1 - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \sin x \\ t = \sin x = \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

④ Ta có:

$$-\sin^2 x - 3 \cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0.$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Ta có:

$$-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } \begin{cases} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

⑥ Ta có:

$$2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt  $t = \sin 2x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } t = \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

⑦ Ta có:

$$3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0.$$

Đặt  $t = \cos^2 x$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } \begin{cases} t = \cos^2 x = 1 \\ t = \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

⑧ Ta có:

$$4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5 = 0.$$

Đặt  $t = \sin^2 x$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 12t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } t = \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

⑨ Ta có:

$$4 \cos^4 x = 4 \sin^2 x - 1 \Leftrightarrow 4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x - 3 = 0.$$

Đặt  $t = \cos^2 x$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } t = \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

⑩ Ta có:

$$4 \sin^4 x + 5 \cos^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^4 x - 5 \sin^2 x + 1 = 0.$$

Đặt  $t = \sin^2 x$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t \leq 1 \text{ nên } \begin{cases} t = \sin^2 x = \frac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sin x = \frac{1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0.$

②  $1 + \cos 2x = 2 \cos x.$

③  $9 \sin x + \cos 2x = 8.$

④  $2 + \cos 2x + 5 \sin x = 0.$

⑤  $3 \sin x + 2 \cos 2x = 2.$

⑥  $2 \cos 2x + 8 \sin x - 5 = 0.$

⑦  $2 \cos^2 2x + 5 \sin 2x + 1 = 0.$

⑧  $5 \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} + 7 = 0.$

⑨  $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2.$

⑩  $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0.$

**Lời giải.**

① Ta có:

$$2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 = 0.$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } -1 \leq t \leq 1 \text{ nên } t = \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

② Ta có:

$$1 + \cos 2x = 2 \cos x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0.$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \cos x = 0 \\ t = \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ Ta có:

$$9 \sin x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 9 \sin x - 7 = 0.$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

④ Ta có:

$$2 + \cos 2x + 5 \sin x = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 5 \sin x + 3 = 0.$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Ta có:

$$3 \sin x + 2 \cos 2x = 2 \Leftrightarrow -4 \sin^2 x + 3 \sin x = 0.$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$-4t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $\begin{cases} t = \sin x = 0 \\ t = \sin x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \arcsin \frac{3}{4} + k2\pi \\ x = -\arcsin \frac{3}{4} + \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Ta có:

$$2 \cos 2x + 8 \sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow -4 \sin^2 x + 8 \sin x - 3 = 0.$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑦ Ta có:

$$2 \cos^2 2x + 5 \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 2x + 5 \sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt  $t = \sin 2x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑧ Đặt  $y = \frac{x}{2}$ . Khi đó, phương trình trở thành:

$$5 \cos 2y - 2 \sin y + 7 = 0 \Leftrightarrow -10 \sin^2 y - 2 \sin y + 12 = 0.$$

Đặt  $t = \sin y$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$10t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1, y = \frac{x}{2}$  nên  $t = \sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

⑨ Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos 2x + \cos x &= 2 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt  $t = \cos x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

⑩ Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 &= 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \sin^2 x + \sin x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Đặt  $t = \sin x$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ). Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-4}{3} \\ t = 1. \end{cases}$$

Vì  $-1 \leq t \leq 1$  nên  $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

□

### **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**BÀI 4.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $3 \cos^2 x - 2 \cos 2x = 3 \sin x - 1.$

②  $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0.$

③  $\cos 4x - 2 \cos^2 x + 1 = 0.$

④  $16 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos 2x = 15.$

⑤  $\cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$

⑥  $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}.$

⑦  $1 + \cos 4x - 2 \sin^2 x = 0.$

⑧  $8 \cos^2 x - \cos 4x = 1.$

⑨  $6 \sin^2 3x - \cos 12x = 4.$

⑩  $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x.$

⑪  $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0.$

⑫  $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0.$

**BÀI 5.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $\cos \left( 2x + \frac{2\pi}{3} \right) + 3 \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0.$

②  $\cos^2 \left( \frac{\pi}{3} + x \right) + 4 \cos \left( \frac{\pi}{6} - x \right) = 4.$

③  $4 \cos^2(6x - 2) + 16 \cos^2(1 - 3x) = 13.$

④  $5 \cos \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin \left( \frac{5\pi}{6} - x \right) - 9.$

⑤  $\sin \left( 2x + \frac{5\pi}{2} \right) - 3 \cos \left( x - \frac{7\pi}{2} \right) = 1 + 2 \sin x.$

⑥  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x + 4 = \cos x.$

⑦  $\sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos 2x - \cos x = 2.$

⑧  $2 \left( \cos^2 x + \frac{4}{\cos^2 x} \right) + 9 \left( \frac{2}{\cos x} - \cos x \right) = 1.$

⑨  $4 \left( \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) + 4 \left( \sin x + \frac{1}{\sin x} \right) = 7.$

⑩  $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 2 \left( \cos x + \frac{1}{\cos x} \right).$

**BÀI 6.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $\frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x.$

②  $\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cot^2 x = 5.$

③  $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3 \cot x + \sqrt{3}.$

④  $9 - 13 \cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0.$

⑤  $2 \tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}.$

⑥  $-\frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0.$

⑦  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}.$

⑧  $2 \sin^2 x + \tan^2 x = 2.$

**BÀI 7.** Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $8 \sin x \cos x - \cos 4x + 3 = 0.$
- ②  $2 \sin^2 8x + 6 \sin 4x \cos 4x = 5.$
- ③  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1 - \sin x.$
- ④  $\frac{1 - \cos x(2 \cos x + 1) - \sqrt{2} \sin x}{1 - \cos x} = 1.$
- ⑤  $\frac{3 \sin 2x - 2 \sin x}{\sin 2x \cos x} = 2.$
- ⑥  $\frac{2 \sin^2 x + 3\sqrt{2} \sin x - \sin 2x + 1}{(\sin x + \cos x)^2} = -1.$
- ⑦  $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}.$
- ⑧  $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} + \frac{4 + 2 \sin 2x}{\sin 2x} - 2\sqrt{3} = 2(\cot x + 1).$
- ⑨  $3 \cos 4x + 2 \cos^2 x + 3 = 8 \cos^6 x.$
- ⑩  $3 \cos x - 2 = -3(1 - \cos x) \cot^2 x.$
- ⑪  $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x.$
- ⑫  $2 \cos 5x \cos 3x + \sin x = \cos 8x.$
- ⑬  $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4 \sin 2x.$
- ⑭  $\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4 \sin x + \cos x.$

**BÀI 8.** Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x + \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$
- ②  $3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - \frac{2 \tan x - 2}{1 + \tan x} + 4 \cos^2 x = 2.$
- ③  $(2 \tan^2 x - 1) \cos x = 2 - \cos 2x.$
- ④  $2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 \cos 3x = 4 \sin x \sin 2x.$
- ⑤  $4 \sin x + 3 = 2(1 - \sin x) \tan^2 x.$
- ⑥  $2 \sin^3 x - 3 = (3 \sin^2 x + 2 \sin x - 3) \tan x.$
- ⑦  $5 \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - 3(1 - \cos x) \cot^2 x = 2.$
- ⑧  $\frac{3 \sin^2 x + 2 \sin x - 3}{\cot x} + 3 = 2 \sin^3 x.$
- ⑨  $5 \sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} = 3 + \cos x.$
- ⑩  $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x \left( 1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right).$

## BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SIN VÀ COS

### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng tổng quát:  $a \sin x + b \cos x = c$ , ( $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ). (1)

Phương pháp giải:

—  $a^2 + b^2 < c^2$ , phương trình vô nghiệm.

—  $a^2 + b^2 \geq c^2$ , ta làm như sau:

Chia hai vế của (1) cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , (1)  $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . (2)

Đặt  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\alpha \in [0; 2\pi]$ . Ta có

(2)  $\Leftrightarrow \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , đây là phương trình ở dạng cơ bản.

Lưu ý: Hai công thức hay sử dụng là

—  $\sin a \cos b \pm \cos a \sin b = \sin(a \pm b)$ ;

—  $\cos a \cos b \pm \sin a \sin b = \cos(a \mp b)$ .

Các dạng có cách giải tương tự

—  $a \sin mx + b \cos mx = c$ ;

—  $a \sin mx + b \cos mx = c \sin nx + d \cos nx$ ,  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ .

## **B** **VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP**

### **1** **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình

①  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3}$ ;

②  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$ .

**Lời giải.**

①

$$\begin{aligned} & \sin x - \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow & \cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right) = \sin \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình

①  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right)$ ;

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{3} \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2}.$$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned} \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x &= 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x &= \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x &= \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \\ \Leftrightarrow \cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) &= \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right] &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \sin \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \frac{\pi}{3} \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \right) &= \cos \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{12} \right) &= \cos \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình

- ①  $\cos 4x - \sin x = \sqrt{3} (\cos x - \sin 4x);$   
 ②  $\sqrt{3} (\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x.$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned} \cos 4x - \sin x &= \sqrt{3} (\cos x - \sin 4x) \Leftrightarrow \cos 4x + \sqrt{3} \sin 4x = \sqrt{3} \cos x + \sin x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 4x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 4x = \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \\ \Leftrightarrow \cos \left( 4x - \frac{\pi}{3} \right) &= \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \sqrt{3} (\cos 2x + \sin 3x) &= \sin 2x + \cos 3x \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x &= \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x = \cos \frac{\pi}{3} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{3} \sin 3x \\ \Leftrightarrow \cos \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) &= \cos \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = 3x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -3x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình

①  $\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = \sqrt{3};$

$$\textcircled{2} \sin x (\sqrt{3} - \sin x) = \cos x (1 + \cos x).$$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \sin 2x = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} & \sin x (\sqrt{3} - \sin x) = \cos x (1 + \cos x) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3} \sin x - \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình

$$\textcircled{1} \frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3};$$

$$\textcircled{2} \frac{\cos x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Điều kiện xác định: } \cos x - \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2x + k2\pi \\ x \neq -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ x \neq \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3} \cos x = \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \\ \Leftrightarrow & \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \\ \Leftrightarrow & \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\textcircled{2} \text{ Điều kiện xác định: } 2 \cos^2 x - \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x \neq -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cos x - \sin 2x}{2 \cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 2x - \sin x} = \sqrt{3} \\ & \Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \\ & \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x + \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \\ & \Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

□

**VÍ DỤ 6.** Giải phương trình

①  $\cos 2x \left( 1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) + \tan x = 2 \sin x + 1;$

②  $4 \sin^2 x + \tan x + \sqrt{2} (1 + \tan x) \sin 3x = 1.$

**Lời giải.**

① Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \cos 2x - 1 - 2 \sin x + \cos 2x \tan x \tan \frac{x}{2} + \tan x = 0 \\ & \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \tan \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin^2 x - 2 \sin x = 0 \\ & \Leftrightarrow \sin x \left( \frac{\cos 2x}{\cos x} \cdot \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos x} - 2 \sin x - 2 \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & (2) \\ \frac{\cos 2x}{\cos x} \cdot \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos x} - 2 \sin x - 2 = 0. & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

(2)  $\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$

(3)  $\Leftrightarrow \cos 2x \sin \frac{x}{2} - 2 \sin x \cos x \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 2 \cos x \cos \frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left( \sin \frac{x}{2} \cos 2x - \cos \frac{x}{2} \sin 2x \right) + \cos \frac{x}{2} - \left( \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos \left( \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là  $x = k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

② Điều kiện xác định:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & (4\sin^2 x - 2) + (\tan x + 1) + \sqrt{2}(1 + \tan x) \sin 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\tan x + 1) + \sqrt{2}(1 + \tan x) \sin 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) + \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} \sin 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x) \left( 2\sin x - 2\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos x} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & (2) \\ 2\sin x - 2\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos x} = 0. & (3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

$$(3) \Leftrightarrow 2\sin x - 2\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - 2\cos^2 x + 1 + \sqrt{2} \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \sin 3x \Leftrightarrow \sin \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) = \sin 3x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 2x = 3x + k2\pi \\ \frac{\pi}{4} - 2x = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, \quad (5)$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5}, x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

□

## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Giải phương trình

①  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

②  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$

③  $\sqrt{3} \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - \sin x = 2$

④  $\left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

**Lời giải.**

①

$$\begin{aligned}
 & \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin 3x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 3x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3} \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) - \sin x = 2 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( \frac{\pi}{3} - x \right) = \sin \frac{\pi}{2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
 & \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2 \\
 \Leftrightarrow & \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos x = 2 \\
 \Leftrightarrow & \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

□

## BÀI 2. Giải phương trình

①  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \frac{\pi}{12}$

②  $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$

③  $2 \cos 3x + \sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$

④  $\sqrt{2} \cos 2x + \sin x - \cos x = 0$

⑤  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right)$

⑥  $\sin x - \sqrt{3} \cos x + 2 = 4 \cos^2 x$

⑦  $2 \cos x \left( \sqrt{3} \sin x + \cos x - 1 \right) = 1$

⑧  $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x = \sin x$

## Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \sin \frac{\pi}{12} \\
 \Leftrightarrow & \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{12} \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x = \sin 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin 3x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 3x \sin \frac{\pi}{3} = \sin 2x \\
 \Leftrightarrow & \sin \left( 3x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \cos(\pi - 3x) \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \cos(\pi - 3x) \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 3x) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \pi - 3x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\pi + 3x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -2x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned}
 & \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} = \cos(\pi - 2x) \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 2x) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\pi + 2x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

⑦

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{3} = \cos 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0 \\
 \Leftrightarrow & 2x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

⑧

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3} \cos 5x - (\sin 5x + \sin x) = \sin x \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3} \cos 5x - \sin 5x = 2 \sin x \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \sin 5x = \sin x \\
 \Leftrightarrow & \sin \frac{\pi}{3} \cos 5x - \cos \frac{\pi}{3} \sin 5x = \sin x \\
 \Leftrightarrow & \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{\pi}{3} - 5x = x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

□

**BÀI 3. Giải phương trình**

- ①  $\sin 2x + \cos x = \cos 2x - \sin x$
- ②  $\sin 2x + 2 \cos^2 x + \sin x - \cos x = 1$
- ③  $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$
- ④  $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$
- ⑤  $\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 1$
- ⑥  $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x) + \cos x(2 \sin x + 1) = 0$

**Lời giải.**

①

$$\begin{aligned} & \cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} & \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 = \cos x - \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sin x \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

③ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} 1 + 2 \sin x \neq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned} & \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} (1 - \sin x + 2 \sin x - 2 \sin^2 x) \\ \Leftrightarrow & \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} (\cos 2x + \sin x) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

④ Điều kiện xác định:  $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & 8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x \\ \Leftrightarrow & \cos x + \sqrt{3} \sin x = 4 \sin x \sin 2x \\ \Leftrightarrow & \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 (\cos x + \cos 3x) \\ \Leftrightarrow & \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x \\ \Leftrightarrow & \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -3x + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

⑤

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \cos 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{3} \sin x - \cos x \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \\ \Leftrightarrow & \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Giải phương trình

- ①  $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$
- ②  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$
- ③  $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2}$
- ④  $\sin \left( \frac{\pi}{2} + 2x \right) + \sqrt{3} \sin(\pi - 2x) = 1$
- ⑤  $\sin x(\sin x - 1) = \cos x(1 - \cos x)$
- ⑥  $4 \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 3\sqrt{2}$
- ⑦  $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x - 2 = 0$
- ⑧  $\cos x \sin 3x - \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3} + \cos 3x \sin x$
- ⑨  $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$
- ⑩  $2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \sin x = 1$
- ⑪  $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$
- ⑫  $2 (\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3} \cos x + \sin x$
- ⑬  $2 \sin^2 x + \sin 2x - 3 \sin x + \cos x = 2$
- ⑭  $\cos x - 2 \cos 2x = 2 \sin x \cos \left( 2x - \frac{5\pi}{6} \right)$

BÀI 5. Giải phương trình

- ①  $\cos x = \sqrt{2} \sin 2x - \sin x$
- ②  $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$
- ③  $(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2 \cos x$
- ④  $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x - 2 \sin x = 0$
- ⑤  $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} \sin x = 1 + 2 \sin 3x$

- ⑥  $4 \sin^2 x + \sin x = 2 - \sqrt{3} \cos x$
- ⑦  $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x = 4 \sin 3x \cos x + 2$
- ⑧  $2 (\cos 6x + \cos 4x) - \sqrt{3} (1 + \cos 2x) = \sin 2x$
- ⑨  $2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x + \sqrt{3} \cos 3x$
- ⑩  $\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2 \cos 2x}$
- ⑪  $\sqrt{3} \sin 7x - 2 \sin 4x \sin 3x = \cos x$
- ⑫  $\sin^2 x + \frac{\sin 2x}{2} = \sqrt{2} \sin x \sin \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right)$
- ⑬  $2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 4 \cos^2 3x$
- ⑭  $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2}$

**BÀI 6.** Giải phương trình

- ①  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$
- ②  $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3} (\cos 5x - \sin 7x)$
- ③  $\frac{1 - 2 \sin x}{1 + 2 \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\sqrt{3} \cos x}$
- ④  $\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \sqrt{3}$
- ⑤  $4 \sin^2 \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 4 \cos 2x \cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) + 1$
- ⑥  $2 (\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$

**BÀI 7.** Giải phương trình

- ①  $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 2 \cos x$
- ②  $\sin 2x - \cos x + \sin x = 1$
- ③  $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 4 \sin x - 1$
- ④  $\tan \frac{\pi}{7} \sin x + 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 2$
- ⑤  $\sqrt{3} \sin 2x - 1 = \cos 2x - 2 \cos x$
- ⑥  $\cos 2x + 2 \sin x = 1 + \sqrt{3} \sin 2x$
- ⑦  $2 \sin 6x - 2 \sin 4x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3} + \sin 2x$
- ⑧  $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$

## **BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẲNG CẤP (BẬC 2, BẬC 3, BẬC 4)**

### **A TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

- 1) Dạng tổng quát  $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ). (1)
- 2) Dấu hiệu nhận dạng: phương trình đối với hàm sin hoặc cosin đồng bậc (hoặc lệch nhau hai bậc).  
Chú ý hàm tan và cotan được xem là bậc 0.

**3)** Phương pháp giải:

**Bước 1.** Kiểm tra  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$  có là nghiệm của phương trình không?

**Bước 2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 1 \end{cases}$ , ta chia hai vế của (1) cho  $\cos^2 x$ .

$$(1) \Leftrightarrow a \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + c = \frac{d}{\cos^2 x} \Leftrightarrow a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x).$$

**Bước 3.** Đặt  $t = \tan x$  để đưa về phương trình bậc hai với ẩn  $t$ , từ đó suy ra  $x$ .

 *Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.*

## **B** **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình  $2 \cos^2 x + 2 \sin 2x - 4 \sin^2 x = 1$ .

**Lời giải.**

Ta có phương trình có dạng  $2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 5 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ .  
(2)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (2) ta được  $5 = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (2) cho  $\cos^2 x$  ta được:  $5 \tan^2 x - 4 \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{1}{5} \end{cases}$ .

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$ . □

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $4 \sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x$ .

**Lời giải.**

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình đã cho.

— Nếu  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  thì (1)  $\Leftrightarrow 1 = 0$  (vô lí).

— Nếu  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$  thì (1)  $\Leftrightarrow 7 = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của phương trình cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$4 \tan^3 x + 3[1 - \tan x(1 + \tan^2 x)] = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3 \tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ . □

**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình  $\sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$ .

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Chia hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  ta được:

$$\tan^2 x (\tan x + 1) = 3 \tan x (1 - \tan x) + 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ . □

## C BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$ .
- ②  $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$ .
- ③  $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$ .
- ④  $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x + 4 = 4 \sin^2 x$ .
- ⑤  $\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}$ .
- ⑥  $2 \sin^2 x + (3 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1 = 0$ .
- ⑦  $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x = 0$ .
- ⑧  $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3} \cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2 &\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $0 = 0$  (thỏa mãn).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^2 x$  ta được:  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

- ② Ta có  $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$ . (\*)

**TH1.** Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 x = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^2 x$  ta được:  $\tan^2 x + \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{cases}$ .

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = -2 \Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \arctan(-2) + k\pi$ .

- ③ Ta có  $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$ .

**TH1.** Với  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ .

**TH2.** Với  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

- ④ Ta có  $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x + 4 = 4 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 6\sqrt{3} \sin x \cos x + 4(1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x) = 0$ .

**TH1.** Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**TH2.** Với  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

- ⑤ Ta có  $\sqrt{3} \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 x = 0$  (vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^2 x$  ta được:  $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3}) \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$   

$$\begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

— Với  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

- ⑥ Ta có  $2 \sin^2 x + (3 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \sin^2 x + (3 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 x = 0$  (vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^2 x$  ta được:  $3 \tan^2 x + (3 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$   

$$\begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

— Với  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

- ⑦ Ta có  $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x = 0$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 x = 0$  (vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^2 x$  ta được:  $4 \tan^2 x - 5 \tan x - 9 = 0 \Leftrightarrow$   

$$\begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

— Với  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{9}{4}\right) + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $x = \arctan\left(\frac{9}{4}\right) + k\pi$ .

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3} \cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) &= 1 + \sin^2 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x - \sqrt{3} \sin 4x = 1 + \sin^2 2x \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2x(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x) = 0.\end{aligned}$$

**TH1.** Với  $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$ .

**TH2.** Với  $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = k\frac{\pi}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ .

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $\sin x = 2 \cos^3 x$ .
- ②  $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$ .
- ③  $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$ .
- ④  $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3 \sin x$ .
- ⑤  $6 \sin x + 2 \cos^3 x = 5 \sin 2x \cos x$ .
- ⑥  $\cos^3 x - 4 \sin^3 x + \sin x = 3 \cos x \sin^2 x$ .
- ⑦  $3 \cos^4 x + \sin^4 x = 4 \cos^2 x \sin^2 x$ .
- ⑧  $4 \sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x$ .
- ⑨  $2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \cos x = \sin x$ .
- ⑩  $\sin^2 x + \frac{(1 + \cos 2x)^2}{2 \sin 2x} = 2 \cos 2x$ .
- ⑪  $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$ .
- ⑫  $\tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x \cos x)$ .
- ⑬  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$ .
- ⑭  $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x = 6$ .
- ⑮  $3 \cot^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2}) \cos x$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $\sin x = 2 \cos^3 x \Leftrightarrow \sin x - 2 \cos^3 x = 0$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 x = 0$  (vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$\tan x(1 + \tan^2 x) - 2 \tan^3 x = 0 \Leftrightarrow \tan x(1 - \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = 0. \end{cases}$$

— Với  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x = k\pi$ .

② Ta có  $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $1 = 1$  (thỏa mãn).

**TH2.** Với  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $-1 = -1$  (thỏa mãn).

**TH3.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$1 + \tan^3 x = \tan x(1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^2 x - \tan x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

③ Ta có  $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $-3 = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $3 = 0$  (vô lí).

**TH3.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$\tan x(1 + \tan^2 x) - 4\tan^3 x + 1 + \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow -3\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

④ Ta có  $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $4 = 3$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $-4 = -3$  (vô lí).

**TH3.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$4(1 + \tan^3 x) = \tan^2 x + 1 + 3\tan x(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

⑤ Ta có  $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x \cos x \Leftrightarrow 3\sin x + \cos^3 x = 5\sin x \cos^2 x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin x = 0$  (vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$3\tan x(1 + \tan^2 x) + 1 = 5\tan x \Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

⑥ Ta có  $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x \sin^2 x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $-3 = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $3 = 0$  (vô lí).

**TH3.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$1 - 4\tan^3 x + \tan x(\tan^2 x + 1) = 3\tan^2 x \Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ .

⑦ Ta có  $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x \sin^2 x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin x = 0$  (vô lí vì  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^4 x$  ta được:

$$3 + \tan^4 x = 4\tan^2 x \Leftrightarrow \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

⑧ Ta có  $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 3\cos^3 x = \sin^2 x \cos x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $1 = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $-1 = 0$  (vô lí).

**TH3.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$4\tan^3 x - 3\tan x(\tan^2 x + 1) + 3 = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ .

⑨ Ta có  $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - 3\cos x = \sin x$ . (\*)

**TH1.** Với  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $1 = 1$  (thỏa mãn).

**TH2.** Với  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $-1 = -1$  (thỏa mãn).

**TH3.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$(\tan x + 1)^3 - 3(\tan^2 x + 1) = \tan x(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

- ⑩ Điều kiện xác định  $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Ta có } \sin^2 x + \frac{(1 + \cos 2x)^2}{2 \sin 2x} = 2 \cos 2x \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{\cos^3 x}{\sin x} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x). \quad (*)$$

Chia hai vế của (\*) cho  $\sin^2 x$  ta được:

$$1 + \cot^3 x = 2(\cot^2 x - 1) \Leftrightarrow \cot^3 x - 2\cot^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

- ⑪ Điều kiện xác định  $\cos 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ .

Ta có

$$\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 4x + (1 + \tan x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 4x = 0 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

- ⑫ Điều kiện xác định  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x &= 3(\cos 2x + \sin x \cos x) \Leftrightarrow \tan x \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 3(\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x) \\ &\Leftrightarrow \tan^3 x - 2 \tan^2 x = 3(1 - \tan^2 x + \tan x) \\ &\Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

- ⑬ Ta có  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$ . (\*)

**TH1.** Với  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 x = 0$  (vô lí).

**TH2.** Với  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^3 x$  ta được:

$$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3} \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x + \sqrt{3} \tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \pm 1 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

— Với  $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

— Với  $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ .

- ⑭ Ta có

$$\begin{aligned} 4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x &= 6 \\ \Leftrightarrow 4(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) + 5 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x &= 6. \\ \Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right) + 5 \sin 2x \cos 2x + \cos^2 2x &= 6. \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 2x - 5 \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x + 2 &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

**TH1.** Với  $\cos 2x = 0$ , thay vào phương trình (\*) ta được  $\sin^2 2x = -1$  (vô lí).

**TH2.** Với  $\cos 2x \neq 0$ , chia hai vế của (\*) cho  $\cos^2 2x$  ta được:

$$2 \tan^2 2x - 5 \tan 2x - 1 + 2(1 + \tan^2 2x) = 0 \Leftrightarrow 4 \tan^2 2x - 5 \tan 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan 2x = 1 \\ \tan 2x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

— Với  $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ .

— Với  $\tan 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \arctan \frac{1}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{4} + k\frac{\pi}{2}$ .

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{4} + k\frac{\pi}{2}$ .

(15) Điều kiện xác định  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ .

Ta có

$$\begin{aligned} 3 \cot^2 x + 2\sqrt{2} \sin^2 x &= (2 + 3\sqrt{2}) \cos x \Leftrightarrow 3 \cos x \left( \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \sqrt{2} \right) + 2(\sqrt{2} \sin^2 x - \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2} \sin^2 x - \cos x) \left( 2 - \frac{3 \cos x}{\sin^2 x} \right) = 0. \end{aligned}$$

**TH1.** Với  $\sqrt{2} \sin^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn)} \\ \cos x = -\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

**TH2.** Với  $2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ \cos x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .

□

## BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐỐI XỨNG

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Dạng 1.**  $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0.$  (1)

Đặt  $t = \sin x \pm \cos x$  (điều kiện  $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = \dots$  và viết  $\sin x \cos x$  theo  $t$ .

⚠ Khi đặt  $t = |\sin x \pm \cos x|$  thì điều kiện của  $t$  là  $0 \leq |t| \leq \sqrt{2}$ .

**Dạng 2.**  $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0.$  (2)

Đặt  $t = \tan x \pm \cot x$  (điều kiện  $|t| \geq 2$ ), suy ra  $t^2 = \dots$  và biểu diễn  $\tan^2 x + \cot^2 x$  theo  $t$ .

⚠ Ta thường sử dụng kết quả  $\tan x \cot x = 1$  và  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{2}{\sin 2x}$ .

### B VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình  $\sin 2x + (2 - \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 1 - 2\sqrt{2} = 0.$  (1)

**Lời giải.**

Đặt  $t = \sin x + \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 1 + (2 - \sqrt{2})t + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + (2 - \sqrt{2})t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $t = \sqrt{2}$ , suy ra  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ .  $\square$

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $2(\tan^2 x + \cot^2 x) - (4 - \sqrt{2})(\tan x + \cot x) + 4 + 2\sqrt{2} = 0$ . (1)

**Lời giải.**

Điều kiện xác định  $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$ .

Đặt  $t = \tan x + \cot x$  ( $|t| \geq 2$ ), suy ra  $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$ . Thay vào (1) ta được

$$2(t^2 - 2) - (4 - \sqrt{2})t + 4 + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - (4 - \sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

$\square$

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$ .
- ②  $2(\sin x + \cos x) + 6 \sin x \cos x = 2$ .
- ③  $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$ .
- ④  $(1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}$ .
- ⑤  $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 - \sin 2x$ .
- ⑥  $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$ .
- ⑦  $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2 \sin 2x = 1$ .
- ⑧  $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6} \sin x \cos x$ .

**Lời giải.**

- ①  $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$ . (1)

Đặt  $t = \sin x + \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 1 - 2\sqrt{2}t - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = 3\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $t = -\sqrt{2}$ , suy ra  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ .

- ②  $2(\sin x + \cos x) + 6 \sin x \cos x = 2$ . (1)

Đặt  $t = \sin x + \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$2t + 3(t^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\frac{5}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $t = 1$ , suy ra  $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$ .

- ③  $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$ . (1)

Đặt  $t = \sin x + \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với  $t = 1$ , suy ra  $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$ .

④  $(1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1 + \sqrt{2})t + 1 - t^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 - (1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Với  $t = 1$ , suy ra  $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi$ .

Với  $t = \sqrt{2}$ , suy ra  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ .

⑤  $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 - \sin 2x. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t = 3 - (1 - t^2) \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Với  $t = \sqrt{2}$ , suy ra  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ .

⑥  $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1 - \sqrt{2})(1 + t) = 1 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + (1 - \sqrt{2})t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Với  $t = -1$ , suy ra

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{-\pi}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi. \end{aligned}$$

Với  $t = \sqrt{2}$ , suy ra  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ .

⑦  $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2 \sin 2x = 1. \quad (1)$

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t - 2(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow 2t^2 + 2\sqrt{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Với  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , suy ra

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi. \end{aligned}$$

⑧  $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6} \sin x \cos x.$  (1)

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $|t| \leq \sqrt{2}$ ), suy ra  $t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$ . Thay vào phương trình (1) ta được

$$t = \sqrt{6}(1 - t^2) \Leftrightarrow \sqrt{6}t^2 + t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Với  $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , suy ra

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &= \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi, x &= \frac{5\pi}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Với  $t = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ , suy ra

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \frac{-\pi}{3} \\ \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, x &= \frac{19\pi}{12} + k2\pi \end{aligned}$$

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $3 \tan^2 x + 4 \tan x + 4 \cot x + 3 \cot^2 x + 2 = 0.$

②  $\frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0.$

③  $\tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x).$

④  $2 \sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$

⑤  $2 \cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0.$

⑥  $2 \sin^3 x - \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - \cos 2x.$

⑦  $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x.$

⑧  $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x).$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \quad 3 \tan^2 x + 4 \tan x + 4 \cot x + 3 \cot^2 x + 2 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện xác định} \quad \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Đặt  $t = \tan x + \cot x$  ( $|t| \geq 2$ ), suy ra  $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$ . Thay vào (1) ta được

$$3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \frac{2}{3} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -2, \text{ suy ra } \tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2 \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{\sin^2 x} + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện xác định} \quad \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 2(1 + \cot^2 x) + 2 \tan^2 x + 5 \tan x + 5 \cot x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(\cot^2 x + \tan^2 x) + 5(\tan x + \cot x) + 6 = 0.$$

(2)  
Đặt  $t = \tan x + \cot x$  ( $|t| \geq 2$ ), suy ra  $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$ . Thay vào (2) ta được

$$2(t^2 - 2) + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -2, \text{ suy ra } \tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2 \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\textcircled{3} \quad \tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x). \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện xác định} \quad \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \tan x - 3 \cot x = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3 \cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \\ \Rightarrow & (\sin x + \sqrt{3} \cos x)(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 2 \sin 2x(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \\ \Leftrightarrow & \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x\right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad 2 \sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Leftrightarrow 2 \sin^2 x \sin x - 2 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2 \sin x(1 - \cos^2 x) - 2 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow 2 \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x) + (1 - \cos x)(2 \cos x + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (1 - \cos x)[2 \sin x(1 + \cos x) + 2 \cos x + 1] = 0 \\ & \Leftrightarrow (1 - \cos x)[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)] = 0 \\ & \Leftrightarrow (1 - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

⑤  $2 \cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0.$  (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow 2 \cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2 \cos^3 x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0 \\
 & \Leftrightarrow \cos^2 x (2 \cos x + 1) + \sin x (1 - \sin x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (1 - \sin^2 x)(2 \cos x + 1) + \sin x (1 - \sin x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin x)(2 \cos x + 1) + \sin x (1 - \sin x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (1 - \sin x) [(1 + \sin x)(2 \cos x + 1) + \sin x] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (1 - \sin x) [2 \cos x + 1 + 2 \sin x \cdot \cos x + \sin x + \sin x] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (1 - \sin x) [2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (1 - \sin x) [(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x)] = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
 \end{aligned}$$

⑥  $2 \sin^3 x - \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - \cos 2x.$  (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) [2 + 2 \sin x \cos x - 1 - (\cos x + \sin x)] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) [1 + 2 \sin x \cos x - (\cos x + \sin x)] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) [(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x + \sin x)] = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow -\cos 2x(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos x + \sin x = 1 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi.
 \end{aligned}$$

⑦  $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x.$  (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = (\sin x - \cos x)^2 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) [(1 + \sin x \cos x) - (\sin x - \cos x)] = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 + \sin x \cos x - (\sin x - \cos x) = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi.
 \end{aligned}$$

⑧  $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x).$  (1)

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x) \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = (2 - \cos x)(\sin x - \cos x) \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = 2\sin x - 2\cos x - \cos x \sin x + \cos^2 x \\ &\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - \sin x \cos x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \left( \text{với } t = \sin x - \cos x, \frac{1-t^2}{2} = \sin x \cos x, -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 (\text{thỏa mãn}) \\ t = 5 (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $t = -1$  suy ra  $\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

## D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

②  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$

③  $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

④  $2\sin 2x + 8 = 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x|.$

⑤  $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1.$

⑥  $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1.$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $(3 - \cos 4x)(\sin x - \cos x) = 2.$

②  $\tan^2 x \cdot (1 - \sin^3 x) + \cos^3 x = 1.$

# BÀI 5. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

## A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng 1.  $m \cdot \sin 2x + n \cdot \cos 2x + p \cdot \sin x + q \cdot \cos x + r = 0.$

- Ta luôn viết  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ , còn  $\cos 2x = \begin{cases} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1) \\ = 2\cos^2 x - 1 & (2) \\ = 1 - 2\sin^2 x & (3) \end{cases}$
- Nếu thiếu  $\sin 2x$  ta sẽ biến đổi  $\cos 2x$  theo (1) và lúc này thường được đưa về dạng  $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0.$
- Nếu theo (2) được:  $\sin x \cdot (2m \cdot \cos x + p) + \underbrace{(2n \cdot \cos^2 x + q \cdot \cos x + r - n)}_{(i)} = 0$  và theo (3)

$$\text{được } \cos x(2m \cdot \sin x + q) + \underbrace{(-2n \cdot \sin^2 x + p \cdot \sin x + r + n)}_{(ii)} = 0.$$

Ta sẽ phân tích (i), (ii) thành nhân tử dựa vào:  $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$ . Với  $t_1$  và  $t_2$  là hai nghiệm của phương trình  $at^2 + bt + c = 0$  để xác định lượng nhân tử chung.

**Dạng 2.** Phương trình có chứa  $R(\dots, \tan X, \cot X, \sin 2X, \cos 2X, \tan 2X, \dots)$ , sao cho cung của  $\sin, \cos$  gấp đôi cung của  $\tan$  hoặc  $\cot$ . Lúc đó đặt  $t = \tan X$  và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X = 2 \sin X \cos X = 2 \cdot \frac{\sin X}{\cos X} \cdot \cos^2 X = \frac{2 \tan X}{1 + \tan^2 X} = \frac{2t}{1 + t^2}.$
- $\cos 2X = 2 \cos^2 X - 1 = 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 X} - 1 = \frac{1 - \tan^2 X}{1 + \tan^2 X} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$
- $\tan 2X = \frac{\sin 2X}{\cos 2X} = \frac{2t}{1 - t^2}$  và  $\cot 2X = \frac{1 - t^2}{2t}.$

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo  $t$ , giải ra sẽ tìm được  $t \Rightarrow x$ .

## **B** VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Giải phương trình  $\cos 2x - \cos x - 3 \sin x - 2 = 0.$  (1)

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x - 3 \sin x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( \cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \left( \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( \cos x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \sin x + \frac{3}{2} \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left( \cos x - \frac{1}{2} - \sin x - \frac{3}{2} \right) \left( \cos x - \frac{1}{2} + \sin x + \frac{3}{2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos x - \sin x - 2)(\cos x + \sin x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 2 \\ \cos x + \sin x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \\ \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4.$  (1)

**Lời giải.**

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) - 7 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \cos x (4 \sin x - 2) + (2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1) (\sin x - 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (2 \sin x - 1) (2 \cos x + \sin x - 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x - 1 = 0 \\ 2 \cos x + \sin x - 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \\
 & \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \\
 & \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 3.** Giải phương trình  $\sin 2x + 2 \tan x = 3$ .

(1)

**Lời giải.**

Đặt  $t = \tan x$ . Ta có  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2t}{1 + t^2}$ .

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow \frac{2t}{1 + t^2} + 2t = 3 \\
 & \Leftrightarrow 2t + 2t(1 + t^2) - 3(1 + t^2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (t - 1)(2t^2 - t + 3) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ 2t^2 - t + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow t = 1 \\
 & \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

□

## 📌 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Giải phương trình lượng giác  $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = \sin x$ .

**Lời giải.**

$\cos 2x + 3 \cos x + 2 = \sin x$ .

(1)

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x + 2 - \sin x = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left( \cos^2 x + 2 \cdot \cos x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \right) - \left( \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left( \cos x + \frac{3}{2} \right)^2 - \left( \sin x + \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left( \cos x + \frac{3}{2} + \sin x + \frac{1}{2} \right) \left( \cos x + \frac{3}{2} - \sin x - \frac{1}{2} \right) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\cos x + \sin x + 2)(\cos x - \sin x + 1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = -2 \text{ (loại)} \\ \cos x - \sin x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi. \end{aligned}$$

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau:

①  $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x.$

②  $\cos 2x + \tan x = 1.$

③  $\sin 2x + 2 \tan x = 3.$

④  $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$

⑤  $1 + \cot \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}.$

⑥  $\cot x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}, \forall x \in \left( -\frac{\pi}{2}; 0 \right).$

**Lời giải.**

①  $1 + 3 \tan x = 2 \sin 2x.$

(1)

Điều kiện  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow 1 + 3 \tan x = 2 \cdot \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \\ &\Leftrightarrow (1 + 3 \tan x)(1 + \tan^2 x) = 4 \tan x \\ &\Leftrightarrow (\tan x + 1)(3 \tan^2 x - 2 \tan x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

②  $\cos 2x + \tan x = 1.$

(1)

Điều kiện  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \\ &\Rightarrow 2 \sin^2 x \cdot \cos x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x [2 \sin x \cos x - 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x (\sin 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

③  $\sin 2x + 2 \tan x = 3.$  (1)

Điều kiện  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 2 \left( \frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 - \frac{2}{\cos x} (\sin x - \cos x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow (\sin x - \cos x) \left( \sin x - \cos x - \frac{2}{\cos x} \right) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x - \frac{2}{\cos x} = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \text{vô nghiệm vì từ phương trình suy ra } \sin x = \cos x + \frac{2}{\cos x} \geq 2\sqrt{2} \text{ (vô lí)} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.
 \end{aligned}$$

④  $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$  (1)

Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1) & \Leftrightarrow \left( 1 - \frac{\sin x}{\cos x} \right) (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x} \\
 & \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x \\
 & \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \quad 1 + \cot \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x}. \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \neq 0 \\ \sin 2x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1 - \tan x = \frac{1 + \tan x}{1 + \sin 2x} \\ &\Leftrightarrow (1 + \sin 2x)(1 - \tan x) = (1 + \tan x) \\ &\Leftrightarrow 1 + \sin 2x - \tan x - \sin 2x \tan x = 1 + \tan x \\ &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos^2 x - 2 \sin x - 2 \sin^2 x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 2 - 2 \sin x \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 2 - 2 \sin x \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x (2 \cos^2 x - 1 - 2 \sin x \cos x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x (\cos 2x - \sin 2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x - \sin 2x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (\text{loại}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi. \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad \cot x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x}, \forall x \in \left( -\frac{\pi}{2}; 0 \right). \quad (1)$$

Điều kiện  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$ .

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2 + \sin 2x} \\ &\Leftrightarrow \cos x (2 + \sin 2x) = (\sin 2x - \cos 2x) \sin x \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \sin x \cos^2 x = 2 \sin^2 x \cos x - (2 \cos^2 x - 1) \sin x \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos x + 2 \cos^2 x \sin x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x - \sin x + 4 \sin x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x - \sin x + 2 \sin x \cos x (2 \cos x - \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 \cos x - \sin x)(1 + 2 \sin x \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 \cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \\ &\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \left( \text{vì } x \in \left( -\frac{\pi}{2}; 0 \right) \right). \end{aligned}$$

□

## D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $\frac{5 + \cos 2x}{3 + 2 \tan x} = 2 \cos x.$
- ②  $3 \sin x - \cos x + 2 - \cos 2x = \sin 2x.$
- ③  $5 \cos x + \sin x - 3 = \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right).$
- ④  $\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 1.$
- ⑤  $\sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \sin x + \cos x + 2.$
- ⑥  $\cos x + \sin x - \sin 2x - \cos 2x = 1.$
- ⑦  $\sin 2x - \cos x + 2 \sin x = \cos 2x + 3 \sin^2 x.$
- ⑧  $\sin 2x - 2 \cos^2 x = 3 \sin x - \cos x.$
- ⑨  $2\sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x - 7 \sin x + 4 = 2\sqrt{2} \cos x.$
- ⑩  $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x = 1.$
- ⑪  $\sin 2x + \cos 2x - 3 \cos x + 2 = \sin x.$
- ⑫  $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x.$
- ⑬  $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4.$
- ⑭  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}.$
- ⑮  $\sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x + 3 \cos x - 2.$
- ⑯  $\frac{2 - \tan x}{\cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 - \tan x}{\sqrt{2} \sin x}.$
- ⑰  $\sqrt{3}(\sin 2x - 3 \sin x) = 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 5.$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

- ①  $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$
- ②  $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x.$

## BÀI 6. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**TH1.** Tổng các số không âm:  $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

**TH2.** Đối lập:  $A = B$  mà chứng minh được  $\begin{cases} A \leq M \\ B \geq M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = M. \end{cases}$

Hoặc:  $A + B = M + N$  mà chứng minh được  $\begin{cases} A \leq M \\ B \leq N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = M \\ B = N. \end{cases}$

**TH3.** Một số trường hợp đặc biệt

$$\begin{array}{ll} \text{— } \sin u \pm \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = \pm 1 \end{cases} & \text{— } \sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \\ \text{— } \cos u \pm \cos v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = \pm 1 \end{cases} & \text{— } \cos u + \cos v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \\ \text{— } \sin u \cdot \sin v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \\ \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases} & \text{— } \sin u \cdot \sin v = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = 1 \\ \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \\ \text{— } \cos u \cdot \cos v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = 1 \\ \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases} & \text{— } \cos u \cdot \cos v = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = 1 \\ \cos u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}$$

## **B** **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0.$
- ②  $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 2 = 0.$

**Lời giải.**

- ①  $4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0 \quad (1).$   
Điều kiện  $\cos x \neq 0.$   
Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} \tan x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3} \tan x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi.$$

- ②  $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 2 = 0 \quad (2)$   
Điều kiện  $\cos x \neq 0.$   
Khi đó

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)^2 + (\sqrt{3} \tan x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \\ \sqrt{3} \tan x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{6} + l\pi.$$

□

**VÍ DỤ 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\cos x \cos 2x = 1.$

②  $\sin x \sin 3x = -1.$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{① } \cos x \cos 2x = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = l\pi. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \\ \text{② } \sin x \sin 3x = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + \frac{2l\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{2} + 2m\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{2} + 2m\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 3.** Giải các phương trình lượng giác sau:  $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

**Lời giải.**

Điều kiện  $\sin 2x \neq 0.$

Ta có  $\begin{cases} \tan^2 x + \cot^2 x \geq 2 \\ 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 x + \cot^2 x = 2 \\ 2 \sin^5 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2. \end{cases} \quad (1)$

Theo bất đẳng thức Cauchy dấu “=” xảy ra khi:  $\tan x = \cot x.$

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

□

**VÍ DỤ 4.** Tìm tham số  $m$  để các phương trình sau có nghiệm

①  $\cos(2x - 15^\circ) = 2m^2 + m.$

②  $m \cos x + 1 = 3 \cos x - 2m.$

③  $(4m - 1) \sin x + 2 = m \sin x - 3.$

**Lời giải.**

① Để phương trình  $\cos(2x - 15^\circ) = 2m^2 + m$  có nghiệm thì

$$\begin{cases} 2m^2 + m \geq -1 \\ 2m^2 + m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

②  $m \cos x + 1 = 3 \cos x - 2m \quad (2)$

Với  $m = 3$  thì (2) trở thành  $1 = -6$  (vô lý). Suy ra  $m = 3$  không thỏa yêu cầu đề bài.

Với  $m \neq 3$

Khi đó (2)  $\Leftrightarrow \cos x = \frac{-2m - 1}{m - 3} \quad (2).$

Để (2) có nghiệm thì  $\begin{cases} \frac{-2m - 1}{m - 3} \leq 1 \\ \frac{-2m - 1}{m - 3} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3m + 2}{m - 3} \leq 0 \\ \frac{-m - 4}{m - 3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty) \\ m \in [-4; 3) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right].$

③  $(4m - 1) \sin x + 2 = m \sin x - 3 \quad (3)$

— Với  $m = \frac{1}{3}$  thì (3) trở thành  $2 = -3$ . (vô lý)

Suy ra  $m = \frac{1}{3}$  không thỏa yêu cầu đề bài.

— Với  $m \neq \frac{1}{3}$  thì (3)  $\Leftrightarrow \sin x = \frac{-5}{3m-1}$ . (4)

Để (4) có nghiệm thì

$$\begin{cases} \frac{-5}{3m-1} \leq 1 \\ \frac{-5}{3m-1} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3m-4}{3m-1} \leq 0 \\ \frac{3m-6}{3m-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; \frac{-4}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right) \\ m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{-4}{3}\right] \cup [2; +\infty).$$

□

**VÍ DỤ 5.** Cho phương trình  $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0$

① Giải phương trình khi  $m = \frac{3}{2}$ .

② Tìm tham số  $m$  để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải.**

① Với  $m = \frac{3}{2}$  thì phương trình trở thành  $2 \cos^2 x - 4 \cos x + \frac{3}{2} = 0$ . Ta có

$$2 \cos^2 x - 4 \cos x + \frac{3}{2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases} \quad (3.4)$$

②  $\cos 2x - (2m + 1) \cos x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - (2m + 1) \cos x + m = 0$ . (1)

Đặt  $t = \cos x$  khi  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$  thì  $t \in [-1; 0)$ .

(1) trở thành  $2t^2 - (2m + 1)t + m = 0$ . (2)

Để phương trình (1) có nghiệm nằm trong khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$  thì phương trình (2) có nghiệm nằm trong khoảng  $t \in [-1; 0)$ .

$$\text{Mà } 2t^2 - (2m + 1)t + m = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = m. \end{cases}$$

Do đó  $m \in [-1; 0)$ .

□

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $2 \sin^2 x + 3 \tan^2 x - 6 \tan x - 2\sqrt{2} \sin x + 4 = 0$ .

②  $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$ .

**Lời giải.**

①  $2\sin^2 x + 3\tan^2 x - 6\tan x - 2\sqrt{2}\sin x + 4 = 0$  (1).

Điều kiện  $\cos x \neq 0$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + (\sqrt{3}\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

②  $\cos^2 x \tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$  (1).

Điều kiện  $\cos 4x \neq 0$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (\cos x \cdot \tan 4x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \tan 4x = 0 \\ \cos x + \sin x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 4x = 0 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{m\pi}{4} \\ x = \frac{-\pi}{4} + l\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + l\pi. \end{aligned}$$

□

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\sin 2x \cos 4x = 1.$

②  $\cos 2x \cos 6x = 1.$

**Lời giải.**

①  $\sin 2x \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi.$

②  $\cos 2x \cos 6x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

□

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x.$

②  $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x.$

**Lời giải.**

①  $2\cos x + \sqrt{2}\sin 10x = 3\sqrt{2} + 2\cos 28x \sin x \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin x \cos 28x = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x.$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakowski cho vế trái ta được.

$$(2\cos x - 2\sin x \cos 28x)^2 \leq 4 + 4\cos^2 28x \leq 8 \Rightarrow 2\cos x - 2\sin x \cos 28x \leq 2\sqrt{2} \quad (1)$$

Mặt khác  $3\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin 10x \geq 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \quad (2).$

Từ (1) và (2) Dấu “=” xảy ra khi  $\begin{cases} \cos^2 28x = 1 \\ \sin x \cos 28x = -\sin x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

②  $2 \sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$

Ta có  $\begin{cases} 2 \sin 5x \leq 2 \\ \cos 4x \leq 1 + \cot^2 x \end{cases}$ .

Do đó

$$\begin{aligned} 2 \sin 5x + \cos 4x &= 3 + \cot^2 x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 + \cot^2 x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} & (1) \\ \cos 4x = \frac{1}{\sin^2 x} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \Leftrightarrow \sin^2 x \cos 4x &= 1 \\ \Leftrightarrow (1 - \cos 2x) \cos 4x &= 2 \\ \Leftrightarrow (1 - \cos 2x) (2 \cos^2 2x - 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 1 - 2 \cos^3 2x + \cos 2x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 \cos^3 2x + 2 \cos^2 2x + \cos 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(\cos 2x + 1) \left( \cos^2 2x - 2 \cos 2x + \frac{3}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x &= -1 \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1) và (3) ta được  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

□

**BÀI 4.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau đây có nghiệm

①  $(m^2 + m) \cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2 \cos 2x$ .

②  $m \sin x + 2 \cos x = 1$ .

③  $m \cos 2x + (m + 1) \sin 2x = m + 2$ .

**Lời giải.**

①  $(m^2 + m) \cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2 \cos 2x \Leftrightarrow m \cos 2x = m^2 - m - 3$ .

Xét  $m = 0$  khi đó ta được  $0 = 3$  (vô lý).

Xét  $m \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{m^2 - m - 3}{m}$ .

Vì  $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m^2 - m - 3}{m} \leq 1$ .

Xét  $\begin{cases} \frac{m^2 - m - 3}{m} \geq -1 & (1) \\ \frac{m^2 - m - 3}{m} \leq 1 & (2) \end{cases}$

(1)  $\Leftrightarrow \frac{m^2 - 3}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-\sqrt{3}; 0) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$ .

(2)  $\Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m - 3}{m} \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup (0; 3]$ .

Vậy  $m \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; 3]$ .

$$\textcircled{2} \quad m \sin x + 2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + 4}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{m^2 + 4}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 4}}.$$

$$\text{Đặt } \cos a = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 4}} \Rightarrow \sin a = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 4}}.$$

Ta được

$$\begin{aligned} \cos a \cdot \sin x + \sin a \cdot \cos x &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + 11}} \\ \Leftrightarrow \sin(x + a) &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + 11}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + \arcsin \frac{1}{\sqrt{m^2 + 11}} + k2\pi \\ x = -a + \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{m^2 + 11}} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{3} \quad m \cos 2x + (m + 1) \sin 2x = m + 2 \quad (1)$$

Điều kiện

$$\begin{aligned} m^2 + (m^2 + 1)^2 &\geq (m^2 + 2)^2 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m &\in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} \cos 2x + \frac{m + 1}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} \sin 2x = \frac{m + 2}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}}.$$

$$\text{Đặt } \sin a = \frac{m}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} \Rightarrow \cos a = \frac{m + 1}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}}.$$

Ta được

$$\begin{aligned} \sin a \cos 2x + \cos a \sin 2x &= \frac{m + 2}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} \\ \Leftrightarrow \sin(a + 2x) &= \frac{m + 2}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2x = \arcsin \frac{m + 2}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} + k2\pi \\ a + 2x = \pi - \arcsin \frac{m + 2}{\sqrt{m^2 + (m + 1)^2}} + k2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$  thì phương trình có nghiệm.

□

**BÀI 5.** Cho phương trình  $\cos 4x + 6 \sin x \cos x = m$

① Giải phương trình khi  $m = 1$ .

② Tìm tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

**Lời giải.**

① Khi  $m = 1$  ta được

$$\begin{aligned} \cos 4x + 6 \sin x \cos x &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 2x + 3 \sin 2x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 \sin^2 2x + 3 \sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

② Đặt  $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$  và  $g(x) = m$ .

Xét  $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$  trên  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

Suy ra  $0 \leq \sin 2x \leq 1$ .

Đặt  $a = \sin 2x \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$ .

Xét  $f(a) = -2a^2 + 3a + 1$  trên  $[0; 1]$ .

Bảng biến thiên

|        |   |                |   |
|--------|---|----------------|---|
| $a$    | 0 | $\frac{3}{4}$  | 1 |
| $f(a)$ | 1 | $\frac{17}{8}$ | 2 |

Vậy  $f(x) = g(x)$  có hai nghiệm phân biệt khi  $2 \leq m < \frac{17}{8}$ .

□

## **D BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 6.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $4\sin^2 x + \sin^2 3x = 4\sin x \sin^2 3x$ .

②  $\sin^2 2x + 2\sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 1 = 0$ .

③  $-4\cos^2 x + 3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 4\sin x - 6$ .

④  $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$ .

⑤  $\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x} (\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x) = \sin x \sin^2 3x$ .

**BÀI 7.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $(\cos^2 x - \sin^2 x) \sin 5x + 1 = 0$ .

②  $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$ .

③  $\sin 7x - \sin x = 2$ .

④  $\cos 4x - \cos 6x = 2$ .

⑤  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ .

⑥  $\sin^5 x - \cos^3 x = 1$ .

**BÀI 8.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\tan 2x + \tan 3x = \frac{-1}{\sin x \cos 2x \cos 3x}$ .

②  $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$ .

③  $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$ .

④  $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$ .

⑤  $\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} - 2 = 0$ .

⑥  $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$ .

**BÀI 9.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để phương trình sau đây có nghiệm

- ①  $m \sin x \cos x + \sin^2 x = m.$
- ②  $\sin x - \sqrt{5} \cos x + 1 = m(2 + \sin x).$
- ③  $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m.$
- ④  $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m = 1.$
- ⑤  $\sin 2x - 2\sqrt{2}m(\sin x - \cos x) + 1 = 4m.$
- ⑥  $3 \sin^2 x + m \sin 2x - 4 \cos^2 x = 0.$
- ⑦  $(m + 2) \cos^2 x + m \sin 2x + (m + 1) \sin^2 x = m - 2.$
- ⑧  $\sin^2 x + (2m - 2) \sin x \cos x - (1 + m) \cos^2 x = m.$

**BÀI 10.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $\cos^2 x - \cos x + 1 = m$  có nghiệm  $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

**BÀI 11.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$  có nghiệm  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

**BÀI 12.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $2 \cos 2x + (m + 4) \sin x = m + 2$  có 2 nghiệm  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

## BÀI 7. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

**BÀI 1.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $5 \left( \sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3, \forall x \in (0; 2\pi)$
- ②  $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 6x - \cos^2 6x$
- ③  $\cos 3x - 4 \cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0, \forall x \in [0; 14]$

**BÀI 2.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$
- ②  $\cot x - \tan x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$
- ③  $\sin^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

**BÀI 3.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$
- ②  $(2 \cos x - 1)(2 \sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

**BÀI 4.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$
- ②  $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$
- ③  $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0$

**BÀI 5.** Giải các phương trình lượng giác sau

- ①  $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0$
- ②  $\cot x + \sin x \left( 1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$
- ③  $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

**BÀI 6.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $(1 + \sin^2 x) \cos x + (1 + \cos^2 x) \sin x = 1 + \sin 2x$

②  $2 \sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

③  $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

**BÀI 7.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

②  $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

③  $2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$

**BÀI 8.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$

②  $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

③  $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$

**BÀI 9.** Giải các phương trình sau

①  $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

②  $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$

③  $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$

**Lời giải.**

① Điều kiện  $\cos x \neq 0$  và  $\tan x \neq -1$ . Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right)}{\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \\ \Leftrightarrow & 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \\ \Leftrightarrow & 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = 1 \text{ (không thỏa điều kiện)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa điều kiện)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

② Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 2x \cos x - \sin x + \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & \sin x(2 \cos^2 x - 1) + \cos 2x(\cos x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos 2x(\sin x + \cos x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x + \cos x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

③ Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2 \sin x \cos x - \cos x - (1 - 2 \sin^2 x) + 3 \sin x - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x(2 \sin x - 1) + 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x(2 \sin x - 1) + (2 \sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x + \sin x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

□

**BÀI 10.** Giải các phương trình sau

- ①  $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$
- ②  $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$
- ③  $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

**Lời giải.**

① Điều kiện  $\sin x \neq 0$ . Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = 2\sqrt{2} \cos x \sin^2 x \\
 \Leftrightarrow & 1 + \cos 2x + \sin 2x - 2\sqrt{2} \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 2\sqrt{2} \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \cos x(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (thỏa điều kiện)} \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (thỏa điều kiện)} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

② Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \cos x - \sin x = \cos 2x + \cos x \\
 \Leftrightarrow & \sin x(2 \cos^2 x - 1 + \cos x) - (\cos 2x + \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\cos 2x + \cos x)(\sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = -\cos x \\ \sin x = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = \cos(\pi - x) \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

③ Điều kiện  $\cos x \neq 0$  và  $\tan x \neq -\sqrt{3}$ . Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & 2 \cos x (\sin x + 1) + (\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x + 1)(2 \cos x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x = -1 \text{ (không thỏa điều kiện)} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ (không thỏa điều kiện)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

**BÀI 11.** Giải các phương trình sau

①  $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$

②  $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$

③  $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$

**Lời giải.**

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} \sin x + \cos x - 1) \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x \\ \Leftrightarrow & \cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow & 2x - \frac{\pi}{3} = \pm \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

③ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (2 \sin x + 2 \cos x - \sqrt{2}) \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \sin x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ,  $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$ ,  $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□

**BÀI 12.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

②  $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$

③  $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

**Lời giải.**

① Điều kiện  $\cos x \neq 0$ . Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x) \\ \Leftrightarrow & (\sin x + \cos x)(2 \cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 5x + \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos \left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ,  $x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$ .

③ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2 \cos 2x \sin x + \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & \cos 2x(2 \sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \sin x + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□

**BÀI 13.** Giải phương trình lượng giác sau:

①  $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$

②  $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$

**Lời giải.**

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin x + 4 \cos x = 2 + 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow & (\sin x - 2)(2 \cos x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2 \cos x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2 \sin x \cos x - 2\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sin x - \sqrt{2})(2 \cos x + \sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin x - \sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2 \cos x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□

**BÀI 14.** Giải phương trình lượng giác  $2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } 2 \sin^2 x + 7 \sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -4 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -4 \text{ vô nghiệm} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

□

**BÀI 15.** Giải các phương trình lượng giác sau

①  $\cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0$

②  $\cos x \cos 2x \cos 3x - \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}$

- ③  $\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \cot x + \cos x \cot x$
- ④  $4 + 3 \sin x + \sin^3 x = 3 \cos^2 x + \cos^6 x$
- ⑤  $2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$
- ⑥  $2 \cos x \cos 2x \cos 3x + 5 = 7 \cos 2x.$
- ⑦  $\sin^2 x (4 \cos^2 x - 1) = \cos x (\sin x + \cos x - \sin 3x).$
- ⑧  $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4 \cos 2x \cos x - 2 \cos^2 x + 2 = 0.$
- ⑨  $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right) - \sin \left( \frac{\pi}{4} - 3x \right) \right].$
- ⑩  $\frac{1}{2 \cot^2 x + 1} + \frac{1}{2 \tan^2 x + 1} = \frac{15 \cos 4x}{8 + \sin^2 2x}.$
- ⑪  $\frac{\sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)}{\tan x - 1} + \cos 3x = \sqrt{2} \sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) - 1.$
- ⑫  $3 \sin^2 x \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \cos x = \sin x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos x.$
- ⑬  $\frac{(2 \sin x + 1)(\cos 2x + \sin x) - 2 \sin 3x + 6 \sin x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0.$
- ⑭  $\sqrt{\frac{3}{4} + \cos^2 x} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x} = 2.$
- ⑮  $(\tan x + 1) \sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3(\cos x + \sin x) \sin x.$
- ⑯  $\sin^3 x - \cos^3 x + 3 \sin^2 x + 4 \sin x - \cos x + 2 = 0.$
- ⑰  $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7 \cos x.$
- ⑱  $8(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sqrt{3} \cos 2x = 11 - 3\sqrt{3} \sin 4x - 9 \sin 2x.$
- ⑲  $\frac{\sin 5x}{\sin x} + \frac{2 \sin 3x}{\sin x} + \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5.$
- ⑳  $2 \cos 2x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = 2(\sin x + \cos x).$
- ㉑  $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$
- ㉒  $1 + \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} + \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} = \cos 2x + 2 \cos x.$
- ㉓  $(2 \cos 2x - 1) \cos x - \sin x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \sin 3x.$

**Lời giải.**

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \cos x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cdot \cos 3x - (\sin 2x + \sin 4x) \sin 6x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cdot \cos 3x - 2 \sin 3x \cdot \cos x \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x \cdot \cos 3x \cdot (2 \cos 6x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \cos 2x [\cos 4x + \cos 2x - \cos 2x] + \sin 2x [\cos 4x - \cos 2x - \sin 2x] = 0 \\
 \Leftrightarrow & [\cos 2x + \sin 2x] \cdot [\cos^2 2x - \sin^2 2x - \sin 2x] = 0 \\
 \Leftrightarrow & [\cos 2x + \sin 2x] \cdot [\cos 4x - \sin 2x] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ )

③ Điều kiện xác định  $\sin x \neq 0$ . Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \cdot \cot x + \cos x \cdot \cot x \\
 \Leftrightarrow & \cot x + \cos 2x + \sin x = 2 \cos^2 x + \cos x \cdot \cot x \\
 \Leftrightarrow & \cos x(1 - \cos x) + \sin x(\sin x - 1) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\cos x - \sin x)(1 - \sin x - \cos x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \text{ (loại)} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

④ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 4 + 3 \sin x + \sin^3 x = 3 \cos^2 x + \cos^6 x \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + 1) [\sin^2 x + 2 \sin x + 1 - (1 - \sin x)(3 + \cos^4 x)] = 0 \\
 \Leftrightarrow & (\sin x + 1)^3 [1 - (1 - \sin x)^3] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ,  $x = k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

⑤ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x + \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2\sin^2 x(\sin x - 1) + 1 + \cos x = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos x)[2(1 - \cos x)(\sin x - 1) + 1] = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1 + \cos x)(\sin x + \cos x)[2 - (\sin x + \cos x)] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

⑥ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) + 5 - 7\cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos 2x(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1) + 5 - 7\cos 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - 8\cos 2x + 5 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2\cos 2x + 5)(\cos 2x - 1)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\cos 2x + 5 = 0 \\ \cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -\frac{5}{2} \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \\
 \Leftrightarrow & 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm  $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

⑦ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 4\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x [2\cos 2x \sin(-x) + \cos x] \\
 \Leftrightarrow & \sin^2 2x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin 2x \cos 2x \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1 - \cos 4x}{2} - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin 4x - \cos 4x = 1 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{2} \sin \left( 4x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$  và  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

⑧ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3} \sin x (2 \cos x + 1) - 4(2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos^2 x + \cos x + 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3} \sin x (2 \cos x + 1) - 8 \cos^3 x - 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{3} \sin x (2 \cos x + 1) - (2 \cos x + 1)(4 \cos^2 x - \cos x - 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (2 \cos x + 1)(\sqrt{3} \sin x + 4 \cos^2 x - \cos x - 2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3} \sin x + 4 \cos^2 x - \cos x - 2 = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0 \\ \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0 \\ \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 2x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

⑨ Điều kiện xác định :  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin 2x}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \sin x \\
 \Leftrightarrow & (\cos 2x + \sin 2x) \sin^2 x = \sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin x \\
 \Leftrightarrow & \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin^2 x = \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin x \\
 \Leftrightarrow & \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) (\sin^2 x - \sin x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = 0 \text{ (loại)} \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

⑩ Điều kiện xác định :  $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} = \frac{15(1 - 2 \sin^2 2x)}{8 + \sin^2 2x} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + 2(\sin^4 x + \cos^4 x)}{2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{15 - 30 \sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{2(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{15 - 30 \sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
 \Leftrightarrow & \frac{2 - \frac{\sin^2 2x}{2}}{2 + \frac{\sin^2 2x}{4}} = \frac{15 - 30 \sin^2 2x}{8 + \sin^2 2x} \\
 \Leftrightarrow & 28 \sin^4 2x + 217 \sin^2 2x - 56 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \\ \sin^2 2x = -8 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \pm \frac{\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

□



## TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

## BÀI 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

## A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1 (Quy tắc cộng).** Một công việc  $X$  được thực hiện theo một trong  $k$  phương án  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , trong đó

- ① Phương án  $A_1$  có  $n_1$  cách thực hiện;
- ② Phương án  $A_2$  có  $n_2$  cách thực hiện;
- ③ ...
- ④ Phương án  $A_k$  có  $n_k$  cách thực hiện.

Khi đó số cách hoàn thành công việc  $X$  là  $n(X) = n_1 + n_2 + \dots + n_k = \sum_{i=1}^k n_i$  cách.

**Định nghĩa 2 (Quy tắc nhân).** Giả sử một nhiệm vụ  $X$  nào đó được hoàn thành lần lượt qua  $k$  giai đoạn  $A_1, A_2, \dots, A_k$ :

- ① Giai đoạn  $A_1$  có  $n_1$  cách làm;
- ② Giai đoạn  $A_2$  có  $n_2$  cách làm;
- ③ ...
- ④ Giai đoạn  $A_k$  có  $n_k$  cách làm.

Khi đó công việc  $X$  có số cách thực hiện là  $n(X) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k = \prod_{i=1}^k n_i$  cách.

**Định nghĩa 3 (Quy tắc bù trừ).** Đối tượng  $x$  cần đếm được chứa trong một đối tượng  $X$  gồm  $x$  và  $\bar{x}$  đối lập nhau. Nếu  $X$  có  $m$  cách chọn,  $\bar{x}$  có  $n$  cách chọn. Vậy  $x$  có  $(m - n)$  cách chọn.

Về mặt thực hành, đề cho đếm những đối tượng thỏa  $a$  và  $b$ . Ta cần làm:

- Bài toán 1: Đếm những đối tượng thỏa  $a$ .
- Bài toán 2: Đếm những đối tượng thỏa  $a$ , không thỏa  $b$ .

Do đó, kết quả bài toán = kết quả bài toán 1 – kết quả bài toán 2.

**⚠** — Nếu bài toán chia ra từng **trường hợp** không trùng lặp để hoàn thành công việc thì dùng **qui tắc cộng**, nếu bài toán chia ra từng **giai đoạn** thực hiện thì ta dùng **qui tắc nhân**. Trong nhiều bài toán, ta không chỉ kết hợp giữa hai quy tắc này lại với nhau để giải mà cần phân biệt khi nào cộng, khi nào nhân, khi nào trừ.

- “Nếu cho tập hợp hữu hạn bất kỳ  $A$  và  $B$  giao nhau khác rỗng. Khi đó thì số phần tử của  $A \cup B$  bằng số phần tử của  $A$  cộng với số phần tử của  $B$  rồi trừ đi số phần tử của  $A \cap B$ , tức là  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ”. Đó là quy tắc cộng mở rộng. Do đó khi giải các bài toán đếm liên quan đến tìm số sao cho các số đó là **số chẵn, số lẻ, số chia hết** ta nên ưu tiên việc thực hiện (**chọn**) **chúng trước** và nếu **chứa số 0 nên chia 2 trường hợp** nhằm tránh trùng lặp với nhau.

- Dấu hiệu chia hết:

Gọi  $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  là số tự nhiên có  $n + 1$  chữ số ( $a_n \neq 0$ ). Khi đó:

- +  $N : 2 \Leftrightarrow a_0 : 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}.$
- +  $N : 5 \Leftrightarrow a_0 : 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\}.$
- +  $N : 4 \text{ (hay 25)} \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} : 4 \text{ (hay 25)}.$
- +  $N : 8 \text{ (hay 125)} \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} : 8 \text{ (hay 125)}.$
- +  $N : 3 \text{ (hay 9)} \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n : 3 \text{ (hay 9)}.$

## **B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP**

### **1** **VÍ DỤ**

#### **DẠNG 1.1. Bài toán sử dụng quy tắc cộng**

**VÍ DỤ 1.** Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hóa. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu cách chọn đề tài?

**Lời giải.**

Mỗi thí sinh có các 4 phương án chọn đề tài:

- Chọn đề tài về lịch sử có 8 cách chọn.
- Chọn đề tài về thiên nhiên có 7 cách chọn.
- Chọn đề tài về con người có 10 cách chọn.
- Chọn đề tài về văn hóa có 6 cách chọn.

Theo quy tắc cộng, có  $8 + 7 + 10 + 6 = 31$  cách chọn đề tài. □

**VÍ DỤ 2.** Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện: ô tô, tàu hỏa hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hỏa và 3 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn chuyến đi từ tỉnh A đến tỉnh B?

**Lời giải.**

Để đi từ A đến B có 3 phương án lựa chọn:

- Đi bằng ô tô có 10 cách chọn.
- Đi bằng tàu hỏa có 5 cách chọn.
- Đi bằng máy bay có 3 cách chọn.

Theo quy tắc cộng, có  $10 + 5 + 3 = 18$  cách chọn. □

#### **DẠNG 1.2. Bài toán sử dụng quy tắc nhân**

**VÍ DỤ 1.** An đến nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà mình đến nhà Cường?

**Lời giải.**

Để đi từ nhà An đến nhà Cường cần thực hiện 2 giai đoạn

- Đi từ nhà An đến nhà Bình có 4 cách.

— Đi từ nhà Bình đến nhà Cường có 6 cách.

Theo quy tắc nhân, có  $4 \cdot 6 = 24$  cách chọn đường đi. □

**VÍ DỤ 2.** Lớp 11A có 30 học sinh. Tập thể lớp muốn bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự lớp như trên, biết rằng một bạn chỉ có thể làm tối đa một vai trò?

**Lời giải.**

Để bầu ra một ban cán sự lớp cần thực hiện 3 giai đoạn

— Bầu lớp trưởng có 30 cách

— Bầu phó có 29 cách

— Bầu thủ quỹ có 28 cách

Theo quy tắc nhân, có  $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$  cách chọn. □

📁 **DẠNG 1.3. Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ**

**VÍ DỤ 1.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12?

**Lời giải.**

Gọi  $a_1a_2a_3a_4a_5$  là số cần lập.

Để lập được số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau, ta thực hiện các bước lần lượt:

— Chọn  $a_1$  có 9 cách.

— Chọn  $a_2$  có 9 cách.

— Chọn  $a_3$  có 8 cách.

— Chọn  $a_4$  có 7 cách.

— Chọn  $a_5$  có 6 cách.

Do đó có  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$  số có năm chữ số khác nhau. Để lập được số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bằng 12, ta thực hiện các bước lần lượt:

— Chọn  $a_1a_2$  có 1 cách.

— Chọn  $a_3$  có 8 cách.

— Chọn  $a_4$  có 7 cách.

— Chọn  $a_5$  có 6 cách.

Do đó có  $1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  số có năm chữ số khác nhau. Theo quy tắc bù trừ, có  $27216 - 336 = 26880$  số có năm chữ số khác nhau không bắt đầu bởi 12. □

**VÍ DỤ 2.** Trong một hộp có 6 bi đỏ, 5 bi trắng và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách lấy 3 viên bi từ hộp này sao cho chúng không đủ ba màu?

**Lời giải.**

Số cách lấy 3 bi bất kỳ từ 15 bi là  $C_{15}^3 = 455$ .

Số cách lấy 3 bi từ 15 bi mà đủ ba màu là  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ .

Theo quy tắc bù trừ, số cách lấy 3 viên bi không đủ ba màu là  $455 - 120 = 335$ . □

## 1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Một hộp có 12 viên bi trắng, 10 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Một em bé muốn chọn 1 viên bi để chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải.**

Để chọn 1 viên bi để chơi có các phương án

+ Chọn 1 viên bi trắng có 12 cách.

+ Chọn 1 viên bi xanh có 10 cách.

+ Chọn 1 viên bi đỏ có 8 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là  $12 + 10 + 8 = 30$  cách. □

**BÀI 2.** Chợ Bến Thành có 4 cổng ra vào. Hỏi một người đi chợ:

a) Có mấy cách vào và ra chợ?

b) Có mấy cách vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau?

**Lời giải.**

a) Để vào và ra chợ ta thực hiện liên tiếp các bước

— Vào chợ có 4 cách.

— Ra chợ có 4 cách

Theo quy tắc nhân, có  $4 \cdot 4 = 16$  cách vào và ra chợ.

b) Để vào và ra chợ bằng 2 cổng khác nhau ta thực hiện liên tiếp các bước

— Vào chợ có 4 cách.

— Ra chợ bằng cổng khác có 3 cách

Theo quy tắc nhân, có  $4 \cdot 3 = 12$  cách vào và ra chợ bằng hai cổng khác nhau. □

**BÀI 3.** Có 8 quyển sách Toán, 7 quyển sách Lí, 5 quyển sách Hóa. Một học sinh chọn 1 quyển trong bất kỳ 3 loại trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

**Lời giải.**

Để chọn 1 quyển sách trong 3 loại sách, ta có các phương án

+ Chọn 1 quyển sách Toán có 8 cách.

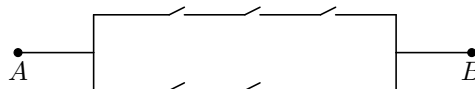
+ Chọn 1 quyển sách Lí có 7 cách.

+ Chọn 1 quyển sách Hóa có 5 cách.

Theo quy tắc cộng, số cách để chọn 1 viên bi để chơi là  $8 + 7 + 5 = 20$  cách. □

**BÀI 4.**

Cho sơ đồ mạch điện như hình vẽ bên cạnh. Hỏi có bao nhiêu cách đóng - mở 5 công tắc để có được dòng điện đi từ  $A$  đến  $B$ .



**Lời giải.**

Để dòng điện đi từ  $A$  đến  $B$  có 2 phương án

— Phương án 3 công tắc phía trên đóng. Khi đó có  $2^2 = 4$  trạng thái của các công tắc phía dưới.

— Phương án 2 công tắc phía dưới đóng. Khi đó có  $2^3 = 8$  trạng thái của các công tắc phía trên.

Theo quy tắc cộng, có  $4 + 8 = 12$  cách để dòng điện đi từ  $A$  đến  $B$ . □

**BÀI 5.** Đề thi học kỳ môn Hóa gồm hai phần: trắc nghiệm và tự luận. Trong ngân hàng đề thi có 15 đề trắc nghiệm và 8 đề tự luận. Hỏi có bao nhiêu cách ra đề?

**Lời giải.**

Để tạo được một đề thi, cần thực hiện hai bước liên tiếp

— Chọn đề trắc nghiệm có 15 cách.

— Chọn đề tự luận có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, có  $15 \cdot 8 = 120$  cách ra đề. □

**BÀI 6.** Một ca sĩ có 30 cái áo và 20 cái quần, trong đó có 18 cái áo màu xanh và 12 cái áo màu đỏ; 12 quần xanh và 8 quần đỏ. Có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo khác màu để người ca sĩ này đi trình diễn?

**Lời giải.**

Để chọn một bộ quần áo khác màu, ta có các phương án

— Áo màu xanh và quần màu đỏ có  $18 \cdot 8 = 144$  cách.

— Áo màu đỏ và quần màu xanh có  $12 \cdot 8 = 96$  cách.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn quần áo là  $144 + 96 = 240$  cách. □

**BÀI 7.** Trong lớp 11A có 39 học sinh trong đó có học sinh tên Chiến, lớp 11B có 32 học sinh trong đó có học sinh tên Tranh. Có bao nhiêu cách chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp mà không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc?

**Lời giải.**

Để chọn một tổ gồm 2 học sinh khác lớp, có  $39 \cdot 32 = 1248$  cách.

Trong đó có 1 cách chọn tổ có mặt cả Chiến và Tranh.

Do đó số cách chọn một tổ không có mặt Chiến và Tranh cùng lúc là  $1248 - 1 = 1247$  cách. □

**BÀI 8.** Trong lớp 11A có 50 học sinh, trong đó có 2 học sinh tên Ưu và Tiên. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh đi thi mà trong đó có mặt ít nhất 1 trong 2 học sinh tên Ưu và tên Tiên?

**Lời giải.**

Có 3 phương án chọn.

— Phương án 1: Chọn chỉ có Ưu 1 cách, chọn một bạn khác Tiên có 48 cách nên có  $1 \cdot 48 = 48$  cách trong trường hợp này

— Phương án 2: Chọn chỉ có Tiên 1 cách, chọn một bạn khác Tiên có 48 cách nên có  $1 \cdot 48 = 48$  cách trong trường hợp này

— Phương án 3: Có cả Ưu và Tiên: 1 cách trong trường hợp này.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là  $48 + 48 + 1 = 97$  cách thỏa yêu cầu. □

**BÀI 9.** Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông hồng, 7 bông cúc, 5 bông đào. Chọn ngẫu nhiên 4 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó hoa được chọn có đủ cả ba loại?

**Lời giải.**

Có 3 phương án chọn.

— Phương án 1: Chọn 2 bông hồng, 1 bông cúc, 1 bông đào có  $\frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot 7 \cdot 5 = 980$  cách trong trường hợp này.

— Phương án 2: Chọn 1 bông hồng, 2 bông cúc, 1 bông đào có  $7 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2!} \cdot 5 = 840$  cách trong trường hợp này.

— Phương án 3: Chọn 1 bông hồng, 1 bông cúc, 2 bông đào có  $8 \cdot 7 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2!} = 560$  cách trong trường hợp này.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu đề bài là  $980 + 840 + 560 = 2380$  cách thỏa yêu cầu. □

**BÀI 10.** Có 12 học sinh giỏi gồm 3 học sinh khối 12, 4 học sinh khối 11, 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh ?

**Lời giải.**

Có 4 phương án chọn.

— Số cách chọn 6 học sinh bất kỳ từ 12 học sinh có  $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6!} = 924$  cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 12 có  $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6!} = 84$  cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 11 có  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} = 28$  cách.

— Số cách chọn 6 học sinh trong đó không có học sinh lớp 10 có  $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} = 7$  cách.

Do đó số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là  $924 - (84 + 28 + 7) = 805$  cách. □

**BÀI 11.** Có bao nhiêu biển số xe gồm hai chữ cái ở đầu (26 chữ cái) và 4 chữ số theo sau (chữ số đầu không nhất thiết khác 0 và chữ số cuối khác 0), sao cho:

- ① Chữ cái tùy ý và bốn chữ số tùy ý tạo thành một số chia hết cho 2 theo sau.
- ② Chữ cái khác nhau và 4 chữ số đôi một khác nhau tạo thành một số chia hết cho 5 tiếp theo sau.

**Lời giải.**

- ① Có 3 bước chọn.

- Chọn 2 chữ cái  $26^2$  cách.
- Chọn 3 chữ số tiếp theo có  $10^3$  cách.
- Chọn chữ số cuối cùng thuộc  $\{2; 4; 6; 8\}$  có 4 cách.

Vậy có tất cả  $26^2 \cdot 10^3 \cdot 4 = 2704000$  cách.

- ② Có 3 bước chọn.

- Chọn 2 chữ cái có  $26 \cdot 25 = 650$  cách.
- Chữ số cuối có 1 cách chọn số 5.
- Chọn 3 chữ số còn lại  $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$  cách.

Vậy có tất cả  $26 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 291200$  cách.

□

**BÀI 12.** Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường Đại học bằng một chữ cái (26 chữ cái) và một số nguyên dương theo sau mà không vượt quá 100. Bằng cách ghi như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

**Lời giải.**

Có 26 chữ cái và 100 số thỏa mãn.

Vậy số cách ghi nhiều nhất là  $26 \cdot 100 = 2600$  cách.

□

**BÀI 13.** Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số được lấy từ tập  $A$ , sao cho các chữ số này:

- ① Tùy ý.
- ② Khác nhau từng đôi một.
- ③ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số lẻ.
- ④ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 5.
- ⑤ Khác nhau từng đôi một và năm chữ số này tạo thành một số chia hết cho 2.

**Lời giải.**

Gọi  $abcde$  là số cần tìm.

- ①

- $a$  có 9 cách chọn.
- $b$  có 10 cách chọn.
- $c$  có 10 cách chọn.
- $d$  có 10 cách chọn.
- $e$  có 10 cách chọn.

Vậy có  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$  số thỏa yêu cầu.

- ②

- $a$  có 9 cách chọn.
- $b$  có 9 cách chọn.
- $c$  có 8 cách chọn.
- $d$  có 7 cách chọn.
- $e$  có 6 cách chọn.

Vậy có  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$  số thỏa mãn yêu cầu.

③

- $e$  có 5 cách chọn.
- $a$  có 8 cách chọn.
- $b$  có 8 cách chọn.
- $c$  có 7 cách chọn.
- $d$  có 6 cách chọn.

Vậy có  $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13440$  số thỏa mãn yêu cầu.

④ Có 2 trường hợp:

Trường hợp 1:

- $e = 0$  có 1 cách chọn.
- $a$  có 9 cách chọn.
- $b$  có 8 cách chọn.
- $c$  có 7 cách chọn.
- $d$  có 6 cách chọn.

Vậy có  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$  số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

- $e = 5$  có 1 cách chọn.
- $a$  có 8 cách chọn.
- $b$  có 8 cách chọn.
- $c$  có 7 cách chọn.
- $d$  có 6 cách chọn.

Vậy có  $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 2688$  số trong trường hợp này.

Vậy có tất cả:  $3024 + 2688 = 5712$  số thỏa mãn yêu cầu.

⑤ Có 2 trường hợp:

Trường hợp 1:

- $e = 0$  có 1 cách chọn.
- $a$  có 9 cách chọn.
- $b$  có 8 cách chọn.
- $c$  có 7 cách chọn.
- $d$  có 6 cách chọn.

Vậy có  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 3024$  số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

- $e \in \{2; 4; 6; 8\}$  có 4 cách chọn.
- $a$  có 8 cách chọn.
- $b$  có 8 cách chọn.
- $c$  có 7 cách chọn.
- $d$  có 6 cách chọn.

Vậy có  $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 10752$  số trong trường hợp này.

Vậy có tất cả  $3024 + 10752 = 13776$  số thỏa mãn yêu cầu.

□

**BÀI 14.** Từ các chữ số  $0, 1, 2, \dots, 9$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2?

**Lời giải.**

Gọi  $A = \overline{ab2cd}$  ( $a \neq 0$ ).

- Xét  $A = \overline{ab2cd}$ ,  $a$  bất kì,  $d \in \{0; 4; 6; 8\}$   
Có 4 cách chọn  $d$ , 8 cách chọn  $a$ , 7 cách chọn  $b$ , 6 cách chọn  $c$ , nên có  $4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344$  cách.
- Xét  $A = \overline{ab2cd}$ ,  $d \in \{4; 6; 8\}$  và  $a = 0$ .

Có 3 cách chọn  $d$ , 7 cách chọn  $b$ , 6 cách chọn  $c$ , nên có  $3 \cdot 7 \cdot 6 = 126$  cách.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là  $1344 - 126 = 1218$  số. □

**BÀI 15.** Cho tập hợp  $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một từ  $X$ , sao cho một trong ba chữ số đầu tiên phải bằng 1.

**Lời giải.**

Đặt số cần tìm là  $\overline{abcde}$  ( $a \neq 0$ ).

+ Xét trường hợp  $a$  bất kỳ.

- Xếp số 1 vào một trong ba vị trí  $a, b, c$  có 3 cách.
- Xếp các số còn lại lần lượt vào vị trí tiếp theo có 7, 6, 5, 4 cách.

Do đó có  $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2520$  cách xếp.

+ Xét trường hợp  $a = 0$ .

- Xếp số 1 vào một trong hai vị trí  $b, c$  có 2 cách.
- Xếp các số còn lại lần lượt vào vị trí tiếp theo có 6, 5, 4 cách.

Do đó có  $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 240$  cách.

Vậy có tất cả  $2520 - 240 = 2280$  số xếp thỏa yêu cầu. □

**BÀI 16.** Cho sáu chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Có thể tạo ra bao nhiêu số gồm bốn chữ số khác nhau? Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5?

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là  $\overline{abcd}$

- $a$  có 6 cách chọn.
- $b$  có 5 cách chọn.
- $c$  có 4 cách chọn.
- $d$  có 3 cách chọn.

Do đó có tất cả  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  số có 4 chữ số khác nhau.

Trong đó, các số chia hết cho 5 có dạng  $\overline{abc5}$ .

- $d$  có 1 cách chọn.
- $a$  có 5 cách chọn.
- $b$  có 4 cách chọn.
- $c$  có 3 cách chọn.

Do đó có  $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  số thỏa yêu cầu. □

**BÀI 17.** Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số có nghĩa đôi một khác nhau chia hết cho 5 và luôn có chữ số 0 được lấy từ tập  $A$ ?

**Lời giải.**

Gọi  $x = \overline{abcdef}$

+ Xét số  $x$  có dạng  $\overline{abcde0}$  có  $1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$  số.

+ Xét số  $x$  có dạng  $\overline{abcde5}$ .

- Xếp số 0 vào 1 trong 5 vị trí có 5 cách.
- Xác vị trí còn lại lần lượt có 6, 5, 4, 3 cách.

Do đó có  $5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1800$  cách.

+ Xét số  $x$  dạng  $\overline{0bcde5}$  có  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  cách.

Vậy có tất cả  $2520 + 1800 - 360 = 3960$  số thỏa mãn yêu cầu. □

**BÀI 18.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số 1 phải có mặt một trong hai vị trí đầu?

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là  $x = \overline{abcde}$

+ Xét  $x$  dạng  $\overline{1bcde}$  có  $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$  số.

+ Xét  $x$  dạng  $\overline{a1cde}$

— Với  $a$  bất kỳ có  $9 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$  số.

— Với  $a = 0$  có  $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  số.

Do đó có  $3024 - 336 = 2688$  số.

Vậy có tất cả  $3024 + 2688 = 5712$  số thỏa mãn yêu cầu. □

**BÀI 19.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số mà trong đó có hai chữ số chẵn đứng liền nhau, còn chữ số còn lại lẻ?

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là  $\overline{abc}$ .

— TH1:  $a, b$  chẵn,  $c$  lẻ có  $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$  số.

— TH2:  $a$  lẻ,  $b, c$  chẵn có  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  số.

Vậy có tất cả  $100 + 125 = 225$  số thỏa yêu cầu. □

**BÀI 20.** Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau nằm trong khoảng (300; 500)?

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là  $\overline{abc}$ .

—  $a$  có 2 cách chọn ( $a = 4$  hoặc  $a = 3$ ).

—  $b$  có 4 cách chọn.

—  $c$  có 3 cách chọn.

Vậy có  $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$  số thỏa mãn yêu cầu. □

**BÀI 21.** Cho các chữ số 1; 2; 5; 7; 8, có bao nhiêu cách lập ra một số gồm ba chữ số khác nhau từ năm chữ số trên sao cho số tạo thành là một số nhỏ hơn 278?

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là  $\overline{abc}$ .

Trường hợp 1:

—  $a = 1$  có 1 cách chọn.

—  $b$  có 4 cách chọn.

—  $c$  có 3 cách chọn.

Vậy có  $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$  số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

—  $a = 2$  có 1 cách chọn.

—  $b < 7$  có 2 cách chọn.

—  $c$  có 3 cách chọn.

Vậy có  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  số trong trường hợp này.

Trường hợp 3:

—  $a = 2$  có 1 cách chọn.

—  $b = 7$  có 1 cách chọn.

—  $c \in \{1; 5\}$  có 2 cách chọn.

Vậy có  $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$  số trong trường hợp này.

Vậy có tất cả  $12 + 6 + 2 = 20$  số thỏa mãn yêu cầu. □

**BÀI 22.** Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số lẻ có ba chữ số khác nhau nhỏ hơn 400?

**Lời giải.**

Gọi số cần tìm là:  $\overline{abc}$  ( $a \in \{1; 2; 3\}$ ).

Trường hợp 1:

- $a \in \{1; 3\}$  có 2 cách chọn.
- $c$  có 2 cách chọn.
- $b$  có 5 cách chọn.

Vậy có  $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$  số trong trường hợp này.

Trường hợp 2:

- $a = 2$  có 1 cách chọn.
- $c$  có 3 cách chọn.
- $b$  có 5 cách chọn.

Vậy có  $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$  số trong trường hợp này.

Vậy có tất cả  $20 + 15 = 35$  số thỏa mãn yêu cầu. □

**BÀI 23.** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có năm chữ số khác nhau và nhỏ hơn 34000?

**Lời giải.**

Trường hợp 1: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: 13; 15; 17; 19; 31.

- Có 5 cách chọn hai chữ số đầu tiên.
- Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có  $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 = 1050$  số có 5 chữ số thỏa mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: 10; 12; 14; 16; 18; 21; 23; 25; 27; 29; 30; 32.

- Có 12 cách chọn hai chữ số đầu tiên.
- Có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có  $12 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$  số có 5 chữ số thỏa mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 3: Số được lập bắt đầu bởi một trong các giá trị sau: 20; 24; 26; 28.

- Có 4 cách chọn hai chữ số đầu tiên.
- Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm.

Vậy có  $4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 504$  số có 5 chữ số thỏa mãn trong trường hợp này.

Vậy có tổng cộng  $1050 + 2016 + 504 = 3570$  số có 5 chữ số thỏa mãn. □

**BÀI 24.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12?

**Lời giải.**

Trước hết ta đếm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

- Có 9 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 9 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 8 cách chọn chữ số hàng trăm.

- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có tất cả  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$  số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Tiếp theo, ta đếm số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà bắt đầu bởi 12.

- Có 8 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có tất cả  $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau mà bắt đầu bởi 12.

Vậy có  $27216 - 336 = 26880$  số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12. □

**BÀI 25.** Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được lấy từ tập  $A$  và trong đó có chứa chữ số 4?

**Lời giải.**

Trường hợp 1: Chữ số 4 ở vị trí hàng chục nghìn.

- Có 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 5 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 4 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  số thoả mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Chữ số 4 không nằm ở vị trí hàng chục nghìn.

- Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 4.
- Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 5 cách chọn chữ số thứ ba.
- Có 4 cách chọn chữ số thứ tư.
- Có 3 cách chọn chữ số thứ năm.

Vậy có  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1200$  số thoả mãn trong trường hợp này.

Vậy có tổng cộng  $360 + 1200 = 1560$  số có 5 chữ số thoả mãn. □

**BÀI 26.** Hỏi từ 10 chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1?

**Lời giải.**

- Có 6 cách chọn vị trí cho chữ số 0.
- Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 1.
- Có 8 cách chọn giá trị cho chữ số thứ ba.
- Có 7 cách chọn giá trị cho chữ số thứ tư.
- Có 6 cách chọn giá trị cho chữ số thứ năm.
- Có 5 cách chọn giá trị cho chữ số thứ sáu.

Vậy có  $6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 50400$  số có 6 chữ số khác nhau thoả mãn. □

**BÀI 27.** Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt chữ số 7?

**Lời giải.**

Trường hợp 1: Chữ số 7 ở vị trí hàng trăm nghìn.

- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 5 cách chọn chữ số hàng trăm.

- Có 4 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$  số thoả mãn trong trường hợp này.  
Trường hợp 2: Chữ số 7 không nằm ở vị trí hàng trăm nghìn.

- Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 7.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.
- Có 6 cách chọn chữ số thứ ba.
- Có 5 cách chọn chữ số thứ tư.
- Có 4 cách chọn chữ số thứ năm.
- Có 3 cách chọn chữ số thứ sáu.

Vậy có  $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 10800$  số thoả mãn trong trường hợp này.  
Vậy có tổng cộng  $2520 + 10800 = 13320$  số có 6 chữ số thoả mãn. □

**BÀI 28.** Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ , từ  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3?

**Lời giải.**

- Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 0.
- Có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 3.
- Có 4 cách chọn giá trị cho chữ số thứ ba.
- Có 3 cách chọn giá trị cho chữ số thứ tư.
- Có 2 cách chọn giá trị cho chữ số thứ năm.

Vậy có  $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 480$  số có 5 chữ số khác nhau thoả mãn. □

**BÀI 29.** Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ , từ các chữ số thuộc tập  $A$  lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số và số đó chia hết cho 3?

**Lời giải.**

Vì số được lập chia hết cho 3 nên các chữ số của số đó là 1; 2; 3; 4; 5 hoặc 0; 1; 2; 4; 5.

Trường hợp 1: Các chữ số của số được lập là 1; 2; 3; 4; 5.

- Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  số thoả mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Các chữ số của số được lập là 0; 1; 2; 4; 5.

- Có 4 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$  số thoả mãn trong trường hợp này.

Vậy có tổng cộng  $120 + 96 = 216$  số có 5 chữ số thoả mãn. □

**BÀI 30.** Từ các chữ số  $0; 1; 2; \dots; 9$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm năm chữ số khác nhau đôi một và chữ số chính giữa luôn là số 2?

**Lời giải.**

Trường hợp 1: Chữ số hàng đơn vị là 0.

- Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
- Có 1 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 8 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có  $1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  số thỏa mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Chữ số hàng đơn vị khác 0.

- Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.
- Có 1 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy có  $3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 882$  số thỏa mãn trong trường hợp này.

Vậy có tổng cộng  $336 + 882 = 1218$  số có 5 chữ số thỏa mãn. □

**BÀI 31.** Trong một trường THPT A, khối 11 mỗi học sinh tham gia một trong hai câu lạc bộ Toán và Tin học. Có 160 em tham gia câu lạc bộ Toán, 140 em tham gia câu lạc bộ Tin học, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 11 có bao nhiêu học sinh?

**Lời giải.**

Số học sinh khối 11 là  $160 + 140 - 50 = 250$  học sinh. □

**BÀI 32.** Một lớp có 40 học sinh, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao là bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao?

**Lời giải.**

Số em học sinh đăng ký cả hai môn thể thao là  $30 + 25 - 40 = 15$  học sinh. □

**BÀI 33.** Có 5 học sinh, trong đó có An và Bình. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh này lên một đoàn tàu gồm 8 toa, biết rằng:

- ① 5 học sinh lên cùng một toa.
- ② 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người.
- ③ 5 học sinh lên 5 toa khác nhau.
- ④ An và Bình lên cùng toa đầu tiên.
- ⑤ An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này.

**Lời giải.**

- ① Có 8 cách chọn toa tàu để cả 5 học sinh cùng lên toa tàu đó. Vậy có 8 cách sắp xếp để 5 học sinh lên cùng một toa.
- ② — Có 5 cách chọn học sinh lên toa đầu tiên.  
— Có 4 cách chọn học sinh lên toa thứ hai.  
— Có 3 cách chọn học sinh lên toa thứ ba.  
— Có 2 cách chọn học sinh lên toa thứ tư.  
— Có 1 cách chọn học sinh lên toa thứ năm.

Vậy có  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  cách sắp xếp để 5 học sinh lên 5 toa đầu và mỗi toa một người.

- ③ — Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh đầu tiên.  
— Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ hai.

- Có 6 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
- Có 5 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
- Có 4 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$  cách sắp xếp để 5 học sinh lên 5 toa khác nhau.

- ④ — Có 1 cách chọn toa tàu cho An và Bình.
- Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
  - Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
  - Có 8 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có  $1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$  cách sắp xếp để An và Bình lên cùng toa đầu tiên.

- ⑤ — Có 8 cách chọn toa tàu cho An và Bình.
- Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ ba.
  - Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ tư.
  - Có 7 cách chọn toa tàu cho học sinh thứ năm.

Vậy có  $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2744$  cách sắp xếp để An và Bình lên cùng một toa, ngoài ra không có học sinh nào khác lên toa này.

□

**BÀI 34.** Có bao nhiêu số tự nhiên có đúng năm chữ số, sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước?

**Lời giải.**

Vì chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước nên các chữ số phải khác 0. Trước tiên ta sẽ đếm số các số có 5 chữ số đôi một khác nhau và khác 0.

- Có 9 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.
- Có 8 cách chọn chữ số hàng nghìn.
- Có 7 cách chọn chữ số hàng trăm.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$  có 5 chữ số đôi một khác nhau và khác 0.

Nhận thấy, với một bộ 5 chữ số nào đó thì sẽ có  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  cách sắp xếp vị trí cho các chữ số đó, tuy nhiên chỉ có 1 cách xếp các chữ số thoả mãn.

Vậy số các số thoả mãn bài toán là  $\frac{15120}{120} = 126$  số.

□

**BÀI 35.** Có 20 thẻ đựng trong hai hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ (mỗi hộp một thẻ) sao cho tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn.

**Lời giải.**

Có 10 cách chọn tám thẻ ở hộp thứ nhất và có 10 cách chọn tám thẻ ở hộp thứ hai, nên có  $10 \cdot 10 = 100$  cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ.

Có 5 cách chọn tám thẻ có số lẻ ở hộp thứ nhất và có 5 cách chọn tám thẻ có số lẻ ở hộp thứ hai, nên có  $5 \cdot 5 = 25$  cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ và tích hai số ghi trên hai thẻ là một số lẻ.

Vậy có  $100 - 25 = 75$  cách chọn hai thẻ, mỗi hộp một thẻ và tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn.

□

**BÀI 36.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số phân biệt khác nhau được lấy từ tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Hỏi  $S$  có bao nhiêu phần tử? Có bao nhiêu cách lấy hai phần tử từ tập  $S$  sao cho tích của hai phần tử này là một số chẵn?

**Lời giải.**

- Có 6 cách chọn chữ số hàng chục.
- Có 6 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy tập  $S$  có  $6 \cdot 6 = 36$  phần tử.

Ta sẽ đếm xem trong tập  $S$  có bao nhiêu số lẻ.

- Có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục.

Vậy trong tập  $S$  có  $3 \cdot 5 = 15$  số lẻ.

Có  $36 \cdot 35 = 1260$  cách chọn ra hai số từ tập  $S$  và có  $15 \cdot 14 = 210$  cách chọn ra hai số từ tập  $S$  có tích là số lẻ nên có  $1260 - 210 = 1050$  cách chọn ra hai số từ tập  $S$  có tích là số chẵn.  $\square$

**BÀI 37.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm tám chữ số phân biệt sao cho tổng của tám chữ số này chia hết cho 9.

**Lời giải.**

Vì số được lập chia hết cho 9 nên tổng hai chữ số không xuất hiện trong số được lập phải bằng 9.

Trường hợp 1: Hai chữ số 0 và 9 không xuất hiện trong số được lập.

— Có 8 cách chọn chữ số hàng chục triệu.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng triệu.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$  số có 8 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Hai chữ số không xuất hiện trong số được lập là (1; 8) hoặc (2; 7) hoặc (3; 6) hoặc (4; 5).

— Có 4 cách chọn hai chữ số không xuất hiện.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng chục triệu.

— Có 7 cách chọn chữ số hàng triệu.

— Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm nghìn.

— Có 5 cách chọn chữ số hàng chục nghìn.

— Có 4 cách chọn chữ số hàng nghìn.

— Có 3 cách chọn chữ số hàng trăm.

— Có 2 cách chọn chữ số hàng chục.

— Có 1 cách chọn chữ số hàng đơn vị.

Vậy có  $4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 141120$  số có 8 chữ số thoả mãn trong trường hợp này.

Vậy có tổng cộng  $40320 + 141120 = 181440$  số có 8 chữ số thoả mãn.  $\square$

## BÀI 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1 (Giai thừa).** Cho số tự nhiên  $n \geq 1$ , ta định nghĩa  $n$  giai thừa, ký hiệu bởi  $n!$ , là

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

**Tính chất 1.** Giai thừa có các tính chất sau đây:

①  $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$

② Quy ước  $0! = 1.$

**Định nghĩa 2 (Hoán vị).** Cho tập hợp  $A$  có  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ).

① Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của  $n$  phần tử tập hợp  $A$  là một hoán vị của  $n$  phần tử này.

② Số các hoán vị của  $n$  phần tử tập hợp  $A$  được ký hiệu bởi  $P_n$ .

 Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử.  
 Ví dụ: Hoán vị của 3 phần tử  $a, b, c$  gồm:  $a, b, c$ ;  $a, c, b$ ;  $b, a, c$ ;...

**Định lý 1 (Số các hoán vị).** Số các hoán vị của  $n$  phần tử được tính theo công thức:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

**Định nghĩa 3 (Chỉnh hợp).** Cho tập hợp  $S$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Kết quả của việc lấy  $k$  phần tử khác nhau từ  $n$  phần tử của tập hợp  $S$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho.

**Định lý 2.** Số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử ( $1 \leq k \leq n$ ) là:

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

 Khi giải bài toán chọn trên một tập  $X$  có  $n$  phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:

- Chỉ chọn  $k$  phần tử trong  $n$  phần tử của  $X$  ( $1 \leq k < n$ ).
- Có sắp thứ tự các phần tử đã chọn.

**Định nghĩa 4 (Tổ hợp).** Cho tập hợp  $A$  có  $n$  ( $n \geq 1$ ) phần tử và số nguyên  $k$  với  $1 \leq k \leq n$ . Mỗi tập con của  $A$  có  $k$  phần tử được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử của  $A$  (hay một tổ hợp chập  $k$  của  $A$ ). Ký hiệu  $C_n^k$ .

**Định lý 3.** Số tổ hợp chập  $k$  của một tập hợp có  $n$  phần tử ( $1 \leq k \leq n$ ) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

 Với quy ước  $C_n^0 = 1$  thì với mọi số nguyên  $k$  thỏa  $0 \leq k \leq n$  ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

**Tính chất 2.**  $C_n^k = C_n^{n-k}$  với  $0 \leq k \leq n$ .

**Tính chất 3 (Công thức Pascal).**  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$  với  $1 \leq k \leq n$ .

## **VÍ DỤ MINH HỌA**

**VÍ DỤ 1.** Giả sử muốn xếp 3 bạn  $A, B, C$  ngồi vào bàn dài có 3 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho mỗi bạn ngồi một ghế?

**Lời giải.**

Mỗi cách xếp chỗ cho 3 bạn trên được gọi là một hoán vị vị trí của 3 bạn.  
 Như vậy ta có số cách xếp chỗ là  $P_3 = 3! = 6$  cách. □

**VÍ DỤ 2.** Có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lý và 3 quyển sách Hóa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp số sách đó lên một kệ dài trong mỗi trường hợp sau

- ① Các quyển sách được xếp tùy ý?
- ② Các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau?

**Lời giải.**

- ① Số cách xếp các quyển sách tùy ý là một hoán vị của 12 phần tử, nên ta có  $P_{12}$  cách xếp.
- ② Vì các quyển sách cùng môn được xếp cạnh nhau nên ta coi các môn là một phần tử, như vậy ta có  $P_3$  cách xếp.

Ngoài ra trong từng môn, ta cũng có hoán vị của từng cuốn sách, do đó ta có  $P_5 \cdot P_4 \cdot P_3$  cách xếp. Vậy ta có  $P_5 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_3$  cách xếp sách thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

**VÍ DỤ 3.** Giả sử muốn chọn 3 bạn trong 5 bạn  $A, B, C, D, E$  và sắp 3 bạn này vào một bàn dài. Hỏi có bao nhiêu cách?

**Lời giải.**

Mỗi cách xếp 3 bạn trong 5 bạn vào một bàn dài là một chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử, nên ta có  $A_5^3$  cách. □

**VÍ DỤ 4.** Cho tập  $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số, sao cho

- ① Đôi một khác nhau?
- ② Số tự nhiên lẻ và đôi một khác nhau?

**Lời giải.**

- ① Mỗi cách chọn 4 số khác nhau từ 7 số là một chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử. Do đó ta có  $A_7^4$  số được tạo thành.
- ② Để số cần lập là số tự nhiên lẻ thì chữ số tận cùng là số lẻ, khi đó ta có 4 cách chọn chữ số tận cùng. Mỗi cách chọn 3 chữ số còn lại là một chỉnh hợp chập 3 của 6 phần tử nên ta có  $A_6^3$  cách. Vậy có  $4 \cdot A_6^3$  số được tạo thành.

□

**VÍ DỤ 5.** Có bao nhiêu cách lập một ban chấp hành gồm 3 người trong một chi đoàn có 14 đoàn viên?

**Lời giải.**

Mỗi cách lập một ban chấp hành gồm 3 người là một tổ hợp chập 3 của 14 nên ta có  $C_{14}^3$  cách. □

**VÍ DỤ 6.** Vòng chung kết bóng đá Euro có 24 đội bóng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách dự đoán 4 đội bóng vào chung kết?

**Lời giải.**

Mỗi cách dự đoán 4 đội vào chung kết là một tổ hợp chập 4 của 24 nên ta có  $C_{24}^4$  cách. □

**VÍ DỤ 7.** Một lớp học có 30 học sinh, cần lập ra một tổ công tác gồm 5 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách?

**Lời giải.**

Mỗi cách lập ra tổ công tác là một tổ hợp chập 5 của 30 nên ta có  $C_{30}^5$  cách. □

**VÍ DỤ 8.** Trong không gian, cho tập hợp  $X$  gồm 10 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi:

- ① Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành?
- ② Có bao nhiêu tam giác được tạo thành?

**Lời giải.**

- ① Để tạo thành đường thẳng, ta chọn 2 điểm trong 10 điểm nên số đường thẳng được tạo thành là  $C_{10}^2$ .
- ② Để tạo thành tam giác, ta chọn 3 điểm trong 10 điểm nên số tam giác được tạo thành là  $C_{10}^3$ .

□

## 📌 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### 📌 DẠNG 2.1. Giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

— **Bước 1.** Tìm điều kiện. Ta có các điều kiện thường gặp sau:

| Các kí hiệu và công thức                                    | Điều kiện                                                          |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| ◦ $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ | $n \in \mathbb{N}$                                                 |
| ◦ $P_n = n!$                                                | $n \in \mathbb{N}$                                                 |
| ◦ $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$                               | $\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$ |
| ◦ $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$                             | $\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$ |
| ◦ $C_n^k = C_n^{n-k}$                                       | $\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$ |
| ◦ $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$                           | $\begin{cases} n, k \in \mathbb{N} \\ 1 \leq k \leq n \end{cases}$ |

— **Bước 2.** Thu gọn dựa vào những công thức trên và đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số này tìm được biến.

— **Bước 3.** So với điều kiện để nhận những giá trị cần tìm.

### 1. Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Thu gọn biểu thức  $D = \frac{7!4!}{10!} \left( \frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!} \right)$ .

**Lời giải.**

$$D = \frac{7!4!}{10!} \left( \frac{8!}{3!5!} - \frac{9!}{2!7!} \right) = \frac{4!}{8 \cdot 9 \cdot 10} \left( \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} - \frac{8 \cdot 9}{2!} \right) = \frac{4 \cdot 6 \cdot 7}{9 \cdot 10} - \frac{3 \cdot 4}{10} = \frac{28}{15} - \frac{6}{5} = \frac{2}{3}.$$

□

**VÍ DỤ 2.** Giải phương trình  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72 \Leftrightarrow (n+1)n = 72 \Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ (nhận)} \\ n = -9 \text{ (loại)} \end{cases}$$

□

**VÍ DỤ 3.** Giải các phương trình sau:

①  $P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8;$

②  $C_{2n}^3 = 20C_n^2;$

③  $C_x^x + 2C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3};$

④  $\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6};$

⑤  $72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72.$

**Lời giải.**

①

$$P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8 \Leftrightarrow 2! \cdot x^2 - 3! \cdot x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4. \end{cases}$$

② Điều kiện:  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} C_{2n}^3 = 20C_n^2 &\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{20n(n-1)}{2} \\ &\Leftrightarrow (2n-1)(2n-2) = 30(n-1) \left( \text{vì } n \geq \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow 2n^2 - 36n + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ (nhận)} \\ n = 1 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

③ Điều kiện:  $x \leq 5, x \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} C_x^x + 2C_x^{x-1} + C_x^{x-2} &= C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow C_x^x + C_x^{x-1} + C_x^{x-1} + C_x^{x-2} = C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow C_{x+1}^x + C_{x+1}^{x-1} = C_{x+2}^{2x-3} \\ &\Leftrightarrow C_{x+2}^x = C_{x+2}^{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x-3 \\ x = x+2-(2x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{5}{2} \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

④ Điều kiện:  $x \geq 1, x \in \mathbb{N}$ .

$$\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x+1)!} - \frac{(x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2. \end{cases}$$

⑤ Điều kiện:  $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$ .

$$72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72 \Leftrightarrow 72 \cdot \frac{x!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 72 \Leftrightarrow 72x - (x+1)x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^3 - 73x + 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ (nhận)} \\ x = 1 \text{ (loại)} \\ x = -9 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

□

**VÍ DỤ 4.** Giải phương trình  $\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \leq 5, x \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} &= \frac{14}{C_7^x} \Leftrightarrow \frac{5}{\frac{5!}{x!(5-x)!}} - \frac{2}{\frac{6!}{x!(6-x)!}} = \frac{14}{\frac{7!}{x!(7-x)!}} \Leftrightarrow \frac{5}{1} - \frac{2}{(6-x)} = \frac{14}{(6-x)(7-x)} \\ &\Leftrightarrow 5 - \frac{2(6-x)}{6} = \frac{14(7-x)(6-x)}{6 \cdot 7} \Leftrightarrow 15 - (6-x) = (7-x)(6-x) \Leftrightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 5.** Giải các bất phương trình sau:

①  $A_n^3 + 15 < 15n;$

②  $A_n^3 + 5A_n^2 < 21n;$

③  $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0.$

**Lời giải.**

① Điều kiện:  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} A_n^3 + 15 < 15n &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 15 < 15n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 15 < 15n \\ &\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 13n + 15 < 0 \Leftrightarrow (n-5)(n+3)(n-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < -3 \\ 1 < n < 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Giao với điều kiện ta được  $3 \leq n < 5, n \in \mathbb{N}$  hay  $n = 3$  hoặc  $n = 4$ .

② Điều kiện:  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} A_n^3 + 5A_n^2 < 21n &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 5 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} < 21n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 5n(n-1) < 21n \\ &\Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 24n < 0 \Leftrightarrow n(n-4)(n+6) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n < -6 \\ 0 < n < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Giao với điều kiện ta được  $3 \leq n < 4, n \in \mathbb{N}$  hay  $n = 3$ .

③ Điều kiện:  $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} 2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 - 20 < 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} - 20 < 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) - 20 < 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 20 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Giao với điều kiện ta được  $2 \leq x < \frac{5}{2}, x \in \mathbb{N}$  hay  $x = 2$ .

□

**VÍ DỤ 6.** Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}; & \quad \textcircled{2} \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2}; \\ \textcircled{3} \begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}. & \end{aligned}$$

**Lời giải.**

① Điều kiện:  $x \geq y \geq 0$  và  $x, y \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \frac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \frac{20}{y!} = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 20 \\ y! = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 20 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (nhận)} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

② Điều kiện:  $x \geq y + 1, y \geq 0$  và  $x, y \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)!}{6 \cdot y!(x-y+1)!} = \frac{x!}{5(y+1)!(x-y-1)!} \\ \frac{(x+1)!}{6 \cdot y!(x-y+1)!} = \frac{x!}{2(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{6(x-y+1)(x-y)} = \frac{1}{5(y+1)} \\ \frac{x+1}{3y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3y-1+1}{6(3y-1-y+1)(3y-1-y)} = \frac{1}{5(y+1)} \\ x = 3y-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-1 \\ \frac{1}{2 \cdot 2(2y-1)} = \frac{1}{5(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y-1 \\ 8y-4 = 5y+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

③ Điều kiện:  $x \geq y, y \geq 2, x, y \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot \frac{x!}{(y-2)!(x-y+2)!} = 3 \cdot \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \\ \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x-y+2} = \frac{3}{y-1} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8y = -11 \\ x-2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (nhận)} \end{aligned}$$

□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Thu gọn biểu thức  $D = \frac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \frac{2009}{2011}$ .

**Lời giải.**

$$D = \frac{2011!}{2010! - 2009!} \cdot \frac{2009}{2011} = \frac{2011 \cdot 2010 \cdot 2009!}{2009!(2010 - 1)} \cdot \frac{2009}{2011} = 2010.$$

□

**BÀI 2.** Giải phương trình  $\frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $x \geq 1, x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x-1)!(x-1)}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6x-6 = x^2+x \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} \text{ (nhận)}.$$

□

**BÀI 3.** Giải phương trình  $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$ .

**Lời giải.**

Điều kiện:  $0 \leq x \leq 4$  và  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x!(4-x)!}{4!} - \frac{x!(5-x)!}{5!} = \frac{x!(6-x)!}{6!} \Leftrightarrow \frac{x!(4-x)!}{4!} \left[ 1 - \frac{5-x}{5} - \frac{(6-x)(5-x)}{6 \cdot 5} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6(5-x) - (6-x)(5-x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 17x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (nhận)} \\ x=15 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

□

**BÀI 4.** Giải các phương trình sau:

①  $A_n^3 = 20n$ ;

②  $4C_x^8 = 5C_{x-1}^7$ ;

③  $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15)$ ;

④  $2C_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$ ;

⑤  $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$ .

**Lời giải.**

① Điều kiện:  $n \geq 3$  và  $n \in \mathbb{N}$ .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 20n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 20n$$

$$\Leftrightarrow n(n^2 - 3n + 2 - 20) = 0 \Leftrightarrow n(n^2 - 3n - 18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \text{ (loại)} \\ n=6 \text{ (nhận)} \\ n=-3 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

② Điều kiện:  $x \geq 8$  và  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$4 \cdot \frac{x!}{8!(x-8)!} = 5 \cdot \frac{(x-1)!}{7!(x-8)!} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{8} = 5 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (nhận)}.$$

③ Điều kiện:  $n \geq 3$  và  $n \in \mathbb{N}$ .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{n!}{(n-3)!} + 5 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} = 2(n+15) \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + 5n(n-1) = 2n+30$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 2n^2 - 5n - 30 = 0 \Leftrightarrow (n-3)(n^2 + 5n + 10) = 0 \Leftrightarrow n = 3 \text{ (nhận)}.$$

- ④ Điều kiện:  $x \geq 3$  và  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{(x-1)!}{2!(x-3)!} - x = 79 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) - x = 79 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 77 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \text{ (nhận)} \\ x = -7 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

- ⑤ Điều kiện:  $x \geq 2$  và  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{(2x)!}{(2x-2)!} \Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (nhận)} \\ x = -5 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

□

**BÀI 5.** Giải các bất phương trình sau:

①  $A_n^3 < A_n^2 + 12;$

②  $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30;$

③  $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10.$

**Lời giải.**

- ① Điều kiện:  $n \geq 3$  và  $n \in \mathbb{N}$ .

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-3)!} &< \frac{n!}{(n-2)!} + 12 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) < n(n-1) + 12 \\ &\Leftrightarrow n^3 - 4n^2 + 3n - 12 < 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2 + 3) < 0 \Leftrightarrow n < 4. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra  $3 \leq n < 4$ , hay  $n = 3$ .

- ② Điều kiện:  $x \geq 2$  và  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$2 \cdot \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} + 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} < 30 \Leftrightarrow x(x+1) + 3x(x-1) < 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 30 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra  $2 \leq x < 3$ , hay  $x = 2$ .

- ③ Điều kiện:  $x \geq 3$  và  $x \in \mathbb{N}$ .

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} &\leq \frac{6}{x} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2x(2x-1) - x(x-1) \leq (x-1)(x-2) + 10 \\ &\Leftrightarrow x(2x-1) - x^2 + x \leq x^2 - 3x + 2 + 10 \Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra  $3 \leq x \leq 4$ , hay  $x = 3$  hoặc  $x = 4$ .

□

**BÀI 6.** Giải các hệ phương trình sau:

①  $\begin{cases} 2A_x^y + C_x^y = 180 \\ A_x^y - C_x^y = 36 \end{cases};$

②  $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3;$

③  $\begin{cases} 7A_{5x}^{y-3} = A_{5x}^{y-2} \\ 4C_{5x}^{y-2} = 7C_{5x}^{y-3} \end{cases}.$

**Lời giải.**

- ① Điều kiện:  $y \leq x$  và  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 1$ .

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} A_x^y = 72 \\ C_x^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_x^y \cdot y! = 72 \\ C_x^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y! = 2 \\ C_x^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ C_x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

② Điều kiện:  $n \geq m \geq 1$  và  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m = 1 \\ C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(n+1)!}{(m+1)(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m+1)!}{(n+1)!} = 1 \\ \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \cdot \frac{(m-1)!(n+2-m)!}{(n+1)!} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n-m+1}{m+1} = 1 \\ \frac{n+2-m}{m} = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-m+1 = m+1 \\ 3n+6-3m = 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-2m = 0 \\ 3n-8m = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

③ Điều kiện:  $5x \geq y-2$ ,  $y \geq 3$  và  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x \geq 1$ .

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{(5x)!}{(5x-y+3)!} = \frac{(5x)!}{(5x-y+2)!} \\ 4 \cdot \frac{(5x)!}{(5x-y+2)!(y-2)!} = 7 \cdot \frac{(5x)!}{(5x-y+3)!(y-3)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{(5x-y+3)} = 1 \\ \frac{4}{(y-2)} = \frac{7}{(5x-y+3)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y+3 = 7 \\ 4(5x-y+3) = 7(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y = 4 \\ 20x-11y = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

□

### **3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 7.** Thu gọn các biểu thức sau:

①  $D = \frac{5!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{(m-1)!3!};$

②  $D = \frac{7!}{(m^2+m)} \cdot \frac{(m+2)!}{4!(m-1)!};$

③  $D = \frac{6!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{4!(m-1)!};$

④  $D = \frac{(n+1)C_n^2}{n(n^2-1)}.$

**BÀI 8.** Giải các phương trình sau:

①  $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3;$

②  $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} = 10.$

**BÀI 9.** Giải các phương trình sau:

①  $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10};$

②  $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1};$

③  $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n;$

④  $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x;$

⑤  $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101;$

⑥  $2C_{x-1}^2 - C_x^1 = 79;$

⑦  $\frac{P_{n+2}}{A_{n-1}^{n-4} \cdot P_3} = 210;$

⑧  $\frac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \frac{225}{11};$

⑨  $x^2 - C_4^x \cdot x + C_3^2 \cdot C_3^1 = 0;$

⑩  $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1);$

⑪  $6C_x^2 + 6C_x^3 = 7x^2 - 7x;$

⑫  $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x;$

⑬  $2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1};$

⑭  $2P_n + 6A_n^2 - P_n \cdot A_n^2 = 12.$

**BÀI 10.** Giải các phương trình sau:

①  $\frac{1}{C_x^1} - \frac{1}{C_{x+1}^2} = \frac{7}{6C_{x+4}^1};$

②  $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 = 0;$

③  $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x;$

④  $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \dots + C_x^{x-10} = 1023.$

**BÀI 11.** Giải các bất phương trình sau:

①  $4 \leq n! + (n+1)! < 50$ ;

③  $n^3 + \frac{n!}{(n-2)!} \leq 10$ ;

⑤  $\frac{A_{x+4}^4}{(x+1)!} \leq \frac{42}{P_x}$ ;

⑦  $\frac{12}{x} C_x^3 - 3A_x^2 \geq \frac{1}{2} A_{2x}^2 - 81$ ;

⑨  $\frac{A_{n+1}^{n-2}}{C_{n-1}^2} \geq 2P_n$ ;

②  $72A_x^1 - A_{x+1}^3 \leq 72$ ;

④  $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$ ;

⑥  $\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} \leq 60A_{n+3}^{k+2}$ ;

⑧  $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4} A_{x-2}^2 < 0$ ;

⑩  $\frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$ .

**BÀI 12.** Giải các hệ phương trình sau:

①  $\begin{cases} \frac{A_y^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = 147; \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$ ;

③  $\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3}; \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} \end{cases}$ ;

⑤  $\begin{cases} \frac{A_y^{x+1}}{P_x} + C_y^{y-x-1} = 126; \\ P_{x+2} = 720 \end{cases}$ ;

⑦  $\begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases}$ ;

②  $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$ ;

④  $\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_{n+1}^m \\ \frac{C_{n+1}^m}{C_{n+1}^{m-1}} = \frac{5}{3} \end{cases}$ ;

⑥  $\begin{cases} C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \frac{5}{4} A_{n-2}^2; \\ C_{n+1}^{n-4} \geq \frac{7}{15} A_{n+1}^3 \end{cases}$ ;

⑧  $\begin{cases} (C_x^{x-1})^2 + 2(C_y^{y-1})^2 = 3A_x^{x-1} \cdot C_y^{y-1} \\ 2(C_x^{x-1})^3 = A_y^{y-1} + 1 \end{cases}$ .

 **DẠNG 2.2. Các bài toán sử dụng hoán vị**

 **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh  $A, B, C, D, E$  vào một ghế dài sao cho:

- ① Bạn  $C$  ngồi chính giữa?
- ② Hai bạn  $A$  và  $E$  ngồi ở hai đầu ghế?

**Lời giải.**

- ① Xếp bạn  $C$  ngồi chính giữa: có 1 cách.  
Xếp 4 bạn còn lại vào 4 vị trí còn lại: có  $4!$  cách.  
Vậy có  $1 \times 4! = 24$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ② Xếp hai bạn  $A$  và  $E$  ở hai đầu ghế: có  $2!$  cách.  
Xếp 3 bạn còn lại vào 3 vị trí còn lại: có  $3!$  cách.  
Vậy có  $2! \times 3! = 12$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

**VÍ DỤ 2.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 12 học sinh đứng thành một hàng để chụp ảnh lưu niệm, biết rằng trong đó phải có 5 em định trước đứng kề nhau?

**Lời giải.**

Chưa kể thứ tự giữa 5 em trong nhóm “định trước”, để xếp 5 em này đứng kề nhau ta có  $8!$  cách xếp;  
Lại có  $5!$  cách xếp 5 em này.  
Vậy có tất cả  $5! \times 8! = 4838400$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

**VÍ DỤ 3.** Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên:

- ① Một cách tùy ý.
- ② Theo từng môn?
- ③ Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa?

**Lời giải.**

- ① Trên kệ có tất cả  $5 + 4 + 3 = 12$  quyển sách.  
Mỗi cách xếp thứ tự 12 quyển sách chính là một hoán vị của 12 phần tử.  
Do đó có tất cả  $12! = 479001600$  cách xếp.
- ② Xem mỗi loại sách là một khối thống nhất, ta có  $3!$  cách xếp 3 khối này.  
Có  $5!$  cách xếp sách toán, có  $4!$  cách xếp sách Lí và có  $3!$  cách xếp sách Văn.  
Vậy có tất cả  $3! \times 5! \times 4! \times 3! = 103680$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ③ Xem mỗi loại sách là một khối thống nhất, ta có  $2!$  cách xếp hai môn còn lại ở hai bên sách Toán;  
Ứng với mỗi cách, có  $5!$  cách xếp sách Toán; có  $4!$  cách xếp sách Lí và có  $3!$  cách xếp sách Văn.  
Do đó có  $2! \times 5! \times 4! \times 3! = 34560$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

**VÍ DỤ 4.** Hỏi có bao nhiêu cách xếp 6 cặp vợ chồng ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho:

- ① Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?
- ② Mỗi bà đều ngồi cạnh chồng của mình?

**Lời giải.**

- ① Cố định một người, có  $5!$  cách xếp 5 người cùng giới còn lại vào 5 vị trí còn lại;  
Có  $6!$  cách xếp 6 người khác giới còn lại vào các vị trí xen kẽ.  
Vậy có tất cả  $5! \times 6! = 86400$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ② Ta tiến hành theo hai công đoạn:  
Công đoạn 1: Xếp 6 người chồng xung quanh một bàn tròn: có  $5!$  cách.  
Công đoạn 2: Xếp vợ ngồi gần chồng và hai vợ chồng có thể đổi vị trí cho nhau: có  $2^6$  cách.  
Vậy có tất cả  $5! \times 2^6 = 7680$  cách.

□

**VÍ DỤ 5.** Cho tập hợp  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số bằng 9?

**Lời giải.**

Các bộ ba số khác nhau trong  $E$  có tổng bằng 9 là

- Trường hợp 1:  $1 + 2 + 6 = 9$ .
- Trường hợp 2:  $1 + 3 + 5 = 9$ .
- Trường hợp 3:  $2 + 3 + 4 = 9$ .

Mỗi bộ số đó lập được  $3!$  số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau.

Vậy có  $3 \times 3! = 18$  số.

□

**VÍ DỤ 6.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

**Lời giải.**

Có  $6! = 720$  số có sáu chữ số khác nhau được lập từ các chữ số đã cho.

Ta xác định các số có 6 chữ số mà 1 và 6 đứng cạnh nhau.

- Có 5 cách chọn 2 vị trí cạnh nhau trong 6 vị trí.
- Có  $2!$  cách sắp xếp hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí đó.
- Có  $4!$  cách sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại.

Suy ra có  $5 \times 4! \times 2! = 240$  các số mà hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.

Vậy số các số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau là  $720 - 240 = 480$ . □

**VÍ DỤ 7.** Cho các số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Có thể lập được bao nhiêu số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

**Lời giải.**

Xét dãy số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5.

Nếu coi như dãy gồm các chữ số khác nhau thì ta lập được  $7 \times 7! = 35280$  số.

Ba chữ số 5 có số lần các số lặp lại là  $3!$ .

Vậy có  $\frac{35280}{3!} = 5880$  số gồm tám chữ số trong đó chữ số 5 lặp lại ba lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào 2 dãy ghế trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

- ① Nam và nữ được xếp tùy ý?
- ② Nam một dãy ghế, nữ một dãy ghế?

**Lời giải.**

- ① Có cả thảy 10 người gồm nam và nữ.  
Do đó có  $10!$  cách xếp tùy ý 10 người này vào 10 ghế.
- ② Chưa kể thứ tự giữa các nam và thứ tự giữa các nữ, có  $2!$  cách xếp nam vào một dãy và nữ vào một dãy.  
Có  $5!$  cách xếp nam,  $5!$  cách xếp nữ.  
Vậy có  $2! \times 5! \times 5! = 28800$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**BÀI 2.** Cho một bàn dài có 10 ghế và 10 học sinh trong đó có 5 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh sao cho:

- ① Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?
- ② Những học sinh cùng giới thì ngồi cạnh nhau?

**Lời giải.**

- ① Có  $2!$  cách lựa chọn nam hoặc nữ đứng ngoài cùng tính từ bên trái tính qua phải (hoặc từ phải qua trái);  
Có  $5!$  cách xếp 5 học sinh nam, có  $5!$  cách xếp 5 học sinh nữ.  
Vậy có  $2! \times 5! \times 5! = 28800$  cách.
- ② Chưa kể thứ tự giữa các học sinh cùng giới thì có  $2!$  cách xếp;  
Ứng với mỗi cách xếp trên, có  $5!$  cách xếp nam và  $5!$  cách xếp nữ.  
Vậy có  $2! \times 5! \times 5! = 28800$  cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

**BÀI 3.** Cho tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau được lấy từ tập  $A$  sao cho tổng các chữ số này bằng 14?

**Lời giải.**

Các bộ bốn số khác nhau trong  $A$  có tổng bằng 14 là

- Trường hợp 1:  $1 + 2 + 5 + 6 = 14$ .
- Trường hợp 2:  $1 + 3 + 4 + 6 = 14$ .
- Trường hợp 3:  $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ .

Mỗi bộ số đó lập được  $4!$  số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau.

Vậy có  $3 \times 4! = 72$  số. □

**BÀI 4.** Cho hai tập  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Có bao nhiêu số gồm sáu chữ số phân biệt sao cho:

- ① Hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau được lập từ tập  $A$ ?
- ② Chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3 được lập từ tập  $B$ ?

**Lời giải.**

- ① Mỗi số có 6 chữ số khác nhau được lập từ  $A$  là một cách sắp xếp 6 chữ số của  $A$  vào 6 vị trí.

- Có 5 cách chọn 2 vị trí cạnh nhau trong 6 vị trí.
- Có  $2!$  cách sắp xếp hai chữ số 1 và 2 vào 2 vị trí đó.
- Có  $4!$  cách sắp xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại.

Suy ra có  $5 \times 4! \times 2! = 240$  các số mà hai chữ số 1 và 6 đứng cạnh nhau.

- ② Coi hai chữ số 2, 3 đứng cạnh nhau như một chữ số là  $x$ .

- Từ 5 chữ số 0, 1,  $x$ , 4, 5 lập được  $4 \times 4! = 96$  số.
- Có 2 cách đổi vị trí hai chữ số 2, 3.

Vậy có  $2 \times 4 \times 4! = 192$  số. □

**BÀI 5.** Từ tập hợp  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau?

**Lời giải.**

Xét các trường hợp sau:

- ① Trường hợp chữ số 0 đứng cuối.

- Có 2 cách chọn vị trí cho bộ ba chữ số 1, 2, 3.
- Có  $3!$  cách xếp vị trí cho ba chữ số 1, 2, 3.
- Có 3 cách chọn thêm một số trong ba số 4, 5, 6 và xếp vào vị trí còn lại.

Suy ra có  $2 \times 3! \times 3 = 36$  số.

- ② Trường hợp chữ số 5 đứng cuối. Coi 3 chữ số 1, 2, 3 đứng cạnh nhau là một chữ số  $x$ . Khi đó số cần lập là số có 3 chữ số dạng  $\overline{ab5}$  trong đó có chữ số  $x$ .

- Nếu  $a = x$  thì có 3 cách chọn  $b \in \{0, 4, 6\}$ .
- Nếu  $b = x$  thì có 2 cách chọn  $a \in \{4, 6\}$ .

Suy ra có 5 chữ số sao cho luôn có mặt chữ số  $x$  và chữ số 5 đứng cuối.

Có  $3!$  cách xếp vị trí cho ba chữ số 1, 2, 3.

Do đó có  $5 \times 3! = 30$  số.

Vậy có  $36 + 30 = 66$  số thỏa mãn. □



### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 6.** Một trường trung học phổ thông có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 20 học sinh trên thành một hàng ngang để đón đoàn đại biểu, nếu:

- ① Các học sinh được xếp bất kì?
- ② Các học sinh trong cùng một khối phải đứng kề nhau?

**BÀI 7.** Xếp 6 học sinh  $A, B, C, D, E, F$  vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

- ① 6 học sinh này ngồi bất kì?
- ②  $A$  và  $F$  luôn ngồi ở hai đầu ghế?

- ③  $A$  và  $F$  luôn ngồi cạnh nhau?
- ④  $A, B, C$  luôn ngồi cạnh nhau?
- ⑤  $A, B, C, D$  luôn ngồi cạnh nhau?

**BÀI 8.** Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn của các nước gồm: Mỹ 5 người, Nga 5 người, Anh 4 người, Pháp 6 người, Đức 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách xếp cho mọi thành viên sao cho người cùng quốc tịch ngồi gần nhau?

**BÀI 9.** Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:

- ① Bắt đầu bằng chữ số 5?
- ② Không bắt đầu bằng chữ số 1?
- ③ Bắt đầu bằng 23?
- ④ Không bắt đầu bằng 234?

**BÀI 10.** Cho tập  $X = \{1; 2; 3; 4; 7\}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ  $X$ ?

**BÀI 11.** Cho tập hợp  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau, biết rằng tổng của ba chữ số số này bằng 18.

### **DẠNG 2.3. Các bài toán sử dụng chỉnh hợp**

Sử dụng phối hợp quy tắc nhân, quy tắc cộng và công thức tính chỉnh hợp  $A_n^k = \frac{k!}{(n-k)!}$ .

## **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Trong không gian cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Từ các điểm trên ta lập các véc-tơ khác  $\vec{0}$ . Hỏi có thể có được bao nhiêu véc-tơ?

### **Lời giải.**

Chọn một cách có thứ tự 2 trong 4 điểm  $A, B, C, D$  ta được một véc-tơ.

Do đó số cách chọn véc-tơ từ các điểm trên là  $A_4^2$  cách. □

**VÍ DỤ 2.** Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang, sao cho hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau?

### **Lời giải.**

Giả sử các em nam ở vị trí  $|$  như hình sau:

$| * | * | * | * | * | * |$

Khi đó ta cần sắp xếp các em nữ vào 3 trong 6 vị trí  $*$  để thỏa yêu cầu bài toán.

Do đó số cách sắp xếp 3 em nữ là  $A_6^3$ .

Số cách sắp xếp 7 em nam là  $7!$ .

Vậy số cách sắp xếp 10 em này là  $7! \cdot A_6^3$ . □

**VÍ DỤ 3.** Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:

- ① Ghế xếp thành hàng ngang?
- ② Ghế xếp quanh một bàn tròn?

### **Lời giải.**

① Giả sử các em nam ở vị trí | như hình sau:

| \* | \* | \* | \* | \* |

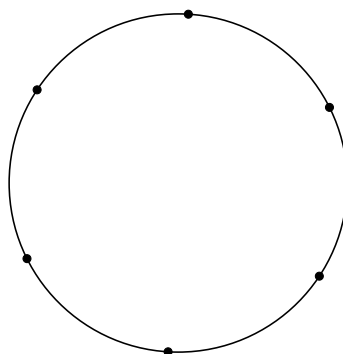
Khi đó ta cần sắp xếp các em nữ vào 4 trong 5 vị trí \* để thỏa yêu cầu bài toán.

Do đó số cách sắp xếp 4 em nữ là  $A_5^4$ .

Số cách sắp xếp 6 em nam là  $6!$ .

Vậy số cách sắp xếp 10 em này là  $6! \cdot A_5^4$ .

②



Sắp xếp em nữ vào 4 trong 6 vị trí khoảng giữa hai dấu chấm để thỏa yêu cầu bài toán.

Do đó số cách sắp xếp 4 em nữ là  $A_6^4$ .

Số cách xếp em nam thứ nhất vào bàn là 1 (vì xếp em này ngồi ở ghế nào cũng như nhau).

Số cách xếp em nam thứ hai vào bàn là 5 vì còn lại 5 ghế.

Số cách xếp em nam thứ ba vào bàn là 4.

Số cách xếp em nam thứ tư vào bàn là 3.

Số cách xếp em nam thứ năm vào bàn là 2.

Số cách xếp em nam thứ sáu vào bàn là 1.

Do đó số cách xếp các em nam vào bàn tròn là  $5!$ .

Vậy số cách sắp xếp 10 em này là  $5! \cdot A_6^4$ .

□

**VÍ DỤ 4.** Cho tập  $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ  $X$  mà chia hết cho 5?

**Lời giải.**

Xét số tự nhiên gồm năm chữ số  $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ,  $a_1 \neq 0$  thỏa yêu cầu bài toán.

— **Trường hợp 1:**  $a_5 = 0$ .

Số cách chọn  $a_1$  là 7 cách.

Số cách chọn bộ số còn lại là  $A_6^3$  cách.

Do đó số cách chọn trong trường hợp này là  $1 \cdot 7 \cdot A_6^3 = 840$  cách.

— **Trường hợp 2:**  $a_5 = 5$ .

Số cách chọn  $a_1$  là 6 cách.

Số cách chọn bộ số còn lại là  $A_6^3$  cách.

Do đó số cách chọn trong trường hợp này là  $1 \cdot 6 \cdot A_6^3 = 720$  cách.

Vậy số cách chọn các số  $x$  thỏa yêu cầu bài toán là  $840 + 720 = 1560$  cách.

□

**VÍ DỤ 5.** Cho tập  $X = \{0; 1; \dots; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau được lập từ  $X$  và bé hơn 475?

**Lời giải.**

Xét số tự nhiên gồm ba chữ số  $x = \overline{a_1a_2a_3}$ ,  $a_1 \neq 0$  thỏa yêu cầu bài toán.

— **Trường hợp 1:**  $a_1 < 4 \Rightarrow a_1 \in \{1; 2; 3\}$ .

Số cách chọn 2 chữ số còn lại là  $A_9^2$ .

Do đó số cách chọn các số  $x$  trong trường hợp này là  $3 \cdot A_9^2 = 216$  cách.

— **Trường hợp 2:**  $a_1 = 4, a_2 = 7$ .

Khi đó  $a_3 \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Do đó số cách chọn các số  $x$  trong trường hợp này là  $1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$  cách.

— **Trường hợp 3:**  $a_1 = 4, a_2 \in \{0; 1; 2; 3; 5; 6\}$ .

Số cách chọn  $a_3$  là 8 cách.

Do đó số cách chọn các số  $x$  trong trường hợp này là  $1 \cdot 6 \cdot 8 = 48$  cách.

Vậy số cách chọn các số  $x$  thỏa yêu cầu bài toán là  $216 + 4 + 48 = 268$  cách. □

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Từ 20 học sinh cần chọn ra một ban đại diện lớp gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó và 1 thư kí. Hỏi có mấy cách chọn?

**Lời giải.**

Chọn một cách có thứ tự 3 học sinh trong 20 học sinh ta chọn ra được một ban đại diện lớp.

Do đó số cách chọn một ban đại diện lớp là  $A_{20}^3$  cách. □

**BÀI 2.** Có 6 nam, 6 nữ trong đó có ba bạn tên  $A, B, C$ . Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

- ① Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau.
- ② Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
- ③ Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.
- ④ Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.
- ⑤  $A, B, C$  luôn đứng cạnh nhau.
- ⑥  $A, B$  đứng cách nhau đúng một người.

**Lời giải.**

- ① Đặt tùy ý các bạn nam có  $6!$  cách.

Giữa các bạn nam này lại có  $A_7^6$  cách chọn các bạn nữ.

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $6! \cdot A_7^6$  cách.

- ② Chọn có thứ tự 2 bạn nam ở đầu hàng và cuối hàng có  $A_6^2$  cách.

Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là  $10!$  cách.

Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $10! \cdot A_6^2$  cách.

- ③ **Trường hợp 1:** Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.

Theo câu trên ta có  $10! \cdot A_6^2$  cách xếp cho trường hợp này.

**Trường hợp 2:** Đầu hàng và cuối hàng luôn là nữ.

Chọn có thứ tự 2 bạn nữ ở đầu hàng và cuối hàng có  $A_6^2$  cách.

Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là  $10!$  cách.

Do đó có  $10! \cdot A_6^2$  cách xếp cho trường hợp này.

Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $2 \cdot 10! \cdot A_6^2$ .

- ④ **Trường hợp 1:** Đầu hàng là nam, cuối hàng là nữ thì có 6 cách chọn vị trí đầu hàng và 6 cách chọn vị trí cuối hàng.

Số cách sắp xếp 10 bạn còn lại là  $10!$  cách.

Do đó có  $6 \cdot 6 \cdot 10!$  cách xếp cho trường hợp này.

Tương tự cho trường hợp đầu hàng là nữ, cuối hàng là nam ta có  $6 \cdot 6 \cdot 10!$  cách xếp.

Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10!$  cách.

- ⑤ Coi  $A, B, C$  là một nhóm người.

Khi đó cách sắp xếp 9 người và nhóm người trên là  $10!$  cách.

Hoán vị  $A, B, C$  ta có  $3!$  cách.

Do đó số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $10! \cdot 3!$  cách.

- ⑥ Coi  $A, B$  và người ở giữa là một nhóm.

Khi đó số cách chọn người ở giữa  $A$  và  $B$  là 10 cách.

Số cách xếp 9 người còn lại và nhóm trên là  $10!$  cách.

Hoán vị  $A$  và  $B$  ta có  $2!$  cách.

Vậy số cách sắp xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $10 \cdot 10! \cdot 2!$  cách.

□

**BÀI 3.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau?

**Lời giải.**

Khoảng giữa 5 bạn nam có 5 vị trí. Sắp xếp các em nữ vào vị trí này để thỏa yêu cầu bài. Do đó số cách sắp xếp 3 em nữ là  $A_5^3$  cách.

Số cách xếp em nam thứ nhất vào bàn là 1 (vì xếp em này ngồi ở ghế nào cũng như nhau).

Số cách xếp em nam thứ hai vào bàn là 4 (vì còn lại 4 ghế).

Số cách xếp em nam thứ ba vào bàn là 3.

Số cách xếp em nam thứ tư vào bàn là 2.

Số cách xếp em nam thứ năm vào bàn là 1.

Do đó số cách xếp các em nam vào bàn tròn là  $4!$  cách.

Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu bài toán là  $4! \cdot A_5^3$  cách. □

**BÀI 4.** Cho tập  $X = \{0; 1; \dots; 9\}$ . Cho bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số được lập từ  $X$  sao cho:

- ① Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một?
- ② Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một và số đó là số lẻ?
- ③ Các chữ số ấy khác nhau từng đôi một và phải có đủ 3 chữ số 1; 2; 3?

**Lời giải.**

Xét số cần tìm là  $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ ,  $a_1 \neq 0$ .

- ① Số cách chọn  $a_1$  là 9 cách (vì  $a_1 \neq 0$ ).  
Số cách chọn bộ số còn lại là  $A_9^4$  cách.  
Vậy số cách chọn các số  $x$  thỏa yêu cầu bài là  $9 \cdot A_9^4$  cách.
- ② Số cách chọn  $a_5$  là 5 cách. (vì  $a_5 \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$ ).  
Số cách chọn  $a_1$  là 8 cách (vì  $a_1 \neq 0$  và  $a_1 \neq a_5$ ).  
Số cách chọn cho bộ số còn lại là  $A_8^3$  cách.  
Vậy số cách chọn các số  $x$  thỏa yêu cầu bài là  $5 \cdot 8 \cdot A_8^3$  cách.
- ③ Chọn 3 trong 5 vị trí của 3 chữ số 1; 2; 3 (kể cả khi  $a_1 = 0$ ) có  $A_5^3$  cách chọn.  
Chọn 2 chữ số còn lại có  $A_7^2$  cách chọn.  
Trường hợp  $a_1 = 0$ : chọn 3 trong 4 vị trí của 3 chữ số 1; 2; 3 có  $A_4^3$  cách.  
Số cách chọn số còn lại có 6 cách chọn.  
Vậy số cách chọn  $x$  thỏa yêu cầu bài là  $A_5^3 \cdot A_7^2 - 6 \cdot A_4^3$  cách. □

**BÀI 5.** Cho tập  $X = \{0; 1; 2; 3; 5; 7; 8\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 5 và không lớn hơn 4000 được lập từ  $X$ ?

**Lời giải.**

Xét số cần tìm là  $x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ,  $a_1 \neq 0$ .

Do  $x$  chia hết cho 5 nên  $a_4 \in \{0; 5\}$ .

Do  $x < 4000$  nên  $a_1 \in \{1; 2; 3\}$ .

$a_2$  có 5 cách chọn.

$a_3$  có 4 cách chọn.

Vậy số cách chọn  $x$  thỏa yêu cầu bài là  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 120$  cách. □



### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 6.** Một khay tròn đựng bánh kẹo ngày Tết có 6 ngăn hình quạt với màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó?

**BÀI 7.** Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 sẽ ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 9 học sinh đó sao cho mỗi học sinh lớp 12 ngồi giữa hai học sinh lớp 11?

**BÀI 8.** Từ các số 1; 3; 5; 6; 7 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau và lớn hơn số 6000?

**BÀI 9.** Cho tập  $X = \{0; 1; \dots; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm năm chữ số khác nhau đôi một được tạo từ  $X$  và lớn hơn 70000?

**BÀI 10.** Có thể lập được bao nhiêu số điện thoại di động có 10 chữ số bắt đầu là 0908, các chữ số còn lại khác nhau từng đôi một, đồng thời khác với 4 chữ số đầu và nhất thiết phải có mặt chữ số 6?

**BÀI 11.** Từ sáu chữ số 0; 1; 3; 5; 7; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5?

**BÀI 12.** Với sáu chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau thỏa điều kiện:

- ① Số đó là số chẵn?
- ② Số đó bắt đầu bởi 24?
- ③ Số đó bắt đầu bởi 345?

**BÀI 13.** Cho tập hợp  $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Có thể lập được bao nhiêu số  $n$  gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ  $X$  trong các trường hợp sau:

- ①  $n$  là số chẵn?
- ② Một trong ba chữ số đầu tiên phải là số 1?

**BÀI 14.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

**BÀI 15.** Cho tập  $E = \{1; 2; 3; 4; 7\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số:

- ① Đôi một khác nhau?
- ② Đôi một khác nhau và chia hết cho 3?

**BÀI 16.** Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Từ tập  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau mà phải có chữ số 0 và chữ số 3?

#### **DẠNG 2.4. Các bài toán sử dụng tổ hợp**

Sử dụng phối hợp quy tắc nhân, quy tắc cộng và công thức tính tổ hợp  $C_n^k = \frac{k!}{k! \cdot (n-k)!}$ .

#### **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Ông  $X$  có 11 người bạn. Ông muốn mời 5 người trong số họ đi chơi xa. Trong 11 người đó có 2 người không muốn gặp nhau. Hỏi ông  $X$  có bao nhiêu phương án mời 5 người bạn?

**Lời giải.**

- **Cách 1:** Giả sử hai người không muốn gặp nhau là  $A, B$ .  
Nếu chọn ra 5 người trong đó không có cả  $A$  và  $B$  thì có  $C_9^5$  cách.  
Nếu chọn ra 5 người trong đó có một trong hai người  $A, B$  thì có  $C_9^4 \cdot 2$  cách.  
Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $2C_9^4 + C_9^5 = 378$  cách.
- **Cách 2:** Chọn 5 người bất kì có  $C_{11}^5$  cách.  
Chọn 5 người trong đó có cả  $A$  và  $B$  có  $C_9^3$  cách.  
Vậy có  $C_{11}^5 - C_9^3 = 378$  cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

□

**VÍ DỤ 2.** Một nhóm có 6 học sinh nữ và 7 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ học tập có 5 học sinh, trong đó có một tổ trưởng, một tổ phó, một thủ quỹ và hai tổ viên, biết rằng tổ trưởng phải là nam và thủ quỹ phải là nữ.

**Lời giải.**

Chọn 1 bạn nam làm tổ trưởng, có  $C_7^1$  cách.  
Chọn 1 nữ làm thủ quỹ, có  $C_6^1$  cách.  
Chọn 1 bạn trong 11 bạn còn lại làm tổ phó, có  $C_{11}^1$  cách.  
Chọn 1 bạn trong 10 bạn còn lại làm tổ viên, có  $C_{10}^1$  cách.  
Theo quy tắc nhân có  $C_7^1 \cdot C_6^1 \cdot C_{11}^1 \cdot C_{10}^1$  cách thỏa mãn.

□

**VÍ DỤ 3.** Một lớp có 20 học sinh trong đó có 14 nam, 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội gồm 4 học sinh trong đó có:

- ① Số nam và số nữ bằng nhau?
- ② Ít nhất một nữ?

**Lời giải.**

- ① Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh nam, có  $C_{14}^2$  cách.  
Chọn ngẫu nhiên 2 học sinh nữ, có  $C_6^2$  cách.  
Khi đó, theo quy tắc nhân có  $C_{14}^2 \cdot C_6^2$  cách thỏa mãn.
- ② Chọn 4 học sinh bất kì có  $C_{20}^4$  cách.  
Chọn 4 học sinh trong đó không có học sinh nữ có  $C_{14}^4$  cách.  
Vậy có  $C_{20}^4 - C_{14}^4 = 3844$  cách lập đội thỏa yêu cầu bài toán.

□

**VÍ DỤ 4.** Một lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ?

**Lời giải.**

Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 1 có  $C_{50}^{10}$  cách.  
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 2 có  $C_{40}^{10}$  cách.  
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 3 có  $C_{30}^{10}$  cách.  
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 4 có  $C_{20}^{10}$  cách.  
Chọn 10 học sinh xếp vào tổ 5 có  $C_{10}^{10}$  cách.  
Theo quy tắc nhân, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $C_{50}^{10} \cdot C_{40}^{10} \cdot C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10}$ .

□

**VÍ DỤ 5.** Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn:

- ① 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ.
- ② 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

**Lời giải.**

- ① Số cách chọn một bông hồng đỏ là  $C_4^1$ .  
Số cách chọn 6 bông hồng không phải màu đỏ là  $C_8^6$ .  
Theo quy tắc nhân, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu là  $C_4^1 \cdot C_8^6 = 112$ .
- ② Bó hoa 7 bông thỏa mãn yêu cầu bài toán có thể có các trường hợp:
  - 3 bông vàng, 3 bông đỏ, 1 bông trắng: có  $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1$  cách chọn.
  - 3 bông vàng, 4 bông đỏ: có  $C_5^3 \cdot C_4^4$  cách chọn.
  - 4 bông vàng, 3 bông đỏ: có  $C_5^4 \cdot C_4^3$  cách chọn.
 Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot C_3^1 + C_5^3 \cdot C_4^4 + C_5^4 \cdot C_4^3 = 150$ .

□

**VÍ DỤ 6.** Cho tập  $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Từ tập  $X$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong mỗi số đó có đúng hai chữ số chẵn và ba chữ số lẻ?

**Lời giải.**

Trong tập  $X$  có 4 số chẵn, 4 số lẻ.  
Giả sử số có 5 chữ số, đôi một khác nhau là  $\overline{abcde}$  ( $a \neq 0$ ).  
Chọn 2 chữ số chẵn có  $C_4^2$  cách.  
Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí để xếp số chẵn có  $A_5^2$  cách.  
Chọn 3 chữ số lẻ và sắp vào 3 vị trí còn lại có  $A_4^3$  cách.  
Suy ra có  $C_4^2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^3 = 2880$  cách chọn số có đúng 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Tương tự, ta chọn các số có dạng  $\overline{0bcde}$  với  $\overline{bcde}$  thỏa mãn có đúng 1 chữ số chẵn, 3 chữ số lẻ có  $C_3^1 \cdot A_4^1 \cdot A_4^3 = 288$  số.

Vậy ta có  $2880 - 288 = 2592$  số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 1.** Một đội văn nghệ gồm 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

- ① Có đúng 2 nam trong 5 người đó?
- ② Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ trong 5 người đó?

**Lời giải.**

- ① Chọn 2 nam và 3 nữ có  $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 = 5400$  cách.
- ② Các trường hợp chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán:
  - Chọn 2 nam và 3 nữ, có  $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3$  cách.
  - Chọn 3 nam và 2 nữ, có  $C_{10}^3 \cdot C_{10}^2$  cách.
  - Chọn 4 nam và 1 nữ, có  $C_{10}^4 \cdot C_{10}^1$  cách.
 Theo quy tắc cộng, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $C_{10}^2 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{10}^1 = 12900$ . □

**BÀI 2.** Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy?

**Lời giải.**

Chọn 2 học sinh cho tổ 1 có  $C_8^2$  cách.

Chọn 2 học sinh cho tổ 2 có  $C_6^2$  cách.

Chọn 2 học sinh cho tổ 3 có  $C_4^2$  cách.

Chọn 2 học sinh cho tổ 4 có  $C_2^2$  cách.

Khi đó, số cách thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 2520$ . □

**BÀI 3.** Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

**Lời giải.**

Chọn 4 bi bất kì trong 15 b, có  $C_{15}^4 = 1365$  cách.

Các trường hợp chọn 4 bi có đủ ba màu:

◦ 2 bi đỏ, 1 bi trắng, 1 bi vàng: có  $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1$  cách.

◦ 1 bi đỏ, 2 bi trắng, 1 bi vàng: có  $C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1$  cách.

◦ 1 bi đỏ, 1 bi trắng, 2 bi vàng: có  $C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2$  cách.

Vậy có  $C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^2 \cdot C_6^1 + C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^2 = 720$  cách.

Khi đó, số cách chọn 4 bi không có đủ ba màu là  $1365 - 720 = 645$  cách. □

**BÀI 4.** Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 viên bi sao cho tổng các số trên 4 bi là số lẻ?

**Lời giải.**

Trong 11 bi đã cho, có 6 bi được đánh số lẻ, 5 bi được đánh số chẵn.

Lấy ra 4 bi, để tổng các số trên 4 bi là lẻ thì các cách có thể chọn:

◦ 1 bi lẻ, 3 bi chẵn: có  $C_6^1 C_5^3$  cách.

◦ 3 bi lẻ, 1 bi chẵn: có  $C_6^3 C_5^1$  cách.

Khi đó, số cách chọn thỏa mãn là  $C_6^1 \cdot C_5^3 + C_6^3 \cdot C_5^1 = 160$ . □

**BÀI 5.** Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

- ① Có bao nhiêu đường thẳng được tạo thành?
- ② Có bao nhiêu vectơ được tạo thành?
- ③ Có bao nhiêu tam giác được tạo thành?
- ④ Nếu trong 10 điểm trên không có 4 điểm nào đồng phẳng, thì có bao nhiêu tứ diện được tạo thành?

**Lời giải.**

- ① 2 điểm xác định được một đường thẳng nên số đường thẳng được tạo thành là  $C_{10}^2$ .
- ② 2 điểm (có kể thứ tự điểm đầu, điểm cuối) xác định một véc-tơ nên số véc-tơ được tạo thành là  $A_{10}^2$ .
- ③ 3 điểm không thẳng hàng xác định một tam giác nên số tam giác có thể tạo thành là  $C_{10}^3$ .
- ④ Bốn điểm không đồng phẳng xác định một tứ diện nên số tứ diện tạo thành là  $C_{10}^4$ .

□

**BÀI 6.** Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra ba viên bi sao cho:

- ① Ba viên bi bất kì?
- ② Tổng ba số trên ba bi chia hết cho 2?

**Lời giải.**

- ① Chọn 3 viên bất kì trong 100 viên có  $C_{100}^3$  cách.
- ② Trong 100 bi, có 50 bi đánh số chẵn, 50 bi đánh số lẻ.  
Để chọn ra 3 bi có tổng các số trên đó chia hết cho 2 thì có thể chọn:
  - 3 bi đều đánh số chẵn: có  $C_{50}^3$  cách.
  - 2 bi đánh số lẻ và 1 bi đánh số chẵn: có  $C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$  cách.
 Khi đó, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $C_{50}^3 + C_{50}^1 \cdot C_{50}^2$ .

□

**BÀI 7.** Cho hai đường thẳng  $a \parallel b$ . Trên đường thẳng  $a$  có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng  $b$  có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng  $a$  và  $b$  đã cho?

**Lời giải.**

3 điểm không thẳng hàng xác định một tam giác nên ta có thể chọn:

- 1 điểm thuộc đường thẳng  $a$  và 2 điểm thuộc đường thẳng  $b$ : có  $C_5^1 \cdot C_{10}^2$  cách.
- 2 điểm thuộc đường thẳng  $a$  và 1 điểm thuộc đường thẳng  $b$ : có  $C_5^2 \cdot C_{10}^1$  cách.

Vậy số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là  $C_5^1 \cdot C_{10}^2 + C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 325$ .

□

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 8.** Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

- ① Gồm 4 học sinh tùy ý?
- ② Có 1 nam và 3 nữ?
- ③ Có 2 nam và 2 nữ?
- ④ Có ít nhất 1 nam?
- ⑤ Có ít nhất 1 nam và 1 nữ?

**BÀI 9.** Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách:

- ① Chọn ra 5 học sinh, trong đó có không quá 3 nữ?
- ② Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ?
- ③ Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất một nam?
- ④ Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh  $A$  và chị  $B$  không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu?

**BÀI 10.** Một đội cảnh sát giao thông gồm 15 người trong đó có 12 nam. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội cảnh sát giao thông đó về 3 chốt giao thông sao cho mỗi chốt có 4 nam và 1 nữ?

**BÀI 11.** Có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho:

- ① Có đúng 2 viên bi màu đỏ?
- ② Số bi xanh bằng số bi đỏ?

**BÀI 12.** Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên?

**BÀI 13.** Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

**BÀI 14.** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

**BÀI 15.** Hội đồng quản trị của một công ty TNHH A gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ?

**BÀI 16.** Giải bóng truyền VTV Cup gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội Việt Nam. Ban tổ chức bốc thăm chia làm 3 bảng đấu A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách chia sao cho:

① Mỗi bảng ba đội?

② Mỗi bảng ba đội và 3 đội bóng của Việt Nam ở ba bảng khác nhau?

**BÀI 17.** Trong cuộc thi “Rung chuông vàng”, đội X có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí chơi, ban tổ chức chia các bạn thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Hỏi có bao cách chia nhóm, sao cho:

① Thành viên trong nhóm là bất kì?

② Năm bạn nữ ở cùng một nhóm?

**BÀI 18.** Trong một hộp có 50 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Có bao nhiêu cách lấy ra ba thẻ sao cho có đúng 2 thẻ mang số chia hết cho 8?

**BÀI 19.** Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Có bao nhiêu cách chọn ra 10 tấm thẻ sao cho có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 10?

**BÀI 20.** Trong một hộp có 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 5 viên bi sao cho có đúng 3 viên bi mang số lẻ, 2 viên bi mang số chẵn trong đó có đúng một viên bi mang số chia hết cho 4?

**BÀI 21.** Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp đó thỏa:

① Ba tấm thẻ bất kì?

② Tổng ba số ghi trên ba thẻ chia hết cho 3?

**BÀI 22.** Cho hai đường thẳng song song  $d_1, d_2$ . Trên  $d_1$  lấy 17 điểm phân biệt, trên  $d_2$  lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên  $d_1$  và  $d_2$ ?

**BÀI 23.** Cho hai đường thẳng song song  $d_1$  và  $d_2$ . Trên đường thẳng  $d_1$  có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng  $d_2$  có  $n$  điểm phân biệt ( $n \geq 2$ ). Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Tìm  $n$ .

**BÀI 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho 10 đường thẳng song song lần lượt cắt 8 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành từ các đường thẳng trên?

**BÀI 25.** Cho 2 đường thẳng  $d_1 \parallel d_2$ . Trên đường thẳng  $d_1$  có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng  $d_2$  có  $n$  điểm phân biệt ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ). Biết rằng có 1725 tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Hãy tìm  $n$ .

**BÀI 26.** Trong không gian cho hai đường thẳng  $a$  và  $b$  song song với nhau. Trên mỗi đường thẳng lấy 5 điểm cách đều nhau một khoảng bằng  $x$ . Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu hình bình hành tạo thành từ 10 điểm trên?

**BÀI 27.** Cho tập  $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số có nghĩa, biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

## BÀI 3. NHỊ THỨC NEWTON

### A NHỊ THỨC NEWTON

Cho  $a, b$  là các số thực và  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ta có

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

**VÍ DỤ 1.** Khai triển các nhị thức sau

①  $(x+1)^4$

②  $(x+2y)^5$

③  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

④  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$

**Lời giải.**

①  $(x+1)^4 = C_4^0 \cdot x^4 + C_4^1 \cdot x^3 \cdot 1 + C_4^2 \cdot x^2 \cdot 1^2 + C_4^3 \cdot x \cdot 1^3 + C_4^4 \cdot 1^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$

②  $(x+2y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 (2y) + C_5^2 x^3 (2y)^2 + C_5^3 x^2 (2y)^3 + C_5^4 x (2y)^4 + C_5^5 (2y)^5$   
 $= x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80xy^4 + 32y^5.$

③  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + C_6^2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_6^3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + C_6^5 x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(\frac{1}{x}\right)^6$   
 $= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.$

④  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6 = C_6^0 (2x)^6 + C_6^1 (2x)^5 \left(-\frac{1}{x}\right) + C_6^2 (2x)^4 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + C_6^3 (2x)^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + C_6^4 (2x)^2 \left(-\frac{1}{x}\right)^4$   
 $+ C_6^5 (2x) \left(-\frac{1}{x}\right)^5 + C_6^6 \left(-\frac{1}{x}\right)^6$   
 $= 64x^6 - 192x^4 + 240x^2 - 160 + \frac{60}{x^2} - \frac{12}{x^4} + \frac{1}{x^6}.$

□

**Nhận xét.**

- Trong khai triển  $(a \pm b)^n$  có  $n+1$  số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau. Tức là  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .
- Số hạng tổng quát là  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$  và số hạng thứ  $N$  thì  $k = N-1$ .
- Trong khai triển  $(a-b)^n$  thì dấu đan nhau, nghĩa là  $+$ , rồi  $-$ , rồi  $+$ , ...
- Số mũ của  $a$  giảm dần, số mũ của  $b$  tăng dần nhưng tổng số mũ của  $a$  và  $b$  bằng  $n$ .
- Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho  $a$  và  $b$  những giá trị đặc biệt thì sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn như

•  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n \xrightarrow{a=1, b=1} C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$

•  $(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^n C_n^n b^n \xrightarrow{a=1, b=1} C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$

### B TAM GIÁC PASCAL

Các hệ số của các khai triển  $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, \dots, (a+b)^n$  có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác Pascal.

|          |                     |
|----------|---------------------|
| $n = 0:$ | 1                   |
| $n = 1:$ | 1 1                 |
| $n = 2:$ | 1 2 1               |
| $n = 3:$ | 1 3 3 1             |
| $n = 4:$ | 1 4 6 4 1           |
| $n = 5:$ | 1 5 10 10 5 1       |
| $n = 6:$ | 1 6 15 20 15 6 1    |
| $n = 7:$ | 1 7 21 35 35 21 7 1 |

### HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k.$$

**VÍ DỤ 2.** Viết đầy đủ dạng khai triển của các nhị thức sau

①  $(a + b)^6$

②  $(a + b)^7$

**Lời giải.**

①  $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$

②  $(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$

□

## 📁 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### 📁 DẠNG 3.1. Tìm hệ số hoặc số hạng thỏa mãn điều kiện cho trước

*Phương pháp giải*

*Bước 1. Viết công thức số hạng tổng quát.*

*Bước 2. Dùng các tính chất của lũy thừa để rút gọn số hạng tổng quát.*

*Bước 3. Dựa vào điều kiện cho trước để tìm số hạng thỏa mãn bài toán.*

⚠️ **Chú ý**

— Với  $n \in \mathbb{N}^*$  và  $x \neq 0$  thì  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$

— Với  $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$  và  $x > 0$  thì  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}.$

— Với các điều kiện xác định thì

$$\begin{aligned} & \bullet a^m a^n = a^{m+n} & \bullet \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \bullet (ab)^n = a^n b^n \\ & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} & \bullet (a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \end{aligned}$$

— Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:  $x \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n x a_k.$

## 1 VÍ DỤ MINH HỌA

**VÍ DỤ 1.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

①  $(2x - 3y)^{17}$  chứa  $x^8 y^9.$

②  $(3x - x^2)^{12}$  chứa  $x^{15}.$

③  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}, \forall x \neq 0$  chứa  $x^{11}.$

$$\textcircled{4} \left( \sqrt[3]{x^{-2}} + x \right)^7 \text{ chứa } x^2.$$

**Lời giải.**

- ① Số hạng tổng quát trong khai triển  $(2x - 3y)^{17}$  là  $C_{17}^k (2x)^{17-k} (-3y)^k = C_{17}^k 2^{17-k} (-3)^k x^{17-k} y^k$ .  
Để có số hạng chứa  $x^8 y^9$  thì  $k = 9$ .  
Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^8 y^9$  là  $C_{17}^9 \cdot 2^8 \cdot (-3)^9 = -2^8 3^9 C_{17}^9$ .

- ② Số hạng tổng quát trong khai triển  $(3x - x^2)^{12}$  là

$$C_{12}^k (3x)^{12-k} (-x^2)^k = C_{12}^k 3^{12-k} (-1)^k x^{12-k} (x^2)^k = C_{12}^k 3^{12-k} (-1)^k x^{12+k}.$$

Để có số hạng chứa  $x^{15}$  thì  $12 + k = 15 \Leftrightarrow k = 3$ .  
Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{15}$  là  $-3^9 C_{12}^3$ .

- ③ Số hạng tổng quát trong khai triển  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{10}$  là

$$C_{10}^k (x^2)^{10-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k (-2)^k x^{20-2k} x^{-k} = (-2)^k C_{10}^k x^{20-3k}.$$

Để có số hạng chứa  $x^{11}$  thì  $20 - 3k = 11 \Leftrightarrow k = 3$ .  
Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{11}$  là  $-2^3 C_{10}^3$ .

- ④ Số hạng tổng quát trong khai triển  $\left(\sqrt[3]{x^{-2}} + x\right)^7$  là

$$C_7^k \left(\sqrt[3]{x^{-2}}\right)^{7-k} x^k = C_7^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{7-k} x^k = C_7^k x^{\frac{-14+5k}{3}}.$$

Để có số hạng chứa  $x^2$  thì  $\frac{-14+5k}{3} = 2 \Leftrightarrow -14 + 5k = 6 \Leftrightarrow k = 4$ .  
Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^2$  là  $C_7^4$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^4$  trong khai triển  $(1 + x + 3x^2)^{10}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} (1 + x + 3x^2)^{10} &= [1 + (x + 3x^2)]^{10} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \left( C_{10}^k 1^{10-k} (x + 3x^2)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{10} \left( C_{10}^k \sum_{j=0}^k C_k^j x^{k-j} (3x^2)^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{10} \left( \sum_{j=0}^k 3^j C_{10}^k C_k^j x^{k+j} \right). \end{aligned}$$

Để có số hạng chứa  $x^4$  thì

$$\begin{cases} k + j = 4 \\ 0 \leq j \leq k \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow (j; k) \in \{(0; 4), (1; 3), (2; 2)\}.$$

Do đó, số hạng chứa  $x^4$  là  $3^0 C_{10}^4 C_4^0 x^4 + 3^1 C_{10}^3 C_3^1 x^4 + 3^2 C_{10}^2 C_2^2 x^4 = 1695x^4$ .  
Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^4$  là 1695.

□

**VÍ DỤ 3.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển  $(1 + x + x^2 + x^3)^5$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned}
 (1+x+x^2+x^3)^5 &= [(1+x)(1+x^2)]^5 = (1+x)^5(1+x^2)^5 \\
 &= \left( \sum_{k=0}^5 C_5^k 1^{5-k} x^k \right) \left( \sum_{j=0}^5 C_5^j 1^{5-j} (x^2)^j \right) \\
 &= \sum_{k=0}^5 \left( C_5^k x^k \sum_{j=0}^5 C_5^j x^{2j} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^5 \left( \sum_{j=0}^5 C_5^k C_5^j x^{k+2j} \right)
 \end{aligned}$$

Để có số hạng chứa  $x^{10}$  thì

$$\begin{cases} k+2j=10 \\ 0 \leq k \leq 5 \\ 0 \leq j \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow (j; k) \in \{(3; 4), (4; 2), (5; 0)\}.$$

Do đó, số hạng chứa  $x^{10}$  là  $C_5^4 C_5^3 x^{10} + C_5^2 C_5^4 x^{10} + C_5^0 C_5^5 x^{10} = 101x^{10}$ .  
 Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển là 101. □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

- ①  $(x+y)^{25}$  chứa  $x^{12}y^{13}$
- ②  $(x-3)^9$  chứa  $x^4$
- ③  $(1-3x)^{11}$  chứa  $x^6$
- ④  $(x^2-2x)^{10}$  chứa  $x^{16}$
- ⑤  $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$ ,  $\forall x \neq 0$  chứa  $x^{31}$
- ⑥  $(2+\sqrt{x}-3x^2)^5$ ,  $\forall x \neq 0$  chứa  $x^2$

**Lời giải.**

- ① Số hạng tổng quát trong khai triển  $(x+y)^{25}$  là  $C_{25}^k x^{25-k} y^k$ .  
 Để có số hạng chứa  $x^{12}y^{13}$  thì  $k=13$ .  
 Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{12}y^{13}$  là  $C_{25}^{13}$ .
- ② Số hạng tổng quát trong khai triển  $(x-3)^9$  là  $C_9^k x^{9-k} (-3)^k = C_9^k (-3)^k x^{9-k}$ .  
 Để có số hạng chứa  $x^4$  thì  $9-k=4 \Leftrightarrow k=5$ .  
 Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^4$  là  $-3^5 C_9^5$ .
- ③ Số hạng tổng quát trong khai triển  $(1-3x)^{11}$  là  $C_{11}^k 1^{11-k} (-3x)^k = C_{11}^k (-3)^k x^k$ .  
 Để có số hạng chứa  $x^6$  thì  $k=6$ .  
 Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^6$  là  $3^6 C_{11}^6$ .
- ④ Số hạng tổng quát trong khai triển  $(x^2-2x)^{10}$  là
 
$$C_{10}^k (x^2)^{10-k} (-2x)^k = C_{10}^k (-2)^k x^{24-2k} x^k = C_{10}^k (-2)^k x^{24-k}.$$
 Để có số hạng chứa  $x^{16}$  thì  $24-k=16 \Leftrightarrow k=8$ .  
 Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{16}$  là  $2^8 C_{10}^8$ .
- ⑤ Số hạng tổng quát trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}$  là

$$C_{40}^k x^{40-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{40}^k x^{40-k} x^{-2k} = C_{40}^k x^{40-3k}.$$

Để có số hạng chứa  $x^{31}$  thì  $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3$ .

Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{31}$  là  $C_{40}^3$ .

⑥ Ta có

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{x} - 3x^2)^5 &= [2 + (\sqrt{x} - 3x^2)]^5 \\ &= \sum_{k=0}^5 C_5^k 2^{5-k} (\sqrt{x} - 3x^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^5 \left( 2^{5-k} C_5^k \sum_{j=0}^k C_k^j (\sqrt{x})^{k-j} (-3x^2)^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^5 \left( \sum_{j=0}^k 2^{5-k} (-3)^j C_5^k C_k^j x^{\frac{k+3j}{2}} \right) \end{aligned}$$

Để có số hạng chứa  $x^2$  thì

$$\begin{cases} \frac{k+3j}{2} = 2 \\ 0 \leq j \leq k \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+3j = 4 \\ 0 \leq j \leq k \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow (j; k) \in \{(0; 4), (1; 1)\}.$$

Do đó, số hạng chứa  $x^2$  là  $2^1(-3)^0 C_5^4 C_4^0 x^2 + 2^4(-3)^1 C_5^1 C_1^1 x^2 = -230x^2$ .

Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^2$  là  $-230$ . □

**BÀI 2.** Tìm số hạng không chứa  $x$  (độc lập với  $x$ ) trong khai triển của nhị thức

- ①  $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$  với  $x \neq 0$
- ②  $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$  với  $xy \neq 0$
- ③  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$  với  $x > 0$

**Lời giải.**

- ① Số hạng tổng quát trong khai triển  $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$  là

$$C_9^k (2x^2)^{9-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k = C_9^k 2^{9-k} (-3)^k x^{18-2k} x^{-k} = 2^{9-k} (-3)^k C_9^k x^{18-3k}.$$

Để có số hạng không chứa  $x$  thì  $18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  là  $2^3 3^6 C_9^6$ .

- ② Số hạng tổng quát trong khai triển  $\left(xy^2 - \frac{1}{xy}\right)^8$  là

$$C_8^k (xy^2)^{8-k} \left(-\frac{1}{xy}\right)^k = C_8^k (-1)^k x^{8-k} y^{16-2k} x^{-k} y^{-k} = (-1)^k C_8^k x^{8-2k} y^{16-3k}.$$

Để có số hạng không chứa  $x$  thì  $8 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 4$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  là  $(-1)^4 C_8^4 y^4 = C_8^4 y^4$ .

- ③ Số hạng tổng quát trong khai triển  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$  là

$$C_{17}^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{17-k} \left(\sqrt[4]{x^3}\right)^k = C_{17}^k x^{-\frac{2}{3} \cdot (17-k)} x^{\frac{3}{4} \cdot k} = C_{17}^k x^{\frac{-136+17k}{12}}.$$

Để có số hạng không chứa  $x$  thì  $\frac{-136+17k}{12} = 0 \Leftrightarrow -136+17k = 0 \Leftrightarrow k = 8$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  là  $C_{17}^8$ .

□

**BÀI 3.** Tìm số hạng chứa  $x^5$  trong khai triển  $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10} &= x \sum_{j=0}^5 C_5^j 1^{5-j} (-2x)^j + x^2 \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 1^{10-k} (3x)^k \\ &= \sum_{j=0}^5 (-2)^j C_5^j x^{j+1} + \sum_{k=0}^{10} 3^k C_{10}^k x^{k+2}. \end{aligned}$$

Để có số hạng chứa  $x^5$  thì  $\begin{cases} j+1=5 \\ k+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j=4 \\ k=3. \end{cases}$

Vậy số hạng chứa  $x^5$  là  $(-2)^4 C_5^4 x^5 + 3^3 C_{10}^3 x^5 = 3310x^5$ .

□

**BÀI 4.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^5$  trong khai triển  $(2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} (2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7 &= \sum_{k=4}^7 (2x+1)^k \\ &= \sum_{k=4}^7 \left( \sum_{j=0}^k C_k^j 1^{k-j} (2x)^j \right) = \sum_{k=4}^7 \left( \sum_{j=0}^k 2^j C_k^j x^j \right). \end{aligned}$$

Để có số hạng chứa  $x^5$  thì  $\begin{cases} j=5 \\ 0 \leq j \leq k \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow (j; k) \in \{(5; 5), (5; 6), (5; 7)\}$ .

Do đó, số hạng chứa  $x^5$  là  $2^5 C_5^5 x^5 + 2^5 C_6^5 x^5 + 2^5 C_7^5 x^5 = 896x^5$ .

Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^5$  là 896.

□



### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 5.** Tìm hệ số của số hạng trong khai triển

- ①  $(2x+y)^{13}$  chứa  $x^6 y^7$
- ②  $(x^3 - xy)^{15}$  chứa  $x^{25} y^{10}$
- ③  $\left(\sqrt{xy} + \frac{x}{y}\right)^{10}$  với  $xy \geq 0$  và  $y \neq 0$  chứa  $x^6 y^2$
- ④  $(1+x+2x^2)^{10}$  chứa  $x^{17}$
- ⑤  $(x^2+x-1)^5$  chứa  $x^3$
- ⑥  $(1+x^2-x^3)^8$  chứa  $x^8$
- ⑦  $\left(1-x^4-\frac{1}{x}\right)^{12}$ ,  $x \neq 0$  chứa  $x^8$

**BÀI 6.** Tìm số hạng không chứa  $x$  (độc lập với  $x$ ) trong khai triển của nhị thức

- ①  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$ , với  $x \neq 0$
- ②  $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5$ , với  $x \neq 0$
- ③  $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$ , với  $x \neq 0$
- ④  $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)^{12}$ , với  $x \neq 0$

⑤  $\left(\frac{1}{x^3} + x^2\right)^{10}$ , với  $x \neq 0$

⑥  $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{12}$ , với  $x \neq 0$

⑦  $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5$ , với  $x \neq 0$

⑧  $\left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ , với  $x > 0$

⑨  $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$ , với  $x > 0$

⑩  $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{18}$ , với  $x > 0$

⑪  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ , với  $x > 0$

 **DẠNG 3.2. Tìm hệ số trong khai triển nhị thức Niu-tơn  $(a + b)^n$**

— Sử dụng số hạng tổng quát của khai triển là  $C_n^k a^{n-k} b^k$ .

— Từ giả thiết tìm ra được giá trị  $k$ .

 **Nhị thức Niu-tơn**

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

**Hệ quả**

— Với  $a = b = 1$ , ta có  $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$ .

— Với  $a = 1; b = -1$ , ta có  $0^n = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$ .

— Nếu  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  thì tổng các hệ số trong khai triển là  $P(1)$ .

 **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.**

① Tìm số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển  $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n$ ,  $x \neq 0$  biết  $C_n^4 = 13C_n^2$ .

② Tìm số hạng chứa  $x^2$  trong khai triển  $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ,  $x \neq 0$ , biết  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$ .

③ Tìm số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển  $(x^2 + 2)^n$ , biết  $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$ .

**Lời giải.**

- ① Tìm số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển  $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n$ ,  $x \neq 0$  biết  $C_n^4 = 13C_n^2$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^4 = 13C_n^2 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 13 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &\Leftrightarrow n^2 - 5n - 150 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -10 & (\text{loại}) \\ n = 15 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{15}^k (x^3)^{15-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{15}^k (-1)^k x^{45-5k}$ .

Số hạng chứa  $x^{10}$  ứng với  $45 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 7$ .

Vậy số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển là  $C_{15}^7 (-1)^7 x^{10} = -6435x^{10}$ .

- ② Tìm số hạng chứa  $x^2$  trong khai triển  $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ,  $x \neq 0$ , biết  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11 &\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 11 \\ &\Leftrightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -5 & (\text{loại}) \\ n = 4 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_4^k (x^3)^{4-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_4^k x^{12-5k}$ .

Số hạng chứa  $x^2$  ứng với  $12 - 5k = 2 \Leftrightarrow k = 2$ .

Vậy số hạng chứa  $x^2$  trong khai triển là  $C_4^2 x^2 = 6x^2$ .

- ③ Tìm số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển  $(x^2 + 2)^n$ , biết  $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Khi đó

$$\begin{aligned} A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49 &\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 8 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = 49 \\ &\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \quad (\text{nhận}). \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_7^k (x^2)^{7-k} (2)^k = C_7^k 2^k x^{14-2k}$ .

Số hạng chứa  $x^8$  ứng với  $14 - 2k = 8 \Leftrightarrow k = 3$ .

Vậy số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển là  $C_7^3 2^3 x^8 = 280x^8$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Xác định số nguyên dương  $n$  để trong khai triển  $(1 + x^2)^n$  có hệ số của  $x^8$  bằng 6 lần hệ số của  $x^4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k (x^2)^k = C_n^k x^{2k}$ .

Hệ số của  $x^8$  là  $C_n^4$ . Hệ số của  $x^4$  là  $C_n^2$ .

Do hệ số của  $x^8$  bằng 6 lần hệ số của  $x^4$  nên

$$\begin{aligned} C_n^4 = 6C_n^2 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} \\ &\Leftrightarrow n^2 - 5n - 66 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -6 & (\text{loại}) \\ n = 11 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $n = 11$  là giá trị cần tìm.

□

**VÍ DỤ 3.**

- ① Biết tổng các hệ số trong khai triển  $(1 + x^2)^n$  là 1024. Tìm hệ số của  $x^{12}$ .

- ② Tìm hệ số của  $x^6$  trong khai triển  $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$  với  $n$  là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024.

**Lời giải.**

- ① Biết tổng các hệ số trong khai triển  $(1 + x^2)^n$  là 1024. Tìm hệ số của  $x^{12}$ .  
 Đặt  $P(x) = (1 + x^2)^n$ . Tổng các hệ số trong khai triển  $P(x)$  là  $P(1) = 2^n$ .  
 Do tổng các hệ số trong khai triển  $(1 + x^2)^n$  là 1024 nên  $2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$ .  
 Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{10}^k (x^2)^k = C_{10}^k x^{2k}$ .  
 Số hạng chứa  $x^{12}$  ứng với  $2k = 12 \Leftrightarrow k = 6$ .  
 Vậy hệ số của  $x^{12}$  là  $C_{10}^6 = 210$ .
- ② Tìm hệ số của  $x^6$  trong khai triển  $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$  với  $n$  là số nguyên dương và biết rằng tổng các hệ số trong khai triển bằng 1024.  
 Đặt  $P(x) = \left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ . Tổng các hệ số trong khai triển  $P(x)$  là  $P(1) = 2^n$ .  
 Do tổng các hệ số trong khai triển là 1024 nên  $2^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$ .  
 Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{10}^k \left(\frac{1}{x}\right)^k (x^3)^k = C_{10}^k x^{2k}$ .  
 Số hạng chứa  $x^6$  ứng với  $2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$ .  
 Vậy hệ số của  $x^6$  là  $C_{10}^3 = 120$ .

□

**VÍ DỤ 4.** Cho  $P(x) = (1 + 2x)^n, n \in \mathbb{N}^*$ . Khai triển  $P(x)$  ta được  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .  
 Tính  $n$  và  $a_{11}$  biết rằng  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$ .

Ta có  $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2^n$ .

Mặt khác  $P\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$ .

Khi đó, số hạng tổng quát trong khai triển  $P(x)$  là  $C_{12}^k (2x)^k = C_{12}^k 2^k x^k$ .

Ta suy ra  $a_{11} = C_{12}^{11} 2^{11} = 24576$ .

Vậy  $n = 12, a_{11} = 24576$ .

□

## **BÀI TẬP ÁP DỤNG**

### **BÀI 1.**

- ① Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển  $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n, \forall x \neq 0$ , biết  $C_{n-4}^{n-6} + n \cdot A_n^2 = 454$ .
- ② Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(\frac{2}{n-5} \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n, x > 0$ , biết  $C_n^3 = 5C_n^1$ .
- ③ Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(x + \frac{3}{x^3}\right)^n$ , với  $n \in \mathbb{N}^*, x \neq 0$ , biết  $A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2 = 18P_3$ .
- ④ Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển  $\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^n, \forall x \neq 0$ , biết  $3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15$ .

**Lời giải.**

- ① Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển  $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$ ,  $\forall x \neq 0$ , biết  $C_{n-4}^{n-6} + n \cdot A_n^2 = 454$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_{n-4}^{n-6} + n \cdot A_n^2 = 454 &\Leftrightarrow \frac{(n-4)(n-5)}{2} + n \cdot n(n-1) = 454 \\ &\Leftrightarrow 2n^3 - n^2 - 9n - 888 = 0 \Leftrightarrow n = 8 \quad (\text{nhận}). \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_8^k \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} (-x^3)^k = C_8^k 2^{8-k} (-1)^k x^{4k-8}$ .

Số hạng chứa  $x^4$  ứng với  $4k - 8 = 4 \Leftrightarrow k = 3$ .

Vậy hệ số của  $x^4$  trong khai triển là  $C_8^3 2^5 (-1)^3 = -1792$ .

- ② Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(\frac{2}{n-5} \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$ ,  $x > 0$ , biết  $C_n^3 = 5C_n^1$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^3 = 5C_n^1 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 5n \\ &\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 28n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 & (\text{loại}) \\ n = 0 & (\text{loại}) \\ n = 7 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_7^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}$ .

Số hạng không chứa  $x$  ứng với  $\frac{28-7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  trong khai triển là  $C_7^4 = 35$ .

- ③ Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(x + \frac{3}{x^3}\right)^n$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \neq 0$ , biết  $A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2 = 18P_3$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Khi đó

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2 = 18P_3 &\Leftrightarrow (n+1)n + \frac{n(n+1)}{2!} = 18 \cdot 3! \\ &\Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -9 & (\text{loại}) \\ n = 8 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_8^k (x)^{8-k} \left(\frac{3}{x^3}\right)^k = C_8^k 3^k x^{8-4k}$ .

Số hạng không chứa  $x$  ứng với  $8 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 2$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  trong khai triển là  $C_8^2 3^2 = 252$ .

- ④ Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển  $\left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^n$ ,  $\forall x \neq 0$ , biết  $3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Khi đó

$$\begin{aligned} 3C_n^2 + 2A_n^2 = 3n^2 + 15 &\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} + 2 \cdot n(n-1) = 3n^2 + 15 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 7n - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 & (\text{loại}) \\ n = 10 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{10}^k (2x^3)^{10-k} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^{10-k} (-3)^k x^{30-5k}$ .

Số hạng chứa  $x^{10}$  ứng với  $30 - 5k = 10 \Leftrightarrow k = 4$ .

Vậy hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển là  $C_{10}^4 2^6 (-3)^4 = 1088640$ .

□

**BÀI 2.** Tính  $A_{2016}^n$  biết hệ số của  $x^2$  trong khai triển  $(1 + 3x)^n$  là 90.

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k (3x)^k = C_n^k 3^k x^k$ .

Hệ số của  $x^2$  là  $C_n^2 3^2$ .

Do hệ số của  $x^2$  bằng 90 nên

$$\begin{aligned} C_n^2 3^2 = 90 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2!} = 10 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 & (\text{loại}) \\ n = 5 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $A_{2016}^n = A_{2016}^5$ . □

**BÀI 3.** Trong khai triển nhị thức  $(1 + 2ax)^n, (x \neq 0)$  ta có được số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là  $48x$ , số hạng thứ ba là  $1008x^2$ . Tìm  $n$  và  $a$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k (2ax)^k = C_n^k (2a)^k x^k$ .

- Số hạng đầu là 1 nên  $C_n^0 = 1$ .
- Số hạng thứ hai là  $48x$  nên  $C_n^1 (2a) = 48$ .
- Số hạng thứ ba là  $1008x^2$  nên  $C_n^2 (2a)^2 = 1008$ .

Ta suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_n^1 (2a) = 48 \\ C_n^2 (2a)^2 = 1008 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ n(n-1)a^2 = 2016 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ an(an-a) = 504 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $\begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases}$  □

**BÀI 4.** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ , biết hiệu hệ số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35.

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k x^{n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_n^k x^{n-2k}$ .

- Hệ số của số hạng thứ ba là  $C_n^2$ .
- Hệ số của số hạng thứ hai là  $C_n^1$ .

Do hiệu hệ số của số hạng thứ ba và thứ hai bằng 35 nên

$$\begin{aligned} C_n^2 - C_n^1 = 35 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 35 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -7 & (\text{loại}) \\ n = 10 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng không chứa  $x$  là  $C_{10}^5 = 252$ . □

**BÀI 5.** Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện  $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2047$ . Tìm số hạng chứa  $x^{10}y^6$  trong khai triển  $(2x^2 + y)^n$ .

**Lời giải.**

Do  $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - 1 = 2047 \Leftrightarrow n = 11$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{11}^k (2x^2)^{11-k} y^k = C_{11}^k 2^{11-k} x^{22-2k} y^k$ .

Ta suy ra số hạng chứa  $x^{10}y^6$  trong khai triển là  $C_{11}^6 2^5 x^{10} y^6 = 14784 x^{10} y^6$ . □

**BÀI 6.** Cho khai triển nhị thức:  $(1 - 2x + x^3)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{3n}x^{3n}$ . Xác định  $n$  và tìm  $a_6$ , biết rằng:  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $P(x) = (1 - 2x + x^3)^n$ . Suy ra  $P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$ .

Mặt khác  $P\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{3n}}{2^{3n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \Leftrightarrow n = 5$ .

Khi đó  $P(x) = \sum_{k=0}^5 C_5^k (x^3)^{5-k} (1-2x)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^{15-3k} \sum_{i=0}^k C_k^i (-2x)^i = \sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^k C_k^i (-2)^i (x)^{15-3k+i}$ .

Ta suy ra  $a_6 = C_4^3(-2)^3 + C_5^0(-2)^0 = -31$ .

□



### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 7.** Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

- ① Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ ,  $x > 0$ , biết  $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$ .
- ② Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:  $6C_{n+1}^{n-1} = A_n^2 + 160$ . Tìm hệ số của  $x^7$  trong khai triển  $(1 - 2x^3)(2 + x)^n$ .
- ③ Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  và  $a, b$  ( $b > 0$ ). Biết trong khai triển nhị thức Niu-tơn  $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$  có hạng tử chứa  $a^4b^9$ , tìm số hạng chứa tích  $a$  và  $b$  với số mũ bằng nhau.
- ④ Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 = C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2}$ . Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{11}$  trong khai triển  $x^3 \left(x^{n-8} - \frac{n}{3x}\right)^n$ ,  $x \neq 0$ .

**Lời giải.**

- ① Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ ,  $x > 0$ , biết  $C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 9$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^6 + 3C_n^7 + 3C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8 &\Leftrightarrow C_n^6 + C_n^7 + 2(C_n^7 + C_n^8) + C_n^8 + C_n^9 = 2C_{n+2}^8 \\ &\Leftrightarrow C_{n+1}^7 + 2C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 = 2C_{n+2}^8 \\ &\Leftrightarrow C_{n+1}^7 + C_{n+1}^8 + C_{n+1}^8 + C_{n+1}^9 = 2C_{n+2}^8 \\ &\Leftrightarrow C_{n+2}^8 + C_{n+2}^9 = 2C_{n+2}^8 \\ &\Leftrightarrow C_{n+2}^9 = C_{n+2}^8 \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{9!(n-7)!} = \frac{(n+2)!}{8!(n-6)!} \\ &\Leftrightarrow n-6=9 \Leftrightarrow n=15 \quad (\text{nhận}). \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{15}^k (\sqrt[3]{x})^{15-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{15}^k 2^k x^{\frac{5(6-k)}{6}}$ .

Số hạng không chứa  $x$  ứng với  $\frac{5(6-k)}{6} = 0 \Leftrightarrow k = 6$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  trong khai triển là  $C_{15}^6 2^6 = 320320$ .

- ② Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện:  $6C_{n+1}^{n-1} = A_n^2 + 160$ . Tìm hệ số của  $x^7$  trong khai triển  $(1 - 2x^3)(2 + x)^n$ .

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Khi đó

$$\begin{aligned} 6C_{n+1}^{n-1} = A_n^2 + 160 &\Leftrightarrow 6 \cdot \frac{(n+1)n}{2!} = n(n-1) + 160 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -10 & (\text{loại}) \\ n = 8 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là

$$(1 - 2x^3)C_8^k 2^{8-k} x^k = C_8^k 2^{8-k} x^k - C_8^k 2^{9-k} x^{k+3}.$$

Vậy hệ số của  $x^7$  trong khai triển là  $2C_8^7 - 2^5 C_8^4 = -2224$ .

- ③ Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  và  $a, b$  ( $b > 0$ ). Biết trong khai triển nhị thức Niu-tơn  $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + b\right)^n$  có hạng tử chứa  $a^4 b^9$ , tìm số hạng chứa tích  $a$  và  $b$  với số mũ bằng nhau.  
Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k \left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^{n-k} b^k = C_n^k a^{n-k} b^{\frac{3k-n}{2}}$ .

Trong khai triển có hạng tử chứa  $a^4 b^9$  nên  $\begin{cases} n-k=4 \\ \frac{3k-n}{2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ k=11. \end{cases}$

Khi đó số hạng tổng quát là  $C_{15}^k a^{15-k} b^{\frac{3k-15}{2}}$ .

Số hạng chứa  $a$  và  $b$  với số mũ bằng nhau khi  $15-k = \frac{3k-15}{2} \Leftrightarrow k=9$ .

Vậy số hạng chứa  $a$  và  $b$  với số mũ bằng nhau là  $C_{15}^9 a^6 b^6 = 5005 a^6 b^6$ .

- ④ Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 = C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2}$ . Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{11}$  trong khai triển  $x^3 \left(x^{n-8} - \frac{n}{3x}\right)^n$ ,  $x \neq 0$ .  
Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Khi đó

$$\begin{aligned} C_n^{n-3} - C_{n-1}^2 &= C_{n-1}^1 C_{n+3}^{n+2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} - \frac{(n-1)(n-2)}{2!} = (n-1) \cdot (n+3) \\ &\Leftrightarrow n^3 - 12n^2 - n + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 & (\text{loại}) \\ n = 1 & (\text{loại}) \\ n = 12 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $x^3 C_{12}^k (x^4)^{12-k} \left(-\frac{4}{x}\right)^k = C_{12}^k (-4)^k x^{51-5k}$ .

Số hạng chứa  $x^{11}$  ứng với  $51-5k=11 \Leftrightarrow k=8$ .

Vậy hệ số của  $x^{11}$  trong khai triển là  $C_{12}^8 (-4)^8 = 32440320$ .

□

**BÀI 8.** Trong khai triển nhị thức  $(1+ax)^n$ , ta có số hạng đầu bằng 1, số hạng thứ hai bằng  $24x$ , số hạng thứ ba bằng  $252x^2$ . Tìm  $n$  và  $a$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k (ax)^k = C_n^k a^k x^k$ .

- Số hạng đầu là 1 nên  $C_n^0 = 1$ .
- Số hạng thứ hai là  $48x$  nên  $C_n^1 a = 24$ .
- Số hạng thứ ba là  $252x^2$  nên  $C_n^2 a^2 = 252$ .

Ta suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_n^1 a = 24 \\ C_n^2 a^2 = 252 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ n(n-1)a^2 = 504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} an = 24 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $\begin{cases} n = 8 \\ a = 3. \end{cases}$

□

**BÀI 9.** Biết hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển  $(x-2)^n$  bằng 220. Tìm hệ số của  $x^2$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k x^{n-k} (-2)^k$ .

Do hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển bằng 220 nên

$$\begin{aligned} C_n^2 (-2)^2 = 220 &\Leftrightarrow n(n-1) = 110 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -10 & (\text{loại}) \\ n = 11 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của  $x^2$  là  $C_{11}^{10} (-2)^{10} = 67584$ . □

**BÀI 10.** Biết hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển  $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$  bằng 31. Tìm số nguyên dương  $n$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k x^{n-k} \left(-\frac{1}{4}\right)^k$ .

Do hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển bằng 31 nên

$$\begin{aligned} C_n^2 \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 31 &\Leftrightarrow n(n-1) = 992 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 992 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -31 & (\text{loại}) \\ n = 32 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $n = 32$ . □

**BÀI 11.** Trong khai triển của nhị thức  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$  cho biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa  $x^4$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_n^k (x^2)^{n-k} \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_n^k (-2)^k x^{2n-3k}$ .

Do tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97 nên

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^1 (-2) + C_n^2 (-2)^2 = 97 &\Leftrightarrow 1 - 2n + 2n(n-1) = 97 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 - 4n - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -6 & (\text{loại}) \\ n = 8 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của  $x^4$  trong khai triển là  $C_8^4 (-2)^4 = 1120$ . □

**BÀI 12.** Tìm hệ số của một số hạng hoặc tìm một số hạng

- ① Biết  $n$  nguyên dương thỏa mãn điều kiện  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$ . Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển  $P(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$  với  $x > 0$ .
- ② Biết rằng  $n$  là số nguyên dương thỏa  $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$ . Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển nhị thức  $(2+x)^n$ ,
- ③ Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển  $(\sqrt{x} - 3x^2)^n$ , ( $x > 0$ ), biết rằng  $n$  là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng  $-2048$ .
- ④ Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$ . Tìm hệ số của  $x^7$  trong khai triển đa thức  $(2-3x)^{2n}$ .

**Lời giải.**

- ① Biết  $n$  nguyên dương thỏa mãn điều kiện  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$ . Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển  $P(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$  với  $x > 0$ .  
Do  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n - 1 = 4095 \Leftrightarrow n = 12$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{12}^k \left(\frac{2}{x^3}\right)^{12-k} (\sqrt{x^5})^k = C_{12}^k 2^{12-k} x^{\frac{-72+11k}{2}}$ .

Số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển ứng với  $\frac{-72+11k}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 8$ .

Ta suy ra hệ số của  $x^8$  trong khai triển là  $C_{12}^8 2^4 = 7920$ .

- ② Biết rằng  $n$  là số nguyên dương thỏa  $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$ . Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển nhị thức  $(2+x)^n$ .

Ta có  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^n b^n$ .

Cho  $a = 3, b = -1$  ta được

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11.$$

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{11}^k 2^{11-k} x^k$ .

Ta suy ra hệ số của  $x^8$  trong khai triển là  $C_{11}^8 2^3 = 1320$ .

- ③ Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển  $(\sqrt{x} - 3x^2)^n, (x > 0)$ , biết rằng  $n$  là số nguyên dương và tổng các hệ số trong khai triển bằng  $-2048$ .

Đặt  $P(x) = (\sqrt{x} - 3x^2)^n$ . Tổng các hệ số trong khai triển  $P(x)$  là  $P(1) = (-2)^n$ .

Do tổng các hệ số trong khai triển là  $-2048$  nên  $(-2)^n = -2048 \Leftrightarrow n = 11$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{11}^k (\sqrt{x})^{11-k} (-3x^2)^k = C_{11}^k (-3)^k x^{\frac{11+3k}{2}}$ .

Số hạng chứa  $x^{10}$  ứng với  $\frac{11+3k}{2} = 10 \Leftrightarrow k = 3$ .

Vậy hệ số của  $x^{10}$  là  $C_{11}^3 (-3)^3 = -4455$ .

- ④ Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$ . Tìm hệ số của  $x^7$  trong khai triển đa thức  $(2-3x)^{2n}$ .

Ta có  $(a+b)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 a^{2n+1} + C_{2n+1}^1 a^{2n} b + C_{2n+1}^2 a^{2n-1} b^2 + C_{2n+1}^3 a^{2n-2} b^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} b^{2n+1}$ .

Cho  $a = 1, b = 1$  ta được  $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1}$  (1).

Cho  $a = 1, b = -1$  ta được  $C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + \dots - C_{2n+1}^{2n+1} = 0$  (2).

Từ (1) và (2) suy ra  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow n = 5$ .

Khi đó số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{10}^k (2)^{10-k} (-3x)^k$ .

Ta suy ra hệ số của  $x^7$  trong khai triển là  $C_{10}^7 2^3 (-3)^7 = -2099520$ .

□

### ĐẠNG 3.3. Chứng minh hoặc tính tổng

- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ .
- $C_n^k = C_n^{n-k}$ .
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ .
- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ .

### 1 VÍ DỤ

#### VÍ DỤ 1. Chứng minh

- ①  $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$ .
- ②  $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ .

Lời giải.

- ① Xét nhị thức

$$(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + C_{2n}^3 x^{2n-3} + \dots + C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}.$$

Thay  $x = 1$  ta được

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}.$$

Vậy  $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 4^n$ .

- ② Xét nhị thức  $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n$ .

Thay  $x = 3$  ta được

$$C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n = 2^n.$$

Lại có  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .

Vậy  $C_n^0 \cdot 3^n - C_n^1 \cdot 3^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Tính các tổng sau

①  $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \dots + C_5^5$ .

②  $S = 2C_{2010}^1 + 2^3 C_{2010}^3 + 2^5 C_{2010}^5 + \dots + 2^{2009} C_{2010}^{2009}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $S = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + \dots + C_5^5 = 2^5 = 32$ .

- ② Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010} = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 x + C_{2010}^2 x^2 + C_{2010}^3 x^3 + \dots + C_{2010}^{2009} x^{2009} + C_{2010}^{2010} x^{2010}.$$

Thay  $x = 2$  ta được

$$C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 2^2 C_{2010}^2 + 2^3 C_{2010}^3 + \dots + 2^{2009} C_{2010}^{2009} + 2^{2010} C_{2010}^{2010} = 3^{2010}. \quad (1)$$

Thay  $x = -2$  ta được

$$C_{2010}^0 - 2C_{2010}^1 + 2^2 C_{2010}^2 - 2^3 C_{2010}^3 + \dots - 2^{2009} C_{2010}^{2009} + 2^{2010} C_{2010}^{2010} = 1. \quad (2)$$

Trừ hai vế (1) và (2) suy ra

$$2(2C_{2010}^1 + 2^3 C_{2010}^3 + 2^5 C_{2010}^5 + \dots + 2^{2009} C_{2010}^{2009}) = 3^{2010} - 1.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3^{2010} - 1}{2}.$$

□

**VÍ DỤ 3.** Tìm số nguyên dương  $n$  thỏa mãn các điều kiện sau

①  $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095$ .

②  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + C_{2n+1}^7 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có

$$\begin{aligned} & C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095 \\ \Leftrightarrow & C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 4095 + C_n^0 \\ \Leftrightarrow & 2^n = 4096 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12. \end{aligned}$$

② Ta có  $\begin{cases} C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1} \\ C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1} = 0. \end{cases}$

Trừ hai vế ta được

$$\begin{aligned} & 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1}) = 2^{2n+1} \\ \Leftrightarrow & C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n} \\ \Leftrightarrow & 2^{2n} = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 4.** Chứng minh

①  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

②  $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $C_n^k = C_n^{n-k} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  (luôn đúng). Suy ra điều phải chứng minh.

② Ta có

$$\begin{aligned} k(k-1)C_n^k &= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} \Leftrightarrow k(k-1) \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} = n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} \text{ (luôn đúng).} \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

**VÍ DỤ 5.** Cho khai triển  $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{11}x^{11}$ . Hãy tìm hệ số lớn nhất trong các số  $a_0, a_1, \dots, a_{11}$ ?

**Lời giải.**

Số hạng tổng quát của khai triển  $\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)^{11}$  là

$$T_{k+1} = C_{11}^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k} \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)^k = C_{11}^k \cdot \frac{2^k}{3^{11}} \cdot x^k.$$

Do đó hệ số của số hạng tổng quát là  $a_k = C_{11}^k \cdot \frac{2^k}{3^{11}} = \frac{C_{11}^k \cdot 2^k}{3^{11}}$ .

Xét  $\frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{C_{11}^k \cdot 2^k}{C_{11}^{k+1} \cdot 2^{k+1}} < 1 \Leftrightarrow \frac{k+1}{2(11-k)} < 1 \Leftrightarrow k < 7$ . Suy ra  $a_0 < a_1 < \dots < a_6 < a_7$ .

Tương tự  $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1 \Leftrightarrow k > 7$ . Suy ra  $a_8 > a_9 > \dots > a_{11}$ .

Lại có  $\frac{a_7}{a_8} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow a_7 = a_8$ , nên  $a_0 < a_1 < \dots < a_6 < a_7 = a_8 > \dots > a_{11}$ .

Vậy hệ số lớn nhất là  $a_7 = \frac{C_{11}^7 \cdot 2^7}{3^{11}}$  và  $a_8 = \frac{C_{11}^8 \cdot 2^8}{3^{11}}$ . □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Chứng minh

①  $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$ .

②  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $\begin{cases} C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n} & (1) \\ C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0. & (2) \end{cases}$

Cộng hai vế (1) và (2) ta được

$$2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n}) = 2^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Trừ hai vế (1) và (2) ta được

$$2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}) = 2^{2n} \Leftrightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Vậy  $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$ .

- ② Xét nhị thức  $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + \dots + C_{2n}^nx^n + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n}$ .  
 Trong khai triển trên thì hệ số của  $x^n$  là  $C_{2n}^n$ .  
 Mặt khác

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n \cdot (x+1)^n \\ &= (C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n) \cdot (C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \dots + C_n^n).\end{aligned}$$

Hệ số của  $x^n$  trong tích trên là  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

□

**BÀI 2.** Tính các tổng sau

- ①  $S = C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 2^2C_{2010}^2 + \dots + 2^{2010}C_{2010}^{2010}$ .  
 ②  $S = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$ .

**Lời giải.**

- ① Xét nhị thức

$$(1+x)^{2010} = C_{2010}^0 + C_{2010}^1x + C_{2010}^2x^2 + \dots + C_{2010}^{2010}x^{2010}.$$

Thay  $x = 2$  ta được

$$C_{2010}^0 + 2C_{2010}^1 + 2^2C_{2010}^2 + \dots + 2^{2010}C_{2010}^{2010} = 3^{2010}.$$

Vậy  $S = 3^{2010}$ .

- ② Xét  $S_1 = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10} = 2^{10}$ .

Áp dụng công thức  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , ta có

$$S = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = C_{10}^4 + C_{10}^3 + C_{10}^2 + C_{10}^1 + C_{10}^0.$$

$$\text{Do đó } S_1 = 2S + C_{10}^5 \Rightarrow S = \frac{S_1 - C_{10}^5}{2} = 386.$$

□

### **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 3.** Chứng minh

- ①  $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$ .  
 ②  $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \dots - 3C_{16}^{15} + C_{16}^{16} = 2^{16}$ .  
 ③  $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + C_{2n}^4 \cdot 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{2n-1} \cdot (2^{2n} + 1)$ .  
 ④  $C_{2001}^0 + 3^2C_{2001}^2 + 3^4C_{2001}^4 + \dots + 3^{2000}C_{2001}^{2000} = 2^{2000} \cdot (2^{2001} - 1)$ .  
 ⑤  $2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + \dots + C_n^n = \frac{3^n + 1}{2}$ .

**BÀI 4.** Tính các tổng sau

- ①  $S = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \dots + 2^5C_5^5$ .  
 ②  $S = 4^0C_8^0 + 4^1C_8^1 + 4^2C_8^2 + \dots + 4^8C_8^8$ .  
 ③  $S = C_{2010}^0 + C_{2010}^1 + C_{2010}^2 + \dots + C_{2010}^{2010}$ .  
 ④  $S = C_{100}^0 + C_{100}^2 + C_{100}^4 + \dots + C_{100}^{100}$ .  
 ⑤  $S = \frac{1}{2! \cdot 2012!} + \frac{1}{4! \cdot 2010!} + \dots + \frac{1}{2012! \cdot 2!} + \frac{1}{2014!}$ .

**BÀI 5.** Tìm số nguyên dương  $n$  thỏa mãn các điều kiện

- ①  $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048.$   
 ②  $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512.$   
 ③  $C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + C_{2014}^6 + C_{2014}^8 + \dots + C_{2014}^{1006} = 2^{503n} - 1.$   
 ④  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$

BÀI 6. Chứng minh rằng

- ①  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$  ②  $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}.$   
 ③  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$  ④  $k^2 C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}.$

BÀI 7. Cho khai triển  $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , với các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  thỏa mãn  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$ . Hãy tìm số lớn nhất trong các số  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ?

## BÀI 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

### A PHÉP THỬ

**Định nghĩa 1.** Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của phép thử đó mặc dù biết tập tất cả các kết quả của phép thử đó.

**VÍ DỤ 1.** Phép thử “Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất”. Tìm không gian mẫu của phép thử.

**Lời giải.**

Không gian mẫu của phép thử là  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  □

**VÍ DỤ 2.** Xét phép thử “Gieo hai đồng xu phân biệt”. Nếu ký hiệu  $S$  là mặt sấp,  $N$  là mặt ngửa. Tìm không gian mẫu của phép thử.

**Lời giải.**

Không gian mẫu  $\Omega = \{NN, SN, NS, SS\}.$  □

**VÍ DỤ 3.** Xét phép thử  $T$  “Gieo 3 đồng xu phân biệt”. Tính số phần tử của không gian mẫu.

**Lời giải.**

Mỗi đồng xu có hai khả năng xuất hiện mặt  $S$  hay  $N \Rightarrow$  không gian mẫu của phép thử là

$$\Omega = \{NNN, NSN, SNN, SSN, NNS, NSS, SNS, SSS\}.$$

Do vậy số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 8.$  □

### B BIẾN CỐ

**Định nghĩa 2.** Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

**VÍ DỤ 4.** Xét phép thử  $T$  “Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất”. Gọi  $A$  là biến cố “Số chấm trên mặt xuất hiện là số chấm chẵn”. Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố  $A$ .

**Lời giải.**

Biến cố  $A = \{2; 4; 6\}.$  □



- ① Biến cố  $A$  liên quan đến phép thử  $T$  là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của  $A$  tùy thuộc vào kết quả của  $T$ .  
 ② Mỗi kết quả của phép thử  $T$  làm cho  $A$  xảy ra gọi là một kết quả thuận lợi của  $A$ .  
 ③ Biến cố  $A$  có ngoài cách cho bằng mô tả, có thể cho  $A$  dưới dạng liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của  $A$ .

## XÁC SUẤT

**Định nghĩa 3.** Xét phép thử  $T$  có không gian mẫu  $\Omega$  là một tập hữu hạn kết quả đồng khả năng. Biến cố  $A$  liên quan đến phép thử,  $A \subset \Omega$ . Xác suất của biến cố  $A$  là

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$



- ① Với mọi biến cố  $A$  của phép thử có không gian mẫu là  $\Omega$ . Ta luôn có  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- ②  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ , trong đó  $\bar{A}$  là biến cố đối của biến cố  $A$ .
- ③ Với  $A, B$  là hai biến cố ta có  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ .

**VÍ DỤ 5.** Xét phép thử  $T$ : “Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất”. Tập các kết quả là tập hợp gồm tất cả các cặp số cho bởi bảng sau

| Số chấm | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1       | (1; 1) | (1; 2) | (1; 3) | (1; 4) | (1; 5) | (1; 6) |
| 2       | (2; 1) | (2; 2) | (2; 3) | (2; 4) | (2; 5) | (2; 6) |
| 3       | (3; 1) | (3; 2) | (3; 3) | (3; 4) | (3; 5) | (3; 6) |
| 4       | (4; 1) | (4; 2) | (4; 3) | (4; 4) | (4; 5) | (4; 6) |
| 5       | (5; 1) | (5; 2) | (5; 3) | (5; 4) | (5; 5) | (5; 6) |
| 6       | (6; 1) | (6; 2) | (6; 3) | (6; 4) | (6; 5) | (6; 6) |

Không gian mẫu của phép thử là  $\Omega = \{(i; j) | i, j = \overline{1; 6}\}$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là 36.

— Biến cố  $A$ : “Tổng số chấm xuất hiện trên mặt bằng 7”.

Ta có  $A = \{(1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2); (6; 1)\} \Rightarrow n(A) = 6$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$ .

**VÍ DỤ 6.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của các biến cố

- ①  $A$ : “Mặt có số chấm lẻ xuất hiện”.
- ②  $B$ : “Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3”.
- ③  $C$ : “Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2”.

**Lời giải.**

- ①  $A$ : “Mặt có số chấm lẻ xuất hiện”.  
Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 6$ .  
Biến cố  $A = \{1; 3; 5\} \Rightarrow n(A) = 3$ .  
Xác suất của  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$ .
- ②  $B$ : “Mặt xuất hiện có số chấm chia hết cho 3”.  
Biến cố  $B = \{6; 3\} \Rightarrow n(B) = 2$ .  
Xác suất của biến cố  $B$  là  $P(B) = \frac{1}{3}$ .

③  $C$ : “Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2”.

$$\text{Biến cố } C = \{3; 4; 5; 6\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3}.$$

□

**VÍ DỤ 7.** Từ một hộp chứa 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để

① lấy được quả màu trắng.

② lấy được quả cầu xanh.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 9$ .

① Quả cầu được lấy có màu trắng, số cách lấy là 4.

$$\text{Xác suất lấy quả cầu trắng là } \frac{4}{9}.$$

② Quả cầu được lấy có màu đỏ, số cách lấy là 3.

$$\text{Xác suất lấy được quả cầu đỏ là } \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

□

**VÍ DỤ 8.** Trong một đợt kiểm tra về vệ sinh an toàn thực phẩm của ngành y tế tại chợ  $X$ . Ban quản lý chợ lấy ra 15 mẫu thịt lợn trong đó có 4 mẫu ở quầy  $A$ , 5 mẫu ở quầy  $B$  và 6 mẫu ở quầy  $C$ . Mỗi mẫu thịt này có khối lượng như nhau và để trong một hộp kín có kích thước giống hệt nhau. Đoàn kiểm tra lấy ngẫu nhiên ba hộp để phân tích, kiểm tra xem trong thịt lợn có chứa chất tạo nạc (Clenbuterol) hay không. Tính xác suất để cả 3 hộp lấy ra có đủ cả ba loại thịt ở các quầy  $A, B, C$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{15}^3$ .

Gọi  $X$  là biến cố “Cả ba của hàng đều có mẫu thịt được lấy”.

Số phần tử của  $X$  là  $n(X) = C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_6^1 = 120$ .

$$\text{Xác suất của } X \text{ là } P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{24}{91}.$$

□

**VÍ DỤ 9.** Trong một chiếc hộp có chứa 10 quả cầu có kích thước như nhau, được đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên ra 3 quả cầu trong hộp đó. Tính xác suất để số ghi trên 3 quả cầu lấy được là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{10}^3$ .

Giả sử 3 số ghi trên các quả cầu được chọn là  $a, b, c$  với  $a < b < c$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Có hai khả năng  $(a; b; c) = (3; 4; 5)$  hoặc  $(a; b; c) = (6; 8; 10)$ .

Gọi  $X$  là biến cố: “3 số ghi trên 3 quả cầu được chọn là độ dài 3 cạnh của một tam giác vuông”.

Số phần tử của  $X$  là  $n(X) = 2$ .

$$\text{Xác suất của biến cố } X \text{ là } P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{2}{C_{10}^3} = \frac{2}{45}.$$

□

**VÍ DỤ 10.** Trong một chiếc hộp 6 viên bi đỏ, 5 viên bi vàng và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên lấy ra không đủ cả ba màu.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{15}^4$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “4 viên lấy ra không đủ ba màu”.

Biến cố  $A$  xảy ra trong các trường hợp

— **Trường hợp 1:** 4 viên đúng một màu, số cách lấy là  $C_6^4 + C_5^4 + C_4^4 = 21$ .

— **Trường hợp 2:** 4 viên có đúng hai màu

+ Hai màu đỏ-vàng, có  $C_{11}^4 - C_6^4 - C_5^4 = 310$ .

+ Hai màu đỏ-trắng, có  $C_{10}^4 - C_6^4 - C_4^4 = 194$ .

+ Hai màu vàng-trắng, có  $C_9^4 - C_5^4 - C_4^4 = 120$ .

Tổng số cách lấy 4 viên đúng hai màu là  $310 + 194 + 120 = 624$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = 624 + 21 = 645$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{43}{91}$ . □

#### **DẠNG 4.1. Chọn hoặc sắp xếp đồ vật**

### **D** LÝ THUYẾT

#### • Phương pháp:

- ① **Phương pháp 1:** Tính xác suất theo định nghĩa.

Đếm số phần tử của không gian mẫu, số phần tử của biến cố.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

- ② **Phương pháp 2:** Tính xác suất của biến cố đối.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Phương pháp này nên dùng khi xét trực tiếp có nhiều trường hợp khác nhau.

- ③ **Phương pháp 3:** Áp dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân xác suất.

#### • Kiến thức bổ sung:

- ① Công thức đếm số phần tử của hợp hai tập hợp

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

- ② Công thức đếm số phần tử của hợp ba tập hợp

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C).$$

- ③ Phương pháp đặt song ánh 1 – 1.

Khi cần đếm một tập  $A$  trực tiếp khó khăn ta có thể chỉ ra tập đó có sự tương ứng 1 – 1 với tập  $B$  và khi đó chỉ cần đếm  $B$ .

### **E** VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Một bình đựng 6 viên bi không giống nhau, trong đó có 2 xanh, 2 vàng và 2 đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để lấy được

- ① 2 viên bi xanh.

- ② 2 viên bi khác màu.

#### **Lời giải.**

- ① Xác suất lấy được 2 viên bi xanh.

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_6^2$ .

Gọi  $A$  là biến cố “2 viên bi lấy được là bi xanh”.

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = C_2^2$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{15}$ .

- ② Xác suất lấy được hai viên bi khác màu.

Gọi  $B$  là biến cố “2 viên bi lấy được khác màu”.

Biến cố  $B$  xảy ra khi 2 viên bi lấy được là 1 xanh - 1 vàng; 1 xanh - 1 đỏ; 1 vàng - 1 đỏ.

Số phần tử của  $B$  là  $n(B) = C_3^2 \times 2 \times 2 = 12$ .

Xác suất của biến cố  $B$  là  $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{5}$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Một chiếc hộp đựng 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ, 2 quả cầu đen, các quả cầu khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{12}^6$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Lấy được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen”.

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = C_6^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{77}$ .

□

**VÍ DỤ 3.** Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp

① Lấy được 3 viên bi màu đỏ.

② Lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ.

**Lời giải.**

① Xác suất lấy được 3 viên bi màu đỏ.

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Lấy được 3 viên bi màu đỏ”.

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = C_7^3 = 35$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{44}$ .

② Xác suất lấy được ít nhất 2 viên bi màu đỏ.

Gọi  $B$  là biến cố “Lấy được ít nhất hai viên bi màu đỏ”.

Số phần tử của biến cố  $B$  là  $n(B) = C_7^3 + C_7^2 \cdot C_5^1 = 140$ .

Xác suất của biến cố  $B$  là  $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{11}$ .

□

**VÍ DỤ 4.** Một hộp chứa các quả cầu kích thước khác nhau gồm 3 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh và 9 quả cầu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Tính xác suất để hai quả cầu được chọn là khác màu.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{18}^2 = 153$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Hai quả cầu được chọn không cùng màu”.

Biến cố đối  $\bar{A}$  của  $A$  là “2 viên bi được lấy cùng màu”.

Ta có  $n(\bar{A}) = C_3^2 + C_6^2 + C_9^2 = 54$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = 1 - \frac{54}{153} = \frac{11}{17}$ .

⚠ Có thể tính trực tiếp  $n(A) = C_3^1 \cdot C_6^1 + C_3^1 \cdot C_9^1 + C_6^1 \cdot C_9^1$ .

□

**VÍ DỤ 5.** Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Có ít nhất một viên bi màu đỏ được lấy”.

Biến cố đối của  $A$  là  $\bar{A}$  “3 viên bi được lấy đều màu xanh”.

Số phần tử của  $\bar{A}$  là  $n(\bar{A}) = C_7^3 = 35$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{12}{13}$ .

□

**VÍ DỤ 6.** Một hộp đựng 20 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 9 viên bi. Tính xác suất trong các trường hợp

① 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu.

② 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu.

**Lời giải.**

① Xác suất 9 viên bi lấy được có đúng 2 màu.

Số phần tử của không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{20}^9 = 167960$ .

Gọi  $A$  là biến cố “9 viên bi được lấy có đúng hai màu”.

Do số viên bi của các màu đều nhỏ hơn 9 nên ta có

+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu xanh - đỏ là  $C_{15}^9$ .

+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu xanh - vàng là  $C_{12}^9$ .

+ Số cách lấy 9 viên có đúng hai màu đỏ - vàng là  $C_{13}^9$ .

Do đó số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = C_{15}^9 + C_{13}^9 + C_{12}^9 = 5940$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{297}{8398}$ .

② Xác suất 9 viên bi lấy được có đủ 3 màu.

Gọi  $B$  là biến cố “9 viên bi được lấy có đủ cả 3 màu”.

Do số viên bi của các màu đều nhỏ hơn 9 nên không thể xảy ra trường hợp 9 viên một màu.

Do đó số phần tử của  $B$  là  $n(B) = n(\Omega) - n(A) = 162020$ .

Xác suất của  $B$  là  $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{8101}{8398}$ .

□

## **F BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 1.** Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số thứ tự từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số lẻ.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{11}^6$ .

Gọi  $m, n$  lần lượt là số thẻ có ghi số **chẵn**, số thẻ có ghi số **lẻ** được chọn.

Ta có  $m + n = 6$ . Do tổng của các số trên 6 thẻ là số lẻ nên cặp  $(m; n) \in \{(1; 5), (3; 3), (5; 1)\}$ .

Gọi  $A$  là biến cố “Tổng số ghi trên 6 thẻ là số lẻ”.

Ta có  $n(A) = C_5^1 \cdot C_6^5 + C_3^3 \cdot C_6^3 + C_5^5 \cdot C_6^1 = 236$ .

Xác suất cần tính bằng  $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{118}{231}$

□

**BÀI 2.** Từ một hộp chứa 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ, 2 viên bi vàng, lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất các biến cố

①  $A$ : “hai viên bi được lấy cùng màu xanh”.

②  $B$ : “hai viên bi được lấy cùng màu đỏ”.

③  $C$ : “hai viên bi được lấy cùng màu”.

④  $D$ : “hai viên bi được lấy khác màu”.

**Lời giải.**

①  $A$ : “hai viên bi được lấy cùng màu xanh”.

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_9^2$ .

Số phần tử của  $A$  là  $n(A) = C_4^2$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$ .

②  $B$ : “hai viên bi được lấy cùng màu đỏ”.

Số phần tử của  $B$  là  $n(B) = C_3^2$ .

Xác suất của biến cố  $B$  là  $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{12}$ .

③  $C$ : “hai viên bi được lấy cùng màu”.

Ta có  $n(C) = C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 10$ .

Xác suất của  $C$  là  $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{5}{18}$ .

- 1

(1) Có nhiều nhất hai bóng hỏng.

(2) Có ít nhất một bóng không hỏng.

1

1

1

1

**BÀI 7.** Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{12}^5$ .

Gọi  $A$  là biến cố "5 viên bi được lấy có đủ 3 màu và số bi xanh bằng số bi đỏ".

Biến cố  $A$  xảy ra trong các trường hợp

— **Trường hợp 1:** 1 bi đỏ, 1 bi xanh và 3 bi vàng được chọn. Số cách chọn là  $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^3 = 120$ .

— **Trường hợp 2:** 2 bi đỏ, 2 bi xanh và 1 bi vàng được chọn. Số cách chọn là  $C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1 = 90$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $120 + 90 = 210$ .

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{35}{132}$ . □

**BÀI 8.** Cho hai hộp bi, hộp thứ nhất có 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng. Hộp thứ hai có 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Chọn ngẫu nhiên mỗi hộp 1 viên. Tính xác suất để hai viên bi được chọn ra có cùng màu.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_7^1 \cdot C_6^1 = 42$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "Hai viên bi được chọn có cùng màu".

Trường hợp 1: Hai bi được chọn đều là màu đỏ:  $C_4^1 \cdot C_2^1 = 8$ .

Trường hợp 2: Hai bi được chọn đều là màu trắng:  $C_3^1 \cdot C_4^1 = 12$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_4^1 \cdot C_2^1 + C_3^1 \cdot C_4^1 = 20$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{21}$ . □

**BÀI 9.** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 sữa dâu và 3 sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn có cả 3 loại.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "3 hộp được chọn có cả 3 loại".

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{11}$ . □



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 10.** Trong một lô hàng có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{12}^6 = 924$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "6 sản phẩm được lấy ra có không quá một phế phẩm".

Trường hợp 1: 6 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm nào:  $C_{10}^6 = 210$ .

Trường hợp 2: 6 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 phế phẩm:  $C_2^1 \cdot C_{10}^5 = 504$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_{10}^6 + C_2^1 \cdot C_{10}^5 = 714$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{22}$ . □

**BÀI 11.** Trong đợt kiểm tra chất lượng sản xuất sản phẩm tiêu dùng, một đoàn thanh tra lấy ngẫu nhiên 5 sản phẩm từ 1 lô hàng của một công ty để kiểm tra. Tính xác suất để đoàn thanh tra lấy được ít nhất 2 phế phẩm. Biết rằng trong lô hàng đó có 100 sản phẩm, trong đó có 95 chính phẩm và 5 phế phẩm.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{100}^5 = 75287520$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "5 sản phẩm được lấy ra có ít nhất 2 phế phẩm".

Suy ra biến cố đối  $\bar{A}$  là biến cố "5 sản phẩm được lấy ra có không quá 1 phế phẩm".

Trường hợp 1: 5 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm nào:  $C_{95}^5 = 57940519$ .

Trường hợp 2: 5 sản phẩm được lấy ra có đúng 1 phế phẩm:  $C_5^1 \cdot C_{95}^4 = 15917725$ .

Số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là:  $n(\bar{A}) = C_{95}^5 + C_5^1 \cdot C_{95}^4 = 73858244$ .

Vậy  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{357319}{18821880}$ . □

**BÀI 12.** Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô trong đó có 6 xe tốt. Họ điều động ngẫu nhiên 3 xe đi công tác. Tính xác suất sao cho 3 xe điều động đi phải có ít nhất 1 xe tốt.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "3 xe điều động đi phải có ít nhất 1 xe tốt".

Suy ra biến cố đối  $\bar{A}$  là biến cố "3 xe điều động đi không có xe tốt nào".

Số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là:  $n(\bar{A}) = C_4^3 = 4$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{29}{30}.$$

□

**BÀI 13.** Trên giá sách có 5 quyển sách toán học, 4 quyển Vật lý và 3 quyển Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 4 quyển. Tính xác suất sao cho:

① ít nhất 1 quyển Toán học.

② có đúng 2 quyển Vật lý.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{12}^4 = 495$ .

① Gọi  $A$  là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho có ít nhất 1 quyển Toán học".

Biến cố đối  $\bar{A}$  là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho không có quyển Toán học nào".

Số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là:  $n(\bar{A}) = C_7^4 = 35$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{92}{99}.$$

② Gọi  $B$  là biến cố: "Lấy ngẫu nhiên 4 quyển sách sao cho có đúng 2 quyển Vật lý".

Số phần tử của biến cố  $B$  là:  $n(B) = C_4^2 \cdot C_8^2 = 168$ .

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{56}{165}.$$

□

**BÀI 14.** Trên một kệ sách có 12 quyển sách khác nhau, gồm 4 quyển tiểu thuyết, 6 quyển truyện tranh và 2 quyển truyện cổ tích. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển từ kệ sách. Tính xác suất sao cho 3 quyển được lấy:

① đôi một khác loại.

② đúng 2 quyển cùng một loại.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu. Ta có  $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220$ .

① Gọi  $A$  là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sao cho 3 quyển sách đôi một khác loại".

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_4^1 \cdot C_6^1 \cdot C_2^1 = 48$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{55}.$$

② Gọi  $B$  là biến cố "Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách sao cho có đúng 2 quyển cùng loại".

Trường hợp 1: 2 quyển tiểu thuyết, 1 quyển truyện tranh hoặc 1 quyển truyện cổ tích:  $C_4^2 \cdot C_8^1 = 48$ .

Trường hợp 2: 2 quyển truyện tranh, 1 quyển tiểu thuyết hoặc 1 quyển truyện cổ tích:  $C_6^2 \cdot C_6^1 = 90$ .

Trường hợp 3: 2 quyển truyện cổ tích, 1 quyển tiểu thuyết hoặc 1 quyển truyện tranh:  $C_2^2 \cdot C_{10}^1 = 10$ .

Số phần tử của biến cố  $B$  là:  $n(B) = C_4^2 \cdot C_8^1 + C_6^2 \cdot C_6^1 + C_2^2 \cdot C_{10}^1 = 148$ .

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{37}{55}.$$

□

**BÀI 15.** Một ngân hàng đề thi gồm có 20 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm có 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh  $A$  đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh  $A$  rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học thuộc.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$ .

Gọi  $B$  là biến cố: "Thí sinh  $A$  rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã học".

Trường hợp 1: Thí sinh  $A$  rút được 2 câu đã học thuộc:  $C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 = 2025$ .

Trường hợp 2: Thí sinh  $A$  rút được 3 câu đã học thuộc:  $C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 = 1200$ .

Trường hợp 3: Thí sinh  $A$  rút được 4 câu đã học thuộc:  $C_{10}^4 = 210$ .

Số phần tử của biến cố  $B$  là:  $n(B) = C_{10}^2 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^3 \cdot C_{10}^1 + C_{10}^4 = 3435$ .

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{229}{323}.$$

□

**BÀI 16.** Mỗi đề thi gồm 4 câu được lấy ngẫu nhiên từ 15 câu hỏi trong một ngân hàng đề thi gồm 15 câu hỏi. Bạn Thủy đã học thuộc 8 câu trong ngân hàng đề thi. Tính xác suất để bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$ .

Gọi  $A$  là biến cố "Bạn Thủy rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 2 câu đã thuộc".

Trường hợp 1: Bạn Thủy rút được 2 câu đã học thuộc:  $C_8^2 \cdot C_7^2 = 588$ .

Trường hợp 2: Bạn Thủy rút được 3 câu đã học thuộc:  $C_8^3 \cdot C_7^1 = 392$ .

Trường hợp 3: Bạn Thủy rút được 4 câu đã học thuộc:  $C_8^4 = 70$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_8^2 \cdot C_7^2 + C_8^3 \cdot C_7^1 + C_8^4 = 1050$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{13}.$$

□

**BÀI 17.** Đề cương ôn tập cuối năm môn Lịch sử 12 có 40 câu hỏi khác nhau. Đề thi kiểm tra học kỳ 2 gồm 3 câu hỏi trong 40 câu hỏi đó. Một học sinh chỉ học 20 câu trong đề cương ôn tập. Giả sử các câu hỏi trong đề cương đều có khả năng được chọn làm câu hỏi thi như nhau. Tính xác suất để ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{40}^3 = 9880$ .

Gọi  $A$  là biến cố "ít nhất có 2 câu hỏi trong đề thi kiểm tra học kỳ 2 nằm trong số 20 câu hỏi mà em học sinh đã được học"

Trường hợp 1: Rút được 2 câu hỏi trong số 20 câu đã học:  $C_{20}^2 \cdot C_{20}^1 = 3800$ .

Trường hợp 2: Rút được 3 câu hỏi trong số 20 câu đã học:  $C_{20}^3 = 1140$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_{20}^2 \cdot C_{20}^1 + C_{20}^3 = 4940$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

□

**BÀI 18.** Một bộ đề thi toán học sinh giỏi lớp 12 mà mỗi đề gồm 5 câu, được chọn từ 15 câu dễ, 10 câu trung bình và 5 câu khó. Một đề thi được gọi là "Tốt" nếu trong đề thi có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2. Lấy ngẫu nhiên một đề thi trong bộ đề trên. Tìm xác suất để đề thi lấy ra là một đề thi "Tốt".

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{30}^5 = 142506$ .

Gọi  $A$  là biến cố "đề thi lấy ra là một đề thi Tốt".

Vì trong một đề thi Tốt có cả 3 câu dễ, trung bình và khó, đồng thời số câu dễ không ít hơn 2 nên ta có các trường hợp sau đây thuận lợi cho biến cố  $A$ .

Trường hợp 1: Đề thi gồm 3 câu dễ, 1 trung bình, 1 khó:  $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$ .

Trường hợp 2: Đề thi gồm 2 câu dễ, 2 trung bình, 1 khó:  $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$ .

Trường hợp 3: Đề thi gồm 2 câu dễ, 1 trung bình, 2 khó:  $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 56875$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{625}{1566}.$$

□

**BÀI 19.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, Khoa làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Khoa trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại Khoa chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của Khoa không dưới 9,5 điểm.

**Lời giải.**

Bạn Khoa được không dưới 9,5 điểm khi và chỉ khi trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên, khoa trả lời đúng ít nhất 3 câu.

Xác suất trả lời đúng một câu là 0,25, trả lời sai là 0,75

$$\text{Xác suất Khoa trả lời đúng 3 câu trên 5 câu là: } C_5^3 \cdot (0,25)^3 \cdot (0,75)^2 = \frac{45}{512}.$$

$$\text{Xác suất Khoa trả lời đúng 4 câu trên 5 câu là: } C_5^4 \cdot (0,25)^4 \cdot (0,75) = \frac{15}{1024}.$$

$$\text{Xác suất Khoa trả lời đúng 5 câu là: } C_5^5 \cdot (0,25)^5 = \frac{1}{1024}.$$

$$\text{Vậy xác suất Khoa được không dưới 9,5 điểm là: } C_5^3 \cdot (0,25)^3 \cdot (0,75)^2 + C_5^4 \cdot (0,25)^4 \cdot (0,75) + C_5^5 \cdot (0,25)^5 = \frac{53}{512}.$$

□

#### **DẠNG 4.2. Chọn hoặc sắp xếp người**

## H LÝ THUYẾT

### I Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để:

- ① Cả 3 em đều là học sinh giỏi.
- ② Có ít nhất 1 học sinh giỏi.
- ③ Không có học sinh trung bình.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{30}^3 = 4060$ .

- ① Gọi  $A$  là biến cố: "Cả 3 em được chọn đều là học sinh giỏi", ta có  $n(A) = C_8^3 = 56$ .

Vậy xác suất của biến cố  $A$  là:  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{56}{4060} = \frac{2}{145}$ .

- ② Gọi  $B$  là biến cố: "Trong cả 3 em được chọn có ít nhất 1 học sinh giỏi".

Suy ra  $\bar{B}$  là biến cố "Trong cả 3 em được chọn không có học sinh giỏi", ta có  $n(\bar{B}) = C_{22}^3 = 1540$ .

Vậy xác suất của biến cố  $B$  là:  $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{n(\bar{B})}{n(\Omega)} = \frac{18}{29}$ .

- ③ Gọi  $C$  là biến cố: "Trong cả 3 em được chọn không có học sinh trung bình", ta có  $n(C) = C_{23}^3 = 1771$ .

Vậy xác suất của biến cố  $C$  là:  $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1771}{4060} = \frac{253}{580}$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà toán học nam, 5 nhà vật lý nữ và 3 nhà hóa học nữ. Chọn ra từ đó 4 người đi công tác. Tính xác suất trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{16}^4 = 1820$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "Trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ cả ba bộ môn".

Trường hợp 1: Số cách chọn 4 người trong đó có 2 nhà toán học, 1 nhà vật lý, 1 nhà hóa học là:  $C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 420$ .

Trường hợp 2: Số cách chọn 4 người trong đó có 1 nhà toán học, 2 nhà vật lý, 1 nhà hóa học là:  $C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 = 240$ .

Trường hợp 3: Số cách chọn 4 người trong đó có 1 nhà toán học, 1 nhà vật lý, 2 nhà hóa học là:  $C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 = 120$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 = 780$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{780}{1820} = \frac{3}{7}$ .

□

**VÍ DỤ 3.** Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{35}^4 = 52360$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "4 học sinh được gọi lên bảng có cả nam và nữ".

Trường hợp 1: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 3 học sinh nam, 1 học nữ là:  $C_{20}^3 \cdot C_{15}^1 = 17100$

Trường hợp 2: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 2 học sinh nam, 2 học nữ là:  $C_{20}^2 \cdot C_{15}^2 = 19950$ .

Trường hợp 3: Số cách chọn 4 bạn lên bảng trong đó có 1 học sinh nam, 3 học nữ là:  $C_{20}^1 \cdot C_{15}^3 = 9100$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_{20}^3 \cdot C_{15}^1 + C_{20}^2 \cdot C_{15}^2 + C_{20}^1 \cdot C_{15}^3 = 46150$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{46150}{52360} = \frac{4615}{5236}$ .

□

**VÍ DỤ 4.** Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{15}^8 = 6435$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam".

Trường hợp 1: 2 học sinh nam và 6 học sinh nữ được chọn:  $C_9^2 \cdot C_6^6 = 36$ .

Trường hợp 2: 3 học sinh nam và 5 học sinh nữ được chọn:  $C_9^3 \cdot C_6^5 = 504$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là  $n(A) = C_9^2 \cdot C_6^6 + C_9^3 \cdot C_6^5 = 540$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{12}{143}$ . □

**VÍ DỤ 5.** Cần chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Tính xác suất sao cho 5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{25}^5 = 53130$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "5 học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số học sinh nữ ít hơn số học sinh nam".

Trường hợp 1: 1 học sinh nữ và 4 học sinh nam được chọn:  $C_{10}^1 \cdot C_{15}^4 = 13650$ .

Trường hợp 2: 2 học sinh nữ và 3 học sinh nam được chọn:  $C_{10}^2 \cdot C_{15}^3 = 20475$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_{10}^1 \cdot C_{15}^4 + C_{10}^2 \cdot C_{15}^3 = 34125$ .

Vậy  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{325}{506}$ . □

## **BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 1.** Một chi đoàn có 15 đoàn viên, trong đó có 7 nam và 8 nữ. Người ta chọn ra 4 người trong chi đoàn đó để lập một đội thanh niên tình nguyện. Tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn có ít nhất một nữ.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{15}^4 = 1365$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "4 người được chọn có ít nhất một nữ".

Suy ra biến cố đối  $\bar{A}$  là biến cố: "4 người được chọn không có nữ nào".

Số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là:  $n(\bar{A}) = C_7^4 = 35$ .

Vậy  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{38}{39}$ . □

**BÀI 2.** Một lớp học có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm chọn ra 5 học sinh để lập một tổ ca chào mừng ngày 22 tháng 12. Tính xác suất sao cho trong tổ ca có ít nhất một học sinh nữ.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{35}^5 = 324632$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "5 người được chọn có ít nhất một nữ".

Suy ra biến cố đối  $\bar{A}$  là biến cố: "5 người được chọn không có nữ nào".

Số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là:  $n(\bar{A}) = C_{20}^5 = 15504$ .

Vậy  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{2273}{2387}$ . □

**BÀI 3.** Một đội văn nghệ của trường THPT Năng Khiếu gồm 5 học sinh nữ và 10 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh trong đội văn nghệ để lập một tổ ca. Tính xác suất để tổ ca có ít nhất 3 học sinh nữ.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{15}^8 = 6435$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "có ít nhất 3 học sinh nữ được chọn"

Suy ra biến cố đối  $\bar{A}$  là biến cố: "có không quá 2 học sinh nữ được chọn"

Trường hợp 1: không có học sinh nữ nào được chọn:  $C_{10}^8 = 45$ .

Trường hợp 2: 1 học sinh nữ và 7 học sinh nam được chọn:  $C_5^1 \cdot C_{10}^7 = 600$ .

Trường hợp 3: 2 học sinh nữ và 6 học nam được chọn:  $C_5^2 \cdot C_{10}^6 = 2100$ .

Số phần tử của biến cố  $\bar{A}$  là:  $n(\bar{A}) = C_{10}^8 + C_5^1 \cdot C_{10}^7 + C_5^2 \cdot C_{10}^6 = 2745$ .

Vậy  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{82}{143}$ . □

**BÀI 4.** Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{11}^5 = 462$ .

Gọi  $A$  là biến cố "5 học sinh được chọn có nhiều nhất 2 học sinh nam".

Trường hợp 1: không có học sinh nam nào được chọn:  $C_6^5 = 6$ .

Trường hợp 2: 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ được chọn:  $C_5^1 \cdot C_6^4 = 75$ .

Trường hợp 3: 2 học sinh nam và 3 học nữ được chọn:  $C_5^2 \cdot C_6^3 = 200$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_6^5 + C_5^1 \cdot C_6^4 + C_5^2 \cdot C_6^3 = 281$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{281}{462}.$$

□

**BÀI 5.** Trong kì thi thử TN THPT QG lần I năm 2017 tại trường THPT X có 13 học sinh đạt điểm 9,0 môn Toán, trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để trong 3 học sinh chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{13}^3 = 286$ .

Gọi  $A$  là biến cố "3 học sinh được chọn có cả nam và nữ, có cả khối 11 và khối 12".

Trường hợp 1: 1 học sinh nam khối 11 và 2 học sinh nữ khối 12:  $C_2^1 \cdot C_3^2 = 6$ .

Trường hợp 2: 2 học sinh nam khối 11 và 1 học sinh nữ khối 12 được chọn:  $C_2^2 \cdot C_3^1 = 3$ .

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_2^1 \cdot C_3^2 + C_2^2 \cdot C_3^1 = 9$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{286}.$$

□

**BÀI 6.** Tổ một có 3 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Tổ hai có 5 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên mỗi tổ một học sinh đi làm nhiệm vụ. Tính xác suất sao cho chọn được hai học sinh có cả nam và nữ?

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_7^1 \cdot C_7^1 = 49$ .

Gọi  $A$  là biến cố: "Hai học sinh được chọn có cả nam và nữ, có cả tổ một và tổ hai".

Trường hợp 1: 1 học sinh nam tổ một và 1 học sinh nữ tổ hai:  $C_3^1 \cdot C_2^1 = 6$ .

Trường hợp 2: 1 học sinh nữ tổ một và 1 học sinh nam tổ hai:  $C_4^1 \cdot C_5^1 = 20$

Số phần tử của biến cố  $A$  là:  $n(A) = C_3^1 \cdot C_2^1 + C_4^1 \cdot C_5^1 = 26$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{26}{49}.$$

□

**BÀI 7.** Trong một tổ của lớp 12A có 12 học sinh gồm có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ, trong đó có A (nam) là tổ trưởng và B (nữ) là tổ phó. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong tổ để tham gia hoạt động tập thể của trường nhân dịp ngày thành lập Đoàn 26 tháng 3. Tính xác suất để sao cho nhóm học sinh được chọn có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ, trong đó phải có bạn A hoặc bạn B nhưng không có cả hai

**Lời giải.**

Không gian mẫu là  $|\Omega| = C_{12}^5$ .

Ta xét hai trường hợp xảy ra cho yêu cầu bài toán là

— **TH1:** Có bạn A nhưng không có bạn B, khi đó ta cần chọn thêm 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ. Vậy có  $C_6^2 \times C_4^2$  cách chọn.

— **TH1:** Có bạn B nhưng không có bạn A, khi đó ta cần chọn thêm 3 học sinh nam và 1 học sinh nữ. Vậy có  $C_6^3 \times C_4^1$  cách chọn.

Vậy số cách chọn để yêu cầu bài toán thỏa mãn là  $|\Omega_A| = C_6^2 \times C_4^2 + C_6^3 \times C_4^1 = 170$ .

$$\text{Vậy ta suy ra xác suất cần tìm là } P = \frac{170}{C_{12}^5} = \frac{85}{396}.$$

□

**BÀI 8.** Một đồn cảnh sát gồm có 9 người, trong đó có 2 trung tá An và Bình. Trong một nhiệm vụ cần huy động 3 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm C, 2 đồng chí thực hiện nhiệm vụ ở địa điểm D và 4 đồng chí còn lại trực ở đồn. Tính xác suất sao cho hai trung tá An và Bình không ở cùng một khu vực làm nhiệm vụ.

**Lời giải.**

Số cách chia 9 người ra làm việc ở ba địa điểm là  $C_9^3 \times C_6^2 \times C_4^4$ .

Xét tình huống hai trung tá An và Bình cùng làm việc ở một địa điểm, ta có ba trường hợp

— **TH1:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm C, ta có  $C_7^1 \times C_6^2 \times C_4^4$ .

— **TH2:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm D, ta có  $C_7^3 \times C_4^4$ .

— **TH3:** An và Bình cùng làm việc ở địa điểm E, ta có  $C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2$ .

Vậy xác suất để phân công nhiệm vụ sao cho An và Bình không làm chung ở một địa điểm là

$$P = 1 - \frac{C_7^1 \times C_6^2 \times C_4^4 + C_7^3 \times C_4^4 + C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2}{C_9^3 \times C_6^2 \times C_4^4} = \frac{13}{18}.$$

□

**BÀI 9.** Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hàng ngang, trong 8 bạn có hai bạn tên An và Bình. Tìm xác suất sao cho

- ① Nam nữ ngồi xen kẽ nhau.
- ② Bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau.
- ③ Đầu ghế và cuối ghế bắt buộc phải là nam.
- ④ Tất cả các bạn nữ không ngồi cạnh nhau.
- ⑤ Hai đầu ghế phải khác giới.
- ⑥ Các bạn nam luôn ngồi cạnh nhau và các bạn nữ luôn ngồi cạnh nhau.
- ⑦ An và Bình luôn ngồi gần nhau.
- ⑧ An và bình không ngồi cạnh nhau.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ một cách tùy ý cho 8 bạn là  $8!$  cách.

- ① Để các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ nhau, ta có  $2 \times 4! \times 4!$  cách, suy ra xác suất là

$$P_1 = \frac{2 \times 4! \times 4!}{8!} = \frac{1}{35}.$$

- ② Xem bốn bạn nam là một nhóm, ta xếp nhóm đó với các bạn nữ thì có  $5!$  cách xếp. Trong nhóm bốn bạn nam, có  $4!$  cách đổi chỗ các bạn, nên có tổng cộng  $5! \times 4!$  cách xếp để bốn bạn nam luôn ngồi cạnh nhau.

Suy ra xác suất là  $P_2 = \frac{5! \times 4!}{8!} = \frac{1}{14}.$

- ③ Để chọn hai bạn nam cho vị trí đầu và cuối, ta có  $A_4^2$  cách, xếp 6 bạn còn lại vào các vị trí ở giữa, ta có  $6!$  cách xếp. Vậy có  $A_4^2 \times 6!$  cách, suy ra xác suất là  $P_3 = \frac{A_4^2 \times 6!}{8!} = \frac{3}{14}.$

- ④ Xem bốn bạn nữ là một nhóm, ta xếp nhóm đó với các bạn nam thì có  $5!$  cách xếp. Trong nhóm bốn bạn nữ, có  $4!$  cách đổi chỗ các bạn, nên có tổng cộng  $5! \times 4!$  cách xếp để bốn bạn nữ ngồi cạnh nhau. Suy ra xác suất để tất cả các bạn nữ không ngồi cạnh nhau là  $P_4 = 1 - \frac{5! \times 4!}{8!} = \frac{13}{14}.$

- ⑤ Hai đầu ghế khác giới nên có hai trường hợp xảy ra, vậy có  $2 \times 4 \times 4 \times 6!$  cách xếp cho hai ghế đầu. Các ghế còn lại có  $6!$  cách xếp, vậy nên có  $2 \times 4 \times 4 \times 6!$  cách xếp. Suy ra xác suất là  $P_5 = \frac{2 \times 4 \times 4 \times 6!}{8!} = \frac{4}{7}.$

- ⑥ Xem bốn bạn nam là một nhóm, bốn bạn nữ là một nhóm, xếp hai nhóm đó ta có  $2!$  cách xếp, ở mỗi nhóm, có  $4!$  cách xếp chỗ các thành viên trong đó, nên tổng cộng có  $2! \times 4! \times 4!$  cách xếp. Suy ra xác suất là  $P_6 = \frac{2! \times 4! \times 4!}{8!} = \frac{1}{35}.$

- ⑦ Xem hai bạn An và Bình là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn còn lại có  $7!$  cách, sau đó hai bạn đổi chỗ với nhau nên có  $2!$  cách xếp. Vậy tổng cộng có  $7! \times 2!$  cách xếp, suy ra xác suất là  $P_7 = \frac{7! \times 2!}{8!} = \frac{1}{4}.$

- ⑧ Xem hai bạn An và Bình là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn còn lại có  $7!$  cách, sau đó hai bạn đổi chỗ với nhau nên có  $2!$  cách xếp. Vậy tổng cộng có  $7! \times 2!$  cách xếp, suy ra xác suất để An và Bình không ngồi cạnh nhau là  $P_8 = 1 - \frac{7! \times 2!}{8!} = \frac{3}{4}.$

□

**BÀI 10.** Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người phụ nữ và 1 đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp thành hàng ngang. Tính xác suất sao cho

- ① Đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ.
- ② Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 6 người là  $6!$  cách.

- ① Để đưa bé ngồi giữa hai người phụ nữ, ta xem đứa bé và hai người phụ nữ là một nhóm. Ta xếp nhóm đó với 3 người đàn ông, có  $4!$  cách.  
 Trong nhóm em bé và phụ nữ, ta có  $2!$  cách xếp vị trí cho hai người phụ nữ.  
 Vậy có  $4! \times 2!$  cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai phụ nữ là  $P_1 = \frac{4! \times 2!}{6!} = \frac{1}{15}$ .
- ② Để đưa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta xem đứa bé và hai người đàn ông là một nhóm. Để chọn được hai đàn ông đứng hai bên em bé, ta có  $A_3^2$  cách, xếp nhóm đó với 2 người phụ nữ và người đàn ông còn lại, có  $4!$  cách.  
 Vậy có  $A_3^2 \times 4!$  cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai đàn ông là  $P_2 = \frac{A_3^2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$ .

□

## **K** BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 11.** Trong giờ Thể dục, tổ I lớp 11A có 12 học sinh gồm 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ tập trung ngẫu nhiên theo một hàng dọc. Tính xác suất để người đứng ở đầu hàng và cuối hàng đều là học sinh nam.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 12 học sinh đó là  $12!$  cách.

Để người đứng đầu hàng và cuối hàng đều là nam, ta có  $A_7^2$  cách chọn học sinh xếp vào hai vị trí đó.

Các học sinh còn lại được xếp vào giữa, có  $10!$  cách xếp.

Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là  $P = \frac{A_7^2 \times 10!}{12!} = \frac{7}{22}$ .

□

**BÀI 12.** Đội tuyển học sinh giỏi của trường THPT X có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho hai học sinh nữ không đứng cạnh nhau.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 12 học sinh đó là  $12!$  cách.

Ta xếp 8 học sinh nam vào hàng ngang, có  $8!$  cách xếp.

Các học sinh nữ được xếp vào các khe hở giữa các bạn nam, có 9 vị trí để các bạn nữ có thể đứng, nên có  $A_9^4$  cách xếp các bạn nữ.

Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là  $P = \frac{8! \times A_9^4}{12!} = \frac{14}{55}$ .

□

**BÀI 13.** Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 5 học sinh đó là  $5!$  cách.

Ta xem hai học sinh nữ là một nhóm, xếp nhóm đó chung với các bạn nam, ta có  $4!$  cách xếp.

Trong nhóm hai học sinh nữ, hai bạn có  $2!$  cách để đổi chỗ cho nhau.

Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là  $P = \frac{4! \times 2!}{5!} = \frac{2}{5}$ .

□

**BÀI 14.** Một tổ học sinh có 5 em nữ và 8 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để không có hai em nữ nào đứng cạnh nhau?

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 13 học sinh đó là  $13!$  cách.

Ta xếp 8 học sinh nam vào hàng ngang, có  $8!$  cách xếp.

Các học sinh nữ được xếp vào các khe hở giữa các bạn nam, có 9 vị trí để các bạn nữ có thể đứng, nên có  $A_9^5$  cách xếp các bạn nữ.

Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là  $P = \frac{8! \times A_9^5}{13!} = \frac{14}{143}$ .

□

**BÀI 15.** Một tổ học sinh có 4 em nữ và 5 em nam được xếp thành một hàng dọc. Tính xác suất để chỉ có hai em nữ A và B đứng cạnh nhau, còn các em nữ còn lại không đứng cạnh nhau và cũng không đứng cạnh A và B.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 9 học sinh đó là  $9!$  cách.

Ta xếp 5 học sinh nam vào hàng ngang, có  $5!$  cách xếp.

Các học sinh nữ được xếp vào các khe hở giữa các bạn nam, có 6 vị trí để các bạn nữ có thể đứng.

Xét hai bạn A và B là một nhóm, ta có  $A_6^4$  cách xếp các bạn nữ. Ở tại vị trí nhóm hai bạn A và B đứng, hai bạn có  $2!$  cách đổi chỗ cho nhau, nên có tất cả  $A_6^4 \times 2!$  cách xếp nữ thỏa yêu cầu bài toán.

Suy ra xác suất để bài toán xảy ra là  $P = \frac{5! \times A_6^4 \times 2!}{9!} = \frac{5}{21}$ .

□

**BÀI 16.** Xếp ngẫu nhiên 3 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa bé vào ngồi trên 6 cái ghế xếp quanh bàn tròn. Tính xác suất sao cho:

- ① Đứa bé ngồi giữa hai người đàn bà.                      ② Đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông.

**Lời giải.**

Số cách xếp chỗ tùy ý cho 6 người lên bàn tròn là  $5!$  cách.

- ① Để đứa bé ngồi giữa hai người phụ nữ, ta xem đứa bé và hai người phụ nữ là một nhóm. Ta xếp nhóm đó với 3 người đàn ông vào bàn tròn, có  $3!$  cách.

Trong nhóm em bé và phụ nữ, ta có  $2!$  cách xếp vị trí cho hai người phụ nữ.

Vậy có  $3! \times 2!$  cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai phụ nữ là  $P_1 = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{1}{10}$ .

- ② Để đứa bé ngồi giữa hai người đàn ông, ta xem đứa bé và hai người đàn ông là một nhóm. Để chọn được hai đàn ông đứng hai bên em bé, ta có  $A_3^2$  cách, xếp nhóm đó với 2 người phụ nữ và người đàn ông còn lại, có  $3!$  cách.

Vậy có  $A_3^2 \times 3!$  cách, suy ra xác suất để đứa bé ngồi giữa hai đàn ông là  $P = \frac{A_3^2 \times 3!}{5!} = \frac{3}{10}$ .

□

**BÀI 17.** Có 5 bạn nam và 5 bạn nữ xếp ngồi ngẫu nhiên quanh một bàn tròn. Tính xác suất sao cho nam, nữ ngồi xen kẽ nhau.

**Lời giải.**

Số cách ngồi tùy ý của 10 bạn là  $|\Omega| = 9!$ .

Để xếp chỗ cho các bạn nam và nữ ngồi xen kẽ nhau, ta làm qua hai bước là

— Xếp 5 bạn nam vào bàn tròn, ta có  $4!$  cách xếp.

— Để xếp các bạn nữ xen kẽ với các bạn nam, ta xếp các bạn nữ ngồi xen kẽ vào giữa các bạn nam, vì thế có  $5!$  cách xếp các bạn nữ.

Vậy nên ta có  $4! \times 5!$  cách xếp thỏa bài toán, suy ra xác suất cần tìm là  $P = \frac{4! \times 5!}{9!} = \frac{1}{126}$ .

□

**BÀI 18.** Trong một giải cầu lông kỷ niệm ngày truyền thống học sinh – sinh viên có 8 người tham gia, trong đó có hai bạn tên Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng bằng việc bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu.

**Lời giải.**

Số cách chia 8 người thành hai bảng đấu một cách tùy ý là  $C_8^4 \times C_4^4$ .

Để A và B cùng thuộc vào một bảng đấu, ta làm các bước sau

— Chọn bảng đấu có cả A và B trong đó, ta có 2 cách để chọn.

— Trong bảng đã có A và B, chọn thêm hai người nữa, ta có  $C_6^2$  cách chọn.

— Bốn người còn lại ở bảng còn lại nên có 1 cách chọn.

Vậy có  $2 \times C_6^2$  cách chia bảng để A và B thuộc cùng một bảng đấu, suy ra xác suất là  $P = \frac{2 \times C_6^2}{C_8^4 \times C_4^4} = \frac{3}{7}$ .

□

**BÀI 19.** Chuẩn bị đón tết Bính Thân 2016, đội thanh niên tình nguyện của trường THPT X gồm 9 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau làm công tác vệ sinh môi trường tại nghĩa trang liệt sĩ huyện. Tính xác suất để mỗi tổ có đúng một nữ.

**Lời giải.**

Số cách chia ba nhóm làm việc là  $C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$  cách.

Để chia việc thỏa mãn nhu cầu bài toán thì ta cần chia mỗi tổ hai bạn nam và một bạn nữ.

Vậy nên có  $C_6^2 \times C_3^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1$  cách, suy ra xác suất cần tìm là

$$P = \frac{C_6^2 \times C_3^1 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_2^2 \times C_1^1}{C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3} = \frac{9}{28}.$$

□

**BÀI 20.** Trong giải bóng truyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm để chia thành 3 bảng A, B, C, mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

**Lời giải.**

Số cách chia 12 đội thành ba bảng đầu một cách tùy ý là  $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$ .

Để ba đội bóng Việt Nam thuộc vào ba bảng đầu khác nhau, ta làm các bước sau

— Chia ba đội Việt Nam ra ba bảng đầu, ta có  $3!$  cách chia.

— Trong mỗi bảng chọn thêm ba đội nữa, ta có  $C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$  cách chọn.

Vậy có  $3! \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3$  cách chia bảng để các đội Việt Nam thuộc ba bảng đầu khác nhau, suy ra xác suất

$$\text{là } P = \frac{3! \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3}{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{16}{55}.$$

□

**BÀI 21.** Trong cuộc thi “Tìm kiếm tài năng Việt”, có 20 bạn lọt vào vòng chung kết, trong đó có 5 bạn nữ và 15 bạn nam. Để sắp xếp vị trí thi đấu, ban tổ chức chia thành 4 nhóm A, B, C, D, mỗi nhóm có 5 bạn. Việc chia nhóm được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để 5 bạn nữ thuộc cùng một nhóm.

**Lời giải.**

Số cách chia 20 bạn thành bốn nhóm một cách tùy ý là  $C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$ .

Để cả 5 bạn nữ cùng thuộc một nhóm, ta làm các bước sau

— Ta có 4 cách chọn nhóm cho 5 bạn nữ.

— Chọn thêm ba nhóm nữa, ta có  $C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$  cách chọn.

Vậy có  $4 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5$  cách chia nhóm để các bạn nữ thuộc cùng một nhóm, suy ra xác suất là  $P =$

$$\frac{4 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5}{C_{20}^5 \times C_{15}^5 \times C_{10}^5 \times C_5^5} = \frac{1}{3876}.$$

□

**BÀI 22.** Để chuẩn bị tiêm phòng dịch Sởi – Rubella cho học sinh khối 11 và khối 12. Bệnh viện tỉnh A điều động 12 bác sỹ đến trường THPT B để tiêm phòng dịch gồm 9 bác sỹ nam và 3 bác sỹ nữ. Ban chỉ đạo chia 12 bác sỹ đó thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 bác sỹ làm 3 công việc khác nhau. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng một bác sỹ nữ.

**Lời giải.**

Số cách chia ba nhóm làm việc là  $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$  cách.

Để chia việc thỏa mãn nhu cầu bài toán thì ta cần chia mỗi tổ ba bác sỹ nam và một bác sỹ nữ.

Vậy nên có  $C_9^3 \times C_3^1 \times C_6^3 \times C_2^1 \times C_3^3 \times C_1^1$  cách, suy ra xác suất cần tìm là

$$P = \frac{C_9^3 \times C_3^1 \times C_6^3 \times C_2^1 \times C_3^3 \times C_1^1}{C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{16}{55}.$$

□

**BÀI 23.** Trong một giải thể thao cấp toàn quốc, có 17 thí sinh tham gia và trong đó có 5 thí sinh nữ. Ban tổ chức tiến hành chia thí sinh vào hai bảng A và B, mỗi bảng có 8 thí sinh, còn lại 1 thí sinh được đặc cách vào vòng trong. Tính xác suất để thí sinh được đặc cách là nữ và 4 thí sinh nữ còn lại đều nằm ở bảng A.

**Lời giải.**

Số cách chia bảng tùy ý là  $C_{17}^8 \times C_9^8$ .

Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta thực hiện các bước sau

— Chọn thí sinh được đặc cách, ta có 5 cách chọn.

— Chọn thêm 4 thí sinh cho bảng A, ta có  $C_{12}^4$  cách chọn. Khi đó các thí sinh nam còn lại sẽ vào bảng B.

$$\text{Vậy có } 5 \times C_{12}^4 \text{ cách chia nhóm thỏa bài toán, suy ra xác suất là } P = \frac{5 \times C_{12}^4}{C_{17}^8 \times C_9^8} = \frac{5}{442}.$$

□

**BÀI 24.** Trong một buổi giao lưu văn nghệ, có 5 giáo viên Toán, 3 giáo viên Văn, 2 giáo viên Ngoại Ngữ đăng ký hát song ca. Nhằm tạo không khí giao lưu thân mật, ban tổ chức tiến hành bốc thăm ngẫu nhiên được chia thành 5 cặp được đánh số theo thứ tự từ 1 đến 5. Tính xác suất để cả 5 cặp đều gồm 2 giáo viên dạy khác môn.

**Lời giải.**

Số cách chia thành 5 cặp tùy ý là  $C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2$ .

Để mỗi cặp đều là hai giáo viên khác môn thì mỗi giáo viên Toán sẽ hát chung với môn khác. Vậy có  $5!$  cách chia 5 giáo viên môn Văn và Ngoại Ngữ hát chung với 5 giáo viên Toán.

$$\text{Suy ra xác suất là } P = \frac{5!}{C_{10}^2 \times C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2} = \frac{1}{945}.$$

□

**BÀI 25.** Trong một giải quần vợt quốc tế, có 16 vận động viên mà trong đó có 3 vận động viên là các “hạt giống” số 1, 2, 3 của mùa giải. Vận động viên X là một trong số 16 vận động viên đó và không phải là hạt giống. Ban tổ chức chia ngẫu nhiên các vận động viên vào bốn bảng A, B, C, D, và mỗi bảng có 4 vận động viên. Tính xác suất để X không chung bảng với bất kì vận động viên hạt giống nào.

**Lời giải.**

Số cách chia bảng tùy ý là  $C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$ .

Để yêu cầu bài toán xảy ra, ta thực hiện các bước sau

- Ta có 4 cách chọn bảng cho thí sinh X.
- Chọn thêm 3 thí sinh cho bảng của thí sinh X, ta có  $C_{12}^3$  cách chọn.
- Ta chia các vận động viên còn lại (có cả A, B, C, D) thành ba nhóm, có  $C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$  cách chia.

Vậy có  $4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4$  cách chia nhóm thỏa bài toán, suy ra xác suất là

$$P = \frac{4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4}{C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 \times C_4^4} = \frac{44}{91}.$$

□

**BÀI 26.** Một tàu điện gồm 3 toa tiến vào một sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau, mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống. Tìm xác suất xảy ra các tình huống sau

- ① Tất cả cùng lên toa thứ II.
- ② Tất cả cùng lên một toa.
- ③ Toa I có 4 người, toa II có 5 người, còn lại toa III.
- ④ Toa I có 4 người.
- ⑤ Hai hành khách A và B cùng lên một toa.
- ⑥ Một toa 4 người, một toa 5 người, một toa 3 người.

**Lời giải.**

Số cách chọn toa để ngồi một cách tùy ý của các hành khách là  $3^{12}$ .

- ① Để tất cả cùng lên toa thứ II, ta có đúng 1 cách chọn, suy ra xác suất là  $P_1 = \frac{1}{3^{12}} = \frac{1}{531441}$ .
- ② Để tất cả cùng lên một toa, ta có 3 cách chọn, suy ra xác suất là  $P_2 = \frac{3}{3^{12}} = \frac{1}{177147}$ .
- ③ Ta có  $C_{12}^4$  cách chọn 4 hành khách cho toa I, có  $C_8^5$  cách chọn 5 hành khách cho toa II, còn lại ngồi vào toa thứ III.  
 Vậy có  $C_{12}^4 \times C_8^5$  cách xếp chỗ, suy ra xác suất là  $P_3 = \frac{C_{12}^4 \times C_8^5}{3^{12}} = \frac{3080}{59049}$ .
- ④ Ta có  $C_{12}^4$  cách chọn 4 hành khách cho toa I, các hành khách còn lại ngồi tùy ý ở toa thứ II và thứ III nên có  $2^8$  cách chọn.  
 Vậy có  $C_{12}^4 \times 2^8$  cách xếp chỗ, suy ra xác suất là  $P_4 = \frac{C_{12}^4 \times 2^8}{3^{12}}$ .
- ⑤ Để chọn toa cho hai hành khách A và B, ta có 3 cách chọn. Các hành khách còn lại lên tàu một cách tùy ý nên có  $3^{10}$  cách chọn. Suy ra xác suất là  $P_5 = \frac{3 \times 3^{10}}{3^{12}} = \frac{1}{3}$ .
- ⑥ Để chia 12 người ra thành ba nhóm như đề bài, ta có  $C_{12}^4 \times C_8^5 \times C_3^3$ . Phân phối các nhóm người đó lên ba toa tàu, ta có  $3!$  cách. Suy ra xác suất là  $P_6 = \frac{C_{12}^4 \times C_8^5 \times C_3^3 \times 3!}{3^{12}} = \frac{6160}{19683}$ .

□

**BÀI 27.** Bốn bạn nam và bốn bạn nữ, được xếp ngồi ngẫu nhiên vào 8 ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho

- ① Nam nữ ngồi đối diện nhau.
- ② Nữ ngồi đối diện nhau.

**Lời giải.**

Xem hai dãy ghế đối diện nhau lần lượt là  $A_1, B_1, C_1, D_1$  và  $A_2, B_2, C_2, D_2$ .

Số cách xếp tùy ý 8 bạn vào hai dãy ghế là  $8!$  cách.

- ① — Vị trí  $A_1$  có 8 cách chọn, suy ra vị trí  $A_2$  có 4 cách chọn.  
 — Vị trí  $B_1$  có 6 cách chọn, suy ra vị trí  $B_2$  có 3 cách chọn.  
 — Vị trí  $C_1$  có 4 cách chọn, suy ra vị trí  $C_2$  có 2 cách chọn.  
 — Vị trí  $D_1$  có 2 cách chọn, suy ra vị trí  $D_2$  có 1 cách chọn.

Vậy xác suất là  $P_1 = \frac{8 \times 4 \times 6 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 \times 1}{8!} = \frac{8}{35}$ .

- ② Do nữ ngồi đối diện nhau nên hai nam cũng ngồi đối diện nhau

- Chọn hai cặp vị trí đối diện nhau cho nữ ngồi, ta có  $A_4^2$  cách, sau đó, ta có  $4!$  cách xếp 4 bạn nữ vào 4 vị trí đó.  
 — Ở các vị trí còn lại là dành cho nam, ta có  $4!$  cách xếp 4 bạn nam vào 4 vị trí đó.

Vậy xác suất là  $P_2 = \frac{A_4^2 \times 4! \times 4!}{8!} = \frac{6}{35}$ .

□

### DẠNG 4.3. Chọn hoặc sắp xếp số

## **L** LÝ THUYẾT

### • Một số kiến thức liên quan

- ① Cho  $m \in \mathbb{N}$ , ta có  $m : 2 \Leftrightarrow$  chữ số hàng đơn vị của  $m$  là chữ số chẵn.  
 ② Cho  $m \in \mathbb{N}$ , ta có  $m : 5 \Leftrightarrow$  chữ số hàng đơn vị của  $m$  bằng 0 hoặc bằng 5.  
 ③ Cho  $m \in \mathbb{N}$ , ta có  $m : 4 \Leftrightarrow$  hai chữ số cuối tạo thành số chia hết cho 4.  
 ④ Cho  $m \in \mathbb{N}$ , ta có  $m : 3 \Leftrightarrow$  tổng các chữ số của  $m$  chia hết cho 3.  
 ⑤ Cho  $m \in \mathbb{N}$ , ta có  $m : 9 \Leftrightarrow$  tổng các chữ số của  $m$  chia hết cho 9.  
 ⑥ Cho  $m \in \mathbb{N}$ , ta có  $m : 11 \Leftrightarrow$  tổng các chữ số ở hàng chẵn bằng tổng các chữ số ở hàng lẻ (tính từ trái qua phải).  
 ⑦ Cho  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  được phân tích thành thừa số nguyên tố dạng  $m = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n}$ .  
 Khi đó mỗi ước số của  $m$  ứng với một bộ  $(j_1; j_2; \dots; j_n)$  trong đó  $0 \leq j_1 \leq i_1; \dots; 0 \leq j_n \leq i_n$ .  
 ⑧ Số nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m, (m, n \in \mathbb{N}, n \leq m)$$

là  $C_{m-1}^{n-1}$ .

- ⑨ Mỗi bộ  $n$  số thực luôn có duy nhất một cách sắp xếp thứ tự từ bé đến lớn.  
 ⑩ Cho  $n$  là số tự nhiên khác 0, tập số tự nhiên  $\mathbb{N}$  được phân lớp thành các tập:  
 +  $X_0$  gồm các số chia  $m$  hết cho  $n$ ,  $m = k \cdot n, k \in \mathbb{N}$ .  
 +  $X_1$  gồm các số tự nhiên  $m$  chia  $n$  dư 1,  $m = k \cdot n + 1, k \in \mathbb{N}$ .  
 ...  
 +  $X_{n-1}$  gồm các số tự nhiên  $m$  chia  $n$  dư  $n - 1$ ,  $m = k(n - 1), k \in \mathbb{N}$ .

## M Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Cho tập hợp  $A$  gồm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau đôi một được lập từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của  $A$ . Tính xác suất để phần tử đó là số chẵn.

### Lời giải.

Gọi  $\overline{abc}$  là số thuộc vào tập  $A$ , ta có  $A_6^3 = 120$  số như vậy.

Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập  $A$  là 120 cách.

Gọi  $\overline{cde}$  là các số chẵn thuộc vào tập  $A$ , ta có  $3 \times A_5^2 = 60$  số như vậy.

Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là  $P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ . □

**VÍ DỤ 2.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của  $S$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để chọn được là số chẵn.

### Lời giải.

Gọi  $\overline{abc}$  là số thuộc vào tập  $S$ , ta có  $A_7^3 = 210$  số như vậy.

Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập  $S$  là 210 cách.

Gọi  $\overline{cde}$  là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán và thuộc vào tập  $S$ , ta có  $3 \times A_6^2 = 90$  số như vậy.

Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là  $P = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$ . □

**VÍ DỤ 3.** Cho tập hợp  $A$  gồm tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên từ  $A$  hai phần tử. Tính xác suất để hai phần tử được lấy ra từ  $A$  có một số chẵn và một số lẻ.

### Lời giải.

Gọi  $\overline{abcd}$  là số thuộc vào tập  $A$ , ta có  $6 \times A_6^3 = 720$  số như vậy.

Vậy số cách chọn tùy ý hai số từ tập  $A$  là  $A_{720}^2$  cách.

Gọi  $\overline{cde}$  là các số lẻ thuộc vào tập  $A$ , ta có  $3 \times 5 \times A_5^2 = 300$  số, vậy có  $720 - 300 = 420$  số chẵn trong tập  $A$ .

Suy ra xác suất để chọn được hai số thỏa mãn bài toán là  $P = \frac{300 \times 420}{A_{720}^2} = \frac{175}{719}$ . □

**VÍ DỤ 4.** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

### Lời giải.

Số cách chọn tùy ý 4 thẻ là  $C_{16}^4$  cách.

Do có 8 số chẵn trong các số từ 1 đến 16 nên để chọn được 4 thẻ đánh số chẵn, ta có  $C_8^4$  cách.

Suy ra xác suất để chọn được 4 thẻ mang số chẵn là  $P = \frac{C_8^4}{C_{16}^4} = \frac{1}{26}$ . □

**VÍ DỤ 5.** Gọi  $X$  là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau được lấy từ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy ngẫu nhiên hai phần tử của  $X$ . Tính xác suất để hai số lấy được đều là số chẵn.

### Lời giải.

Gọi  $\overline{ab}$  là số thuộc vào tập  $X$ , ta có  $6 \times 6 = 36$  số như vậy.

Vậy số cách chọn tùy ý hai số từ tập  $X$  là  $C_{36}^2$ .

Gọi  $\overline{cd}$  là các số chẵn thuộc vào tập  $X$ .

— **TH1:** Số có dạng  $\overline{c0}$ , ta có 6 số như vậy.

— **TH2:** Xét  $d \neq 0$ , ta có  $3 \times 5 = 15$  số như vậy.

Vậy có  $6 + 15 = 21$  số chẵn trong tập hợp  $X$ .

Suy ra xác suất để chọn được hai số chẵn từ tập  $X$  là  $P = \frac{C_{21}^2}{C_{36}^2} = \frac{1}{3}$ . □

**VÍ DỤ 6.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên gồm có 2 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng đơn vị và hàng chục đều là chữ số chẵn.

**Lời giải.**

Gọi  $\overline{ab}$  là số thuộc vào tập  $S$ , ta có  $9 \times 10 = 90$  số như vậy.

Vậy số cách chọn tùy ý một số từ tập  $S$  là 90 cách.

Gọi  $\overline{cd}$  là các số thỏa mãn yêu cầu bài toán và thuộc vào tập  $S$ , ta có  $4 \times 5 = 20$  số như vậy.

Suy ra xác suất để chọn được số thỏa mãn bài toán là  $P = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ . □

**VÍ DỤ 7.** Cho  $E$  là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau đôi một được lấy từ: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của  $E$ . Tính xác suất để phần tử được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên 1 phần tử của  $E$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn là số có 3 chữ số đều chẵn”. Giả sử số có ba chữ số thuộc  $E$  có dạng  $\overline{abc}$ , ta có

- $a$  có 5 cách chọn,  $b$  có 5 cách chọn,  $c$  có 4 cách chọn. Do đó, số phần tử của không gian mẫu là  $n_{\Omega} = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ .
- Số được chọn ( $\overline{abc}$ ) có 3 chữ số đều chẵn lấy từ các số  $\{0, 2, 4\}$ . Do đó  $a$  có 2 cách chọn,  $b$  có 2 cách chọn và  $c$  có 1 cách chọn. Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ .

Suy ra, xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

Vậy xác suất để chọn được số có 3 chữ số đều chẵn từ  $E$  là  $\frac{1}{25}$ . □

**VÍ DỤ 8.** Có 20 thẻ đựng trong 2 hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ). Tính xác suất lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên 2 thẻ từ 2 hộp (mỗi hộp 1 thẻ)”. Gọi  $A$  là biến cố “lấy được hai thẻ có tích hai số trên hai thẻ là số chẵn”. Để có thể lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn, ta có các trường hợp sau đây:

- Hai thẻ lấy ra đều là thẻ chẵn, có  $5 \cdot 5 = 25$  (cách).
- Thẻ lấy ra ở hộp thứ nhất là thẻ chẵn, hộp thứ hai là thẻ lẻ, có  $5 \cdot 5 = 25$  (cách).
- Thẻ lấy ra ở hộp thứ nhất là thẻ lẻ, hộp thứ hai là thẻ chẵn, có  $5 \cdot 5 = 25$  (cách).
- Do vậy, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 25 + 25 + 25 = 75$ .

Lại có, số phần tử của không gian mẫu là  $n_{\Omega} = 10 \cdot 10 = 100$ .

Suy ra, xác suất cần tìm:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}.$$

Vậy xác suất để lấy được hai thẻ có tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn là  $\frac{3}{4}$ . □

**VÍ DỤ 9.** Một chiếc hộp gồm có 9 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “rút ngẫu nhiên hai thẻ (không kể thứ tự), rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ lại với nhau”. Gọi  $A$  là biến cố “lấy được hai thẻ có tích các số ghi trên hai thẻ là số chẵn”. Ta có

- Số phần tử của không gian mẫu là  $n_{\Omega} = C_9^2 = 36$ .

Trong hai thẻ lấy ra, ta xét các trường hợp sau đây:

- Một thẻ lẻ và một thẻ chẵn, có  $C_5^1 \cdot C_4^1 = 20$  (cách).
- Hai thẻ đều mang số chẵn, có  $C_4^2 = 6$  (cách).
- Do vậy, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 26$ .

Suy ra, xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

□

**VÍ DỤ 10.** Gọi  $S$  là tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập  $S$ . Tính xác suất để tích 2 số được chọn là số chẵn.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập  $S$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “tích 2 số được chọn là số chẵn”. Giả sử số có hai chữ số thuộc  $S$  có dạng  $\overline{ab}$ . Ta có:

- Số phần tử của  $S$  là  $n_S = 6 \cdot 6 = 36$ .
- Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{36}^2 = 630$ .
- Số các số chẵn thuộc  $S$  (xét hai trường hợp  $b = 0$  và  $b \neq 0$ ) là  $6 + 5 \cdot 3 = 21$ .
- Số các số lẻ thuộc  $S$  là  $36 - 21 = 15$ .

Trong hai số được chọn, ta xét các trường hợp sau:

- Có một số chẵn và một số lẻ, có  $C_{21}^1 \cdot C_{15}^1 = 315$  (cách).
- Có hai số chẵn, có  $C_{21}^2 = 210$  (cách).
- Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 315 + 210 = 525$ .

Xác suất cần tìm là

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{525}{630} = \frac{5}{6}.$$

□

## **N BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 1.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp  $S$ . Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $X$ ”. Khi đó, số phần tử của không gian mẫu bằng số cách đưa 9 số vào 6 chỗ nên  $n_\Omega = A_9^6 = 60480$ . Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ”.

- Chọn 3 số lẻ đôi một từ các số 1, 3, 5, 7, 9 có  $C_5^3$  (cách).
- Chọn 3 số chẵn đôi một khác nhau từ các số 2, 4, 6, 8 có  $C_4^3$  (cách).
- Sắp xếp các chữ số trên để được số thỏa mãn biến cố  $A$  có 6! (cách).
- Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot 6! = 28800$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{28800}{60048} = \frac{10}{21}$ .

□

**BÀI 2.** Cho 100 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ 100 tấm thẻ”. Khi đó:  $n_\Omega = C_{100}^3 = 161700$ . Gọi  $A$  là biến cố “tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2”. Gọi  $x, y, z$  là ba số

ghi trên ba thẻ rút được. Khi đó  $\begin{cases} 1 \leq x, y, z \leq 100 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 2. \end{cases}$

Từ 1 đến 100 có 50 số chia hết cho 2 ( $N_1$ ), 50 số chia cho 2 dư 1. Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số  $x, y, z$  cùng thuộc một loại  $N_1$  có:  $C_{50}^3 = 19600$  (cách).

— Trong 3 số  $x, y, z$  có một số chia hết chia 2 và 2 số chia 2 dư 1, có:  $C_{50}^1 \cdot C_{50}^2 = 61250$  (cách).

$\Rightarrow$  Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 19600 + 61250 = 80850$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{80850}{161700} = \frac{1}{2}$ . □

**BÀI 3.** Trong hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 thẻ lấy được là một số chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ 40 tấm thẻ”. Khi đó, số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{40}^3 = 9880$ . Gọi  $A$  là biến cố “tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 3”.

Gọi  $x, y, z$  là ba số ghi trên ba thẻ rút được. Khi đó  $\begin{cases} 1 \leq x, y, z \leq 40 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Từ 1 đến 40 có 13 số chia hết cho 3 ( $N_1$ ), 14 số chia cho 3 dư 1 ( $N_2$ ), 13 số chia cho 3 dư 2 ( $N_3$ ). Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số  $x, y, z$  cùng thuộc một loại  $N_1, N_2$  hoặc  $N_3$  có:  $C_{13}^3 + C_{14}^3 + C_{13}^3 = 936$  (cách).

— 3 số  $x, y, z$  mỗi số thuộc một loại, có:  $C_{13}^1 \cdot C_{14}^1 \cdot C_{13}^1 = 2366$  (cách).

$\Rightarrow$  Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 936 + 2366 = 3302$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{3302}{9880} = \frac{127}{380}$ . □

**BÀI 4.** Trong hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50, chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên ba viên bi từ 50 viên bi”. Khi đó, số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{50}^3 = 19600$ . Gọi  $A$  là biến cố “tổng các số ghi trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3”.

Gọi  $x, y, z$  là ba số ghi trên ba viên bi chọn được. Khi đó:  $\begin{cases} 1 \leq x, y, z \leq 50 \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Từ 1 đến 50 có 16 số chia hết cho 3 ( $N_1$ ), 17 số chia cho 3 dư 1 ( $N_2$ ), 16 số chia cho 3 dư 2 ( $N_3$ ). Ta xét các trường hợp sau:

— Cả 3 số  $x, y, z$  cùng thuộc một loại  $N_1, N_2$  hoặc  $N_3$  có:  $C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{16}^3 = 1800$  (cách).

— 3 số  $x, y, z$  mỗi số thuộc một loại, có:  $C_{16}^1 \cdot C_{17}^1 \cdot C_{16}^1 = 4352$  (cách).

$\Rightarrow$  Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 1800 + 4352 = 6152$ .

Vậy xác suất cần tính là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{6152}{19600} = \frac{796}{2450}$ . □

**BÀI 5.** Gọi  $X$  là tập hợp các số tự nhiên gồm có 4 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên từ tập  $X$  một số. Hãy tính xác suất để lấy được số tự nhiên từ tập  $X$  có tổng các chữ số bằng 14.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên từ tập  $X$  một số”, gọi  $A$  là biến cố “số được chọn có tổng các chữ số bằng 14. Ta có

— Số phần tử của tập  $X$  là  $A_6^4 = 360$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{360}^1 = 360$ .

— Để tổng các chữ số của số được chọn bằng 14, ta có các bộ số:  $\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}$ . Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 4! + 4! + 4! = 72$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{72}{360} = \frac{1}{5}$ . □

**BÀI 6.** Chọn ngẫu nhiên 3 số bất kỳ từ tập  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ . Tính xác suất để tổng 3 số được chọn bằng 12.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên ba số từ tập  $S$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “tổng các số được chọn là có tổng bằng 12”. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{11}^3 = 165$ .

— Để tổng của ba số được chọn bằng 12, ta có các bộ số:  $\{1, 2, 9\}$ ,  $\{1, 3, 8\}$ ,  $\{1, 4, 7\}$ ,  $\{1, 5, 6\}$ ,  $\{2, 3, 7\}$ ,  $\{2, 4, 6\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$ . Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 7 \cdot 3! = 42$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{42}{165} = \frac{14}{55}.$$

□

**BÀI 7.** Cho tập hợp  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  và  $M$  là tập hợp tất cả các số gồm 2 chữ số phân biệt thuộc tập  $E$ . Lấy ngẫu nhiên một số thuộc  $M$ . Tính xác suất để tổng hai chữ số của số được chọn có giá trị lớn hơn 7.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên một số thuộc  $M$ ”, gọi  $A$  là biến cố “tổng của hai chữ số của số được chọn lớn hơn 7”. Ta có:

— Số phần tử của  $M$  là  $A_6^2 = 30$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{30}^1 = 30$ .

— Để tổng các chữ số của số được chọn lớn hơn 7, ta có các bộ số:  $\{2, 6\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 5\}$ ,  $\{4, 6\}$ ,  $\{5, 6\}$ . Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 6 \cdot 2! = 12$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

□

**BÀI 8.**  $E$  là tập các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lấy từ các số  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Lấy ngẫu nhiên một số trong  $E$  tính xác suất để lấy được số chia hết cho 5.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn một số tự nhiên có 5 chữ số lập từ  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ”, gọi  $A$  là biến cố “số được chọn chia hết cho 5”. Gọi số có 5 chữ số thuộc  $E$  có dạng  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ . Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = A_8^5 - A_7^4 = 5880$ .

— Để số trên chia hết cho 5, ta có:

- $a_5$  là 5,  $a_1$  có 6 cách chọn,  $a_2$  có 6 cách chọn,  $a_3$  có 5 cách chọn,  $a_4$  có 4 cách chọn.
- $a_5$  là 0,  $a_1$  có 7 cách chọn,  $a_2$  có 6 cách chọn,  $a_3$  có 5 cách chọn,  $a_4$  có 4 cách chọn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1560$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{1560}{5880} = \frac{13}{49}.$$

□

**BÀI 9.** Gọi  $E$  là tập hợp số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt được lập từ các số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc tập  $E$ . Tính xác suất để hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên hai số tự nhiên có 3 chữ số lập từ  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ”, gọi  $A$  là biến cố “hai số được chọn có đúng một số có chữ số 5”. Gọi số có ba chữ số thuộc  $E$  có dạng  $\overline{a_1 a_2 a_3}$ . Ta có:

— Số phần tử của  $E$  là  $A_5^3 = 60$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{60}^2 = 1770$ .

— Chọn một trong ba vị trí để đưa số 5 vào có 3 cách chọn. Đưa 4 số còn lại vào 2 vị trí có  $A_4^2$  cách. Do đó, có tất cả  $3 \cdot A_4^2 = 36$  số thuộc  $E$  mà có mặt chữ số 5

— Để một số có ba chữ số từ  $E$  là số **không** có mặt 5, ta có:  $a_1, a_2, a_3$  là các số thuộc  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Do đó, có tất cả  $A_4^3 = 24$  số.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $C_{36}^1 \cdot C_{24}^1 = 864$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{864}{1770} = \frac{144}{295} \approx 0,488.$$

□

**BÀI 10.** Gọi  $E$  là tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 7. Tập  $E$  có bao nhiêu phần tử? Chọn ngẫu nhiên một phần tử của  $E$ , tính xác suất được chọn chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau lập từ  $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ ”, gọi  $A$  là biến cố “số được chọn chia hết cho 3”. Gọi số có ba chữ số thuộc  $E$  có dạng  $\overline{a_1 a_2 a_3}$ . Ta có:

— Số phần tử của  $E$  là  $A_5^3 = 60$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{60}^1 = 60$ .

Gọi  $x, y, z$  là ba số trong số được chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó  $\begin{cases} x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 7\} \\ x + y + z \text{ chia hết cho } 3. \end{cases}$

Ta có:

— Có 4 bộ số:  $\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 7\}$  lập thành số có 3 chữ số chia hết cho 3.

— Đưa mỗi bộ số vào ba chỗ  $\overline{a_1 a_2 a_3}$  có  $3!$  cách. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $4 \cdot 3! = 24$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$ . □

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 11.** Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Hãy tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ra ngẫu nhiên 10 tấm thẻ từ 30 tấm đã cho”, gọi  $A$  là biến cố “có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10”. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{30}^{10} = 30045015$ .

— Trong 30 tấm thẻ đã cho có 15 tấm thẻ lẻ, 12 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 10, 3 tấm thẻ chẵn chia hết cho 10.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $C_{15}^5 \cdot C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 4459455$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{4459455}{30045015} = \frac{99}{667} \approx 0,148$ . □

**BÀI 12.** Có 40 tấm thẻ đánh số thứ tự từ 1 đến 40. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để lấy được 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 6.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ra ngẫu nhiên 10 tấm thẻ từ 40 tấm đã cho”, gọi  $A$  là biến cố “có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 6”. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{40}^{10}$ .

— Trong 40 tấm thẻ đã cho có 20 tấm thẻ lẻ, 14 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 6, 6 tấm thẻ chẵn chia hết cho 6.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $C_{20}^5 \cdot C_{14}^4 \cdot C_6^1$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{C_{20}^5 \cdot C_{14}^4 \cdot C_6^1}{C_{40}^{10}} = \frac{126}{1147} \approx 0,11$ . □

**BÀI 13.** Có 20 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 5 tấm thẻ. Tính xác suất để trong 5 tấm thẻ được chọn ra có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ra ngẫu nhiên 5 tấm thẻ từ 20 tấm đã cho”, gọi  $A$  là biến cố “có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 2 tấm thẻ mang số chẵn trong đó có đúng một tấm thẻ mang số chia hết cho 4”. Ta có:

— Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{20}^5 = 15504$ .

— Trong 20 tấm thẻ đã cho có 10 tấm thẻ lẻ, 5 tấm thẻ chẵn không chia hết cho 4, 5 tấm thẻ chẵn chia hết cho 4.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $C_{10}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 = 3000$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{3000}{15504} = \frac{125}{646} \approx 0,193$ . □

**BÀI 14.** Gọi  $E$  là tập hợp các số có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $E$ . Tính xác suất để chọn được một số thuộc  $E$  và số đó chia hết cho 9.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử: “Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $E$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “số chọn được chia hết cho 9”. Ta có

$$\text{— Số phần tử của không gian mẫu là } n_{\Omega} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 3 = \frac{9 \cdot 9!}{2}.$$

Do  $0 + 1 + \cdots + 9 = 45$  chia hết cho 9. Do đó, để có được số có 8 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 9 thì:

- Trong 10 số từ 0 đến 9 chỉ cần bỏ đi 2 số có tổng bằng 9, cụ thể ta bỏ các cặp số:  $\{0, 9\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ .
- Có 4 bộ số có mặt chữ số 0, mỗi bộ có  $7 \cdot 7!$  số.
- Bộ không có số 0 là  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  có  $8!$  số.
- Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 4 \cdot 7 \cdot 7! + 8! = 181440$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{181440}{\frac{9 \cdot 9!}{2}} = \frac{1}{9}.$$

□

**BÀI 15.** Cho tập hợp  $X = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ . Ký hiệu  $G$  là tập hợp tất cả các số có bốn chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập  $X$ , chia hết cho 5. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập  $G$ , tính xác suất để lấy được một số không lớn hơn 4000.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên một số trong tập  $G$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “lấy được một số không lớn hơn 4000”. Gọi  $\overline{abcd}$  là số có 4 chữ số khác nhau đôi một lấy từ các chữ số trên và chia hết cho 5. Ta có:

- Nếu  $d = 0$  thì  $\overline{abc}$  có  $A_6^3 = 120$  cách chọn.
- Nếu  $d = 5$  thì  $a$  có 5 cách chọn,  $b$  có 5 cách chọn và  $c$  có 4 cách chọn  $\Rightarrow$  có 100 số.

Do đó, tập  $G$  có tất cả 220 số.

Giả sử  $\overline{abcd} \in G$  và  $\overline{abcd} \leq 4000$ . Khi đó:

- $a \in \{1, 2, 3\}$  nên có 3 cách chọn.
- $d$  có 2 cách chọn.
- $\overline{bc}$  có  $A_5^2 = 20$  cách chọn.
- Vậy nên có tất cả 120 số lấy từ  $G$  mà nhỏ hơn 4000.

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{120}{220} = \frac{6}{11}.$$

□

**BÀI 16.** Gọi  $E$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ các số mới lập đó. Tính xác suất để số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một số từ các số thuộc  $E$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn có chữ số hàng nghìn nhỏ hơn 5”. Gọi số thỏa mãn bài toán có dạng  $\overline{abcd}$ . Ta có:

- Số phần tử của không gian mẫu  $n_{\Omega} = A_7^4 = 840$ .
- Số  $a \in \{1, 2, 3, 4\}$  nên có 4 cách chọn. Đưa 6 số còn lại vào 3 vị trí có  $A_6^3$  cách. Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $4 \cdot A_6^3 = 480$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{480}{840} = \frac{4}{7}.$$

□

**BÀI 17.** Gọi  $E$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm bốn chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp  $E$ . Tính xác suất để số được chọn là số lớn hơn số 2016.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp  $E$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn là số lớn hơn số 2016”. Ta có:

- Số phần tử của không gian mẫu là  $n_{\Omega} = A_7^4$ .

- Số nhỏ hơn 2016 thì số đầu tiên bắt đầu là số 1, số cách đưa các số còn lại vào ba chỗ trống là  $A_6^3$ . Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $\overline{A}$  là  $n_{\overline{A}} = A_6^3$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n_{\overline{A}}}{n_{\Omega}} = 1 - \frac{A_6^3}{A_7^4} = \frac{6}{7}. \quad \square$$

**BÀI 18.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số có 4 chữ số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 số trong các số được lập, tính xác suất để số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên một số có 4 chữ số khác nhau lấy từ  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “số được lấy có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ”. Gọi số có 4 chữ số thỏa mãn bài toán là  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ . Ta có:

- Số phần tử của không gian mẫu là  $n_{\Omega} = A_6^4 = 360$ .
- Chọn ra hai số chẵn từ bộ  $\{2, 4, 6\}$  có  $C_3^2 = 3$  cách. Chọn 2 trong 4 chỗ để đưa hai số chẵn vào có  $C_4^2 = 6$  cách. Đưa hai số chẵn vào hai chỗ có  $2!$  cách. Đưa ba số lẻ từ bộ  $\{1, 3, 5\}$  vào 2 vị trí còn lại có  $A_3^2 = 6$  cách.
- Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 216$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_{\Omega}} = \frac{216}{360} = \frac{3}{5}. \quad \square$$

**BÀI 19.** Gọi  $X$  là tập các số tự nhiên gồm 4 chữ số phân biệt từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một số từ  $X$ . Tính xác suất để lấy được số có mặt chữ số 6.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên một số từ  $X$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn có mặt chữ số 6”.

Ta có số phần tử của  $X$  là  $A_6^4 = 360$ .

Số kết quả thuận lợi của biến cố  $\overline{A} = A_5^4 = 120$ .

Xác suất cần tìm là

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{n_{\overline{A}}}{n_{\Omega}} = 1 - \frac{120}{360} = \frac{2}{3}. \quad \square$$

**BÀI 20.** Cho tập  $X$  gồm các số có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lấy ngẫu nhiên 2 số từ  $X$ . Tìm xác suất để 2 số được lấy có ít nhất 1 số chẵn.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên hai số từ  $X$ ”. Gọi  $A$  là biến cố “có ít nhất 1 số chẵn trong hai số được chọn”.

Ta có, số phần tử của  $X$  là  $n_X = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ .

Giả sử  $\overline{b_1 b_2 b_3 b_4}$  là số lẻ thuộc tập  $X$ . Khi đó,  $b_4$  có 3 cách chọn,  $b_1$  có 4 cách chọn,  $b_2$  có 4 cách chọn,  $b_3$  có 3 cách chọn. Suy ra, số phần tử của biến cố  $\overline{A}$  là  $n_{\overline{A}} = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ .

Suy ra, xác suất để chọn được hai số lẻ là

$$P(\overline{A}) = \frac{n_{\overline{A}}}{n_{\Omega}} = \frac{C_{144}^2}{C_{300}^2} = \frac{132}{575}.$$

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{443}{575} \approx 0,77. \quad \square$$

**BÀI 21.** Gọi  $E$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ  $E$ . Tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ (các chữ liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ).

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một số từ  $E$ ”, gọi  $A$  là biến cố “số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa 2 chữ số lẻ”. Xét các số có 9 chữ số khác nhau, ta có:

- Có 9 cách chọn chữ số ở vị trí đầu tiên.
- Có  $A_8^8$  cách để đưa 9 chữ số còn lại vào 8 vị trí còn lại.
- Do đó, số phần tử của không gian mẫu là  $n_{\Omega} = 9 \cdot A_8^8 = 3265920$ .

Xét các số thỏa mãn bài toán:

- Đầu tiên ta xếp vị trí cho chữ số 0, do chữ số 0 không thể đứng đầu và đứng cuối nên có 7 cách sắp xếp.

- Ta có  $A_5^2$  cách chọn 2 số lẻ và đưa vào hai vị trí bên cạnh chữ số 0.
- Chọn hai trong 6 vị trí còn lại có  $C_6^2$  cách. Chọn hai trong 3 số lẻ còn lại đưa vào hai vị trí vừa chọn có  $A_3^2$  cách. Vậy có tất cả  $C_6^2 \cdot A_3^2 = 90$  cách để chọn ra hai số lẻ và xếp vào hai trong 6 vị trí còn lại.
- Cuối cùng, đưa 4 chữ số chẵn còn lại vào 4 vị trí có 4! cách.
- Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 7 \cdot A_5^2 \cdot 90 \cdot 4! = 302400$ .

Vậy xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{302400}{3265920} = \frac{5}{54}$ . □

**BÀI 22.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, trong đó chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần. Trong các số tự nhiên nói trên, chọn ngẫu nhiên một số, tìm xác suất để số chọn chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một số có 5 chữ số theo yêu cầu bài toán”. Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn chia hết cho 3”. Ta có:

- Chọn ra ba vị trí để đưa ba chữ số 3 vào có  $C_5^3$  cách.
- Chọn 2 trong 4 số để đưa vào 2 vị trí còn lại có  $A_4^2$  cách.
- Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_5^3 \cdot A_4^2 = 120$ .

Để số được chọn chia hết cho 3 thì tổng các chữ số phải chia hết cho 3. Do số được chọn luôn có 3 chữ số 3 nên hai số còn lại phải chia hết cho 3. Ta có:

- Chọn ra ba vị trí để đưa ba chữ số 3 vào có  $C_5^3$  cách.
- Hai số còn lại thuộc các bộ số: (1, 2), (1, 5), (2, 4).
- Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $C_5^3 \cdot 3 \cdot 2! = 60$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$ . □

**BÀI 23.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 2 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Trong các số tự nhiên trên, chọn ngẫu nhiên 1 số, tìm xác suất để số được chọn **không** bắt đầu bởi số 12.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên 1 số từ các số có 7 chữ số lập từ 1, 2, 3, 4, 5, 6 thỏa mãn đề bài”. Gọi  $A$  là biến cố “số được chọn không bắt đầu bởi số 12”. Gọi số có 7 chữ số thuộc không gian mẫu có dạng  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}$ , ta có:

- Chọn 2 vị trí để đưa số 4 vào có  $C_7^2$  cách.
- Đưa 5 chữ số còn lại vào 5 vị trí còn lại có 5! cách.
- Do đó, số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_7^2 \cdot 5! = 2520$ .

Xét trường hợp số có 7 chữ số như trên bắt đầu bằng số 12 thì:

- Đưa số 12 vào 2 vị trí  $a_1 a_2$  có 1 cách chọn.
- Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí còn lại để đưa hai số 4 vào có  $C_5^2$  cách.
- Đưa 3 số còn lại vào 3 vị trí còn lại có 3! cách.
- Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = n_\Omega - n_{\overline{A}} = 2520 - C_5^2 \cdot 3! = 2460$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{2460}{2520} = \frac{41}{42}$ . □

**BÀI 24.** Gọi  $E$  là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập  $E$ . Tìm xác suất để phần tử đó là một số không chia hết cho 5.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn một số tự nhiên có 5 chữ số lập từ  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ”, gọi  $A$  là biến cố “số được chọn chia hết cho 5”. Gọi số cần tìm có dạng  $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ . Ta có:

- Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = A_7^5 - A_6^4 = 2160$ .

— Để số trên chia hết cho 5, ta có:

- $a_5$  là 5,  $a_1$  có 5 cách chọn,  $a_2$  có 5 cách chọn,  $a_3$  có 4 cách chọn,  $a_4$  có 3 cách chọn.
- $a_5$  là 0,  $a_1$  có 6 cách chọn,  $a_2$  có 5 cách chọn,  $a_3$  có 4 cách chọn,  $a_4$  có 3 cách chọn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 660$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{660}{2160} = \frac{11}{36}$ . □

**BÀI 25.** Có 12 số tự nhiên khác nhau trong đó có 5 số chẵn và 7 số lẻ, chọn ngẫu nhiên 3 số. Tính xác suất để tổng 3 số được chọn là số chẵn.

**Lời giải.**

Không gian mẫu  $\Omega$  có tổng số phần tử là  $n_\Omega = C_{12}^3 = 220$ . Gọi  $A$  là biến cố “tổng ba số được chọn là số chẵn”. Ta xét các trường hợp sau:

- Chọn được ba số chẵn, có:  $C_5^3 = 10$  (cách).
- Chọn được một số chẵn và hai số lẻ, có:  $C_5^1 \cdot C_7^2 = 105$  (cách).

Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $10 + 105 = 115$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{115}{220} = \frac{23}{44}$ . □

**BÀI 26.** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho:

- ① Tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6.
- ② Ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm.
- ③ Tổng số chấm bằng 7.
- ④ Tổng số chấm nhỏ hơn 6.
- ⑤ Tổng số chấm chia hết cho 5.
- ⑥ Lần đầu là số nguyên tố, lần sau là số chẵn.
- ⑦ Có đúng 1 mặt 6 chấm xuất hiện.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần”. Ta có  $n_\Omega = 6 \cdot 6 = 36$ .

- ① Gọi  $A$  là biến cố “tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 6”. Ta có:

- Các bộ số có tổng số chấm bằng 6 là:  $\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}$ .
- Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 3 \cdot 2! = 6$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

- ② Gọi  $A$  là biến cố “ít nhất một lần gieo xuất hiện mặt 1 chấm”. Ta có:

- Các bộ số có sự xuất hiện của mặt 1 chấm là:  $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}$ .
- Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 6 \cdot 2! = 12$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .

- ③ Gọi  $A$  là biến cố “tổng số chấm trong 2 lần gieo bằng 7”. Ta có:

- Các bộ số có tổng số chấm bằng 7 là:  $\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}$ .
- Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 3 \cdot 2! = 6$ .

Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

- ④ Gọi  $A$  là biến cố “tổng số chấm trong 2 lần gieo nhỏ hơn 6”. Ta có:

- Các bộ số có tổng số chấm nhỏ hơn 6 là:  $\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}$ .

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 6 \cdot 2! = 12$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

⑤ Gọi  $A$  là biến cố “tổng số chấm trong 2 lần gieo chia hết cho 5”. Ta có:

— Các bộ số có tổng số chấm chia hết cho 5 là:  $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ .

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 2 \cdot 2! = 4$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

⑥ Gọi  $A$  là biến cố “lần gieo đầu là số nguyên tố, lần 2 là số chẵn”. Ta có:

— Các số nguyên tố nhỏ hơn 6 có ba số là  $\{2, 3, 5\}$ .

— Từ 1 đến 6 có tất cả 3 số chẵn.

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 3 \cdot 3 = 6$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

⑦ Gọi  $A$  là biến cố “có đúng một mặt 6 chấm xuất hiện”. Ta có:

— Các bộ số có sự xuất hiện của đúng một số 6 là:  $\{6, 1\}, \{6, 2\}, \{6, 3\}, \{6, 4\}, \{6, 5\}$ .

— Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 5 \cdot 2 = 10$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

□

**BÀI 27.** Gọi  $E$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà mỗi chữ số đều lớn hơn 4. Hãy xác định số phần tử của tập  $E$ . Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập  $E$ , tính xác suất để số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau.

**Lời giải.**

Lập một số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từ bộ 5 số  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ . Số phần tử của  $E$  là  $5! = 120$ .

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “chọn ngẫu nhiên một phần tử thuộc  $E$ ”, gọi  $A$  là biến cố “số được chọn có ba chữ số lẻ đứng kề nhau”. Xét các số thỏa mãn đề bài có dạng  $abcde$ . Ta xét các trường hợp:

—  $\overline{abc}$  là 3 chữ số lẻ. Chọn  $\overline{abc}$  có  $3! = 6$  cách. Chọn  $\overline{de}$  có  $2! = 2$ . Do đó, số kết quả trong trường hợp này là  $6 \cdot 2 = 12$ .

— Các trường hợp  $\overline{bcd}$  và  $\overline{cde}$  là các số lẻ đều có kết quả tương tự trường hợp trên.

— Vậy số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 12 \cdot 3 = 36$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là  $n_\Omega = C_{120}^1 = 120$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

□

**BÀI 28.** Cho tập hợp  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Gọi  $M$  là tập hợp các số tự nhiên có nhiều nhất ba chữ số, các chữ số đôi một khác nhau được thành lập từ tập  $E$ . Lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập hợp  $M$ . Tính xác suất lấy được một số thuộc tập  $M$ , sao cho tổng các chữ số của số đó bằng 10.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên một số thuộc tập  $M$ ”, gọi  $A$  là biến cố “tổng các chữ số của số được chọn là 10”. Ta có:

— Số phần tử của  $M$  là  $A_6^3 + A_6^2 + A_6^1 = 156$ .

— Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{156}^1 = 156$ .

— Để tổng của các chữ số của số được chọn là 10, ta có các bộ số:  $\{4, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}$ . Do đó, số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = 2! + 4 \cdot 3! = 26$ .

$$\text{Xác suất cần tìm là } P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{26}{156} = \frac{1}{6}.$$

□

**BÀI 29.** Gọi  $E$  là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp  $E$ , tính xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4.

**Lời giải.**

Gọi  $\Omega$  là không gian mẫu của phép thử “lấy ngẫu nhiên ba số từ tập  $E$ ”, gọi  $A$  là biến cố “trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4”. Ta có:

- Số phần tử của tập  $E$  là  $A_5^3 = 60$ .
- Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{60}^3 = 34220$ .
- Các số thuộc  $E$  không có chữ số 4 là  $A_4^3 = 24$ .
- Các số thuộc  $E$  có mặt chữ số 4 là  $60 - 24 = 36$ .
- Số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  là  $n_A = C_{36}^1 \cdot C_{24}^2 = 9936$ .

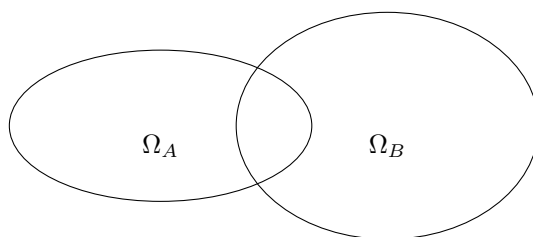
Xác suất cần tìm là  $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega} = \frac{9936}{34220} \approx 0,29$ . □

## BÀI 5. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

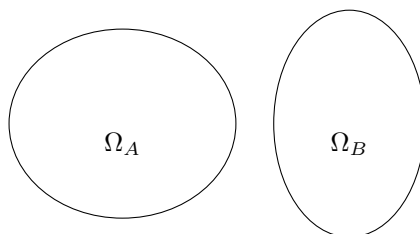
#### 1 QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

**Định nghĩa 1 (Biến cố hợp).** Cho hai biến cố  $A$  và  $B$ . Biến cố “ $A$  hoặc  $B$  xảy ra”, kí hiệu là  $A \cup B$  được gọi là hợp của hai biến cố  $A$  và  $B$ . Khi đó  $\Omega_A \cup \Omega_B \subset \Omega$ .



**VÍ DỤ 1.** Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 11 của trường. Gọi  $A$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi toán” và  $B$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Lý”. Khi đó  $A \cup B$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Toán hoặc giỏi Lý”.

**Định nghĩa 2 (Biến cố xung khắc).** Cho hai biến cố  $A$  và  $B$ . Hai biến cố  $A$  và  $B$  được gọi là xung khắc nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra. Khi đó  $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$ .



**VÍ DỤ 2.** Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi  $A$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh lớp 11C<sub>1</sub>” và  $B$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh lớp 11C<sub>2</sub>”. Khi đó  $A$  và  $B$  là hai biến cố xung khắc.

**Định nghĩa 3 (Quy tắc cộng xác suất hai biến cố xung khắc).**

- Nếu  $A$  và  $B$  là hai biến cố xung khắc thì xác suất biến cố  $A \cup B$  là  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .
- Cho  $n$  biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  đôi một là các biến cố xung khắc với nhau. Khi đó  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n)$ .

**VÍ DỤ 3.** Cho một hộp đựng 4 viên bi xanh và 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để có ít nhất 2 viên bi xanh.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là:  $n(\Omega) = C_7^3 = 35$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi xanh”. Có các trường hợp sau:

- Lấy được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ, số cách chọn là  $C_4^2 \cdot C_3^1 = 18$ .
- Lấy được 3 viên bi xanh, số cách chọn là  $C_4^3 = 4$ .

Theo quy tắc cộng ta có  $n(A) = 18 + 4 = 22$ .

Vậy xác suất của  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{22}{35}$ . □

**VÍ DỤ 4.** Trên một kệ sách có 7 quyển sách Toán, 6 quyển sách Lý và 4 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên từ kệ sách đó ra hai quyển sách. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách cùng một môn.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là:  $n(\Omega) = C_{17}^2 = 136$ .

Gọi  $A$  là biến cố: “Lấy được hai quyển sách cùng một môn”. Có các trường hợp sau:

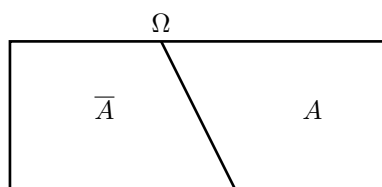
- Lấy được 2 quyển sách Toán, có  $C_7^2 = 21$  cách.
- Lấy được 2 quyển sách Lý, có  $C_6^2 = 15$  cách.
- Lấy được 2 quyển sách Hóa, có  $C_4^2 = 6$  cách.

Theo quy tắc cộng ta có  $n(A) = 21 + 15 + 6 = 42$ .

Vậy xác suất của  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{42}{136} = \frac{21}{68}$ . □

**Định nghĩa 4 (Biến cố đối).** Cho  $A$  là một biến cố. Khi đó biến cố “không  $A$ ”, kí hiệu là  $\bar{A}$ , được gọi là biến cố đối của  $A$ . Ta nói  $A$  và  $\bar{A}$  là hai biến cố đối của nhau.

Khi đó  $\Omega_{\bar{A}} = \Omega \setminus \Omega_A \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .



**Câu hỏi 1:** Hai biến cố đối nhau có phải là hai biến cố xung khắc?

**Lời giải.**

Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. □

**Câu hỏi 2:** Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối?

**Lời giải.**

Hai biến cố xung khắc không phải là hai biến cố đối. □

**VÍ DỤ 5.** Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn với xác suất  $\frac{2}{7}$ . Khi đó xác suất bắn trượt là bao nhiêu?

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là biến cố: “Một xạ thủ bắn vào bia một viên đạn” thì  $P(A) = \frac{2}{7}$ . Khi đó xác suất bắn trượt là

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ . □

**VÍ DỤ 6.** Từ một hộp có 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên cùng một lúc ra 4 quả. Tính xác suất sao cho:

- a) Bốn quả lấy ra cùng màu.
- b) Bốn quả lấy ra có đủ hai màu.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là:  $n(\Omega) = C_{10}^4 = 210$ .

- a) Gọi  $A$  là biến cố: “Bốn quả lấy ra cùng màu”. Có hai trường hợp:

- Bốn quả lấy ra cùng màu trắng, có  $C_6^4 = 15$  cách chọn.
- Bốn quả lấy ra cùng màu xanh, có  $C_4^4 = 1$  cách chọn.

Theo quy tắc cộng thì  $n(A) = 15 + 1 = 16$  cách chọn. Vậy xác suất của  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$ .

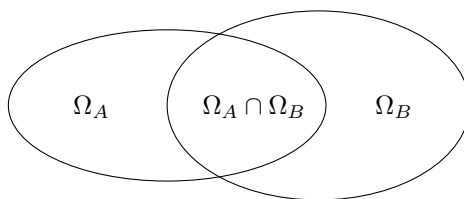
- b) Gọi  $B$  là biến cố: “Bốn quả lấy ra có đủ hai màu” thì  $B = \bar{A}$ .

Suy ra  $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{105} = \frac{97}{105}$ .

□

## 2 QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

**Định nghĩa 5 (Biến cố giao).** Cho hai biến cố  $A$  và  $B$ . Biến cố “ $A$  và  $B$  cùng xảy ra”, kí hiệu là  $A \cap B$  (hay  $AB$ ) gọi là giao của hai biến cố  $A$  và  $B$ .



**VÍ DỤ 7.** Chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 11 của trường. Gọi  $A$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Toán” và gọi  $B$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Lý”.  
 Khi đó:  $A \cap B$  là biến cố: “Bạn đó là học sinh giỏi Toán và giỏi Lý”

**Định nghĩa 6 (Hai biến cố độc lập).** **VÍ DỤ 8.** Gieo một đồng xu liên tiếp 2 lần. Gọi  $A$  là biến cố: “Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt sấp” và gọi  $B$  là biến cố: “Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt ngửa”. Khi đó  $A$  và  $B$  là 2 biến cố độc lập.

- Hai biến cố được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng xác suất xảy ra của biến cố kia.
- Nếu hai biến cố  $A$  và  $B$  độc lập với nhau thì  $A$  và  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  và  $B$ ,  $\bar{A}$  và  $\bar{B}$  cũng là độc lập

**Định nghĩa 7 (Quy tắc nhân xác suất hai biến cố độc lập).** — Nếu  $A$  và  $B$  là hai biến cố độc lập với nhau thì ta luôn có:  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

- Cho  $n$  biến cố  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  độc lập với nhau từng đôi một. Khi đó:

$$P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n) \text{ hay } P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

**VÍ DỤ 9.** Một cầu thủ sút bóng vào cầu môn hai lần. Biết rằng xác suất sút vào cầu môn là  $\frac{3}{8}$ . Tính xác suất để cầu thủ đó sút hai lần bóng đều vào được cầu môn.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là biến cố: “Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ nhất” thì  $P(A) = \frac{3}{8}$ .

Gọi  $B$  là biến cố: “Cầu thủ sút bóng vào cầu môn lần thứ hai” thì  $P(B) = \frac{3}{8}$ .

Suy ra  $AB$  là biến cố: “Cầu thủ sút hai lần bóng đều vào được cầu môn”.

Vì  $A$  và  $B$  là hai biến cố độc lập nên xác suất của  $AB$  là  $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$ .  $\square$

**VÍ DỤ 10.** Có hai xạ thủ bắn bia. Xác suất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là 0,8. Xác suất xạ thủ thứ hai bắn trúng bia là 0,7. Tính xác suất để:

- Cả hai xạ thủ đều bắn trúng.
- Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia.
- Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là biến cố: “Xạ thủ thứ nhất bắn trúng” và  $B$  là biến cố: “Xạ thủ thứ hai bắn trúng” thì  $P(A) = 0,8$  và  $P(B) = 0,7$ . Ta có  $A$  và  $B$  là hai biến cố độc lập.

- Biến cố: “Cả hai xạ thủ đều bắn trúng” là  $AB$  nên  $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$ .
- Biến cố: “Cả hai xạ thủ đều không bắn trúng bia” là  $\overline{AB}$ .  
Do  $A$  và  $B$  là độc lập nên  $\overline{A}$  và  $\overline{B}$  cũng độc lập. Suy ra  $P(\overline{AB}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$ .
- Biến cố: “Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng bia” là  $A \cup B$ .  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94$ .

$\square$

**⚠️ Áp dụng các nguyên tắc tính xác suất để giải bài toán, thường ta làm theo các bước sau:**

— **Bước 1.** Gọi  $A$  là biến cố cần tính xác suất và  $A_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) là các biến cố liên quan đến  $A$  sao cho:

- + Biến cố  $A$  biểu diễn theo các biến cố  $A_i$ , ( $A_1, A_2, \dots, A_n$ ).
- + Hoặc xác suất các biến cố  $A_i$  tính toán dễ dàng hơn so với  $A$ .

— **Bước 2.** Biểu diễn biến cố  $A$  theo các biến cố  $A_i$ .

— **Bước 3.** Xác định mối liên hệ giữa các biến cố và áp dụng các nguyên tắc:

- + Nếu  $A_1, A_2$  xung khắc ( $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ) thì  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ .
- + Nếu  $A_1, A_2$  bất kỳ thì  $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$ .
- + Nếu  $A_1, A_2$  độc lập thì  $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ .
- + Nếu  $A_1, A_2$  đối nhau thì  $P(A_1) = 1 - P(A_2)$ .

## B BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Một cặp vợ chồng mong muốn sinh bằng được con trai (sinh được con trai rồi thì không sinh nữa, chưa sinh được thì sẽ sinh tiếp). Xác suất sinh được con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tìm xác suất sao cho cặp vợ chồng đó mong muốn sinh được con trai ở lần sinh thứ 2.

**Lời giải.**

Xác suất sinh con gái là  $1 - 0,51 = 0,49$ .

Xác suất để cặp vợ chồng đó sinh được con trai ở lần sinh thứ 2 là  $0,49 \cdot 0,51 = 0,2499$ .  $\square$

**BÀI 2.** Ba xạ thủ độc lập cùng bắn vào một cái bia. Xác suất bắn trúng mục tiêu của mỗi xạ thủ là 0,6.

- ① Tính xác suất để trong 3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu.
- ② Muốn mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn phải có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng mục tiêu. Tính xác suất để mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $X_i$  là xạ thủ thứ  $i$  bắn trúng bia. Khi đó  $\overline{X_i}$  là xạ thủ thứ  $i$  không bắn trúng bia. Ta có  $P(X_i) = 0,6; P(\overline{X_i}) = 0,4$ .  
Gọi  $A$  là biến cố "3 xạ thủ bắn có đúng một xạ thủ bắn trúng mục tiêu".  
Ta có  $P(A) = P(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + P(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,288$ .

- ② Gọi  $B$  là biến cố "mục tiêu bị phá hủy hoàn toàn".  
 $P(B) = P(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) + P(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + P(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) + P(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3) = 0,6^3 + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,648$ .

□

**BÀI 3.** Hai xạ thủ  $A$  và  $B$  cùng bắn vào tấm bia mỗi người mỗi phát. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ  $A$  là 0,7. Tìm xác suất bắn trúng bia của xạ thủ  $B$ . Biết xác suất có ít nhất một người bắn trúng bia là 0,94.

**Lời giải.**

Gọi  $X_A$  là xạ thủ  $A$  bắn trúng bia  $\Rightarrow \overline{X_A}$  là xạ thủ  $A$  không bắn trúng bia  $\Rightarrow P(X_A) = 0,7, P(\overline{X_A}) = 0,3$ .

Gọi  $X_B$  là xạ thủ  $B$  bắn trúng bia  $\Rightarrow \overline{X_B}$  là xạ thủ  $B$  không bắn trúng bia.

Gọi  $E$  là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia".  $\overline{E}$  là biến cố "không ai bắn trúng bia"

$\Rightarrow P(E) = 0,94 \Rightarrow P(\overline{E}) = 0,06$ .

Ta có  $P(\overline{E}) = P(\overline{X_A}) \cdot P(\overline{X_B}) = 0,3 \cdot P(\overline{X_B}) = 0,06 \Rightarrow P(\overline{X_B}) = 0,2 \Rightarrow P(X_B) = 0,8$ .

□

**BÀI 4.** Hai người độc lập nhau cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất bắn trúng bia của họ lần lượt là  $\frac{1}{3}$  và  $\frac{1}{5}$ . Tính xác suất của các biến cố sau

- ①  $A$ : "cả hai đều bắn trúng".
- ②  $B$ : "cả hai đều bắn trượt".
- ③  $C$ : "ít nhất một người bắn trúng".
- ④  $D$ : "có đúng một người bắn trúng".

**Lời giải.**

- ①  $A$ : "cả hai đều bắn trúng". Khi đó  $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ .

- ②  $B$ : "cả hai đều bắn trượt". Khi đó  $P(B) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ .

- ③  $C$ : "ít nhất một người bắn trúng". Ta có biến cố  $B$  chính là biến cố đối của  $C$ . Khi đó  
 $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$ .

- ④  $D$ : "có đúng một người bắn trúng" tức là người thứ nhất bắn trúng người thứ 2 bắn trượt hoặc người thứ nhất bắn trượt người thứ hai bắn trúng. Ta có  $P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

□

**BÀI 5.** Có 3 người cùng đi câu cá; xác suất Câu được cá của người thứ nhất là 0,5; xác suất câu được cá của người thứ hai là 0,4; xác suất câu được cá của người thứ ba là 0,2. Tính xác suất biến cố:

- ① Có đúng 1 người câu được cá.
- ② Có đúng 2 người câu được cá.
- ③ Người thứ 3 luôn luôn câu được cá.
- ④ Có ít nhất 1 người câu được cá.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $X_i$  là người thứ  $i$  câu được cá. Khi đó  $\overline{X_i}$  là người thứ  $i$  không câu được cá. Ta có  
 $P(X_1) = 0,5; P(X_2) = 0,4; P(X_3) = 0,2; P(\overline{X_1}) = 0,5; P(\overline{X_2}) = 0,6; P(\overline{X_3}) = 0,8$ .  
 Gọi  $A$  là biến cố "có đúng 1 người câu được cá". Ta có  
 $P(A) = P(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + P(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) + P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = 0,46$ .
- ② Gọi  $B$  là biến cố "có đúng 2 người câu được cá". Ta có  $P(B) = P(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 + X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3) + P(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3}) + P(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3}) =$   
 $= 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,26$ .
- ③ Gọi  $C$  là biến cố "người thứ 3 luôn luôn câu được cá". Khi đó  $P(D) = P(X_3) = 0,2$ .
- ④ Gọi  $D$  là biến cố "có ít nhất 1 người câu được cá"  $\Rightarrow \overline{D}$  là biến cố "không ai câu được cá". Ta có  
 $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot P(\overline{X_3}) = 1 - 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 1 - 0,24 = 0,76$ .

□

**BÀI 6.** Một xạ thủ bắn vào bia 4 lần độc lập; xác suất bắn trúng một lần là 0,3. Tính xác suất biến cố:

- ① Cả 4 lần đều bắn trượt.  
 ② Có đúng 3 lần bắn trúng.  
 ③ Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt.  
 ④ Ít nhất 2 lần bắn trúng.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $X_i$  là xạ thủ bắn trúng bia lần thứ  $i$ . Khi đó  $\overline{X_i}$  là xạ thủ không bắn trúng bia lần thứ  $i$ .  
 Ta có  $P(X_i) = 0,3; P(\overline{X_i}) = 0,7$ .  
 Gọi  $A$  là biến cố "Cả 4 lần đều bắn trượt". Ta có  $P(A) = P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4}) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,2401$ .
- ② Gọi  $B$  là biến cố "Có đúng 3 lần bắn trúng".  $\Rightarrow P(B) = 4 \cdot (0,7 \cdot 0,3^3) = 0,0756$ .
- ③ Gọi  $C$  là biến cố "Lần thứ 1 bắn trúng, lần thứ 2 bắn trượt".  $\Rightarrow P(C) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$ .
- ④ Gọi  $D$  là biến cố "Ít nhất 2 lần bắn trúng".  
 $P(D) = P(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) + P(B) +$   
 $+ (P(X_1 \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot \overline{X_4}) + P(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot \overline{X_4}) + P(X_1 \cdot \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} \cdot X_4) + P(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \overline{X_4}) + P(\overline{X_1} \cdot X_2 \cdot \overline{X_3} \cdot X_4) + P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot X_3 \cdot X_4))$   
 $= (0,3)^4 + 0,0756 + 4 \cdot (0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7) = 0,2601$ .

□

**BÀI 7.** Có hai hộp đựng thẻ, mỗi hộp đựng 12 thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong 2 thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12.

**Lời giải.**

Gọi  $X_i$  là từ hộp thứ  $i$  rút ra được một thẻ được ghi số 12. Khi đó  $\overline{X_i}$  là từ hộp thứ  $i$  rút ra được một thẻ không ghi số 12. Ta có  $P(X_i) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(\overline{X_i}) = \frac{11}{12}$ .

Gọi  $A$  là biến cố "2 thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12"  $\Rightarrow \overline{A}$  là biến cố "2 thẻ rút ra không có thẻ đánh số 12".

$$\text{Ta có } P(\overline{A}) = P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{121}{144} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}.$$

□

**BÀI 8.** Có ba xạ thủ cùng bắn vào một tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt của mỗi người là 0,6; 0,7 và 0,8. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia.

**Lời giải.**

Gọi  $X_i$  là xạ thủ thứ  $i$  bắn trúng bia. Khi đó  $\overline{X_i}$  là xạ thủ thứ  $i$  không bắn trúng bia.

Ta có  $P(X_1) = 0,6; P(X_2) = 0,7; P(X_3) = 0,8; P(\overline{X_1}) = 0,4; P(\overline{X_2}) = 0,3; P(\overline{X_3}) = 0,2$ .

Gọi  $A$  là biến cố "có ít nhất một người bắn trúng bia"  $\Rightarrow \overline{A}$  là biến cố không ai bắn trúng bia.

Ta có  $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot P(\overline{X_3}) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976$ .

□

**BÀI 9.** Có một xạ thủ mới tập bắn, bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn:

- ① Ít nhất một lần trúng bia.
- ② Bắn trúng bia đúng lần thứ nhất.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $X_i$  là lần thứ  $i$  xạ thủ bắn trúng bia. Khi đó  $\overline{X_i}$  là lần thứ  $i$  xạ thủ không bắn trúng bia. Ta có  $P(X_i) = 0,2; P(\overline{X_i}) = 0,8$ .  
Gọi  $A$  là biến cố "ít nhất một lần trúng bia"  $\Rightarrow \overline{A}$  là biến cố không ai bắn trúng bia. Ta có  $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot P(\overline{X_3}) = 1 - 0,8^3 = 1 - 0,512 = 0,488$ .
- ② Gọi  $B$  là biến cố "bắn trúng bia đúng lần thứ nhất". Ta có  $P(B) = P(X_1) = 0,2$ .

□

**BÀI 10.** Việt và Nam thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc thì thắng trận. Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4 (giả sử không có séc hòa). Tính xác suất Nam thắng trận?

**Lời giải.**

Xác suất Nam thắng mỗi séc là 0,4, xác suất Nam không thắng mỗi séc là  $1 - 0,4 = 0,6$ .

Xác suất Nam thắng cả 3 séc đầu:  $0,4^3 = 0,064$ .

Xác suất Nam thắng 3 séc trong 4 séc đầu:  $0,4^3 \cdot 0,6 = 0,0384$ .

Xác suất Nam thắng cả 3 séc trong 5 séc:  $0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,02304$ .

Vậy xác suất Nam thắng trận là:  $0,064 + 0,0384 + 0,02304 = 0,11008$ .

□

**BÀI 11.** Một nhóm xạ thủ gồm có 10 người trong đó có 3 xạ thủ loại I và 7 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích trong mỗi lần bắn của một xạ thủ loại I và loại II lần lượt là 0,9 và 0,8. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ trong 10 người và cho bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn trúng đích?

**Lời giải.**

Xác suất chọn 1 xạ thủ loại I và bắn trúng là  $\frac{3}{10} \cdot 0,9 = 0,27$ .

Xác suất chọn 1 xạ thủ loại II và bắn trúng là  $\frac{7}{10} \cdot 0,8 = 0,56$ .

Vậy xác suất để viên đạn trúng đích là  $0,27 + 0,56 = 0,83$ .

□

**BÀI 12.** Có ba lô hàng. Người ta lấy một cách ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Biết rằng xác suất để được một sản phẩm có chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là 0,5; 0,6 và 0,7. Tính xác suất để trong ba sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt?

**Lời giải.**

Gọi  $X_i$  là biến cố chọn được sản phẩm có chất lượng tốt ở lô hàng thứ  $i$ . Khi đó  $\overline{X_i}$  là biến cố chọn được sản phẩm có chất lượng chưa tốt ở lô hàng thứ  $i$ .

Ta có  $P(X_1) = 0,5, P(X_2) = 0,6, P(X_3) = 0,7, P(\overline{X_1}) = 0,5, P(\overline{X_2}) = 0,4, P(\overline{X_3}) = 0,3$ .

Gọi  $A$  là biến cố "lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt"  $\Rightarrow \overline{A}$  là biến cố "lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng chưa tốt".

Ta có  $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot P(\overline{X_3}) = 1 - 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 1 - 0,06 = 0,94$ .

□

**BÀI 13.** Một hộp chứa 11 bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là số lẻ.

**Lời giải.**

Từ 1 đến 11 có 6 số lẻ, 5 số chẵn. Số phần tử không gian mẫu  $n(\Omega) = C_{11}^6 = 462$ .

Gọi  $A$  là biến cố chọn 6 bi một cách ngẫu nhiên, rồi cộng các số trên 6 bi được rút ra với nhau được số lẻ.

① **Trường hợp 1:** 1 số lẻ, 5 số chẵn  $C_6^1 \cdot C_5^5 = 6$ .

② **Trường hợp 2:** 3 số lẻ, 3 số chẵn  $C_6^3 \cdot C_5^3 = 200$ .

③ **Trường hợp 3:** 5 số lẻ, 1 số chẵn  $C_6^5 \cdot C_5^1 = 30$ .

$\Rightarrow n(A) = 6 + 200 + 30 = 236$ . Vậy xác suất để kết quả thu được là số lẻ là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{118}{231}$ .

□

**BÀI 14.** Một hộp có đựng 4 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên từng sản phẩm một, không bỏ trở lại để kiểm tra cho đến khi lấy ra hai phế thì thôi. Tính xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2.

**Lời giải.**

Xác suất lấy ra được chính phẩm  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ , xác suất lấy ra được phế phẩm  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

Vậy xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2 là  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .

□

**BÀI 15.** Một tủ kho có một chùm chìa khóa gồm 10 chiếc hình thức giống nhau nhưng trong đó chỉ có 3 chìa là mở được kho. Anh ta mở ngẫu nhiên từng chìa khóa một cho đến khi mở được kho. Tính xác suất để:

- ① Anh ta mở được kho ở lần thứ 3.
- ② Anh ta mở được kho mà không quá 3 lần mở.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $X_i$  là biến cố chọn được chìa khóa thứ  $i$  mở được kho. Khi đó  $\overline{X_i}$  là biến cố chọn được chìa khóa thứ  $i$  không mở được kho. Ta có  $P(X_i) = 0,3; P(\overline{X_i}) = 0,7$ .  
Gọi  $A$  là biến cố "mở được kho ở lần thứ 3"  $\Rightarrow \overline{A}$  là biến cố không ai bắt trúng bia. Ta có  
 $P(A) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot P(X_3) = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,147$ .
- ② Gọi  $B$  là biến cố "mở được kho mà không quá 3 lần mở".  
Ta có  $P(B) = 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 0,657$ .

□

**BÀI 16.** Một nồi hơi có 3 van bảo hiểm hoạt động độc lập với xác suất hỏng của van 1, van 2, van 3 trong khoảng thời gian  $t$  tương ứng là 0,1; 0,2 và 0,3. Nồi hơi hoạt động an toàn nếu ít nhất một van không hỏng. Tìm xác suất để nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian  $t$ ?

**Lời giải.**

Gọi  $X_i$  là biến cố van thứ  $i$  bị hỏng. Khi đó  $\overline{X_i}$  là biến cố van thứ  $i$  không bị hỏng.

Ta có  $P(X_1) = 0,1; P(X_2) = 0,2; P(X_3) = 0,3$ .

Gọi  $A$  là biến cố "nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian  $t$ "  $\Rightarrow \overline{A}$  là biến cố 3 van bị hỏng. Ta có  
 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot P(X_3) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 1 - 0,006 = 0,994$ .

□

**BÀI 17.** Trong thời gian có dịch bệnh ở vùng dân cư. Cứ 100 người bệnh thì phải có 20 người đi cấp cứu. Xác suất để gặp người đi cấp cứu do mắc phải dịch bệnh của vùng đó là 0,08. Tìm tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó.

**Lời giải.**

Tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó là  $\frac{20}{100} \cdot 0,08 = 0,016$ .

□

**BÀI 18.** Một máy bay có 5 động cơ gồm 3 động cơ bên cánh trái và hai động cơ bên cánh phải. Mỗi động cơ bên cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,09; mỗi động cơ bên cánh trái có xác suất hỏng là 0,04. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Máy bay chỉ thực hiện được chuyến bay an toàn nếu ít nhất hai động cơ làm việc. Tính xác suất để máy bay thực hiện được chuyến bay an toàn.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là biến cố máy bay bay an toàn. Khi đó  $\overline{A}$  là biến cố máy bay bay không an toàn.

- ① **Trường hợp 1:** 5 động cơ hỏng  $0,09^3 \cdot 0,04^2$ .
- ② **Trường hợp 2:** 4 động cơ hỏng  $0,09^3 \cdot 0,04 \cdot 0,96 + 0,09^2 \cdot 0,91 \cdot 0,04^2$ .

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 0,09^3 \cdot 0,04^2 + 0,09^3 \cdot 0,04 \cdot 0,96 + 0,09^2 \cdot 0,91 \cdot 0,04^2$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,9999590464.$$

□

**BÀI 19.** Ba cầu thủ sút phạt luân lưu 11 mét, mỗi người đá một lần với xác suất làm bàn tương ứng là  $x; y$  và 0,6 (với  $x > y$ ). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là 0,976 và xác suất để ba cầu thủ đều ghi bàn là 0,336. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn?

**Lời giải.**

Xác suất để 3 cầu thủ cùng ghi bàn là  $x \cdot y \cdot 0,6 = 0,336 \Leftrightarrow x \cdot y = 0,56$  (1).

Xác suất để không có cầu thủ nào ghi bàn là  $(1-x)(1-y)(1-0,6) = 1 - 0,976$  (2).

$$\text{Từ (1), (2) ta có } \begin{cases} x \cdot y = 0,56 \\ (1-x)(1-y) = 0,06 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0,56 \\ -x - y + xy = -0,94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0,56 \\ x + y = 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{7}{10} \end{cases}$$

□

**BÀI 20.** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm và mỗi câu trả lời sai được trừ 2 điểm. Một học sinh không học bài nên đánh hù họa một câu trả lời. Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số câu trả lời đúng ( $0 \leq x \leq 10$ ), khi đó số câu trả lời sai là  $10 - x$ . Để học sinh làm dưới 1 điểm thì số câu trả lời đúng thỏa mãn bất phương trình  $5x + (10 - x)(-2) < 1 \Leftrightarrow 7x < 21 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$ .

①  $x = 0$  không có câu đúng  $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ .

②  $x = 1$  có 1 câu đúng  $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9$ .

③  $x = 2$  có 2 câu đúng  $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8$ .

Vậy xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1 là  $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^9 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^8 = \frac{85293}{1048576}$ .  $\square$

**BÀI 21.** Trong một lớp học có 60 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên học tiếng Anh, 30 sinh viên học tiếng Pháp và 20 sinh viên học cả hai tiến Anh và Pháp. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Tính xác suất của các biến cố sau:

- ①  $A$ : "Sinh viên được chọn học tiếng Anh".
- ②  $B$ : "Sinh viên được chọn học tiếng Pháp".
- ③  $C$ : "Sinh viên được chọn học cả tiếng Anh lẫn tiếng Pháp".
- ④  $D$ : "Sinh viên được chọn không học tiếng Anh và Tiếng Pháp".

**Lời giải.**

- ① Theo đề số học sinh học tiếng Anh là 40, số học sinh học tiếng Pháp là 30, số học sinh học cả 2 môn Anh, Pháp là 20, số học sinh không học môn Anh, Pháp là  $60 - (40 + 30 - 20) = 10$ .  
Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Anh là  $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ .
- ② Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Pháp là  $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ .
- ③ Xác suất chọn được sinh viên học tiếng Anh là  $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ .
- ④ Xác suất chọn được sinh viên không học tiếng Anh và Tiếng Pháp là  $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ .

$\square$

**BÀI 22.** Trong kì kiểm tra chất lượng ở hai khối lớp, mỗi khối có 25% học sinh trượt Toán, 15% trượt Lý, 10% trượt cả Lý lẫn Toán. Từ mỗi khối chọn ngẫu nhiên một học sinh. Tính xác suất sao cho:

- ① Hai học sinh đó trượt Toán.
- ② Hai học sinh đó đều bị trượt một môn nào đó.
- ③ Hai học sinh đó không bị trượt môn nào.
- ④ Có ít nhất một trong hai học sinh bị trượt ít nhất một môn.

**Lời giải.**

Kí hiệu  $A_1, A_2, A_3$  lần lượt là các biến cố: Học sinh được chọn từ khối I trượt Toán, Lí Hóa;  $B_1, B_2, B_3$ , lần lượt là các biến cố: Học sinh được chọn từ khối II trượt Toán, Lí Hóa. Rõ ràng với mọi  $(i, j)$ , các biến cố  $A_i$  và  $B_j$  độc lập.

① Ta có  $P(A_1 B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ .

② Xác suất cần tính là

$$\begin{aligned} & P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)) \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cdot P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- ③ Đặt  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ,  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ .  
Cần tính  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ . Do  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$  độc lập, ta có:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \\ &= [1 - P(A)]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

- ④ Cần tính  $P(A \cup B)$ . Ta có:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

**BÀI 23.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn  $X$  làm đề thi trắc nghiệm môn Hóa. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có 1 phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Bạn  $X$  trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại  $X$  chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi Hóa của  $X$  không dưới 9,5 điểm.

**Lời giải.**

Thí sinh  $X$  không dưới 9,5 điểm khi và chỉ khi trong 5 câu trả lời ngẫu nhiên có ít nhất 3 câu đúng.

Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là  $\frac{1}{4}$ , trả lời sai là  $\frac{3}{4}$ . Ta có các trường hợp:

- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 3 trên 5 câu là  $C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 4 trên 5 câu là  $C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4}$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 5 trên 5 câu là  $C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5$ .

Vậy xác suất cần tính  $P = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \frac{3}{4} + C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{53}{512}$ .

□

**BÀI 24.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, bạn  $X$  dự thi hai môn trắc nghiệm môn Hóa và Lí. Đề thi của mỗi câu gồm 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn, trong đó có 1 phương án đúng, làm đúng mỗi câu được 0,2 điểm. Mỗi môn thi bạn  $X$  làm hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại  $X$  chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để tổng hai môn thi của  $X$  không dưới 19 điểm.

**Lời giải.**

Thí sinh  $X$  không dưới 19 điểm khi và chỉ khi trong 10 câu trả lời ngẫu nhiên ở cả hai môn Hóa và Lí có ít nhất 5 câu đúng. Xác suất trả lời đúng 1 câu hỏi là  $\frac{1}{4}$ , trả lời sai là  $\frac{3}{4}$ . Ta có các trường hợp:

- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 5 trên 10 câu là  $C_{10}^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 6 trên 10 câu là  $C_{10}^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 7 trên 10 câu là  $C_{10}^7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 8 trên 10 câu là  $C_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 9 trên 10 câu là  $C_{10}^9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \frac{3}{4}$ .
- Xác suất thí sinh  $X$  trả lời đúng 10 trên 10 câu là  $C_{10}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ .

Vậy xác suất cần tính là

$$\begin{aligned} P &= C_{10}^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 + C_{10}^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + C_{10}^7 \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + C_{10}^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_{10}^9 \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \frac{3}{4} + C_{10}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \\ &= \frac{81922}{4^{10}}. \end{aligned}$$

□

## BÀI 6. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 2

**BÀI 1.** Xếp ngẫu nhiên ba người nam và hai người nữ vào một dãy năm ghế kê theo hàng ngang. Tính xác suất để được kiểu xếp mà giữa hai người nam có đúng 1 người nữ.

**Lời giải.**

Số cách xếp 3 nam và 2 nữ vào 5 ghế là  $5!$  cách.

Gọi  $A$  là biến cố giữa hai người nam có đúng 1 người nữ:

— Xếp 3 nam vào 3 ghế số 1, 3, 5 là  $3!$  cách.

— Xếp 2 nữ vào vào 2 ghế số 2, 4 là  $2!$  cách.

Suy ra  $n(A) = 3!2!$ .

Vậy  $P(A) = \frac{3!2!}{5!} = \frac{1}{10}$ . □

**BÀI 2.** Gọi  $A$  là tập hợp tất cả các số gồm năm chữ số mà chữ số 3 có mặt đúng 3 lần, hai chữ số còn lại khác nhau và thuộc tập hợp các chữ số 1, 2, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ  $A$ . Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là tập hợp các số  $x$  có dạng  $\overline{abcde}$  thỏa yêu cầu. Ta có  $n(\Omega) = C_5^3 A_4^2$ .

Để  $x$  chia hết cho 3 thì  $(a + b + c + d + e) : 3$ , do đó hai chữ số trong năm chữ số được chọn trong 4 bộ số  $\{1; 2\}, \{1; 5\}, \{2; 4\}, \{4; 5\}$ .

Do đó  $n(A) = C_5^3 C_4^2$ .

Vậy  $P(A) = \frac{C_5^3 C_4^2}{C_5^3 A_4^2} = \frac{3}{4}$ . □

**BÀI 3.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, Thành đoàn thành lập tổ công tác gồm 5 người được chọn ngẫu nhiên từ 15 cán bộ đoàn trường học và 10 cán bộ các quận, huyện để tìm các chỗ trọ miễn phí cho những thí sinh có điều kiện khó khăn. Tính xác suất để trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường.

**Lời giải.**

Ta có  $n(\Omega) = C_{25}^5$ .

Gọi  $A$  là biến cố trong 5 người được chọn có không quá 2 cán bộ đoàn trường, có 3 phương án:

— Trong 5 người được chọn không có cán bộ đoàn trường:  $C_{10}^5$ .

— Trong 5 người được chọn có 1 cán bộ đoàn trường:  $C_{10}^4 C_{15}^1$ .

— Trong 5 người được chọn có 2 cán bộ đoàn trường:  $C_{10}^3 C_{15}^2$ .

Do đó  $n(A) = C_{10}^5 + C_{10}^4 C_{15}^1 + C_{10}^3 C_{15}^2$ .

Vậy  $P(A) = \frac{C_{10}^5 + C_{10}^4 C_{15}^1 + C_{10}^3 C_{15}^2}{C_{25}^5} = \frac{381}{1265}$ . □

**BÀI 4.** Trong một dự án nhà ở xã hội gồm có 5 tầng, mỗi tầng gồm có 6 căn hộ loại  $A$  và 4 căn hộ loại  $B$ . Một người mua nhà rút ngẫu nhiên căn hộ của mình. Tính xác suất để căn hộ anh ta rút được ở tầng 1 hoặc căn hộ loại  $A$ .

**Lời giải.**

Kí hiệu  $A, B$ , lần lượt là các biến cố: rút được căn hộ ở tầng 1, rút được căn hộ loại  $A$ .

Cần tính  $P(A \cup B)$ . Ta có:  $n(\Omega) = 60$ ,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 30 - 6 = 34$ .

Vậy  $P(A \cup B) = \frac{34}{60} = \frac{17}{30}$ . □

**BÀI 5.** Thực đơn ăn sáng tự chọn ở một khách sạn gồm 4 món xúp, 5 món bánh và 2 món cơm. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 3 món. Tính xác suất để 3 món được chọn có cả xúp, bánh và cơm.

**Lời giải.**

Gọi  $A$  là biến cố chọn được 3 món khác nhau.

Ta có số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{11}^3$ .

Số phần tử của biến cố  $A$ :  $n(A) = C_4^1 C_5^1 C_2^1$ .

Vậy  $P(A) = \frac{C_4^1 C_5^1 C_2^1}{C_{11}^3} = \frac{8}{33}$ . □

**BÀI 6.** Trong kì thi THPT Quốc Gia, một hội đồng coi thi có 216 thí sinh tham gia dự thi để xét công nhận tốt nghiệp THPT, trong đó trường  $X$  có 65 thí sinh dự thi. Sau buổi thi môn Toán, một phóng viên phỏng vấn ngẫu nhiên 3 học sinh. Tính xác suất để 3 học sinh được phỏng vấn có ít nhất 2 học sinh ở trường  $X$ .

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{216}^3$ .

Gọi  $A$  là biến cố “có ít nhất 2 học sinh trường  $X$ ”.

Số phần tử của biến cố  $A$ :  $n(A) = C_{65}^2 C_{151}^1 + C_{65}^3$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{C_{65}^2 C_{151}^1 + C_{65}^3}{C_{216}^3} = \frac{208}{963}.$$

□

**BÀI 7.** Có hai đơn vị cung cấp thực phẩm phục vụ ăn trưa cho công nhân của một nhà máy. Đơn vị thứ nhất cung cấp 3 loại thực phẩm, đơn vị thứ hai cung cấp 4 loại thực phẩm. Người phụ trách bếp ăn lấy mỗi loại thực phẩm một mẫu để đi kiểm tra và người kiểm tra chọn 3 mẫu bất kỳ. Tính xác suất để cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_7^3$ .

Gọi  $A$  là biến cố “cả hai đơn vị cung cấp đều có mẫu được chọn”. Có hai phương án:

— Có 1 loại của đơn vị thứ nhất và 2 loại của đơn vị thứ hai:  $C_3^1 C_4^2$ .

— Có 2 loại của đơn vị thứ nhất và 1 loại của đơn vị thứ hai:  $C_3^2 C_4^1$ .

Số phần tử của biến cố  $A$ :  $n(A) = C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1$ .

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{C_3^1 C_4^2 + C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{6}{7}.$$

□

**BÀI 8.** Trong đợt tình nguyện tiếp sức mùa thi, một trường học có 4 em lớp 11A, 5 em lớp 11B, 6 em lớp 11C đăng kí tham dự. Hỏi có bao nhiêu cách cử 7 em làm nhiệm vụ tại cổng trường đại học  $X$  sao cho mỗi lớp có ít nhất một em.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{15}^7$ .

Gọi  $A$  là biến cố “mỗi lớp có ít nhất một em được chọn”.

Thì  $\bar{A}$  là biến cố “có ít nhất một lớp không có em nào được chọn”.

Do đó  $n(\bar{A}) = C_9^7 + C_{10}^7 + C_{11}^7$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_9^7 + C_{10}^7 + C_{11}^7}{C_{15}^7} = \frac{661}{715}.$$

□

**BÀI 9.** Ban chấp hành Đoàn của một trường THPT cần chọn ra một nhóm học sinh tình nguyện gồm 5 học sinh từ 9 học sinh lớp 10 và 7 học sinh lớp 11. Tính xác suất để trong nhóm được chọn có ít nhất một học sinh lớp 11.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{16}^5$ .

Gọi  $A$  là biến cố “có ít nhất một học sinh lớp 11 được chọn”.

Thì  $\bar{A}$  là biến cố “không có học sinh nào của lớp 11 được chọn”.

Do đó  $n(\bar{A}) = C_9^5$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_9^5}{C_{16}^5} = \frac{101}{104}.$$

□

**BÀI 10.** Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên ba người để biểu diễn tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{20}^3$ .

Gọi  $A$  là biến cố “không có cặp vợ chồng nào trong 3 người được chọn”.

Thì  $\bar{A}$  là biến cố “có một cặp vợ chồng trong 3 người được chọn”. Cách chọn:

— Bước 1: Chọn một cặp vợ chồng từ 4 cặp:  $C_4^1$ .

— Bước 2: Chọn người thứ ba từ 18 người còn lại:  $C_{18}^1$ .

Do đó  $n(\bar{A}) = C_4^1 C_{18}^1$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_4^1 C_{18}^1}{C_{20}^3} = \frac{89}{95}.$$

□

**BÀI 11.** Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Trong buổi họp đầu năm, thầy giáo chủ nhiệm lớp muốn chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp gồm có lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Tính xác suất để chọn ra 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{40}^3$  (Có xét hay không xét thứ tự không làm xác suất thay đổi).

Gọi  $A$  là biến cố “trong 3 học sinh không có cặp sinh đôi nào”.

Thì  $\bar{A}$  là biến cố “trong 3 học sinh có 1 cặp sinh đôi”. Cách chọn:

- Bước 1 : Chọn một cặp sinh đôi từ 4 cặp:  $C_4^1$ .
- Bước 2 : Chọn người thứ ba từ 38 người còn lại:  $C_{38}^1$ .

Do đó  $n(\overline{A}) = C_4^1 C_{38}^1$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_4^1 C_{38}^1}{C_{40}^3} = \frac{64}{65}.$$

□

**BÀI 12.** Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

**Lời giải.**

**Cách 1:**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{20}^4$ .

Gọi  $A$  là biến cố “trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi”

Thì  $\overline{A}$  là biến cố “không có đôi nào trong 4 chiếc giày được lấy ra”. Cách chọn:

- Lấy 4 chiếc giày không có chiếc nào cùng đôi chứng tỏ 4 chiếc đó lấy từ 4 đôi khác nhau đôi một, có  $C_{10}^4$  cách chọn như vậy.
- Mỗi đôi lại có 2 cách chọn một chiếc giày đơn nên 4 đôi có  $2^4$  cách chọn.

Do đó  $n(\overline{A}) = 2^4 C_{10}^4$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2^4 C_{10}^4}{C_{20}^4} = \frac{99}{323}.$$

**Cách 2:**

Số phần tử của không gian mẫu:  $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$ .

Gọi  $A$  là biến cố “trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi”.

Thì  $\overline{A}$  là biến cố “không có đôi nào trong 4 chiếc giày được lấy ra”. Cách chọn:

- Chiếc thứ 1 có 20 cách chọn.
- Chiếc thứ 2 có 18 cách chọn (do đã loại 1 đôi).
- Chiếc thứ 3 có 16 cách chọn (do đã loại 2 đôi).
- Chiếc thứ 4 có 14 cách chọn (do đã loại 3 đôi).

Do cách chọn 4 chiếc giày không xét thứ tự nên thực tế  $n(\overline{A}) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{4!} = 3360$ .

$$\text{Vậy } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{3360}{4845} = \frac{99}{323}.$$

□

**BÀI 13.** Tìm số nguyên dương  $n$  để:  $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

Cho  $x = 2$  ta được:

$$\begin{aligned} 3^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n \\ \Rightarrow 3^n &= 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 5. \end{aligned}$$

□

**BÀI 14.** Cho đa giác đều  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ , ( $n > 2$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong  $2n$  điểm  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong  $2n$  điểm  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ . Tìm  $n$ ?

**Lời giải.**

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong  $2n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  là  $C_{2n}^3$ .

Gọi đường chéo của đa giác đều  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  đi qua tâm đường tròn ( $O$ ) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có  $n$  đường chéo lớn.

Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong  $2n$  điểm  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  có các đường chéo là đường chéo lớn. Ngược lại, với mọi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  tức  $C_n^2$ .

Theo giả thiết thì:

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \frac{n!}{2!(2n-3)!} \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow 2n-1 = 15 \Leftrightarrow n = 8.$$

□

**BÀI 15.** Cho khai triển nhị thức:  $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right) = C_n^0 2^{\frac{x-1}{2}} + C_n^1 2^{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}} 2^{-\frac{x}{3}} + \dots + C_n^{n-1} 2^{\frac{x-1}{2}} \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$  (với  $n$  là số nguyên dương), biết rằng trong khai triển đó:  $C_n^3 = 5C_n^1$  và số hạng thứ tư bằng  $20n$ . Tìm  $n$  và  $x$ .

**Lời giải.**

Từ  $C_n^3 = 5C_n^1$  ta có  $n \geq 3$  và

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = 5 \frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = -4 \text{ (loại)} \text{ hoặc } n_2 = 7.$$

Với  $n = 7$  ta có

$$C_7^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 140 \Leftrightarrow 35 \cdot 2^{2x-2} \cdot 2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4.$$

□

**BÀI 16.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển nhị thức Newton của  $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$ , biết rằng  $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$ , ( $n$  là số nguyên dương và  $x > 0$ ).

**Lời giải.**

Ta có

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = 5 \frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n+2)(n+3)}{2!} = 7(n+3) \Leftrightarrow n+2 = 7 \cdot 2! = 14 \Leftrightarrow n = 12.$$

□

Số hạng tổng quát của khai triển là  $C_{12}^k (x^{-3})^k \cdot \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$

$$\text{Ta có } x^{\frac{60-11k}{2}} = x^8 \Rightarrow \frac{60-11k}{2} = 8 \Rightarrow k = 4.$$

$$\text{Do đó hệ số của số hạng chứa } x^8 \text{ là } C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495.$$

**BÀI 17.** Với  $n$  là số nguyên dương, gọi  $a_{3n-3}$  là hệ số của  $x^{3n-3}$  trong khai triển thành đa thức của  $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$ . Tìm  $n$  để  $a_{3n-3} = 26n$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$(x^2 + 1)^n (x+2)^n = x^{3n} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^n \left(1 + \frac{2}{x}\right)^n = x^{3n} \left[ \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{1}{x^2}\right)^i \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{2}{x}\right)^k \right] = x^{3n} \left[ \sum_{i=0}^n C_n^i x^{-2i} \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k x^{-k} \right]$$

Trong khai triển trên, lũy thừa của  $x$  là  $3n - 3$  khi  $-2i - k = -3$ , hay  $2i + k = 3$ .

Ta chỉ có hai trường hợp thỏa điều kiện này là  $i = 0, k = 3$  hoặc  $i = 1, k = 1$ .

Nên hệ số của  $x^{3n-3}$  là  $a_{3n-3} = C_n^0 \cdot C_n^3 \cdot 2^3 + C_n^1 \cdot C_n^1 \cdot 2$ .

$$\text{Do đó } a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow \frac{2n(2n^2 - 3n + 4)}{3} = 26n \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy  $n = 5$  là giá trị cần tìm (vì  $n$  nguyên dương).

□

**BÀI 18.** Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển thành đa thức của  $[1 + x^2(1-x)]^8$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} [1 + x^2(1-x)]^8 &= C_8^0 + C_8^1 x^2(1-x) + C_8^2 x^4(1-x)^2 + C_8^3 x^6(1-x)^3 + C_8^4 x^8(1-x)^4 + C_8^5 x^{10}(1-x)^5 \\ &\quad + C_8^6 x^{12}(1-x)^6 + C_8^7 x^{14}(1-x)^7 + C_8^8 x^{16}(1-x)^8. \end{aligned}$$

Bậc của  $x$  trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8, bậc của  $x$  trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8.

Vậy  $x^8$  chỉ có trong các số hạng thứ tư, thứ năm, với hệ số tương ứng là  $C_8^3 \cdot C_3^2, C_8^4 \cdot C_4^0$ .

Suy ra  $a_8 = 168 + 70 = 238$ .

□

**BÀI 19.** Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho mỗi đề thi nhất thiết phải có đủ 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2?

**Lời giải.**

Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3 nên có các trường hợp sau

- Đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó thì số các chọn là  $C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625$ .
- Đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó thì số các chọn là  $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500$ .
- Đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó thì số các chọn là  $C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750$ .

Vì các cách chọn trên đôi một khác nhau nên số đề kiểm tra có thể lập được là  $23625 + 10500 + 22750 = 56875$ .  
□

**BÀI 20.** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$  với  $x > 0$ .

**Lời giải.**

Số hạng tổng quát của khai triển là

$$C_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{7-k}{3}} x^{-\frac{k}{4}} = C_7^k x^{\frac{28-7k}{12}}, (k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 7).$$

Số hạng không chứa  $x$  là số hạng tương ứng với  $k$ , ( $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 7$ ) thỏa mãn:

$$\frac{28-7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4.$$

Số hạng không chứa  $x$  cần tìm là  $C_7^4 = 35$ . □

**BÀI 21.** Tìm số nguyên dương  $n$ , biết rằng

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1) \cdot 2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

**Lời giải.**

Ta có  $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Đạo hàm hai vế ta được

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + 3C_{2n+1}^3 x^2 + \dots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay  $x = -2$  ta có

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1) \cdot 2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2n+1.$$

Theo giả thiết ta có  $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$ . □

**BÀI 22.** Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

**Lời giải.**

- Có  $C_3^1 C_{12}^4$  cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.
- Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có  $C_2^1 C_8^4$  cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai.
- Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất, thứ hai thì có  $C_1^1 C_4^4$  cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Số cách phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$C_3^1 \cdot C_{12}^4 \cdot C_2^1 \cdot C_8^4 \cdot C_1^1 \cdot C_4^4 = 207900.$$

□

**BÀI 23.** Tính giá trị của biểu thức:  $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$ , biết rằng số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ .

**Lời giải.**

Điều kiện  $n \geq 3$ .

Ta có

$$\begin{aligned} C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 &= 149 \\ \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2 \frac{(n+2)!}{2!n!} + 2 \frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} &= 149 \\ \Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 & (\text{nhận}) \\ n = -9 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $n = 5$  ta được  $M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{\frac{6!}{2!} + 3 \cdot \frac{5!}{2!}}{6!} = \frac{3}{4}$ . □

**BÀI 24.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{26}$  trong khai triển nhị thức Niuton của  $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ , biết rằng  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $C_n^k = C_n^{n-k}$  nên  $C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$ ,  $C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}, \dots, C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}$ .

Suy ra  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+1}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} (1+x)^{2n+1} &= C_{2n+1}^0 + (C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) + (C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+1}) + C_{2n+1}^{2n+1} \\ &= 2 + 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) \end{aligned}$$

Cho  $x = 1$  ta được  $2^{2n+1} = 2 + 2(2^{20} - 1) = 2^{21} \Leftrightarrow n = 10 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10}$ .

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = (x^{-4} + x^7)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^k (x^7)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{70-11k}.$$

Số hạng chứa  $x^{26}$  ứng với  $70 - 11k = 26 \Leftrightarrow k = 4$ .

Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{26}$  là  $C_{10}^4 = 210$ . □

**BÀI 25.** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

**Lời giải.**

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là  $C_{12}^4 = 495$ .

số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

- Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là  $C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 120$ .
- Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là  $C_5^1 \cdot C_4^2 \cdot C_3^1 = 90$ .
- Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh, số cách chọn là  $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^2 = 60$ .

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là  $120 + 90 + 60 = 270$ .

Vậy, số cách chọn phải tìm là  $495 - 270 = 225$ . □

**BÀI 26.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển nhị thức Newton của  $(2+x)^n$ , biết  $3^n \cdot C_n^0 + 3^{n-1} \cdot C_n^1 + 3^{n-2} \cdot C_n^2 - 3^{n-3} \cdot C_n^3 + \dots + (-1)^n \cdot C_n^n = 2048$ .

**Lời giải.**

Trong khai triển nhị thức Newton  $(a+b)^n$  cho  $a = 3, b = -1$  ta được kết quả

$$(3-1)^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n = 11.$$

Do đó tìm được hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển  $(2+x)^{11}$  là  $2C_{11}^{10}$ . □

**BÀI 27.** Tìm hệ số của số  $x^5$  trong khai triển  $x \cdot (1 - 2x)^5 + x^2 \cdot (1 + 3x)^{10}$ .

**Lời giải.**

Hệ số của  $x^5$  trong khai triển  $x \cdot (1 - 2x)^5$  là  $(-2)^4 C_5^4 = 80$ .

Hệ số của  $x^5$  trong khai triển  $x^2 \cdot (1 + 3x)^{10}$  là  $3^3 C_{10}^3 = 3240$ .

Hệ số của  $x^5$  trong khai triển  $x \cdot (1 - 2x)^5 + x^2 \cdot (1 + 3x)^{10}$  là  $80 + 3240 = 3320$ .  $\square$

**BÀI 28.** Cho khai triển  $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , trong đó  $n \in \mathbb{N}^*$  và các hệ số  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn hệ thức  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$ . Tìm số lớn nhất trong các hệ số  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(1 + 2x)^n = C_n^0 + 2C_n^1x + 2^2C_n^2x^2 + \dots + 2^nC_n^nx^n$ .

Theo đề  $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  suy ra  $a_0 = C_n^0, \frac{a_1}{2} = C_n^1, \dots, \frac{a_n}{2^n} = C_n^n$ .

Vì thế  $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$ .

Khi đó ta có khai triển  $(1 + 2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = C_{12}^k 2^k$ .

Xét bất phương trình  $a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k 2^k < C_{12}^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow k < \frac{23}{3}$ .

Tương tự  $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{23}{3}$ . Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 8$ .

Do đó  $a_0 < a_1 < \dots < a_7 < a_8 > a_9 > a_{10} > \dots > a_{12}$ .

Vậy hệ số lớn nhất trong các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$  là  $a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$ .  $\square$

**BÀI 29.** Tìm số nguyên dương  $n$  thỏa  $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$ .

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \\ 2^{2n} &= (1 + 1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$ .

Từ giả thiết suy ra  $2^{2n-1} = 2048 \Leftrightarrow n = 6$ .  $\square$

**BÀI 30.** Cho  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $5C_n^{n-1} = C_n^3$ . Tìm số hạng chứa  $x^5$  trong khai triển nhị thức Newton:  $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n, \forall x \neq 0$ .

**Lời giải.**

$$5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow 5n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n = 7 \quad (\text{vì } n \text{ nguyên dương}).$$

Khi đó  $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k \left(\frac{x^2}{2}\right)^{7-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^7 \frac{(-1)^k C_7^k}{2^{7-k}} x^{14-3k}$ .

Số hạng chứa  $x^5$  ứng với  $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$ .

Do đó số hạng cần tìm là  $\frac{(-1)^3 \cdot C_7^3}{2^4} x^5 = -\frac{35}{16} x^5$ .  $\square$

**BÀI 31.** Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

**Lời giải.**

Số cách chọn 4 học sinh trong lớp là  $C_{25}^4 = 12650$ .

Số cách chọn 4 học sinh có cả nam và nữ là  $C_{15}^1 \cdot C_{10}^3 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 = 11075$ .

Vậy xác suất cần tính là  $P = \frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$ .  $\square$

**BÀI 32.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của  $S$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

**Lời giải.**

Số phần tử của  $S$  là  $A_7^3 = 210$ .

Số cách chọn một số chẵn từ  $S$  là  $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$ .

Xác suất cần tính bằng  $\frac{90}{210} = \frac{3}{7}$ .  $\square$

**BÀI 33.** Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất để lấy được hai viên bi cùng màu.

**Lời giải.**

Số cách chọn 2 viên bi, mỗi viên từ một hộp là  $7 \cdot 6 = 42$ .

Số cách chọn 2 viên bi đỏ, mỗi viên từ một hộp là  $4 \cdot 2 = 8$ .

Số cách chọn 2 viên bi trắng, mỗi viên từ một hộp là  $3 \cdot 4 = 12$ .

Xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu là  $P = \frac{8+12}{42} = \frac{10}{21}$ . □

**BÀI 34.** Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{12}^3 = 220$ .

Số cách chọn 3 hộp sữa có đủ 3 loại là  $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 60$ . Do đó xác suất cần tính là  $P = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$ . □

**BÀI 35.** Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn?

**Lời giải.**

Số phần tử của không gian mẫu là  $C_{16}^4 = 1820$ .

Gọi  $E$  là biến cố “4 thẻ được đánh số chẵn”.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố “4 thẻ được đánh số chẵn” là  $C_8^4 = 70$ .

Xác suất cần tính là  $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{70}{1820} = \frac{1}{26}$ . □

**BÀI 36.** Trong đợt ứng phó dịch MERS – CoV, Sở Y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên ba đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn.

**Lời giải.**

Không gian mẫu  $\Omega$  có số phần tử là  $n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$ .

Gọi  $E$  là biến cố: có ít nhất hai đội của các trung tâm y tế cơ sở được chọn.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố  $E$  là  $C_{20}^2 \cdot C_5^1 + C_{20}^3 = 2090$ .

Vậy  $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{2090}{2300} = \frac{209}{230}$ . □

**BÀI 37.** Học sinh  $A$  thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh  $B$  không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để  $B$  mở được cửa vào phòng học đó.

**Lời giải.**

Không gian mẫu  $\Omega$  có số phần tử là  $n(\Omega) = A_{10}^3 = 720$ .

Gọi  $E$  là biến cố: “ $B$  mở được cửa phòng học”. Ta có

$$E = \{(0; 1; 9), (0; 2; 8), (0; 3; 7), (0; 4; 6), (1; 2; 7), (1; 3; 6), (1; 4; 5), (2; 3; 5)\}.$$

Do đó  $n(E) = 8$ . Vậy  $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{90}$ . □

# DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

## BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Bài toán.** Chứng minh mệnh đề chứa biến  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$ .

**Phương pháp.**

- Bước 1. Với  $n = 1$ , ta chứng minh  $P(1)$  đúng.
- Bước 2. Giả sử  $P(n)$  đúng với  $n = k \geq 1$ .  
Ta cần chứng minh  $P(n)$  đúng với  $n = k + 1$ .  
Kết luận, mệnh đề  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$ .

**⚠** Để chứng minh mệnh đề chứa biến  $P(n)$  đúng với  $n \geq p$ ,  $p$  là số nguyên dương. Ta cũng làm các bước tương tự như trên.

- Bước 1. Với  $n = p$ , ta chứng minh  $P(p)$  đúng.
- Giả sử  $P(n)$  đúng với  $n = k \geq p$ .  
Ta cần chứng minh  $P(n)$  đúng với  $n = k + 1$ .  
Kết luận, mệnh đề  $P(n)$  đúng với mọi số nguyên dương  $n$ .

### B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

#### 📁 DẠNG 1.1. Chứng minh mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n$

Thực hiện theo các bước đã nêu ở phần tóm tắt lý thuyết.

### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ , ta có

$$\textcircled{1} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \textcircled{2} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Đặt } S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

② Đặt  $T_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $T_1 = \frac{1^2(1 + 1)^2}{4} = 1 = 1^3$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$T_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$T_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2 [(k + 1) + 1]^2}{4} = \frac{(k + 1)^2 (k + 2)^2}{4}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2 + 4(k + 1)^3}{4} = \frac{(k + 1)^2 [k^2 + 4(k + 1)]}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k + 1)^2 (k + 2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

**Nhận xét.** Với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ , ta có  $T_n = S_n^2$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ , ta luôn có

①  $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$  chia hết cho 3.      ②  $u_n = 9^n - 1$  chia hết cho 8.

**Lời giải.**

① Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$  chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k$  chia hết cho 3.

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1)$  chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3(k + 1)^2 + 5k + 5 \\ &= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k + 1)^2 + 3k + 6. \end{aligned}$$

Vì  $(k^3 + 3k^2 + 5k) \vdots 3$ ,  $3(k + 1)^2 \vdots 3$ ,  $3k \vdots 3$  và  $6 \vdots 3$  nên  $u_{k+1} \vdots 3$ . Vậy mệnh đề đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 9^1 - 1 = 8$  chia hết cho 8. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = 9^k - 1$  chia hết cho 8.

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = 9^{k+1} - 1$  chia hết cho 8.

Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 9^{k+1} - 1 = 9 \cdot 9^k - 9 + 8 = [9(9^k - 1) + 8] \vdots 8.$$

Vậy mệnh đề đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

**VÍ DỤ 3.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n \geq 3$ , ta luôn có

①  $3^n > n^2 + 4n + 5$ .

②  $2^n > 2n + 1$ .

**Lời giải.**

① Với  $n = 3$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $3^k > k^2 + 4k + 5$ . (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 \text{ hay } 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10.$$

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 3 ta được

$$3 \cdot 3^k > 3(k^2 + 4k + 5) \Leftrightarrow 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10 + 2k^2 + 6k + 5 \Rightarrow 3^{k+1} > k^2 + 6k + 10 \text{ (vì } k \geq 3\text{)}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với  $n = 3$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $2^k > 2k + 1$ . (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là  $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$  hay  $2^{k+1} > 2k + 3$ .

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k + 2k + 2. \quad (2)$$

Vì  $k \geq 3$  nên  $2k \geq 6$ . Do đó (2) tương đương với

$$2^{k+1} > 2k + 6 + 2 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k + 3.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , ta luôn có

①  $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ .

②  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ .

③  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

④  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ .

⑤  $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$  với mọi  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

⑥  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ .

**Lời giải.**

① Đặt  $S_n = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

② Đặt  $S_n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = 1(1+1)^2 = 1 \cdot 4 = 4$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k+1) = k(k+1)^2.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + k(3k+1) + (k+1)[3(k+1)+1] = (k+1)[(k+1)+1]^2 = (k+1)(k+2)^2.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k^2 + k + 3k + 4) = (k+1)(k+2)^2.$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

③ Đặt  $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1 = 1^2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6} = \frac{(k+1)[k(2k+3) + 2(2k+3)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

④ Đặt  $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]} = \frac{(k+1)[(k+1)+3]}{4[(k+1)+1][(k+1)+2]} \\ &= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k(k+3)^2 + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{k^3 + 6k^2 + 9k + 4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

⑤ Đặt  $S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ . (1)

Với  $n = 2$  thì  $S_2 = \frac{2(2^2-1)(3 \cdot 2+2)}{12} = 4 = 1 \cdot 2^2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 2$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (k-1)k^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + [(k+1)-1](k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)^2-1][3(k+1)+2]}{12} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + k(k+1)^2 = \frac{k(k^2-1)(3k+2)}{12} + k(k+1)^2 = k \left[ \frac{3k^3 + 14k^2 + 21k + 10}{12} \right] \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 2$ .

⑥ Đặt  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}.$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

□

**BÀI 2.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , ta luôn có

- ①  $u_n = n^3 + 11n$  chia hết cho 6.                      ②  $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$  chia hết cho 6.  
 ③  $u_n = 4^n + 15n - 1$  chia hết cho 9.                      ④  $u_n = 7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$  chia hết cho 5.

**Lời giải.**

- ① Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12$  chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = k^3 + 11k$  chia hết cho 6.

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1)$  chia hết cho 6.

Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = (k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k(k+1) + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k(k+1) + 12.$$

Vì  $(k^3 + 11k) : 6, 3k(k+1) : 6$  và  $12 : 6$  nên  $u_{k+1} : 6$ . Vậy mệnh đề đúng với  $n = k+1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0$  chia hết cho 6. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = 2k^3 - 3k^2 + k$  chia hết cho 6.

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = (k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1)$  chia hết cho 6.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) = 2k^3 + 6k(k+1) + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 \\ &= [(2k^3 - 3k^2 + k) + 6k(k+1) - 6k] : 6. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề đúng với  $n = k+1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ③ Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$  chia hết cho 9. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = 4^k + 15k - 1$  chia hết cho 9.

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$  chia hết cho 9.

Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 60k - 4 - 45k + 18 = [4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18] : 9.$$

Vậy mệnh đề đúng với  $n = k+1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ④ Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 7 \cdot 2^{2 \cdot 1 - 2} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 10$  chia hết cho 5. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = 7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1}$  chia hết cho 5.

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1}$  chia hết cho 5.

Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 7 \cdot 2^{2(k+1)-2} + 3^{2(k+1)-1} = 4 \cdot 7 \cdot 2^{2k-2} + 9 \cdot 3^{2k-1} = [4(7 \cdot 2^{2k-2} + 3^{2k-1}) + 5 \cdot 3^{2k-1}] : 5.$$

Vậy mệnh đề đúng với  $n = k+1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

□

**BÀI 3.** Chứng minh rằng

- ①  $2^{n+2} > 2n + 5$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .                      ②  $n^n \geq (n+1)^{n-1}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Lời giải.**

- ① Với  $n = 1$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $2^{k+2} > 2k + 5$ . (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k+1$ , tức là  $2^{(k+1)+2} > 2(k+1) + 5$  hay  $2^{k+3} > 2k + 7$ .

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^{k+2} > 2(2k + 5) \Leftrightarrow 2^{k+3} > 2k + 7 + 2k + 3 \Rightarrow 2^{k+3} > 2k + 7 \text{ (vì } k \geq 1 \text{ nên } 2k + 3 > 0).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k+1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

② Với  $n = 1$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$k^k \geq (k+1)^{k-1} \Leftrightarrow \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} \geq 1.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k+1$ , tức là

$$(k+1)^{k+1} \geq [(k+1)+1]^{(k+1)-1} \text{ hay } (k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k.$$

Thật vậy, với mọi số dương  $k$  ta có

$$\begin{aligned} (k+1)^2 > k(k+2) &\Rightarrow (k+1)^{2k} > [k(k+2)]^k \\ &\Rightarrow \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+2)^k} > \frac{k^k}{(k+1)^{k-1}} \geq 1 \\ &\Rightarrow (k+1)^{k+1} \geq (k+2)^k. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k+1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 4.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , ta luôn có

- ①  $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}.$
- ②  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$
- ③  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1).$
- ④  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$
- ⑤  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$
- ⑥  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$  với mọi  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$
- ⑦  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Đặt } S_n = 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}. \quad (1)$$

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2} = 2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k-1) = \frac{k(3k+1)}{2}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k+1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k-1) + [3(k+1)-1] = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (3k+2) = \frac{k(3k+1)}{2} + (3k+2) = \frac{3k^2 + k + 2(3k+2)}{2} = \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 3k + 4k + 4}{2} = \frac{3k(k+1) + 4(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k+1$ .

Do đó,  $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

- ② Đặt  $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2 = 1 \cdot 2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k+1$ , tức là cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (k+1)[(k+1)+1] = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k+1$ .

Do đó,  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

- ③ Đặt  $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = 1^2(1+1) = 2 = 1 \cdot 2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1).$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k+1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + (k+1)[3(k+1)-1] = (k+1)^2[(k+1)+1] = (k+1)^2(k+2).$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)(3k+2) = k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)(k^2+3k+2) \\ &= (k+1)(k+1)(k+2) = (k+1)^2(k+2). \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k+1$ .

Do đó,  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

- ④ Đặt  $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3} = 1 = 1^2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k+1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\ &= \frac{(2k+1)(2k^2-k+6k+3)}{3} = \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k+1$ .

Do đó,  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

⑤ Đặt  $S_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{2 \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{3} = 4 = 2^2$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2k)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2k)^2 + [2(k+1)]^2 = \frac{2(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{3} = \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (2k+2)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + (2k+2)^2 = \frac{2k(k+1)(2k+1) + 12(k+1)^2}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{3} = \frac{2(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{3} = \frac{2(k+1)[k(2k+3) + 2(2k+3)]}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

⑥ Đặt  $S_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ . (1)

Với  $n = 2$  thì  $S_2 = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ . Vậy (1) đúng với  $n = 2$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 2$ .

⑦ Đặt  $S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ . (1)

Với  $n = 1$  thì  $S_1 = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1} = \frac{1}{3}$ . Vậy (1) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (1) đúng với  $n = k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có

$$S_k = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k}.$$

Ta cần chứng minh (1) cũng đúng với  $n = k + 1$ , tức là cần chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(k+1)+3}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+3}{4 \cdot 3^k} + \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{6k+9-4k-4}{4 \cdot 3^{k+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2k+5}{4 \cdot 3^{k+1}}.$$

Vậy (1) đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó,  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$  với mọi số tự nhiên  $n \geq 2$ .

**BÀI 5.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$ , ta luôn có

- Lời giải.**

- 

- ⑥ Với  $n = 1$  ta có  $u_1 = 2^{4 \cdot 1} - 1 = 15$  chia hết cho 15. Vậy mệnh đề đúng với  $n = 1$ .  
 Giả sử mệnh đề đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là  $u_k = 2^{4k} - 1$  chia hết cho 15.  
 Ta cần chứng minh  $u_{k+1} = 2^{4(k+1)} - 1$  chia hết cho 15.  
 Thật vậy, ta có

$$u_{k+1} = 2^{4(k+1)} - 1 = 2^{4k+4} - 1 = 16 \cdot 2^{4k} - 1 = 16 \cdot 2^{4k} - 16 + 15 = 16(2^{4k} - 1) + 15.$$

Vì  $16(2^{4k} - 1) \vdots 15, 15 \cdot 2^k \vdots 15$  nên  $u_{k+1} \vdots 15$ . Vậy mệnh đề đúng với  $n = k + 1$ .  
 Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

#### BÀI 6. Chứng minh rằng

- ①  $2^{n+1} > 2n + 3$  với mọi  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ .      ②  $3^{n-1} > n(n+2)$  với mọi  $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ .  
 ③  $(n!)^2 \geq n^n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .      ④  $2^n > n^2$  với mọi  $n \geq 5, n \in \mathbb{N}$ .

#### Lời giải.

- ① Với  $n = 2$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.  
 Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $2^{k+1} > 2k + 3$ . (1)  
 Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là  $2^{(k+1)+1} > 2(k+1) + 3$  hay  $2^{k+2} > 2k + 5$ .  
 Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^{k+1} > 2(2k + 3) \Leftrightarrow 2^{k+2} > 2k + 5 + 2k + 1. \quad (2)$$

Vì  $k \geq 2$  nên  $2k + 1 > 0$ . Khi đó từ (2) suy ra

$$2^{k+2} > 2k + 5.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k + 1$ .  
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ② Với  $n = 4$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.  
 Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 4, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $3^{k-1} > k(k+2)$ . (1)  
 Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là  $3^{(k+1)-1} > (k+1)[(k+1) + 2]$  hay  $3^k > (k+1)(k+3)$ .  
 Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 3 ta được

$$3 \cdot 3^{k-1} > 3k(k+2) \Leftrightarrow 3^k > k^2 + 4k + 3 + 2k^2 + 2k - 3. \quad (2)$$

Vì  $k \geq 4$  và  $2k^2 + 2k - 3 = 2k(k-4) + 10(k-4) + 37$  nên  $2k^2 + 2k - 3 > 0$ . Khi đó từ (2) suy ra

$$3^k > k^2 + 4k + 3 \Leftrightarrow 3^k > (k+1)(k+2).$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k + 1$ .  
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ③ Trước hết ta chứng minh  $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ . Thật vậy, với  $n = 1$  ta được khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với  $n = k \geq 1$ , tức là ta có  $k^k > (k+1)^{k-1}$  hay  $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq \frac{1}{k+1}$ . Ta cần chứng minh khẳng định cũng đúng khi  $n = k + 1$ .  
 Ta có

$$k^2 + 2k + 1 \geq k^2 + 2k \Rightarrow \frac{k+1}{k+2} \geq \frac{k}{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k \geq \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq \frac{1}{k+1} \Rightarrow \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} \geq \frac{1}{k+2}.$$

Vậy  $n^n \geq (n+1)^{n-1}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Trở lại bài toán. Ta cũng chứng minh bài toán bằng quy nạp.

Với  $n = 1$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $(k!)^2 \geq k^k$ . (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là  $[(k+1)!]^2 \geq (k+1)^{k+1}$ .

Thật vậy, ta có

$$[(k+1)!]^2 = [k!(k+1)]^2 = (k!)^2(k+1)^2 \geq k^k(k+1)^2 \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^2 = (k+1)^{k+1}.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k + 1$ .  
 Do đó, ta có điều phải chứng minh.

- ④ Trước hết, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh trước kết quả  $n^2 > 2n + 1$  với mọi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 5$ .  
 Với  $n = 5$  ta thấy bất đẳng thức là đúng.  
 Giả sử bất đẳng thức trên đúng với  $n = k \geq 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $k^2 > 2k + 1$ .  
 Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là  $(k + 1)^2 > 2(k + 1) + 1$ .  
 Thật vậy, ta có

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 2k + 1 + 2k + 1 = 4k + 2 > 3k + 3 > 2k + 3.$$

Vậy  $n^2 > 2n + 1$  với mọi  $n \geq 5$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Trở lại với bài toán.

Với  $n = 5$  ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k \geq 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tức là ta có  $2^k > k^2$ . (1)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với  $n = k + 1$ , tức là  $2^{k+1} > (k + 1)^2$ .

Thật vậy, nhân cả hai vế của bất đẳng thức (1) với 2 ta được

$$2 \cdot 2^k > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow 2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng với  $n = k + 1$ .

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

## BÀI 2. DÃY SỐ

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 ĐỊNH NGHĨA

**Định nghĩa 1.** Một hàm số  $u$  xác định trên tập hợp các số nguyên dương  $\mathbb{N}^*$  được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số).

Mỗi giá trị của hàm số  $u$  được gọi là một số hạng của dãy số. Chẳng hạn,

- $u_1 = u(1)$  là số hạng thứ nhất (hay còn gọi là số hạng đầu).
- $u_2 = u(2)$  là số hạng thứ hai.
- $u_n = u(n)$  là số hạng thứ  $n$  (hay còn gọi là số hạng tổng quát).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$  hoặc viết tắt là  $(u_n)$ .

#### 2 CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

- **Cách 1.** Dãy số cho bởi công thức số hạng tổng quát.
- **Cách 2.** Dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.
  - Cho số hạng thứ nhất  $u_1$  (hoặc một vài số hạng đầu).
  - Cho một công thức tính  $u_n$  theo  $u_{n-1}$  (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

#### 3 DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

- Dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng khi và chỉ khi với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta luôn có  $u_n < u_{n+1}$ .
- Dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm khi và chỉ khi với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta luôn có  $u_n > u_{n+1}$ .

#### 4 DÃY SỐ BỊ CHẶN

- Dãy số  $(u_n)$  được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số  $M$  sao cho  $u_n \leq M$ , với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Dãy số  $(u_n)$  được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số  $m$  sao cho  $u_n \geq m$ , với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Dãy số  $(u_n)$  được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số  $M$  và  $m$  sao cho  $m \leq u_n \leq M$ , với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### DẠNG 2.1. Tìm số hạng của dãy số cho trước

*Phương pháp giải:* Từ công thức số hạng tổng quát ta thay giá trị  $n$  phù hợp để tìm số hạng cần tìm hoặc dùng hệ thức truy hồi để tìm số hạng đó.

#### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$ . Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính  $u_{50}$  và  $u_{99}$ .

**Lời giải.**

Dạng khai triển của dãy số đã cho là  $0; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{n-1}{3n+1}; \dots$

Ta có  $u_{50} = \frac{50-1}{3 \cdot 50+1} = \frac{49}{151}$  và  $u_{99} = \frac{99-1}{3 \cdot 99+1} = \frac{49}{149}$ . □

**VÍ DỤ 2.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2). \end{cases}$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính  $u_8$ .

**Lời giải.**

Dạng khai triển của dãy số đã cho là  $1; 3; 7; 15; \dots; 2^n - 1; \dots$

Ta có  $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15, u_5 = 31, u_6 = 63, u_7 = 127, u_8 = 255$ . □

**VÍ DỤ 3.** Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases} \quad (\text{dãy số Phi-bô-na-xi}).$$

Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên. Tính  $u_7$ .

**Lời giải.**

Dạng khai triển của dãy số đã cho là  $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots$

Ta có  $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13$ . □

**VÍ DỤ 4.** Tìm số hạng tổng quát  $u_n$  theo  $n$  của các dãy số sau đây

$$\textcircled{1} \text{ Dãy số } (u_n) \text{ với } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1. \end{cases} \quad \textcircled{2} \text{ Dãy số } (u_n) \text{ với } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

**Lời giải.**

**①** Từ công thức  $u_{n+1} = u_n + 2$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $u_{n+1} - u_n = 2$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 2 \\ u_3 - u_2 &= 2 \\ u_4 - u_3 &= 2 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 2. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)2 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n + 1.$$

- ② Từ công thức  $u_{n+1} = 2u_n$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2}{u_1} &= 2 \\ \frac{u_3}{u_2} &= 2 \\ \frac{u_4}{u_3} &= 2 \\ &\dots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= 2\end{aligned}$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n.$$

□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số  $(u_n)$  và tìm công thức số hạng tổng quát  $u_n$  theo  $n$  của các dãy số  $(u_n)$  sau

- |                                                                                           |                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$                | ② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3, \forall n \geq 1. \end{cases}$ |
| ③ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$ | ④ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$  |
| ⑤ $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \geq 1. \end{cases}$     | ⑥ $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 7, \forall n \geq 1. \end{cases}$   |

**Lời giải.**

- ① Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 3, u_2 = 6, u_3 = 12, u_4 = 24, u_5 = 48$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = 2u_n$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{u_2}{u_1} &= 2 \\ \frac{u_3}{u_2} &= 2 \\ \frac{u_4}{u_3} &= 2 \\ &\dots \\ \frac{u_n}{u_{n-1}} &= 2.\end{aligned}$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

- ② Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 1, u_2 = 9, u_3 = 36, u_4 = 100, u_5 = 225$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = u_n + n^3$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $u_{n+1} - u_n = n^3$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned}u_2 - u_1 &= 2^3 \\ u_3 - u_2 &= 3^3 \\ u_4 - u_3 &= 4^3 \\ &\dots\end{aligned}$$

$$u_n - u_{n-1} = n^3.$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 \Leftrightarrow u_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \Leftrightarrow u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- ③ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}, u_4 = \frac{1}{4}, u_5 = \frac{1}{5}$ .

Để thấy  $u_n \neq 0$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 1$  hay  $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} &= 1 \\ \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} &= 1 \\ \frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_3} &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} &= 1. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + n - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n}.$$

- ④ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = -1, u_2 = 2, u_3 = 5, u_4 = 8, u_5 = 11$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = u_n + 3$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $u_{n+1} - u_n = 3$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 3 \\ u_3 - u_2 &= 3 \\ u_4 - u_3 &= 3 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 3. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)3 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 3n - 3 \Leftrightarrow u_n = 3n - 4.$$

- ⑤ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 11, u_2 = 102, u_3 = 1003, u_4 = 10004, u_5 = 100005$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra

$$u_{n+1} - n - 1 = 10u_n - 10n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1) = 10(u_n - n), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} - (n+1)}{u_n - n} = 10, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2 - 2}{u_1 - 1} &= 10 \\ \frac{u_3 - 3}{u_2 - 2} &= 10 \\ \frac{u_4 - 4}{u_3 - 3} &= 10 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u_n - n}{u_{n-1} - (n-1)} &= 10. \end{aligned}$$

Nhân theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n - n}{u_1 - 1} = 10^{n-1} \Rightarrow u_n - n = 10^{n-1}(u_1 - 1) \Leftrightarrow u_n = 10^n + n.$$

- ⑥ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 1, u_2 = 8, u_3 = 15, u_4 = 22, u_5 = 29$ .  
 Từ công thức  $u_{n+1} = u_n + 7$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $u_{n+1} - u_n = 7$  với mọi  $n \geq 1$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 7 \\ u_3 - u_2 &= 7 \\ u_4 - u_3 &= 7 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 7. \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n - u_1 = (n-1)7 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 7n - 7 \Leftrightarrow u_n = 7n - 6.$$

□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 2.** Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số  $(u_n)$  và tìm công thức số hạng tổng quát  $u_n$  theo  $n$  của các dãy số  $(u_n)$  sau

- |                                                                                        |                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| ① $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$ | ② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$  |
| ③ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2, \forall n \geq 1. \end{cases}$     | ④ $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \forall n \geq 1. \end{cases}$ |

**Lời giải.**

- ① Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 3, u_2 = \sqrt{10}, u_3 = \sqrt{11}, u_4 = \sqrt{12}, u_5 = \sqrt{13}$ .  
 Ta thấy  $u_n > 0$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Từ công thức  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$  suy ra

$$u_{n+1}^2 = 1 + u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - u_n^2 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_2^2 - u_1^2 &= 1 \\ u_3^2 - u_2^2 &= 1 \\ u_4^2 - u_3^2 &= 1 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n^2 - u_{n-1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Cộng theo vế tất cả các đẳng thức trên ta được

$$u_n^2 - u_1^2 = n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = u_1^2 + n - 1 \Leftrightarrow u_n^2 = n + 8 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{n + 8}.$$

- ② Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 13, u_4 = 29, u_5 = 61$ .  
 Từ công thức  $u_{n+1} = 2u_n + 3$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra

$$u_{n+1} + 3 = 2u_n + 6, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 3 = 2(u_n + 3), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} + 3}{u_n + 3} = 2, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2 + 3}{u_1 + 3} &= 2 \\ \frac{u_3 + 3}{u_2 + 3} &= 2 \\ \frac{u_4 + 3}{u_3 + 3} &= 2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{u_n + 3}{u_{n-1} + 3} = 2.$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n + 3}{u_1 + 3} = 2^{n-1} \Rightarrow u_n + 3 = 2^{n-1}(u_1 + 3) \Leftrightarrow u_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^{n+1} - 3.$$

③ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 10, u_4 = 17, u_5 = 27$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = u_n + 3n - 2$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra  $u_{n+1} - u_n = 3n - 2$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \cdots + (u_2 - u_1) + u_1 = 3(n-1) - 2 + 3(n-2) - 2 \cdots + 3 \cdot 1 - 2 + 5 \\ &= 3[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] + (n-1) \cdot (-2) + 5 = 3 \cdot \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} - 2n + 2 + 5 \\ &= \frac{3(n^2 - n) - 4n + 14}{2} = \frac{3n^2 - 7n + 14}{2}. \end{aligned}$$

④ Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là  $u_1 = -1, u_2 = -1, u_3 = -1, u_4 = -1, u_5 = -1$ .

Từ công thức  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  với mọi  $n \geq 1$  suy ra

$$u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 1), \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1} + 1}{u_n + 1} = 2, \forall n \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_2 + 1}{u_1 + 1} &= 2 \\ \frac{u_3 + 1}{u_2 + 1} &= 2 \\ \frac{u_4 + 1}{u_3 + 1} &= 2 \\ &\vdots \\ \frac{u_n + 1}{u_{n-1} + 1} &= 2. \end{aligned}$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được

$$\frac{u_n + 1}{u_1 + 1} = 2^{n-1} \Rightarrow u_n + 1 = 2^{n-1}(u_1 + 1) \Leftrightarrow u_n = -1.$$

□

## 📁 DẠNG 2.2. Xét tính tăng, giảm của dãy số

— **Phương pháp 1.** Xét dấu của hiệu số  $u_{n+1} - u_n$ .

- Nếu với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta luôn có  $u_{n+1} - u_n > 0$  thì  $(u_n)$  là dãy số tăng.
- Nếu với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta luôn có  $u_{n+1} - u_n < 0$  thì  $(u_n)$  là dãy số giảm.

— **Phương pháp 2.** Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$  thì có thể so sánh tỉ số  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  với số 1.

- Nếu  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  thì  $(u_n)$  là dãy số tăng.
- Nếu  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  thì  $(u_n)$  là dãy số giảm.

— **Phương pháp 3.** Nếu dãy số  $(u_n)$  được cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh  $u_{n+1} > u_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  (hoặc  $u_{n+1} < u_n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ )

### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

① Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ .

② Dãy số  $(v_n)$  với  $v_n = \frac{n+2}{4^n}$ .

**Lời giải.**

① Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = 2 - \frac{3}{n+1}$ . Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{(n+1)+1} - \left(-\frac{3}{n+1}\right) = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n+2} = \frac{3n+6-3n-3}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số tăng.

② Xét tỉ số sau

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)+2}{4^{n+1}}}{\frac{n+2}{4^n}} = \frac{n+3}{4 \cdot 4^n} \cdot \frac{4^n}{n+2} = \frac{n+3}{4(n+2)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)}. \quad (*)$$

Vì  $n \geq 1$  nên

$$n+2 \geq 3 \Leftrightarrow 4(n+2) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{1}{4(n+2)} \leq \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4(n+2)} \leq \frac{1}{3}.$$

Do đó, từ (\*) suy ra  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  với mọi  $n \geq 1$ .

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số giảm. □

**VÍ DỤ 2.** Xét tính tăng, giảm của dãy số  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}, n \geq 2. \end{cases}$

**Lời giải.**

Ta có  $u_1 = \sqrt{2} < 2$  và  $(u_n)$  là dãy số dương. Ta chứng minh  $u_n < 2$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  bằng quy nạp.

Với  $n = 1$  thì khẳng định trên là đúng.

Giả sử khẳng định trên đúng khi  $n = k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ , tức là ta luôn có  $u_k < 2$ .

Ta cần chứng minh  $u_{k+1} < 2$ . Thật vậy,

$$u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Vậy  $u_n < 2$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Từ công thức  $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$  suy ra

$$u_n^2 = 2 + u_{n-1} \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2 + u_{n-1} - u_{n-1}^2 \Leftrightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n-1} + 1)(2 - u_{n-1}).$$

Do  $(u_n)$  là dãy số dương và  $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên  $(u_{n-1} + 1)(2 - u_{n-1}) > 0$ . Suy ra

$$u_n^2 - u_{n-1}^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n > u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số tăng. □



## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Xét tính tăng giảm của các dãy số  $(u_n)$  sau, với

①  $u_n = n^2 + 4n - 3$ .

②  $u_n = 2n^3 - 5n + 1$ .

③  $u_n = 3^n - n$ .

④  $u_n = \frac{1}{n} - 2$ .

⑤  $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ .

⑥  $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1}$ .

**Lời giải.**

- ① Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 4(n+1) - 3 - (n^2 + 4n - 3) = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - 3 - n^2 - 4n + 3 \\ &= 2n + 5 > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

- ② Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1 - (2n^3 - 5n + 1) = 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 + 1 - 2n^3 + 5n - 1 \\ &= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + 3(n-1) > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

- ③ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3^{n+1} - (n+1) - (3^n - n) = 3^{n+1} - n - 1 - 3^n + n = 3 \cdot 3^n - 1 - 3^n \\ &= 2 \cdot 3^n - 1 > 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

- ④ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - 2 - \left( \frac{1}{n} - 2 \right) = \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} + 2 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

- ⑤ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n+1}{n^2 + 2n + 2} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2 + 1) - n(n^2 + 2n + 2)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \\ &= \frac{n^3 + n^2 + n + 1 - n^3 - 2n^2 - 2n}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} = \frac{-n^2 - n + 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} \\ &= \frac{-n^2 - (n-1)}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

- ⑥ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = \frac{1}{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}$ . Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n + \sqrt{4n^2 - 1}}{2(n+1) + \sqrt{4(n+1)^2 - 1}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

□

**BÀI 2.** Xét tính tăng giảm của các dãy số  $(u_n)$  sau, với

- |                                  |                                                 |
|----------------------------------|-------------------------------------------------|
| ① $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ . | ② $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$ .                 |
| ③ $u_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$ .   | ④ $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{n}$ . |

**Lời giải.**

- ① Dễ thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n}} = \sqrt{\frac{n+1}{4n}} < \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số giảm.

- ② Để thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Xét tỉ số

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

- ③ Để thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{3} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số giảm.

- ④  $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sqrt{n}$ . Để thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \sqrt{n+1} \cdot \frac{3^n}{2^n \cdot \sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{4n+4}{9n}}.$$

Ta có

$$\frac{4n+4}{9n} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9n} \leq \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} < 1, \forall n \geq 1.$$

Suy ra  $u_{n+1} < u_n$ .

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số giảm.

□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Xét tính tăng giảm của các dãy số  $(u_n)$  sau, với

①  $u_n = -n^2 - 2n + 1.$

②  $u_n = \frac{n-1}{n+1}.$

③  $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}.$

④  $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}.$

⑤  $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}.$

⑥  $\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}.$

Lời giải.

- ① Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -(n+1)^2 - 2(n+1) + 1 - (-n^2 - 2n + 1) = -n^2 - 2n - 1 - 2n - 2 + 1 + n^2 + 2n - 1 \\ &= -2n - 3 < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

- ② Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = 1 - \frac{2}{n+1}$ . Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+1)+1} - \left(-\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \frac{2n+4-2n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số tăng.

- ③ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = 3n - 5 + \frac{6}{n+1}$ . Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 5 + \frac{6}{n+2} - \left(3n - 5 + \frac{6}{n+1}\right) = 3n - 2 + \frac{6}{n+2} - 3n + 5 - \frac{6}{n+1} \\ &= 3 + \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1}. \end{aligned} \quad (*)$$

Vì  $n \geq 1$  nên

$$2 \leq n+1 < n+2 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq \frac{6}{n+2} < \frac{6}{n+1} \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{n+2} \geq 2 \\ -\frac{6}{n+1} \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1} \geq -1.$$

Do đó, từ (\*) suy ra  $u_{n+1} - u_n > 0$  với mọi  $n \geq 1$ .  
 Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số tăng.

④ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = \frac{1}{2} + \frac{2n+1}{4n^2+2}$ . Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+2} - \frac{2n+1}{4n^2+2} = \frac{2n+3}{4n^2+8n+6} - \frac{2n+1}{4n^2+2} \\ &= \frac{(2n+3)(4n^2+2) - (2n+1)(4n^2+8n+6)}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} = \frac{8n^3+12n^2+4n+6-8n^3-20n^2-20n-6}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} \\ &= \frac{-8n^2-16n}{(4n^2+8n+6)(4n^2+2)} < 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số giảm.

⑤ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}}$ . Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + \sqrt{n^2-1}}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2-1}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số giảm.

⑥ Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$ . Khi đó

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+2}+1} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  đã cho là dãy số giảm.

□

**BÀI 4.** Xét tính tăng giảm của các dãy số  $(u_n)$  sau, với

①  $u_n = \frac{3^n}{n^2}.$

②  $u_n = \frac{n+1}{3^n}.$

③  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}.$

④  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

**Lời giải.**

①  $u_n = \frac{3^n}{n^2}$ . Dễ thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
 Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n^2}{n^2+2n+1} > 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

②  $u_n = \frac{n+1}{3^n}$ . Dễ thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
 Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} = \frac{n+2}{n+2+2n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số giảm.

- ③  $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$ . Dễ thấy  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
Xét tỉ số

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{1+n+n^2}}{\sqrt{2+n+(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{1+n+n^2}{n^2+3n+3}} = \sqrt{\frac{1+n+n^2}{1+n+n^2+2+2n}} < 1, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số giảm.

- ④ Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$(1+a)^n \geq 1+na, \forall a \geq -1, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Xét tỉ số

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \text{ (với } a = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1). \end{aligned}$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

□

**BÀI 5.** Xét tính tăng giảm của các dãy số  $(u_n)$  được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

- |                                                                           |                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| ① $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1) \cdot 2^n. \end{cases}$ | ② $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1. \end{cases}$        |
| ③ $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1. \end{cases}$              | ④ $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$    |
| ⑤ $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+u_n}. \end{cases}$    | ⑥ $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}. \end{cases}$ |

**Lời giải.**

- ① Ta có

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \cdot 2^n > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

- ② Ta có  $u_1 = 1 > -1$ , giả sử  $u_k > -1$ , khi đó  $u_{k+1} = 2u_k + 1 > -1$ . Vậy  $u_n > -1, \forall n \geq 1$ .  
Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n + 1 - u_n = u_n + 1 > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

- ③ Ta có  $u_1 = 2 > 1$ , giả sử  $u_k > 1$ , khi đó  $u_{k+1} = 2u_k - 1 > 2 - 1 = 1$ . Vậy  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 1 - u_n = u_n - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

- ④ Ta có

$$u_{n+1} - u_n = 3n - 2 > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là một dãy số tăng.

- ⑤ Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy  $u_n > 0$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Ta có } u_2 = \frac{2u_1}{3+u_1} = \frac{6}{6} = 1 < u_1.$$

Ta dự đoán

$$u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

Thật vậy, ta thấy (\*) đúng khi  $n = 1$ .

Giả sử (\*) đúng khi  $n = k \geq 1$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ), tức là ta có  $u_k < u_{k-1}$ .

Khi đó

$$u_{k+1} = \frac{2u_k}{3+u_k} = \frac{2u_k + 6 - 6}{3+u_k} = 2 - \frac{6}{u_k + 3}.$$

Vì  $u_k < u_{k-1}$  nên  $\frac{6}{u_k + 3} > \frac{6}{u_{k-1} + 3}$ , suy ra  $u_{k+1} < 2 - \frac{6}{u_{k-1} + 3} = u_k$ .

Vậy (\*) đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Do đó, dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm.

- ⑥ Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy  $u_n > 0$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{Ta có } u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} = \sqrt{7} > u_1.$$

Ta dự đoán

$$u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, (\*) đúng với  $n = 1$ .

Giả sử (\*) đúng khi  $n = k \geq 1$ , ( $k \in \mathbb{N}$ ), tức là ta có  $u_k > u_{k-1}$ .

Khi đó

$$u_{k+1} = \sqrt{2u_k + 3} > \sqrt{2u_{k-1} + 3} = u_k \text{ (do } u_k > u_{k-1} \text{)}.$$

Vậy (\*) đúng với  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Do đó, dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

□

### 📁 DẠNG 2.3. Tính bị chặn của dãy số

Phương pháp giải: Sử dụng khái niệm dãy số bị chặn.

## 1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

① Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$ .

② Dãy số  $(v_n)$  với  $v_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ .

Lời giải.

- ① Ta có  $u_n > 0$  bởi mọi  $n \geq 1$ . Vậy  $(u_n)$  bị chặn dưới.

Lại có  $u_n = 2 - \frac{7}{n+3} < 2$  với mọi  $n \geq 1$ . Vậy  $(u_n)$  bị chặn trên.

Do đó  $(u_n)$  bị chặn.

- ② Ta có

$$v_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta luôn có  $0 < u_n < 1$ .

Vậy  $(u_n)$  bị chặn.

□

## 2 BÀI TẬP ỨNG DỤNG

**BÀI 1.** Xét tính bị chặn của các dãy số  $(u_n)$  sau, với

①  $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ .

②  $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2}$ .

③  $u_n = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .

④  $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $u_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n} \geq 2, \forall n \geq 1$ . Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn dưới.

② Ta có  $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2} = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n + 2)}$ .

Để thấy  $u_n = \frac{2n + 3}{3n + 2} > 0, \forall n \geq 1$  nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+5)} - \left( \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)} \right) = \frac{-5}{(3n+2)(3n+5)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm nên  $u_{n+1} \leq u_1 = 1$ . Suy ra dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

③ Ta có  $u_n = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \geq 0, \forall n \geq 1$  nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$\frac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{n - 1}{n} \leq \frac{n}{n} = 1, \forall n \geq 1.$$

Cho nên dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

④ Rõ ràng  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên  $(u_n)$  bị chặn dưới.

Ta có  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ . Khi đó  $u_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên  $(u_n)$  bị chặn trên.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

□

**BÀI 2.** Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số  $(u_n)$  với

①  $u_n = 1 + (n - 1) \cdot 2^n$ .

②  $u_n = \frac{2n - 13}{3n - 2}$ .

③  $u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 1}$ .

④  $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $u_{n+1} - u_n = (n + 1) \cdot 2^n > 0, \forall n \geq 1$ . Từ đó suy ra dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Lại có  $u_n = 1 + (n - 1) \cdot 2^n \geq 1, \forall n \geq 1$ . Vậy  $(u_n)$  là dãy số bị chặn dưới.

② Ta có  $u_n = \frac{2n - 13}{3n - 2} = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n - 2)} \leq \frac{2}{3}, \forall n \geq 1$ .

Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n+1)} - \left( \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n-2)} \right) = \frac{35}{(3n-2)(3n+1)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Mặt khác

$$0 < \frac{1}{3n - 2} \leq 1, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{35}{3(3n - 2)} \geq -\frac{35}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} > \frac{2}{3} - \frac{35}{3(3n - 2)} \geq \frac{2}{3} - \frac{35}{3} \Leftrightarrow -11 \leq u_n < \frac{2}{3}.$$

Suy ra  $(u_n)$  là một dãy số bị chặn.

- ③ Ta có  $u_n = \frac{n^2 + 3n + 1}{n + 1} = n + 2 - \frac{1}{n + 1}$ .  
Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  ta có

$$u_{n+1} - u_n = n + 3 - \frac{1}{n + 2} - \left( n + 2 - \frac{1}{n + 1} \right) = 1 + \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} > 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Suy ra  $u_n \geq u_1 = \frac{5}{2}$ . Do đó, dãy số  $(u_n)$  bị chặn dưới.

- ④ Ta có  $u_1 = 2 > 1$ , giả sử  $u_k > 1$ , khi đó  $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1 + 1}{2} = 1$ . Vậy  $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .  
Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 1}{2} - u_n = \frac{1 - u_n}{2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm.

Suy ra  $u_n \leq u_1 = 2$ . Do đó, dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên. Vì vậy, dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Xét tính bị chặn của các dãy số  $(u_n)$  sau, với

①  $u_n = \frac{3n - 1}{3n + 1}$ .

②  $u_n = \frac{1}{n(n + 1)}$ .

③  $u_n = \frac{2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2}}$ .

④  $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ .

Lời giải.

- ① Ta có  $u_n = \frac{3n - 1}{3n + 1} = 1 - \frac{2}{3n + 1} < 1, \forall n \geq 1$ . Suy ra dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên.

Mặt khác,  $\frac{3n - 1}{3n + 1} > 0, \forall n \geq 1$  nên dãy số  $(u_n)$  bị chặn dưới.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

- ② Ta có  $u_n = \frac{1}{n(n + 1)} > 0, \forall n \geq 1$  nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} - \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{-2}{n(n + 1)(n + 2)} < 0, \forall n \geq 1.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số giảm nên  $u_{n+1} \leq u_1 = \frac{1}{2}$ . Suy ra dãy số  $(u_n)$  bị chặn trên.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

- ③ Ta có  $u_n = \frac{2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2}} > 0, \forall n \geq 1$  nên dãy số bị chặn dưới.

Lại có  $\frac{2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2}} \leq \frac{2n - 1}{n} \leq \frac{2n}{n} = 2$  nên dãy số bị chặn trên.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

- ④ Rõ ràng  $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên  $(u_n)$  bị chặn dưới.

Ta có  $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k - 1)} = \frac{1}{k - 1} - \frac{1}{k}, \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ . Khi đó

$$u_n < 1 + \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ với mọi số nguyên dương } n.$$

Cho nên  $(u_n)$  bị chặn trên.

Vậy dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

□

BÀI 4. Xét tính đơn điệu và bị chặn của các dãy số  $(u_n)$  với

$$\textcircled{1} u_n = \frac{7n+5}{5n+7}.$$

$$\textcircled{2} u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 4. \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } u_n = \frac{7n+5}{5n+7} = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \leq \frac{7}{5}, \forall n \geq 1.$$

Khi đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+12)} - \left( \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \right) = \frac{24}{(5n+7)(5n+12)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Mặt khác

$$0 < \frac{1}{5n+7} \leq \frac{1}{12}, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{24}{5(5n+7)} \geq -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} \geq \frac{7}{5} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 1 \leq u_n < \frac{7}{5}.$$

Suy ra  $(u_n)$  là một dãy số bị chặn.

$\textcircled{2}$  Ta có

$$u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2-3)}. \quad (1)$$

Dễ thấy, với mọi  $n \geq 1$  ta có,  $-1 \leq \frac{1}{2n^2-3} \leq \frac{1}{5}$ .

Do đó từ (1) suy ra  $-2 \leq u_n \leq 1, \forall n \geq 1$ .

Từ đó suy ra  $(u_n)$  là một dãy số bị chặn.

Lại có  $u_1 = -2; u_2 = 1; u_3 = \frac{2}{3}$  nên dãy số không tăng không giảm.

$\textcircled{3}$  Ta có  $u_1 = 1 < 15$ , giả sử  $u_k < 15$ , khi đó  $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + 5 < \frac{2}{3} \cdot 15 + 5 = 15$ . Vậy  $u_n < 15, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n = \frac{15 - u_n}{3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Suy ra  $u_n \geq u_1 = 1$ . Do đó, dãy số  $(u_n)$  bị chặn dưới.

$\textcircled{4}$  Ta có  $u_1 = 4 < 8$ , giả sử  $u_k < 8$ , khi đó  $u_{k+1} = \frac{u_k}{2} + 4 < \frac{8}{2} + 4 = 8$ . Vậy  $u_n < 8, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Lại có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 4 - u_n = \frac{8 - u_n}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

Suy ra  $u_n \geq u_1 = 4$ . Do đó, dãy số  $(u_n)$  bị chặn dưới. Vì vậy, dãy số  $(u_n)$  bị chặn.

□

**BÀI 5.** Cho dãy số  $(u_n)$  định bởi  $u_n = \frac{an^4+2}{2n^4+5}$ . Định  $a$  để dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{a(n+1)^4+2}{2(n+1)^4+5} - \frac{an^4+2}{2n^4+5} = \frac{[a(n+1)^4+2](2n^4+5) - (an^4+2)[2(n+1)^4+5]}{[2(n+1)^4+5](2n^4+5)} \\ &= \frac{(5a-4)[(n+1)^4-n^4]}{[2(n+1)^4+5](2n^4+5)}. \end{aligned}$$

Lại có

$$(n+1)^4 > n^4, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (n+1)^4 - n^4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Để dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng thì

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 5a - 4 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{4}{5}.$$

Vậy với  $a > \frac{4}{5}$  thì dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng. □

👉 EM CÓ BIẾT?

### DÃY SỐ PHI-BÔ-NA-XI

Phi-bô-na-xi (Fibonacci) (còn có tên là Leonardo da Pisa) là một nhà Toán học nổi tiếng người Italia. Trong cuốn sách Liber Abacci, năm 1202, ông có viết bài toán sau:

“Một đôi thỏ (gồm một con thỏ đực và một con thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cùng gồm một thỏ đực và thỏ cái); mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng giêng) có một đôi thỏ sơ sinh.”

Rõ ràng ở tháng giêng, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng thứ 3 sẽ có  $1 + 1 = 2$  đôi thỏ. Sang tháng tư, vì chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này có  $1 + 2 = 3$  đôi thỏ. Sang tháng 5, hai đôi thỏ gồm đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3 cùng sinh con nên tháng này có  $3 + 2 = 5$  đôi thỏ, ...

Khái quát, nếu kí hiệu  $F_n$  là số đôi thỏ có ở tháng thứ  $n$ , thì với  $n \geq 3$ , ta có

$$F_n = F_{n-1} + \text{số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ } n.$$

Do đó các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ  $(n-1)$  chưa thể sinh con ở tháng thứ  $n$  và mỗi đôi thỏ ở tháng thứ  $(n-2)$  sẽ sinh ra một đôi thỏ con nên số đôi thỏ con được sinh ra ở tháng thứ  $n$  chính bằng  $F_{n-2}$  (số thỏ có ở tháng thứ  $(n-2)$ ).

Như vậy

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Việc giải quyết bài toán trên của Fibonacci dẫn đến việc khảo sát dãy số  $(F_n)$  được xác định như sau

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 3). \end{cases}$$

Dãy số trên sau này nhà toán học Pháp Edouard Lucas gọi là dãy số Fibonacci.

## BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Câu hỏi 1:** Nhận xét tính chất chung đặc biệt của các dãy số sau

- Dãy số 2, 4, 6, 8, 10, ...
- Dãy số -5, -2, 1, 4, 7, 10.
- Dãy số 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, ...

#### 1. Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số  $d$  không đổi, nghĩa là:  $(u_n)$  là cấp số cộng khi và chỉ khi  $n \geq 1, u_{n+1} = u_n + d$ . Số  $d$  được gọi là công sai của cấp số cộng.

Để chứng minh một dãy số  $(u_n)$  là một cấp số cộng, ta xét hiệu  $u_{n+1} - u_n = d$  (không đổi) với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 2. Tính chất

**Tính chất 1.** Nếu  $(u_n)$  là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

**Hệ quả 1.** Ba số  $a, b, c$  (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi  $a + c = 2b$ .

### 3. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

**Định lý 1.** Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  của nó được xác định bởi công thức sau:  $u_n = u_1 + (n - 1)d$ .

⚠ Để tìm  $n$  số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa điều kiện, ta cần nhớ:

- Nếu  $n$  lẻ, cần đặt số hạng cần tìm là  $x$ , công sai:  $d$ .
- Nếu  $n$  chẵn, cần đặt số hạng cần tìm là  $x - d$ , công sai:  $2d$ .

### 4. Tổng của $n$ số hạng đầu tiên của cấp số cộng

**Định lý 2.** Giả sử  $(u_n)$  là 1 cấp số cộng có công sai  $d$ . Gọi  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  ( $S_n$  là tổng  $n$  số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có:  $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ .

## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó?

- ① Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 19n - 5$ .
- ② Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = -3n + 1$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có  $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - 19n + 5 = 19n + 19 - 5 - 19n + 5 = 19$ .  
Do đó dãy số  $(u_n)$  là một cấp số cộng với công sai  $d = 19$ , số hạng đầu  $u_1 = 14$ .
- ② Ta có  $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 + 3n - 1 = -3n - 3 + 1 + 3n - 1 = -3$ .  
Do đó dãy số  $(u_n)$  là một cấp số cộng với công sai  $d = -3$ , số hạng đầu  $u_1 = -2$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

**Lời giải.**

Gọi ba góc của tam giác lần lượt là  $A, B, C$ . Khi đó ta có  $A + B + C = \pi$ .

Do ba góc  $A, B, C$  của tam giác theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên  $A + C = 2B$ .

Do đó  $2B + B = \pi \Rightarrow 3B = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$ .

Do tam giác  $ABC$  vuông nên giả sử  $C = \frac{\pi}{2}$  khi đó công sai  $d$  của cấp số cộng là  $d = C - B = \frac{\pi}{6}$ .

Vậy góc  $A$  của tam giác là  $A = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ .

□

**VÍ DỤ 3.** Một tam giác vuông có chu vi bằng 12 cm và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác đó.

**Lời giải.**

Giả sử ba cạnh của tam giác vuông lần lượt là  $a, b, c$  trong đó  $a$  là cạnh huyền và  $a > b > c$ .

Do tam giác vuông có chu vi bằng 12 cm nên  $a + b + c = 12$ .

Mặt khác  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên  $a + c = 2b$ .

Khi đó  $2b + b = 12 \Leftrightarrow 3b = 12 \Leftrightarrow b = 4$  cm. Giả sử công sai của cấp số cộng là  $d$  thì  $a = 4 - d, c = 4 + d$ .

Do tam giác vuông cạnh huyền là  $a$  nên  $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow (4 - d)^2 = 4^2 + (4 + d)^2 \Leftrightarrow -16d = 16 \Leftrightarrow d = -1$ .

Vậy  $a = 5$  cm,  $c = 3$  cm.

□

**VÍ DỤ 4.** Một cấp số cộng có 10 số hạng, trong đó số hạng đầu bằng 5, số hạng cuối bằng 23. Tìm cấp số cộng đó?

**Lời giải.**

Ta có  $u_{10} = u_1 + 9d \Leftrightarrow 23 = 5 + 9d \Leftrightarrow d = 2$ .

Vậy cấp số cộng cần tìm là 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23. □

**VÍ DỤ 5.** Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

**Lời giải.**

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - d, x, x + d$  trong đó  $d$  là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có  $x - d + x + x + d = 27 \Leftrightarrow 3x = 27 \Leftrightarrow x = 9$ .

Mà  $(x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 293 \Leftrightarrow (9 - d)^2 + 81 + (9 + d)^2 = 293 \Leftrightarrow 2d^2 - 50 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 5 \\ d = -5. \end{cases}$

Với  $d = 5$  thì ba số hạng của cấp số cộng là 4, 9, 14. Với  $d = -5$  thì ba số hạng của cấp số cộng là 14, 9, 4.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 9, 14. □

**VÍ DỤ 6.** Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

**Lời giải.**

Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$  với  $2d$  là công sai của cấp số cộng.

Khi đó ta có  $x - 3d + x - d + x + d + x + 3d = 10 \Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ .

Mặt khác

$$(x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 30 \Leftrightarrow 4x^2 + 20d^2 = 30 \Leftrightarrow d^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Với  $x = \frac{5}{2}$  thì  $d = \frac{1}{2}$ , khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4.

Với  $x = \frac{5}{2}$  thì  $d = -\frac{1}{2}$ , khi đó bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 4, 3, 2, 1.

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 1, 2, 3, 4. □

**VÍ DỤ 7.** Cho một cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_3 + u_{28} = 100$ . Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

**Lời giải.**

Ta có  $S_{30} = \frac{30(u_1 + u_{30})}{2} = \frac{30(u_1 + 2d + u_{30} - 2d)}{2} = \frac{30(u_3 + u_{28})}{2} = \frac{30 \cdot 100}{2} = 1500$ . □

**VÍ DỤ 8.** Cho một cấp số cộng  $(u_n)$  có  $S_6 = 18$  và  $S_{10} = 110$ . Tính  $S_{20}$ .

**Lời giải.**

Giả sử cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu là  $u_1$  và công sai là  $d$ .

Ta có  $S_6 = 6u_1 + \frac{6 \cdot 5}{2}d \Leftrightarrow 6u_1 + 15d = 18$ . (1)

$S_{10} = 10u_1 + \frac{10 \cdot 9}{2}d \Leftrightarrow 10u_1 + 45d = 110$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình  $\begin{cases} 6u_1 + 15d = 18 \\ 10u_1 + 45d = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4. \end{cases}$

Khi đó  $S_{20} = 20u_1 + \frac{20 \cdot 19}{2}d = 20 \cdot (-7) + 190 \cdot 4 = 620$ . □

**VÍ DỤ 9.** Tính các tổng sau:

①  $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$ .

$$\textcircled{2} S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1).$$

Xét cấp số cộng  $(u_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  với số hạng đầu là  $u_1 = 1$  và công sai là  $d = 2$ .

Ta có  $u_k = u_1 + (k - 1)d \Leftrightarrow 2n + 1 = 1 + 2(k - 1) \Leftrightarrow k = n + 1$ .

$$\text{Vậy } S = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{(n + 1)(1 + 2n + 1)}{2} = (n + 1)^2.$$

$$\textcircled{2} S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = 199 + 195 + \dots + 3.$$

Xét cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 199$  và công sai  $d = u_2 - u_1 = 195 - 199 = -4$ .

Ta có  $u_n = u_1 + (n - 1)d \Leftrightarrow 3 = 199 - 4(n - 1) \Leftrightarrow n = 50$ .

$$\text{Khi đó } S = \frac{n(u_1 + u_{50})}{2} = \frac{50(199 + 3)}{2} = 5050.$$

□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52. \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 3$ , công sai là  $d = 4$ .

Khi đó số hạng thứ 20 là  $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 4 = 79$ .

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(3 + 79)}{2} = 820.$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - u_1 - 2d + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 1$ , công sai là  $d = 3$ .

Khi đó số hạng thứ 20 là  $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 3 = 58$ .

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(1 + 58)}{2} = 590.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5}{2} \\ d = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = \frac{5}{2}$ , công sai là  $d = \frac{3}{2}$ .

Khi đó số hạng thứ 20 là  $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19 \cdot \frac{3}{2} = 31$ .

$$\text{Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là } S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20\left(\frac{5}{2} + 31\right)}{2} = 335.$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 & (1) \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 52 & (2). \end{cases}$$

Từ (1), ta có  $u_1 + 5d = 8 \Leftrightarrow u_1 = 8 - 5d$ , thay vào (2)

$$(8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 52 \Leftrightarrow 20d^2 - 96d + 76 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = \frac{19}{5}. \end{cases}$$

Với  $d = 1$  thì  $u_1 = 3$ . Khi đó số hạng thứ 20 là  $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19 \cdot 1 = 22$ .

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là  $S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20(3 + 22)}{2} = 250$ .

Với  $d = \frac{19}{5}$  thì  $u_1 = -11$ . Khi đó số hạng thứ 20 là  $u_{20} = u_1 + 19d = -11 + 19 \cdot \frac{19}{5} = \frac{306}{5}$ .

Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là  $S_{20} = \frac{20(u_1 + u_{20})}{2} = \frac{20\left(-11 + \frac{306}{5}\right)}{2} = 502$ .

□

**BÀI 2.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$$

$$\textcircled{9} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84. \end{cases}$$

$$\textcircled{10} \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases}$$

$$\textcircled{11} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170. \end{cases}$$

$$\textcircled{12} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8. \end{cases}$$

$$\textcircled{13} \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24}. \end{cases}$$

$$\textcircled{14} \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72}. \end{cases}$$

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 3$ , công sai là  $d = 4$ .

$$\textcircled{2} \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5u_1 + 5d \\ u_1 + 12d = 2u_1 + 10d + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ -u_1 + 2d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 3$ , công sai là  $d = 4$ .

$$\textcircled{3} \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - u_1 - 5d = -7 \\ u_1 + 7d - u_1 - 6d = 2u_1 + 6d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = -5$ , công sai là  $d = 2$ .

$$\textcircled{4} \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - u_1 - 6d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17. \end{cases} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 3$ , công sai là  $d = 2$  hoặc  $u_1 = -17$ ,  $d = 2$ .

$$\textcircled{5} \begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_6 + d = 60 \\ (u_6 - 2d)^2 + (u_6 + 6d)^2 = 1170. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1), suy ra  $d = 60 - 2u_6$ , thay vào (2), ta có

$$(5u_6 - 120)^2 + (360 - 11u_6)^2 = 1170 \Leftrightarrow 146u_6^2 - 9120u_6 + 142830 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy không tồn tại cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán.

$$\textcircled{6} \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 155 \\ 3u_1 + 3d = 21. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2), ta có  $3u_1 + 3d = 21 \Rightarrow d = 7 - u_1$ , thay vào (1)

$$u_1^2 + 7^2 + (14 - u_1)^2 = 155 \Leftrightarrow 2u_1^2 - 28u_1 + 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ u_1 = 5. \end{cases}$$

Với  $u_1 = 9$  thì  $d = -2$ . Với  $u_1 = 5$  thì  $d = 2$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 9$ , công sai là  $d = -2$  hoặc  $u_1 = 5$ ,  $d = 2$ .

$$\textcircled{7} \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = 12 \\ 5u_1 + 10d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 1$ , công sai là  $d = 3$ .

$$\textcircled{8} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 9 \\ (u_2 - d)^2 + u_2^2 + (u_2 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ (3 - d)^2 + 9 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 3 \\ d^2 = 4. \end{cases}$$

Do  $d^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2 \\ d = 2 \end{cases}$ . Với  $u_2 = 3$  và  $d = 2$  thì  $u_1 = u_2 - d = 1$ . Với  $u_2 = 3$  và  $d = -2$  thì  $u_1 = u_2 - d = 5$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 1$ , công sai là  $d = 2$  hoặc  $u_1 = 5$ ,  $d = -2$ .

$$\textcircled{9} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 16 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 84. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2), suy ra  $d = \frac{16 - 4u_1}{6}$ . Thay vào (2), ta có

$$\begin{aligned} & u_1^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{6}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{3}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{16 - 4u_1}{2}\right)^2 = 84 \\ \Leftrightarrow & u_1^2 + \left(\frac{2u_1 + 16}{6}\right)^2 + \left(\frac{-u_1 + 16}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2u_1 + 16}{2}\right)^2 = 84 \\ \Leftrightarrow & 36u_1^2 + (2u_1 + 16)^2 + 4(16 - u_1)^2 + 9(16 - 2u_1)^2 = 3024 \\ \Leftrightarrow & 80u_1^2 - 640u_1 + 560 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 = 1 \Rightarrow d = 2 \\ u_1 = 7 \Rightarrow d = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 1$ , công sai là  $d = 2$  hoặc  $u_1 = 7$ ,  $d = -2$ .

$$\textcircled{10} \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10d = 5 \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d)(u_1 + 3d)(u_1 + 4d) = 45. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (2), suy ra  $u_1 = 1 - 2d$ , thay vào (2) ta có

$$(1 - 2d)(1 - d)(1 + d)(1 + 2d) = 45 \Leftrightarrow 4d^4 - 5d^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = 4 \\ d^2 = -\frac{11}{4} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ d = -2. \end{cases}$$

Với  $d = 2$  thì  $u_1 = 1 - 2d = -3$ . Với  $d = -2$  thì  $u_1 = 1 - 2d = 5$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = -3$ , công sai là  $d = 2$  hoặc  $u_1 = 5, d = -2$ .

$$\textcircled{11} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_3 = 20 \\ (u_3 - 2d)^2 + (u_3 - d)^2 + u_3^2 + (u_3 + d)^2 + (u_3 + 2d)^2 = 170. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ (1), suy ra  $u_3 = 4$ . Thay vào (2), ta có

$$(4 - 2d)^2 + (4 - d)^2 + 4^2 + (4 + d)^2 + (4 + 2d)^2 = 170 \Leftrightarrow 9d^2 = 90 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -3 \\ d = 3. \end{cases}$$

Với  $u_3 = 4, d = -3$  thì  $u_1 = u_3 - 2d = 10$ . Với  $u_3 = 4, d = 3$  thì  $u_1 = u_3 - 2d = -2$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 10$ , công sai là  $d = -3$  hoặc  $u_1 = -2, d = 3$ .

$$\textcircled{12} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = -12 \\ (u_2 - d)u_2(u_2 + d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = -4 \\ (-4 - d) \cdot (-4) \cdot (-4 + d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = -4 \\ d^2 = 18. \end{cases}$$

Do  $d^2 = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3\sqrt{2} \\ d = -3\sqrt{2} \end{cases}$ . Với  $u_2 = -4, d = 3\sqrt{2}$  thì  $u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$ . Với  $u_2 = -4, d = -3\sqrt{2}$  thì

$u_1 = -4 + 3\sqrt{2}$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$ , công sai là  $d = 3\sqrt{2}$  hoặc  $u_1 = -4 + 3\sqrt{2}, d = -3\sqrt{2}$ .

$$\textcircled{13} \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \quad (1) \quad (2).$$

Từ (1), suy ra  $u_1 + u_4 = u_2 + u_3 = 10$  và  $u_1 = 5 - \frac{3}{2}d$ .

Từ (2), ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + u_4}{u_1 \cdot u_4} + \frac{u_2 + u_3}{u_2 \cdot u_3} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{u_1(u_1 + 3d)} + \frac{10}{(u_1 + d)(u_1 + 2d)} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{\left(5 - \frac{3}{2}d\right)\left(5 + \frac{3}{2}d\right)} + \frac{10}{\left(5 - \frac{1}{2}d\right)\left(5 + \frac{1}{2}d\right)} &= \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9}{4}d^2} + \frac{10}{25 - \frac{1}{4}d^2} = \frac{25}{24} \\ \Leftrightarrow 10\left(25 - \frac{9}{4}d^2 + 25 - \frac{1}{4}d^2\right) &= \frac{25}{24}\left(25 - \frac{9}{4}d^2\right)\left(25 - \frac{1}{4}d^2\right) \\ \Leftrightarrow \frac{75}{128}d^4 - \frac{1925}{48}d^2 + \frac{3625}{24} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 = \frac{580}{9} \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \pm \frac{2\sqrt{145}}{3} \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $d = \frac{2\sqrt{145}}{3}$  thì  $u_1 = 5 - \sqrt{145}$ . Với  $d = -\frac{2\sqrt{145}}{3}$  thì  $u_1 = 5 + \sqrt{145}$ .

Với  $d = 2$  thì  $u_1 = 2$ . Với  $d = -2$  thì  $u_1 = 8$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = 5 + \sqrt{145}$ , công sai là  $d = -\frac{2\sqrt{145}}{3}$ ;  $u_1 = 5 - \sqrt{145}, d = \frac{2\sqrt{145}}{3}$ ;  $u_1 = 2, d = 2$ ;  $u_1 = 8, d = -2$ .

$$\textcircled{14} \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_3 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = \frac{5}{6} \\ u_4 = \frac{13}{12}. \end{cases}$$

Khi đó ta có  $u_4 = u_3 + d \Leftrightarrow d = u_4 - u_3 = \frac{13}{12} - \frac{5}{6} = \frac{1}{4}$ . Mặt khác  $u_3 = u_1 + 2d \Leftrightarrow u_1 = u_3 - 2d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ .

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1 = \frac{1}{3}$ , công sai là  $d = \frac{1}{4}$ .

□

**BÀI 3.** Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ  $n$  của các cấp số cộng sau, biết rằng:

①  $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45. \end{cases}$

②  $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5. \end{cases}$

③  $\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}.$

④  $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5. \end{cases}$

**Lời giải.**

① Áp dụng công thức  $S_n = \frac{(u_n + u_1) \cdot n}{2} = \frac{(2u_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}$  trong đó  $u_1$  là số hạng đầu,  $d$  là công sai.

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2u_1 + 11d) \cdot 12}{2} = 34 \\ \frac{(2u_1 + 17d) \cdot 18}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 11d = \frac{17}{3} \\ 2u_1 + 17d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{31}{9} \\ d = \frac{-1}{9}. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu là  $u_1 = \frac{31}{9}$  và công sai  $d = \frac{-1}{9}$ .

② Ta có  $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 9d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 86 \\ d = -19. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu là  $u_1 = 86$  và công sai  $d = -19$ .

③  $\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3S_{20} = 5S_{10} \\ 2S_{10} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 \cdot (2u_1 + 19d) = 25 \cdot (2u_1 + 9d) \\ 10 \cdot (2u_1 + 9d) = \frac{15 \cdot (2u_1 + 4d)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 69d = 0 \\ 2u_1 + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu là  $u_1 = 0$  và công sai  $d = 0$ .

④  $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2u_1 + 19d) \cdot 20}{2} = \frac{2 \cdot (2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} \\ \frac{(2u_1 + 14d) \cdot 15}{2} = \frac{3 \cdot (2u_1 + 4d) \cdot 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0. \end{cases}$

Vậy số hạng đầu là  $u_1 = 0$  và công sai  $d = 0$ .

□

**BÀI 4.** Cho cấp số cộng  $u_1, u_2, u_3, \dots$  có công sai  $d$ .

① Biết  $u_2 + u_{22} = 40$ . Tính  $S_{23}$ .

② Biết  $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$ . Tính  $A = u_6 + u_{11}$  và  $B = u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$ .

③ Biết  $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$ . Tính  $S_{19}$ .

④ Biết  $u_{23} + u_{57} = 29$ . Tính  $C = u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $u_2 + u_{22} = 40 \Leftrightarrow u_1 + d + u_1 + 21d = 40 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 40$ .

$$\text{Khi đó } S_{23} = \frac{(2u_1 + 22d) \cdot 23}{2} = \frac{40 \cdot 23}{2} = 460.$$

② Ta có

$$\begin{aligned} u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} &= 147 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + 3d + u_1 + 6d + u_1 + 9d + u_1 + 12d + u_1 + 15d = 147 \\ &\Leftrightarrow 6u_1 + 45d = 147 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 49 \\ &\Leftrightarrow (u_1 + 5d) + (u_1 + 10d) = 49 \\ &\Leftrightarrow u_6 + u_{11} = 49. \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} 2u_1 + 15d &= 49 \Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 98 \\ &\Leftrightarrow u_1 + (u_1 + 5d) + (u_1 + 10d) + (u_1 + 15d) = 98 \\ &\Leftrightarrow u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = 98. \end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned} u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} &= 224 \Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 11d + u_1 + 15d = 224 \\ &\Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \\ &\Leftrightarrow 2u_1 + 18d = 112 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2u_1 + 18d) \cdot 19}{2} = 1064 \\ &\Leftrightarrow S_{19} = 1064. \end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned} u_{23} + u_{57} &= 29 \Leftrightarrow 2u_1 + 78d = 29 \\ &\Leftrightarrow 6u_1 + 234d = 87 \\ &\Leftrightarrow (u_1 + 9d) + (u_1 + 69d) + (u_1 + 156d) + 3u_1 = 87 \\ &\Leftrightarrow u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1 = 87. \end{aligned}$$

□

**BÀI 5.** Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- ① Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.
- ② Tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.
- ③ Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155.

**Lời giải.**

- ① Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - d$ ,  $x$ ,  $x + d$  trong đó  $d$  là công sai.  
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - d) + x + (x + d) = 15 \\ (x - d) \cdot x \cdot (x + d) = 105 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ x(x^2 - d^2) = 105 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 5(25 - d^2) = 105 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $d = 2$  thì ba số hạng liên tiếp là 3, 5, 7.

Với  $d = -2$  thì ba số hạng liên tiếp là 7, 5, 3.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 3, 5, 7.

- ② Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - d$ ,  $x$ ,  $x + d$  trong đó  $d$  là công sai.  
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - d) + x + (x + d) = 15 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 83 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 15 \\ 3x^2 + 2d^2 = 83 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 3 \cdot 5^2 + 2d^2 = 83 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $d = 2$  thì ba số hạng liên tiếp là 3, 5, 7.

Với  $d = -2$  thì ba số hạng liên tiếp là 7, 5, 3.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 3, 5, 7.

- ③ Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - d, x, x + d$  trong đó  $d$  là công sai.  
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - d) + x + (x + d) = 21 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 155 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 21 \\ 3x^2 + 2d^2 = 155 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ 3 \cdot 7^2 + 2d^2 = 155 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ d^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ d = \pm 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $d = 2$  thì ba số hạng liên tiếp là 5, 7, 9.

Với  $d = -2$  thì ba số hạng liên tiếp là 9, 7, 5.

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 5, 7, 9.

□

**BÀI 6.** Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- ① Tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương bằng 70.
- ② Tổng của chúng bằng 22 và tổng bình phương bằng 66.
- ③ Tổng của chúng bằng 36 và tổng bình phương bằng 504.
- ④ Chúng có tổng bằng 20 và tích của chúng bằng 384.
- ⑤ Tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng  $\frac{25}{24}$  và các số này là những số nguyên.
- ⑥ Nó là số đo của một tứ giác lồi và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất.

**Lời giải.**

- ① Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$  trong đó  $2d$  là công sai.  
Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 3d) + (x - d) + (x + d) + (x + 3d) = 10 \\ (x - 3d)^2 + (x - d)^2 + (x + d)^2 + (x + 3d)^2 = 70 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 10 \\ 4x^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20d^2 = 70 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ d = \pm \frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $-2, 1, 4, 7$ .

- ② Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x - 3d, x - d, x + d, x + 3d$  trong đó  $2d$  là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 22 \\ (x-3d)^2 + (x-d)^2 + (x+d)^2 + (x+3d)^2 = 66 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 22 \\ 4x^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ 4 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 20d^2 = 66 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ d^2 = \frac{-11}{4} \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

- ③ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x-3d, x-d, x+d, x+3d$  trong đó  $2d$  là công sai. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 36 \\ (x-3d)^2 + (x-d)^2 + (x+d)^2 + (x+3d)^2 = 504 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 36 \\ 4x^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 4 \cdot 9^2 + 20d^2 = 504 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d^2 = 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ d = \pm 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0, 6, 12, 18.

- ④ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x-3d, x-d, x+d, x+3d$  trong đó  $2d$  là công sai. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 20 \\ (x-3d)(x-d)(x+d)(x+3d) = 384 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - d^2)(x^2 - 9d^2) = 384 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (25 - d^2)(25 - 9d^2) = 384 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d = \pm 1 \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2, 4, 6, 8 hoặc  $5 - \sqrt{241}, \frac{15 - \sqrt{241}}{3}, \frac{15 + \sqrt{241}}{3}, 5 + \sqrt{241}$ .

- ⑤ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x-3d, x-d, x+d, x+3d$  trong đó  $2d$  là công sai trong đó  $2d \in \mathbb{Z}$ .

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 20 \\ \frac{1}{x-3d} + \frac{1}{x-d} + \frac{1}{x+d} + \frac{1}{x+3d} = \frac{25}{24} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 \\ \frac{1}{5-3d} + \frac{1}{5-d} + \frac{1}{5+d} + \frac{1}{5+3d} = \frac{25}{24} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \frac{10}{25-9d^2} + \frac{10}{25-d^2} = \frac{25}{24} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 9d^4 - 250d^2 + 241 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d^2 = 1 \\ d^2 = \frac{241}{9} \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \begin{cases} d = \pm 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ d = \pm \frac{\sqrt{241}}{3} \text{ (loại vì } 2d \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 2, 4, 6, 8.

- ⑥ Gọi bốn số hạng liên tiếp của cấp số cộng xếp theo thứ tự tăng dần là  $x-3d, x-d, x+d, x+3d$  trong đó  $2d > 0$  là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3d) + (x-d) + (x+d) + (x+3d) = 360^\circ \\ x+3d = 5(x-3d) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 360^\circ \\ 4x = 18d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ 4 \cdot 90^\circ = 18d \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ \\ d = 20^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bốn góc của tứ giác lồi lần lượt là  $30^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 150^\circ$ .

□

**BÀI 7.** Tìm năm số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

**Lời giải.**

Gọi năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng là  $x-2d, x-d, x, x+d, x+2d$  trong đó  $d$  là công sai.

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-2d) + (x-d) + x + (x+d) + (x+2d) = 40 \\ (x-2d)^2 + (x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2 = 480 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 40 \\ 5x^2 + 10d^2 = 480 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ 5 \cdot 8^2 + 10d^2 = 480 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ d^2 = 16 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ d = \pm 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy năm số hạng liên tiếp của cấp số cộng là 0, 4, 8, 12, 16.

□

**BÀI 8.** Một cấp số cộng có 7 số hạng với công sai  $d$  dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

**Lời giải.**

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1$ , công sai  $d$ . Vì số hạng thứ tư của cấp số cộng bằng 11 nên ta có  $u_4 = 11$ .  
Do  $d$  dương nên  $u_5 > u_3$ .  
Vì hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6 nên ta có  $u_5 - u_3 = 6$ .  
Ta có

$$\begin{cases} u_4 = 11 \\ u_5 - u_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 11 \\ (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3 \cdot 3 = 11 \\ d = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy các số hạng còn lại của cấp số cộng là  $u_1 = 2, u_2 = 5, u_4 = 11, u_6 = 17, u_7 = 20$ . □

**BÀI 9.** Một cấp số cộng có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm cấp số cộng đó.

**Lời giải.**

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1$ , công sai  $d$ . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 28 \\ u_5 + u_7 = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 28 \\ 2u_1 + 10d = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -70 \\ d = 28. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là  $-70, -42, -14, 14, 42, 70, 98$ . □

**BÀI 10.** Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

**Lời giải.**

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1$ , công sai  $d$ . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_8 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 + 7d = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là  $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$ . □

**BÀI 11.** Giữa các số 7 và 35, hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng.

**Lời giải.**

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1$ , công sai  $d$ . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là  $7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35$ . □

**BÀI 12.** Giữa các số 4 và 67, hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

**Lời giải.**

Gọi số hạng đầu của cấp số cộng là  $u_1$ , công sai  $d$ . Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{22} = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_1 + 21d = 67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng đó là  $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67$ . □

**BÀI 13.** Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: “Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...”. Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

**Lời giải.**

Gọi  $u_n$  là số cây trồng ở hàng thứ  $n$ .

Theo đề bài ta có  $u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 3, \dots$

Để thấy  $u_n$  là cấp số cộng với số hạng đầu là  $u_1 = 1$ , công sai  $d = 1$ .

Giả sử với 3003 cây trồng được  $n_o$  hàng. Khi đó ta có

$$\frac{[2u_1 + (n_o - 1)d] n_o}{2} = 3003 \Leftrightarrow \frac{[2 \cdot 1 + (n_o - 1)] n_o}{2} = 3003 \Leftrightarrow n_o^2 + n_o - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n_o = 77 \text{ (thỏa mãn)} \\ n_o = -78 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy có 77 hàng được trồng. □

**BÀI 14.** Một công viên hình tam giác được trồng cây xanh theo hàng có quy luật của một cấp số cộng như sau: hàng thứ nhất có 9 cây, hàng thứ 10 có 54 cây, hàng cuối cùng có 2014 cây. Hỏi công viên đó có tất cả bao nhiêu cây được trồng?

**Lời giải.**

Gọi  $u_n$  là số cây trồng ở hàng thứ  $n$ ,

Theo đề bài ta có  $u_n$  là cấp số cộng với  $u_1 = 9$ ,  $u_{10} = 54$ ,  $u_n = 2014$ .

Ta có  $u_{10} = 54 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 54 \Leftrightarrow d = 5$ .

Mặt khác

$$u_n = 2014 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 2014 \Leftrightarrow 9 + (n-1) \cdot 5 = 2014 \Leftrightarrow n = 402.$$

Khi đó tổng số cây của tất cả các hàng là

$$S_{402} = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = \frac{(2 \cdot 9 + 401 \cdot 5) \cdot 402}{2} = 406623.$$

Vậy công viên đó có tất cả 406623 cây được trồng. □

**BÀI 15.** Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ 8/3. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày 1/1 của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày 8/3 bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày 1/1 đến ngày 8/3 có số ngày ít nhất là 67 ngày.

**Lời giải.**

Gọi  $u_1, u_2, \dots, u_n$  là số tiền tiết kiệm của ngày 1/1, 2/1, ..., 8/3.

Theo đề bài ta có  $(u_n)$  lập thành cấp số cộng với công sai  $d = 500$ .

Từ ngày 1/1 đến ngày 8/3, bạn A tiết kiệm được ít nhất là  $\frac{[2 \cdot 500 + (67-1) \cdot 500] \cdot 67}{2} = 1139000 > 800000$ .

Vậy bạn A đủ tiền để mua quà cho mẹ mừng 8/3. □

**BÀI 16.** Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3, .... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng?

**Lời giải.**

Gọi  $u_n$  là số phòng của tầng thứ  $n$ . Theo đề bài ta có  $u_1 - u_2 = u_2 - u_3 = u_3 - u_4 = \dots = u_{29} - u_{30} = 4$  nên  $(u_n)$  là cấp số cộng với công sai  $d = -4$ .

Ta có

$$S_{30} = 1890 \Leftrightarrow \frac{(2u_1 - 29 \cdot 4) \cdot 30}{2} = 1890 \Leftrightarrow u_1 = 121$$

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là  $u_n = u_1 + (n-1)d = 121 - 4(n-1) = -4n + 125$ .

Khi đó tầng 10 có số phòng là  $u_{10} = -4 \cdot 10 + 125 = 85$ . □

**BÀI 17.** Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các công nhân được tuyển dụng. Công ty liên doanh X đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, cụ thể là

**Phương án 1:** Người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

**Phương án 2:** Người lao động sẽ được nhận 7 triệu đồng cho quý đầu tiên và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500000 đồng mỗi quý.

Biết rằng mỗi năm có 4 quý. Nếu em là người lao động, em sẽ chọn phương án nào ?

**Lời giải.**

Theo đề bài, số tiền công nhân nhận được ở mỗi kỳ theo từng phương án lập thành một cấp số cộng, cụ thể

**Phương án 1:**

Giá trị ban đầu  $u_1 = 36$  (triệu), công sai  $d = 3$  (triệu).

Do hợp đồng kéo dài 10 năm nên  $n = 10$ .

Suy ra  $u_{10} = u_1 + (n-1) \cdot d = 36 + (10-1) \cdot 3 = 63$  (triệu).

Vậy tổng số tiền lương nhận được của một công nhân khi hoàn thành hợp đồng (10 năm) là

$$S_{10} = \frac{10}{2}(u_1 + u_{10}) = 5 \cdot (36 + 63) = 495 \quad (\text{triệu}).$$

**Phương án 2:**

Giá trị ban đầu  $u_1 = 7$  (triệu), công sai  $d = 0,5$  (triệu).

Do hợp đồng kéo dài 10 năm, mà mỗi năm có 4 quý nên  $n = 40$ .

Suy ra  $u_{40} = u_1 + (n - 1) \cdot d = 7 + (40 - 1) \cdot 0,5 = 26,5$  (triệu).

Vậy tổng số tiền lương nhận được của một công nhân khi hoàn thành hợp đồng (10 năm) là

$$S_{40} = \frac{40}{2}(u_1 + u_{40}) = 20 \cdot (7 + 26,5) = 670 \quad (\text{triệu}).$$

Vậy nếu là người lao động, em sẽ chọn phương án 2. □

**BÀI 18.** Tìm  $x$  để ba số  $a, b, c$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với:

①  $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x.$

②  $x = a^2 - bc, y = b^2 - ca, z = c^2 - ab.$

**Lời giải.**

① Để ba số  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì

$$\begin{aligned} a + c &= 2b \\ \Leftrightarrow 10 - 3x + 7 - 4x &= 2(2x^2 + 3) \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{4} \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy  $x = -\frac{11}{4}$  và  $x = 1$  thỏa yêu cầu bài toán.

② Tương tự, để ba số  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì  $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$ .  
Do đó

$$\begin{aligned} x &= a^2 - bc = (2b - c)^2 - bc = 4b^2 - 5bc + c^2 \\ y &= b^2 - ca = b^2 - c \cdot (2b - c) = b^2 - 2bc + c^2 \\ z &= c^2 - ab = c^2 - b \cdot (2b - c) = -2b^2 + bc + c^2 \end{aligned}$$

Nhận xét  $2y - z = 4b^2 - 5bc + c^2 = x$ .

Vậy  $x = 2y - z$  với  $y = b^2 - ca, z = c^2 - ab, a + c = 2b$ . □

**BÀI 19.** Tìm các nghiệm của phương trình:  $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ , biết rằng các nghiệm này phân biệt và chúng lập thành một cấp số cộng.

**Lời giải.**

Gọi  $x_1, x_2, x_3$  theo thứ tự là 3 nghiệm của phương trình đã cho.

Do  $x_1, x_2, x_3$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên  $x_1 + x_3 = 2x_2$  và  $d > 0$  với  $d$  là công sai của cấp số cộng đã cho.

Mà theo định lý Vi-ét thì  $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Leftrightarrow 3x_2 = 15 \Leftrightarrow x_2 = 5$ .

Mặt khác

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= 105 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_3 = 21 \Leftrightarrow (x_2 - d)(x_2 + d) = 21 \\ &\Leftrightarrow 25 - d^2 = 21 \\ &\Leftrightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Vậy  $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7$ . □

**BÀI 20.** Giải các phương trình sau:

①  $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970.$

②  $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245.$

③  $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155.$

④  $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010.$

**Lời giải.**

- ① Ta có  $1, 6, 11, \dots, x$  là một cấp số cộng với  $u_1 = 1, u_n = x$  và  $d = 5$ .

Suy ra  $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 5 \Leftrightarrow x = 5n - 4$ .

Mà  $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(1 + x) = 970 \quad (1)$ .

Thay  $x = 5n - 4$  vào (1), ta được

$$5n^2 - 3n - 1940 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{97}{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với  $n = 20 \Rightarrow x = 96$ .

Vậy  $x = 96$  là nghiệm của phương trình đã cho.

- ② Ta có  $2, 7, 12, \dots, x$  là một cấp số cộng với  $u_1 = 2, u_n = x$  và  $d = 5$ .

Suy ra  $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 3 \Leftrightarrow x = 5n - 3$ .

Mà  $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2 + x) = 245 \quad (2)$ .

Thay  $x = 5n - 3$  vào (2), ta được

$$5n^2 - n - 490 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{49}{5} & (\text{loại}). \end{cases}$$

Với  $n = 10 \Rightarrow x = 47$ .

Vậy  $x = 47$  là nghiệm của phương trình đã cho.

- ③ Ta có  $(x + 1), (x + 4), (x + 7), \dots, (x + 28)$  là một cấp số cộng với  $u_1 = x + 1, u_n = x + 28$  và  $d = 3$ .

Suy ra  $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow x + 28 = x + 1 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow n = 10$ .

Mà  $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(x + 1 + x + 28) = 155 \quad (3)$ .

Thay  $n = 10$  vào (3), ta được  $x = 1$ .

Vậy  $x = 1$  là nghiệm của phương trình đã cho.

- ④ Ta có  $(2x + 1), (2x + 6), (2x + 11), \dots, (2x + 96)$  là một cấp số cộng với  $u_1 = 2x + 1, u_n = 2x + 96$  và  $d = 5$ .

Suy ra  $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow 2x + 96 = 2x + 1 + (n - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow n = 20$ .

Mà  $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2x + 1 + 2x + 96) = 1010 \quad (4)$ .

Thay  $n = 20$  vào (4), ta được  $x = 1$ .

Vậy  $x = 1$  là nghiệm của phương trình đã cho.

□

**BÀI 21.** Cho  $a, b, c$  là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

- ①  $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$ .
- ②  $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$ .
- ③  $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)]$ .
- ④ ba số:  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  cũng là một cấp số cộng.
- ⑤ ba số:  $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$  cũng là một cấp số cộng.
- ⑥ ba số:  $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, (a, b, c > 0)$  cũng là một cấp số cộng.

**Lời giải.**

- ① Vì  $a, b, c$  là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên  $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$ .

Do đó

$$a^2 + 2bc = (2b - c)^2 + 2bc = 4b^2 - 2bc + c^2 = 2b(2b - c) + c^2 = 2ba + c^2 = c^2 + 2ab.$$

Vậy  $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$  (đpcm).

- ② Vì  $a, b, c$  là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên  $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$ .

Do đó

$$a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b + c)^2.$$

Vậy  $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$  (đpcm).

- ③ Vì  $a, b, c$  là ba số liên tiếp của một cấp số cộng nên  $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$ .

Do đó

$$\begin{aligned} VT &= 2(a + b + c)^3 = 2(3b)^3 = 54b^3 \\ VP &= 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)] \\ &= 9[(2b - c)^2(b + c) + b^2(2b - c + c) + c^2(2b - c + b)] \\ &= 9[(4b^2 - 4bc + c^2)(b + c) + b^2(2b) + c^2(3b - c)] \\ &= 9[4b^3 - 4b^2c + bc^2 + 4b^2c - 4bc^2 + c^3 + 2b^3 + 3bc^2 - c^3] \\ &= 9 \cdot (6b^3) = 54b^3 = VT. \end{aligned}$$

Vậy  $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)]$  (đpcm).

- ④ Vì ba số  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì  $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$ .

Do đó

$$\begin{aligned} a^2 - bc &= (2b - c)^2 - bc = 4b^2 - 5bc + c^2 \\ b^2 - ca &= b^2 - c \cdot (2b - c) = b^2 - 2bc + c^2 \\ c^2 - ab &= c^2 - b \cdot (2b - c) = -2b^2 + bc + c^2. \end{aligned}$$

Nhận xét

$$(a^2 - bc) + (c^2 - ab) = (4b^2 - 5bc + c^2) + (-2b^2 + bc + c^2) = 2b^2 - 4bc + 2c^2 = 2(b^2 - 2bc + c^2) = 2(b^2 - ca).$$

Vậy ba số:  $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$  là một cấp số cộng.

- ⑤ Vì ba số  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì  $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c$ .

Xét

$$\begin{aligned} 2(a^2 + ac + c^2) - (a^2 + ab + b^2) &= a^2 + a(2c - b) + 2c^2 - b^2 \\ &= (2b - c)^2 + (2b - c)(2c - b) + 2c^2 - b^2 \\ &= b^2 + bc + c^2 \\ \Rightarrow (b^2 + bc + c^2) + (a^2 + ab + b^2) &= 2(a^2 + ac + c^2). \end{aligned}$$

Vậy ba số:  $b^2 + bc + c^2, a^2 + ac + c^2, a^2 + ab + b^2$  cũng là một cấp số cộng.

- ⑥ Vì ba số  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì  $a + c = 2b \Rightarrow a - b = b - c = \frac{1}{2}(a - c)$ .

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{b - c} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a - b} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

Vậy ba số:  $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, (a, b, c > 0)$  cũng là một cấp số cộng.

□

**BÀI 22.** Cho ba số  $a^2, b^2, c^2$  theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác không. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{b + c}, \frac{1}{c + a}, \frac{1}{a + b}$  cũng lập thành cấp số cộng.

**Lời giải.**

Vì ba số  $a^2, b^2, c^2$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên  $a^2 + c^2 = 2b^2$ .

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{b + c} - \frac{1}{c + a} &= \frac{1}{c + a} - \frac{1}{a + b} \Leftrightarrow \frac{a - b}{(b + c)(c + a)} = \frac{b - c}{(c + a)(a + b)} \\ &\Leftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2. \end{aligned}$$

Vậy ba số:  $\frac{1}{b + c}, \frac{1}{c + a}, \frac{1}{a + b}$  cũng lập thành cấp số cộng.

□

**BÀI 23.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\tan \frac{A}{2}$ ,  $\tan \frac{B}{2}$ ,  $\tan \frac{C}{2}$  theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$  theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} &= 2 \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 2 \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \left( \frac{A+C}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = 2 \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos B + 1}{2} = \sin \frac{B}{2} \left[ \cos \left( \frac{A+C}{2} \right) + \cos \left( \frac{A-C}{2} \right) \right] \\ &\Leftrightarrow \cos B + 1 = 2 \sin^2 \frac{B}{2} + 2 \cos \left( \frac{A+C}{2} \right) \cos \left( \frac{A-C}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \cos B + 1 = 1 - \cos B + \cos A + \cos C \\ &\Leftrightarrow 2 \cos B = \cos A + \cos C. \end{aligned}$$

Vậy  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$  theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng. □

**BÀI 24.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\cot \frac{A}{2}$ ,  $\cot \frac{B}{2}$ ,  $\cot \frac{C}{2}$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh ba cạnh:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{C}{2} &= 2 \cot \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = 2 \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \left( \frac{A+C}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin B = -\cos \frac{B}{2} \left[ \cos \left( \frac{A+C}{2} \right) - \cos \left( \frac{A-C}{2} \right) \right] \\ &\Leftrightarrow \sin B = -\sin B + 2 \sin \left( \frac{A+C}{2} \right) \cos \left( \frac{A-C}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin B = \sin A + \sin C \\ &\Leftrightarrow 2b = a + c. \end{aligned}$$

Vậy ba cạnh:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng. □

**BÀI 25.** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = 0$  có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng trong các trường hợp sau:

- ①  $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$ .
- ②  $f(x) = x^4 + 2(m+1)x^2 + 4$ .
- ③  $f(x) = x^4 + (3m+5)x^2 + (m+1)^2$ .
- ④  $f(x) = x^4 - 10mx^2 + 9m$ .

**Lời giải.**

- ① Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0 \quad (1).$$

Ta phải tìm  $m$  sao cho (1) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  phân biệt dương phân biệt, tức là  $0 < t_1 < t_2$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đặt  $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$ , ta có  $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ .

Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = 2m \\ 9t_1^2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (nhận)} \\ m = \frac{5}{9} \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy với  $m \in \left\{\frac{5}{9}; 5\right\}$  thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

- ② Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2(m+1)t + 4 = 0 \quad (1)$$

Ta phải tìm  $m$  sao cho (1) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  phân biệt dương phân biệt, tức là  $0 < t_1 < t_2$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 4 > 0 \\ -2(m+1) > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m < -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Đặt  $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$ , ta có  $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ .

Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -2(m+1) \\ t_1 t_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = -2(m+1) \\ 9t_1^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{2}{3} \\ 10t_1 = -2(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{13}{3} \text{ (nhận)}.$$

Vậy với  $m = -\frac{13}{3}$  thì phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

- ③ Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + (3m+5)t + (m+1)^2 = 0 \quad (1)$$

Ta phải tìm  $m$  sao cho (1) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  phân biệt dương phân biệt, tức là  $0 < t_1 < t_2$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+5)^2 - 4(m+1)^2 > 0 \\ -(3m+5) > 0 \\ (m+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > -\frac{7}{5} \\ m < -\frac{5}{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$

Đặt  $x_1 = -\sqrt{t_2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{t_1}$ ,  $x_3 = \sqrt{t_1}$ ,  $x_4 = \sqrt{t_2}$ , ta có  $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ .  
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = -(3m+5) \\ t_1 t_2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = -(3m+5) \\ 9t_1^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{3m+5}{10} \\ 9t_1^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \text{ (loại)} \\ m = -\frac{25}{19} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy không có giá trị  $m$  để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

④ Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ), phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 10mt + 9m = 0 \quad (1)$$

Ta phải tìm  $m$  sao cho (1) có hai nghiệm  $t_1, t_2$  phân biệt dương phân biệt, tức là  $0 < t_1 < t_2$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 9m > 0 \\ 10m > 0 \\ 9m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{9}{25} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{9}{25}.$$

Đặt  $x_1 = -\sqrt{t_2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{t_1}$ ,  $x_3 = \sqrt{t_1}$ ,  $x_4 = \sqrt{t_2}$ , ta có  $\Rightarrow x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ .  
Để bốn nghiệm lập thành cấp số cộng thì

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_2 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \\ \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = -2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2.$$

Vậy ta có

$$\begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ t_1 + t_2 = 10m \\ t_1 t_2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t_1 = t_2 \\ 10t_1 = 10m \\ 9t_1^2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = m \\ 9t_1^2 = 9m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = 1 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì  $m = 1$ .

□

**BÀI 26.** Tìm tham số  $m$  để phương trình:  $x^3 - (3m+1)x^2 + 2mx = 0$  có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng ?

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } x^3 - (3m+1)x^2 + 2mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - (3m+1)x + 2m = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 2m + 1 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m^2 + (m-1)^2 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$\text{Giả sử } x_1, x_2 \text{ là hai nghiệm của phương trình (1) và } x_3 = 0, \text{ ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m+1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \quad (\text{I}).$$

Do vai trò của  $x_1, x_2$  như nhau, ta chỉ cần xét hai trường hợp sau

**TH1:**  $x_1, x_2$  cùng dương hoặc cùng âm, khi đó  $x_1 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2$ . Kết hợp với (I), ta có

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m+1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3m+1) \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3}(3m+1) \\ (3m+1)^2 = 9m \end{cases} \quad (*).$$

$$(*) \Leftrightarrow 9m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow \text{vô nghiệm, do đó không có } m \text{ thỏa.}$$

**TH2:**  $x_1$  và  $x_2$  trái dấu,  $x_3$  nằm giữa, khi đó  $x_1 + x_2 = 2x_3 \Rightarrow x_1 = -x_2$ . Kết hợp với (I) ta có

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 + x_2 = 3m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 0 = 3m + 1 \\ -x_1^2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3} \text{ (nhận).}$$

Với  $m = -\frac{1}{3}$  phương trình đã cho có ba nghiệm lập thành một cấp số cộng. □

## BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1 (Cấp số nhân).** Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số  $q$  không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân} \Leftrightarrow n \geq 2, u_n = u_{n-1} \cdot q.$$

Số  $q$  được gọi là công bội của cấp số nhân và  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}, n \geq 1$ .

⚠ — Khi  $q = 1$  thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

— Khi  $q = 0$  thì cấp số nhân có dạng  $u_1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

— Khi  $u_1 = 0$  thì với mọi  $q$ , cấp số nhân có dạng  $0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

**Định lý 1 (Số hạng tổng quát của cấp số nhân).** Nếu cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$ .

⚠ Nếu  $(u_n)$  là cấp số nhân với các số hạng khác 0 thì

$$u_m = u_k \cdot q^{m-k}, k < m, q^{m-k} = \frac{u_m}{u_k}, k < m$$

**Định lý 2 (Tính chất các số hạng của cấp số nhân).** Trong cấp số nhân  $(u_n)$ , bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là  $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, k \geq 2$ .

⚠ Nếu  $a, b, c$  là ba số khác 0 thì “ $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi  $b^2 = ac$ ”.

⚠ Nếu  $(u_n)$  là cấp số nhân thì  $u_m^2 = u_{m-k} \cdot u_{m+k}, k < m$ .

**Định lý 3 (Tổng  $n$  số hạng đầu tiên của cấp số nhân).** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

— Nếu  $q = 1$  thì  $S_n = nu_1$ .

— Nếu  $q \neq 1$  thì  $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - q}$ .

### B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

#### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

① Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = (-3)^{2n+1}$ .

② Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$ .

Lời giải.

① Ta có  $u_n \neq 0$  và  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2(n+1)+1}}{(-3)^{2n+1}} = 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Do đó  $(u_n)$  là cấp số nhân với số hạng đầu  $u_1 = -27$ , công bội  $q = 9$ .

② Dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 5, u_2 = 250, u_3 = 9375$  và  $u_2^2 \neq u_1 \cdot u_3$  nên  $(u_n)$  không là cấp số nhân. □

**VÍ DỤ 2.** Tìm các số dương  $a$  và  $b$  sao cho  $a, a + 2b, 2a + b$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng và  $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$  theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

**Lời giải.**

— Ta có  $a, a + 2b, 2a + b$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng  $\Leftrightarrow a + 2b = \frac{a + 2a + b}{2} \Leftrightarrow a = 3b$  (1).

— Ta có  $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$  theo thứ tự lập thành cấp số nhân  $\Leftrightarrow (ab + 5)^2 = (b + 1)^2 \cdot (a + 1)^2$  (2).

— Từ (1), (2) suy ra

$$(3b^2 + 5)^2 = [(b + 1)(3b + 1)]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + 5 = 3b^2 + 4b + 1 \\ 3b^2 + 5 = -(3b^2 + 4b + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 6b^2 + 4b + 6 = 0. \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases}$$

— Vậy  $b = 1, a = 3$  thỏa mãn. □

**VÍ DỤ 3.** Một cấp số nhân có tám số hạng, số hạng đầu là 4374, số hạng cuối là 2. Tìm cấp số nhân đó.

**Lời giải.**

Giả sử cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1$ , công bội  $q$ . Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 4374 \\ u_8 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4374 \\ u_1 \cdot q^7 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4374 \\ q^7 = \frac{1}{2187} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4374 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Cấp số nhân cần tìm là 4374; 1458; 486; 162; 54; 18; 6; 2. □

**VÍ DỤ 4.** Tìm số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  của cấp số nhân  $(u_n)$  biết

①  $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

②  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_4 \cdot q - u_2 \cdot q = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 72 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{72}{q^3 - q} = \frac{72}{6} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_1 \cdot q^3 + u_2 \cdot q^3 + u_3 \cdot q^3 = 351 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ q^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ q = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{13}{1 + q + q^2} = \frac{13}{13} = 1 \\ q = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

□

**VÍ DỤ 5.** Tính tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39366.

**Lời giải.**

- Giả sử cấp số nhân có  $n$  số hạng, số hạng đầu  $u_1$ , công bội  $q$ .
- Ta có  $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{54}{18} = 3$ .
- Ta có  $u_n = 39366 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{n-1} = 39366 \Leftrightarrow 3^{n-1} = 2187 = 3^7 \Leftrightarrow n = 8$ .
- Tổng các số hạng là  $S_8 = u_1 \cdot \frac{1-q^8}{1-q} = 18 \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = 59040$ .

Chú ý: Có thể dùng công thức tính tổng  $S = \frac{u_d - u_c}{1-q} + u_c = \frac{18 - 39366}{1-3} + 39366 = 59040$ . □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Tìm số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  của cấp số nhân trong các trường hợp sau

- ①  $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$
- ②  $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$
- ③  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40. \end{cases}$
- ④  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64. \end{cases}$
- ⑤  $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5. \end{cases}$
- ⑥  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21. \end{cases}$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_1 \cdot q + u_5 \cdot q = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 + u_1 \cdot q^4 = 51 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{51}{q^4 + 1} = \frac{51}{17} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q^5 = 165 \\ u_1 \cdot q^2(1+q) = 60 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^5) = 165 \\ \frac{q^4 - q^3 + q^2 - q + 1}{q^2} = \frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^5) = 165 \\ 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình  $4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0$ .

Đặt  $q + \frac{1}{q} = t$ , với  $|t| \geq 2$ , ta có  $4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases}$ . (loại)

Ta có  $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2. \end{cases}$

— Với  $q = 2$  thì  $u_1 = \frac{165}{q^5 + 1} = 5$ .

— Với  $q = \frac{1}{2}$  thì  $u_1 = \frac{165}{q^5 + 1} = 160$ .

③ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_1 \cdot q^3 + u_2 \cdot q^3 + u_3 \cdot q^3 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ q^3 = \frac{8}{27} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ q = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{135}{1 + q + q^2} = \frac{1215}{19} \\ q = \frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_2 \cdot (u_1 \cdot u_3) = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_2^3 = 64 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_2}{q} + u_2 + u_2 \cdot q = 14 \\ u_2 = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

— Với  $q = 2$  thì  $u_1 = 2$ .

— Với  $q = \frac{1}{2}$  thì  $u_1 = 8$ .

⑤ Ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 3 - u_1 \\ u_1^2 + (3 - u_1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 = 3 - u_1 \\ 2u_1^2 - 6u_1 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1 = 2. \end{cases}$$

— Với  $u_1 = 1$  thì  $q^2 + 1 = 3$ , do đó  $\begin{cases} q = \sqrt{2} \\ q = -\sqrt{2}. \end{cases}$

— Với  $u_1 = 2$  thì  $q^2 + 1 = \frac{3}{2}$ , do đó  $\begin{cases} q = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ q = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

⑥  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 7 - u_2 \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1u_3 = 21 - u_2^2. \end{cases}$

Suy ra  $(7 - u_2)^2 - 2u_2^2 = 21 - u_2^2 \Leftrightarrow u_2 = 2$ .

Khi đó

$$u_1 + u_2 + u_3 = 7 \Leftrightarrow \frac{u_2}{q} + u_2 + u_2 \cdot q = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

— Với  $q = 2$  thì  $u_1 = 1$ .

— Với  $q = \frac{1}{2}$  thì  $u_1 = 4$ .

□

**BÀI 2.** Tìm  $a, b$  biết rằng  $1, a, b$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng và  $1, a^2, b^2$  là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

**Lời giải.**

Do  $1, a, b$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng nên ta có phương trình

$$1 + b = 2a. \quad (1)$$

Do  $1, a^2, b^2$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân nên ta có phương trình

$$b^2 = a^4. \quad (2)$$

Từ (1)  $\Rightarrow b = 2a - 1$  (3). Thay vào (2), ta được

$$a^4 = (2a - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 1 = 0 \\ a^2 + 2a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Thay  $a$  vào (3), ta có

— Với  $a = 1 \Rightarrow b = 1$ .

— Với  $a = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = -3 + 2\sqrt{2}$ .

— Với  $a = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow b = -3 - 2\sqrt{2}$ .

Vậy các cặp số  $(a; b)$  thỏa mãn là  $(1; 1); (-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$ .

□

**BÀI 3.** Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

**Lời giải.**

Theo bài ra, ta có cấp số nhân có  $u_1 = 160, u_6 = 5$ . Do  $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{5}{160} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$ .

Vậy 4 số cần tìm là  $u_2 = u_1 \cdot q = 80, u_3 = u_2 \cdot q = 40, u_4 = u_3 \cdot q = 20, u_5 = u_4 \cdot q = 10$ .

□

**BÀI 4.** Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được 1 cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

**Lời giải.**

Gọi ba số cần tìm là  $0 < x < y < z$ . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ xz = y^2 \\ (x - 1) + (z - 19) = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 65 \\ xz = y^2 \\ x + z - 20 = 2y. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Từ (1)  $\Rightarrow x + z = 65 - y$ , thay vào (3) được

$$65 - y - 20 = 2y \Leftrightarrow 3y = 45 \Leftrightarrow y = 15.$$

Từ (2) và (3) suy ra  $\begin{cases} x + z = 50 \\ xz = 225 \end{cases} \Rightarrow x, z$  là nghiệm của phương trình  $t^2 - 50t + 225 = 0 \Rightarrow t = 5, t = 45$ .

Suy ra  $x = 5, z = 45$ . Vậy 3 số cần tìm là  $(5; 15; 45)$ .

□

**BÀI 5.** Tính tổng:

$$\textcircled{1} S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n.$$

$$\textcircled{2} S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2.$$

**Lời giải.**

$\textcircled{1}$  Tổng  $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$  gồm  $n$  số hạng lập thành cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1 = 2$ , công bội  $q = 2$ .

$$\text{Do đó } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^{n+1} - 2.$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2 \\
 &= \left(4 + 2 + \frac{1}{4}\right) + \left(4^2 + 2 + \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(4^n + 2 + \frac{1}{4^n}\right) \\
 &= 2n + (4 + 4^2 + \cdots + 4^n) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) \\
 &= 2n + 4 \cdot \frac{1 - 4^n}{1 - 4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= 2n + \frac{4}{3}(4^n - 1) + \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n}.
 \end{aligned}$$

□

**BÀI 6.** Tìm  $m$  để phương trình  $x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0$  có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân.

**Lời giải.**

Ta có

$$x^3 + (5 - m)x^2 + (6 - 5m)x - 6m = 0 \Leftrightarrow (x - m)(x^2 + 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\text{Để 3 nghiệm của phương trình lập thành cấp số nhân} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2) \cdot (-3) = m^2 \\ -3m = (-2)^2 \\ -2m = (-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{6} \\ m = -\frac{4}{3} \\ m = -\frac{9}{2}. \end{cases}$$

□

**BÀI 7.** Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số còn lại và nửa quả, ... Đến người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa. Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu xoài ở đầu mùa?

**Lời giải.**

Gọi  $x$  là số xoài bác nông dân đã thu hoạch được, (điều kiện  $0 < x \in \mathbb{Z}$ ).

— Số xoài bán cho người thứ nhất là  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow$  số xoài còn lại là  $x - \frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2} = \frac{x - (2^1 - 1)}{2}$ .

— Số xoài bán cho người thứ hai là  $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4} \Rightarrow$  số xoài còn lại là  $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-3}{4} = \frac{x - (2^2 - 1)}{2^2}$ .

— Số xoài bán cho người thứ ba là  $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8} \Rightarrow$  số xoài còn lại là  $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{8} = \frac{x-7}{8} = \frac{x - (2^3 - 1)}{2^3}$ .

— Số xoài bán cho người thứ tư là  $\frac{x-7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{16} \Rightarrow$  số xoài còn lại là  $\frac{x-7}{8} - \frac{x+1}{16} = \frac{x-15}{16} = \frac{x - (2^4 - 1)}{2^4}$ .

— Lập luận tương tự. Số xoài bán cho người thứ 7 là  $\frac{x+1}{2^7}$ . Số xoài còn lại là  $\frac{x - (2^7 - 1)}{2^7} = \frac{x - 127}{2^7}$ . Sau khi bán cho người thứ 7, bác nông dân không còn quả xoài nào nữa nên ta có  $x = 127$  (quả).

□

**3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 8.** Tìm số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  của cấp số nhân trong các trường hợp sau

① 
$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$$

③ 
$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$$

④ 
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$$

**Lời giải.**

① Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 90 \\ u_2 - u_2 \cdot q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 \cdot q(1 + q^2) = 90 \\ u_2 \cdot (1 - q^4) = 240 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{240}{1 - q^4} \\ \frac{1 - q^2}{q} = \frac{240}{90} = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{240}{q(1 - q^4)} \\ 3q^2 + 8q - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3}, u_1 = 729 \\ q = -3, u_1 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 \cdot q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 \\ u_1(1 + q^6) = 325 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 + 1 = 5 \\ u_1 = \frac{325}{1 + q^6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = 4 \\ u_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 5 \\ q = -2 \\ u_1 = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_2 \cdot q^2 + u_2 \cdot q^4 = -42 \\ u_2 \cdot q + u_2 \cdot q^3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2(1 + q^2 + q^4) = -42 \\ u_2(q + q^3) = 20. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1 + q^2 + q^4}{q + q^3} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(q + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0.$$

$$\text{Đặt } q + \frac{1}{q} = t, \text{ với } |t| \geq 2, \text{ ta có } 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} \\ t = \frac{2}{5}. \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{Ta có } t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ q = -2. \end{cases}$$

— Với  $q = -2$  thì  $u_2 = -2$ , do đó  $u_1 = 1$ .

— Với  $q = -\frac{1}{2}$  thì  $u_2 = -32$ , do đó  $u_1 = 64$ .

④ Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2 \cdot q^2 + u_1^2 \cdot q^4 + u_1^2 \cdot q^6 = 85 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2 + q^3) = 15 \\ u_1^2(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q)(1 + q^2) = 15 \\ u_1^2(1 + q^2)(1 + q^4) = 85 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} u_1^2(1 + q)^2(1 + q^2)^2 = 225 \\ u_1^2(1 + q^2)(1 + q^4) = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1 + q)^2(1 + q^2)^2 = 225 \\ \frac{1 + q^4}{(1 + q)^2(1 + q^2)} = \frac{85}{225} = \frac{17}{45} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 + q^4}{(1 + q)^2(1 + q^2)} = \frac{17}{45} &\Leftrightarrow 45 + 45q^4 = (17 + 17q^2)(1 + 2q + q^2) \\ &\Leftrightarrow 45 + 45q^4 = 17 + 34q + 17q^2 + 17q^2 + 34q^3 + 17q^4 \\ &\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \\ &\Leftrightarrow 28\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 34\left(q + \frac{1}{q}\right) - 34 = 0. \end{aligned}$$

Đặt  $q + \frac{1}{q} = t$ , với  $|t| \geq 2$ , ta có  $28t^2 - 34t - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ t = -\frac{9}{7} \text{ (loại)} \end{cases}$

Ta có  $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2. \end{cases}$

— Với  $q = 2$  thì  $u_1 = \frac{15}{(1 + q)(1 + q^2)} = 1$ .

— Với  $q = \frac{1}{2}$  thì  $u_1 = \frac{15}{(1 + q)(1 + q^2)} = 8$ .

□

**BÀI 9.** Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

**Lời giải.**

Gọi 3 số cần tìm là  $x, y, z$ . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x + z = 2y \\ (x + 2)(z + 9) = (y + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x + z = 14 \\ (x + 2)(z + 9) = 100. \end{cases} \quad (1)$$

$$(x + 2)(z + 9) = 100. \quad (2)$$

Từ (1)  $\Rightarrow z = 14 - x$  (3). Thay vào (2) ta được phương trình

$$(x + 2)(23 - x) = 100 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 18. \end{cases}$$

— Với  $x = 3 \Rightarrow z = 11$ .

— Với  $x = 18 \Rightarrow z = -4$ .

Vậy bộ ba số cần tìm là  $(3; 7; 11)$  và  $(18; 7; -4)$ .

□

**BÀI 10.** Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

**Lời giải.**

Theo bài ra, ta có cấp số nhân có  $u_1 = 243, u_6 = 1$ . Do  $u_6 = u_1 \cdot q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{u_6}{u_1} = \frac{1}{243} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$ .

Vậy 4 số cần tìm là  $u_2 = u_1 \cdot q = 81, u_3 = u_2 \cdot q = 27, u_4 = u_3 \cdot q = 9, u_5 = u_4 \cdot q = 3$ .

□

**BÀI 11.** Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

**Lời giải.**

Gọi 3 số cần tìm là  $x, y, z$ . Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 114 & (1) \\ xz = y^2. & (2) \end{cases}$$

Lại có cấp số cộng có  $u_1 = x, u_4 = y, u_{25} = z$ . Gọi  $d$  là công sai của cấp số cộng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{25} = u_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3d & (3) \\ z = x + 24d. & (4) \end{cases}$$

Thay (3), (4) vào (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} x + x + 3d + x + 24d = 114 \\ x(x + 24d) = (x + 3d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 9d = 38 & (5) \\ d(2x - d) = 0. & (6) \end{cases}$$

Từ (6)  $\Rightarrow d = 0$  hoặc  $d = 2x$ . Thay vào (5)

— Với  $d = 0 \Rightarrow x = 38 \Rightarrow y = z = 38$ , loại do điều kiện ba số khác nhau.

— Với  $d = 2x \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow y = 14, z = 98$ .

Vậy các số cần tìm là (2; 14; 98). □

**BÀI 12.** Chứng minh rằng với mọi  $m$  thì phương trình  $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$  luôn có ba nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} & x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^3 - 1) - (m^2 + 3)(x^2 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 1)[x^2 - (m^2 + 2)x + 1] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - (m^2 + 2)x + 1 = 0. \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (\*) có  $\Delta = (m^2 + 2)^2 - 4 \cdot 1 = m^2(m^2 + 4) \geq 0 \forall m$ . Vậy phương trình (\*) luôn có hai nghiệm  $x_1, x_2$  và  $x_1 \cdot x_2 = 1$ . Suy ra phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm thỏa mãn  $x_1 \cdot x_2 = 1$  và  $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = x_3^2$ . Vậy phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân. □



PHẦN



---

# HÌNH HỌC



## PHÉP BIẾN HÌNH

## BÀI 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

## A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## ① Định nghĩa

Phép biến hình là một quy tắc để ứng với mỗi điểm  $M$  thuộc mặt phẳng, ta xác định được một điểm duy nhất  $M'$  thuộc mặt phẳng ấy. Điểm  $M'$  gọi là ảnh của điểm  $M$  qua phép biến hình đó.

## ② Ký hiệu và thuật ngữ

Cho phép biến hình  $F$ .

— Nếu  $M'$  là ảnh của điểm  $M$  qua  $F$  thì ta viết  $M' = F(M)$ . Ta nói phép biến hình  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$ .

— Nếu  $H$  là một hình nào đó thì  $H' = \{M' | M' = F(M), M \in H\}$  được gọi là ảnh của hình  $H$  qua  $F$ . Ký hiệu là  $H' = F(H)$ .

## ③ Phép dời hình

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép dời hình biến

- ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- đường thẳng thành đường thẳng.
- tia thành tia.
- đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu.
- góc thành góc bằng góc ban đầu.

## BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

## A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

## ① Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Trong mặt phẳng cho vectơ  $\vec{v}$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$  được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$ .

Phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$  thường được ký hiệu là  $T_{\vec{v}}$ ,  $\vec{v}$  được gọi là *vectơ tịnh tiến*.

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

## ② Tính chất

**Tính chất 1.** Nếu  $T_{\vec{v}}(M) = M'$ ,  $T_{\vec{v}}(N) = N'$  thì  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$  và từ đó suy ra  $M'N' = MN$ .

**Tính chất 2.** Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

③ Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho vectơ  $\vec{v} = (a; b)$ . Với mỗi điểm  $M(x; y)$  ta có  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$ . Khi đó  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$ . Từ đó suy ra  $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ .

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức tọa độ* của phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$ .

**B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP**

**DẠNG 2.1. Xác định ảnh của một hình qua phép tịnh tiến**

**Phương pháp giải:** Gọi  $H'$  là ảnh của hình  $H$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v} = (a; b)$ . Với mọi điểm  $M(x; y)$  bất kì thuộc  $H$ , ta có  $T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \in H'$ .

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases} \Rightarrow M(x' - a; y' - b)$$

Thay tọa độ điểm  $M$  vào phương trình biểu diễn hình  $H$  ta thu được phương trình biểu diễn hình  $H'$ .

**1 VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{v} = (2; 1)$  và điểm  $M(3; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho

①  $A = T_{\vec{v}}(M)$ .

②  $M = T_{\vec{v}}(A)$ .

**Lời giải.**

① Giả sử  $A(x; y)$  ta có  $A = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \\ y = 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(5; 3)$ .

② Gọi  $A(x; y)$ , ta có  $M = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} 3 = x + 2 \\ 2 = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$ .

□

**VÍ DỤ 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$ . Hãy tìm ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v}$ .

①  $d: 2x - 3y + 12 = 0$  và  $\vec{v} = (4; -3)$ .

②  $d: 2x + y - 4 = 0$  và  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ,  $A(3; 1)$ ,  $B(-1; 8)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $d'$  là ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v}$ ;  $M(x; y)$  là một điểm bất kì trên đường thẳng  $d$  và  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ . Khi đó

①  $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' + 3 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 4; y' + 3)$ . Mà điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  nên

$$2(x' - 4) - 3(y' + 3) + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 5 = 0.$$

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $2x - 3y - 5 = 0$ .

② Ta có  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-4; 7)$ . Do đó  $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' - 7 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 4; y' - 7)$ .

Mà điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  nên

$$2(x' + 4) + y' - 7 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 3 = 0$$

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $2x + y - 3 = 0$ .

□

**VÍ DỤ 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C)$ . Hãy tìm ảnh của đường tròn  $(C)$  qua phép tịnh tiến  $\vec{v}$ , biết

①  $(C): (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 6$  và  $\vec{v} = (3; 2)$ .

②  $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$  và  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  với  $A(-1; 1)$ ,  $B(1; -2)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $(C')$  là ảnh của đường tròn  $(C)$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v}$ ,  $M(x; y)$  là một điểm bất kì trên đường tròn  $(C)$  và  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ . Khi đó

①  $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 3; y' - 2)$ . Mà điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  nên

$$(x' - 3 - 4)^2 + (y' - 2 + 3)^2 = 6 \Leftrightarrow (x' - 7)^2 + (y' + 1)^2 = 6.$$

Hay phương trình đường tròn  $(C')$  là  $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 6$ .

② Ta có  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2; -3)$  và  $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 2; y' + 3)$ . Mà điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  nên

$$(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 4(x' - 2) - 4(y' + 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2y' + 16 = 0$$

Hay phương trình đường tròn  $(C')$  là  $x^2 + y^2 + 2y + 16 = 0$ .

□

**VÍ DỤ 4.** Tìm phương trình ảnh của các đường sau qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .

① Elip  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  và  $\vec{v} = (-3; 4)$ .

② Parabol  $(P): y = x^2 - 2x$ , và  $\vec{v} = (1; 1)$ .

**Lời giải.**

① Gọi  $(E')$  là ảnh của elip  $(E)$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v}$ ,  $M(x; y)$  là một điểm bất kì trên elip  $(E)$  và  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ . Khi đó

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 3; y' - 4).$$

Mà điểm  $M$  thuộc đường elip  $(E)$  nên  $\frac{(x' + 3)^2}{9} + \frac{(y' - 4)^2}{4} = 1$ .

Hay phương trình đường elip  $(E')$  là  $\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$ .

② Gọi  $(P')$  là ảnh của parabol  $(P)$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v}$ ,  $M(x; y)$  là một điểm bất kì trên parabol  $(P)$  và  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ . Khi đó

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 1; y' - 1).$$

Mà điểm  $M$  thuộc parabol  $(P)$  nên  $y' - 1 = (x' - 1)^2 - 2(x' - 1) \Leftrightarrow y' = x'^2 - 4x' + 4$ .

Hay phương trình parabol  $(P')$  là  $y = x^2 - 4x + 4$ .

□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{v} = (-1; 3)$ , điểm  $M(-1; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho

①  $A = T_{2\vec{v}}(M)$

②  $M = T_{-\vec{v}}(A)$

**Lời giải.**

Giả sử  $A(x; y)$ .

① Ta có  $2\vec{v} = (-2; 6)$ . Ta có

$$A = T_{2\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 1 = -2 \\ y = 4 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 7).$$

② Ta có  $-\vec{v} = (1; -3)$ . Ta có

$$M = T_{-\vec{v}}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = x + 1 \\ 4 = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 7).$$

□

**BÀI 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(3; 5)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $\vec{v} = (-1; 2)$ , đường thẳng  $d$  và đường tròn  $(C)$  có phương trình  $d: x - 2y + 3 = 0$ ,  $(C): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

① Tìm ảnh của các điểm  $A'$ ,  $B'$  theo thứ tự là ảnh của  $A$ ,  $B$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .

② Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho  $A$  là ảnh của  $C$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .

③ Tìm phương trình đường thẳng  $d'$ , đường tròn  $(C')$  lần lượt là ảnh của  $d$ ,  $(C)$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $\begin{cases} x_{A'} = 3 - 1 = 2 \\ y_{A'} = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7)$  và  $\begin{cases} x_{B'} = -1 - 1 = -2 \\ y_{B'} = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2; 3).$

② Ta có  $A = T_{\vec{v}}(C) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x_C - 1 \\ 5 = y_C + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(4; 3).$

③ Gọi  $M(x; y)$  là một điểm bất kì trên đường thẳng  $d$  và  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ . Ta có

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 1; y' - 2)$$

Mà điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  nên  $x' + 1 - 2(y' - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 8 = 0$ .

Hay phương trình đường thẳng  $d'$  là  $x - 2y + 8 = 0$ .

Gọi  $N(x; y)$  là một điểm bất kì trên đường tròn  $(C)$  và  $N'(x'; y') = T_{\vec{v}}(N)$ . Ta có

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow N(x' + 1; y' - 2)$$

Mà điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(C)$  nên  $(x' + 1 - 2)^2 + (y' - 2 - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' - 5)^2 = 25$ .

Hay phương trình đường tròn  $(C')$  là  $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$ .

□

**BÀI 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có ảnh qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (2; 5)$  là tam giác  $A'B'C'$  và tam giác  $A'B'C'$  có trọng tâm là  $G'(-3; 4)$ , biết rằng  $A(-1; 6)$ ,  $B(3; 4)$ . Tìm tọa độ các điểm  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

**Lời giải.**

Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Khi đó ta có

$$+) A' = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 + 2 = 1 \\ y_{A'} = 6 + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 11).$$

$$+) B' = T_{\vec{v}}(B) \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 3 + 2 = 5 \\ y_{B'} = 4 + 5 = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(5; 9).$$

+)  $G'$  là trọng tâm tam giác  $A'B'C'$  nên

$$\begin{cases} x_{C'} = 3x_{G'} - x_{A'} - x_{B'} \\ y_{C'} = 3y_{G'} - y_{A'} - y_{B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = -9 - 1 - 5 = -15 \\ y_{C'} = 12 - 11 - 9 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = -15 \\ y_{C'} = -8 \end{cases} \Rightarrow C'(-15; -8).$$

□

**BÀI 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy xác định tọa độ điểm  $M$  trên trục hoành sao cho phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (-2; 3)$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  nằm trên trục tung.

**Lời giải.**

Gọi  $M(x; 0)$  và  $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$ . Ta có  $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = 0 + 3 \end{cases} \Rightarrow M'(x - 2; 3).$

Do điểm  $M'$  thuộc trục  $Oy$  nên  $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ . Do đó  $M(2; 0)$ .

□



### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$ . Hãy tìm ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$  trong các trường hợp sau:

- ①  $d: 2x - 3y + 5 = 0, \vec{v} = (3; 2).$
- ②  $d: 3x - y + 2 = 0, \vec{v} = (-4; 2).$
- ③  $d: 3x + 4y - 5 = 0, \vec{v} = \overrightarrow{AB}, A(0; 2), B(2; 3).$
- ④  $d: x + 3y - 2 = 0, \vec{v} = 2\overrightarrow{AB}, A(-2; 3), B(0, 2).$
- ⑤  $d$  cắt  $Ox, Oy$  tại  $A(-1; 0), B(0; 5)$  và  $\vec{v} = (2; 2).$

**BÀI 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C)$ . Hãy tìm ảnh của đường tròn  $(C)$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$  trong các trường hợp sau:

- ①  $(C): (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16, \vec{v} = (2; -3).$
- ②  $(C): (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25, \vec{v} = \overrightarrow{AB}, A(-1; 1), B(1; -2).$
- ③  $(C): (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9, \vec{v} = -\overrightarrow{CB}, B(2; -3), C(-1; 5)$
- ④  $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 8 = 0, \vec{v} = (5; -2).$
- ⑤  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, \vec{v} = (-2; 3)$
- ⑥  $(C): x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0, \vec{v} = 3\overrightarrow{BC}, B(1; -2), C(-1; -5).$

**BÀI 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , Cho  $A(1; 3), B(-2; 2), C(3; -4)$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Gọi  $(C)$  là đường tròn đi qua ba điểm  $A, B, C$ . Hãy xác định

- ①  $A' = T_{\overrightarrow{BC}}(A)$  và  $B' = T_{\overrightarrow{AC}}(B)$
- ②  $A_1 = T_{\overrightarrow{CG}}(A)$  và  $G_1 = T_{\overrightarrow{AM}}(G)$
- ③  $d' = T_{\overrightarrow{BM}}(d)$  với  $d$  là đường thẳng đi qua  $A, M$ .

### DẠNG 2.2. Xác định phép tịnh tiến khi biết ảnh và tạo ảnh

*Phương pháp giải:* Giả sử  $M'(x'; y')$  là ảnh của  $M(x; y)$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v} = (a; b)$ . Khi đó, ta có  $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$  và tọa độ  $\vec{v}$  được xác định như sau

$$\begin{cases} a = x' - x \\ b = y' - y \end{cases}.$$



### VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho một phép tịnh tiến biến đường tròn  $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$  thành đường tròn  $(C'): (x-10)^2 + (y+5)^2 = 16$ . Hãy xác định phép tịnh tiến đó.

**Lời giải.**

Từ phương trình đường tròn  $(C)$  và  $(C')$ , ta suy ra tâm của hai đường tròn đó lần lượt là  $I(-1; 2)$  và  $I'(10; -5)$ . Ta có  $T_{\vec{v}}(C) = (C') \Rightarrow T_{\vec{v}}(I) = I' \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{II'} = (11; -7)$ . □

**VÍ DỤ 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 2x - 3y + 3 = 0$  và  $d': 2x - 3y - 5 = 0$ . Tìm tọa độ của  $\vec{v}$  có giá vuông góc với đường thẳng  $d$  để  $d'$  là ảnh của  $d$  qua  $T_{\vec{v}}$ .

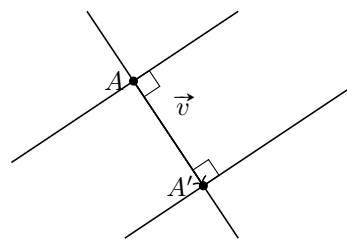
**Lời giải.**

Chọn điểm  $A(0; 1) \in d$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $d$   
 $\Rightarrow \Delta: 3x + 2y - 2 = 0$ .

Gọi  $A' = d' \cap \Delta$ . Tọa độ điểm  $A'$  thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{13} \\ y = -\frac{11}{13} \end{cases} \Rightarrow A' \left( \frac{16}{13}; -\frac{11}{13} \right).$$

Vậy  $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \left( \frac{16}{13}; -\frac{24}{13} \right)$ .



**VÍ DỤ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là  $d: 3x - 5y + 3 = 0$  và  $d': 3x - 5y + 24 = 0$ . Tìm  $\vec{v}$ , biết  $|\vec{v}| = \sqrt{13}$  và  $T_{\vec{v}}(d) = d'$ . □

**Lời giải.**

Chọn điểm  $A(-1; 0) \in d$ . Gọi  $A'(-8 + 5t; 3t) \in d'$  là ảnh của  $A$  qua  $T_{\vec{v}}$ . Khi đó,  $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = (-7 + 5t; 3t)$ .

Ta có  $|\vec{v}| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(-7 + 5t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow 34t^2 - 70t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{18}{17} \end{cases}$

Với  $t = 1$ , ta có  $\vec{v} = (-2; 3)$ .

Với  $t = \frac{18}{17}$ , ta có  $\vec{v} = \left( -\frac{29}{17}; \frac{54}{17} \right)$ . □

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 3x - y - 9 = 0$ .

- ① Tìm phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$  có phương song song với trục  $Ox$ , biến  $d$  thành đường thẳng  $d'$  đi qua gốc tọa độ. Khi đó hãy viết phương trình đường thẳng  $d'$ .
- ② Tìm phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{u}$  có giá song song với trục  $Oy$ , biến  $d$  thành  $d''$  đi qua điểm  $A(1; 1)$ .

**Lời giải.**

①  $Ox$  cắt  $d$  và  $d'$  lần lượt tại  $A(3; 0)$  và  $O(0; 0)$ . Ta có  $T_{\vec{v}}(A) = O \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AO} = (-3; 0)$

② Gọi  $\Delta$  là đường thẳng đi qua  $A(1; 1)$  và song song với  $Oy \Rightarrow \Delta: x = 1$ . Gọi  $B = \Delta \cap d \Rightarrow B \left( \frac{10}{3}; 1 \right)$ .

Ta có  $T_{\vec{v}}(B) = A \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{BA} = \left( -\frac{7}{3}; 0 \right)$

□

**BÀI 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$  biến điểm  $M(3; -1)$  thành một điểm trên đường thẳng  $d: x - y - 9 = 0$ . Tìm tọa độ  $\vec{v}$ , biết rằng  $|\vec{v}| = 5$ .

**Lời giải.**

Gọi  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$ . Ta có  $M' \in d \Rightarrow M(m, m-9)$ .

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{MM'} = (m-3; m-8).$$

$$|\vec{v}| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(m-3)^2 + (m-8)^2} = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 22m + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 8 \end{cases}$$

Với  $m = 3$ , ta có  $\vec{v} = (0; -5)$ .

Với  $m = 8$ , ta có  $\vec{v} = (5; 0)$ . □

**BÀI 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có phương trình chứa cạnh  $AB$  là  $3x - 2y + 3 = 0$  và chứa cạnh  $CD$  là  $3x - 2y - 6 = 0$ . Tìm tọa độ  $\vec{v}$ , biết rằng  $CD = T_{\vec{v}}(AB)$  và  $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải.**

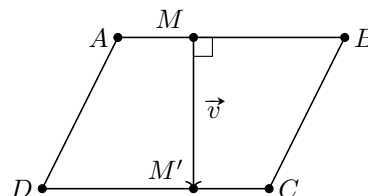
Chọn điểm  $M(-1; 0)$  thuộc đường thẳng chứa cạnh  $AB$  và  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$ .

Gọi  $\Delta$  là đường thẳng chứa  $MM' \Rightarrow \Delta \perp AB$  (do  $MM' \perp AB$ ) và đi qua  $M$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $\Delta$ :  $2x + 3y + 2 = 0$ .

$$\text{Ta có } M' = \Delta \cap CD \Rightarrow M' \left( \frac{14}{13}; -\frac{18}{13} \right)$$

$$\text{Vậy } \vec{v} = \overrightarrow{MM'} = \left( \frac{27}{13}; -\frac{18}{13} \right).$$



□

### **3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

**BÀI 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy xác định phép tịnh tiến theo  $\vec{v}$  cùng phương với trục hoành biến đường thẳng  $d: x - 4y + 4 = 0$  thành đường thẳng  $d'$  qua  $A(1; -3)$ .

**BÀI 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $d, d'$  lần lượt có phương trình là  $d: 3x - y - 7 = 0$ ,  $d': 3x - y + 13 = 0$  và vectơ  $\vec{u} = (1; -1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{v}$  trong phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$  biến  $d$  thành  $d'$ , biết rằng vectơ  $\vec{v}$  và  $\vec{u}$  cùng phương.

**BÀI 6.** Cho  $(P): y = x^2 - 4x + 7$  và  $(P'): y = x^2$ . Tìm phép tịnh tiến biến  $(P)$  thành  $(P')$ .

#### **DẠNG 2.3. Các bài toán ứng dụng của phép tịnh tiến**

##### **① Chứng minh hoặc xác định các yếu tố hình học**

- Từ giả thiết tìm hai điểm cố định phù hợp để xây dựng một vectơ cố định.
- Xác định một phép tịnh tiến phù hợp theo vectơ cố định vừa tìm được.
- Dùng tính chất của phép tịnh tiến để chứng minh các tính chất hình học hoặc xác định các yếu tố của hình.

##### **② Tìm tập hợp điểm $M$ thỏa mãn tính chất cho trước (Toán quỹ tích)**

- Chỉ ra phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$  biến điểm  $E$  nào đó thành  $M$  mà quỹ tích điểm  $E$  đã biết hoặc dễ tìm hơn.

$$\begin{aligned} T_{\vec{v}} : E &\mapsto M \\ (H) &\mapsto (H') \end{aligned}$$

- Xác định hình  $(H)$  là quỹ tích của điểm  $E$ .
- Khi đó tập hợp các điểm  $M$  là hình  $(H')$  với  $(H')$  là ảnh của  $(H)$  qua phép tịnh tiến theo vectơ  $\vec{v}$ .

**Điều kiện áp dụng:** Bài toán có yếu tố song song và bằng nhau, có vectơ, ...

**1** VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 150^\circ$ ,  $\widehat{D} = 90^\circ$ ,  $CD = 12$  và  $AB = 6\sqrt{3}$ . Tính độ dài các cạnh  $AD$  và  $BC$ .

**Lời giải.**

Xét  $T_{\vec{BC}}(A) = M \Rightarrow ABCM$  là hình bình hành.

$$\Rightarrow \widehat{BCM} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 30^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BCD} = 360^\circ - (\widehat{DAB} + \widehat{ADC} + \widehat{ABC}) = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MCD} = 30^\circ.$$

Theo định lý cosin cho  $\triangle MDC$ :

$$MD^2 = MC^2 + DC^2 - 2MC \cdot DC \cdot \cos 30^\circ = 36 \Rightarrow MD = 6.$$

$$MD = \frac{1}{2}CD \text{ và } MC = MD\sqrt{3} \Rightarrow \triangle MDC \text{ là nửa tam giác đều.}$$

$$\Rightarrow \widehat{DMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MDA} = 30^\circ.$$

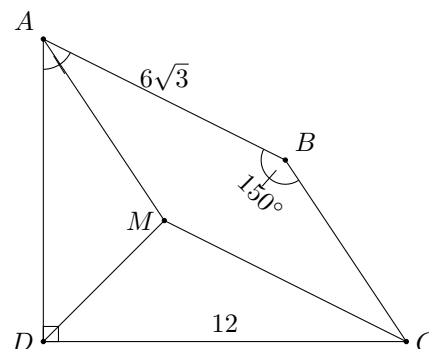
$$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MAD} = \widehat{MAB} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AMD \text{ cân tại } M \Rightarrow BC = MA = MD = 6.$$

$$\text{Theo định lý sin cho } \triangle AMD: \frac{AD}{\sin \widehat{AMD}} = \frac{DM}{\sin \widehat{MAD}}$$

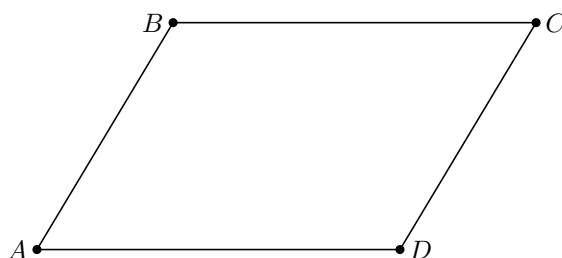
$$\Leftrightarrow AD = \frac{DM \cdot \sin \widehat{AMD}}{\sin \widehat{MAD}} = \frac{6 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 6\sqrt{3}.$$

□



**VÍ DỤ 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $AB$  cố định,  $D$  di động trên đường thẳng  $d$  cố định. Tìm tập hợp điểm  $C$ .

**Lời giải.**



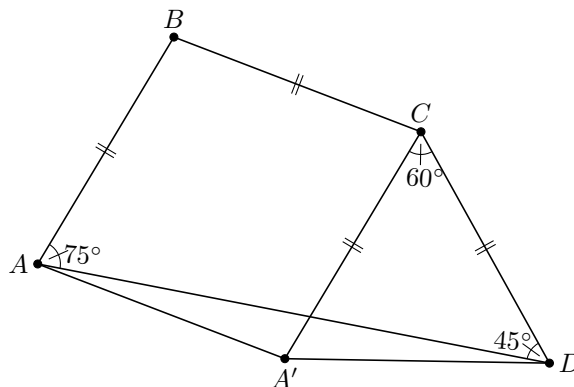
$$ABCD \text{ là hình bình hành } \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}.$$

Suy ra phép tịnh tiến theo  $\vec{AB}$  biến  $D$  thành  $C$ , mà điểm  $D$  di động trên đường thẳng  $d$  cố định, do đó  $C$  di động trên  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép tịnh tiến theo  $\vec{AB}$ . □

**2** BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$  có  $AB = BC = CD = a$ ,  $\widehat{BAD} = 75^\circ$ ,  $\widehat{ADC} = 45^\circ$ . Tính  $AD$ .

**Lời giải.**



Xét  $T_{\vec{BC}}(A) = A'$ . Khi đó tứ giác  $ABCA'$  là hình bình hành.

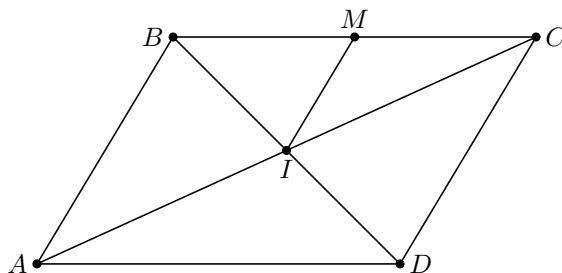
Suy ra  $\widehat{CBA} + \widehat{A'CB} = 180^\circ$  và  $AA' = CA' = BA = CD = a \Rightarrow \triangle CA'D$  cân tại  $C$ .

Ta có:  $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} + \widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{DCB} = 240^\circ \Rightarrow \widehat{A'CD} = 60^\circ \Rightarrow \Delta CA'D$  đều.  
 $\Rightarrow \widehat{A'DA} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AA'D} = 150^\circ$  ( $\Delta A'AD$  cân tại  $A'$ ).

Áp dụng định lý cosin cho tam giác  $A'AD$ :  $AD^2 = A'A^2 + A'D^2 - 2 \cdot A'A \cdot A'D \cdot \cos \widehat{AA'D} = 2a^2 + \sqrt{3}a^2$ .  
 $\Rightarrow AD = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .  $\square$

**BÀI 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , hai điểm  $A, B$  cố định, tâm  $I$  của hình bình hành di động trên đường tròn  $(C)$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $M$  của cạnh  $BC$ .

**Lời giải.**



Ta có:  $IM$  là đường trung bình của  $\Delta CAB \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

Suy ra:  $M = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(I)$  mà  $I$  di động trên đường tròn  $(C)$ , do đó  $M$  di động trên đường tròn  $(C')$ , là ảnh của  $(C)$  qua phép tịnh tiến theo  $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .  $\square$

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

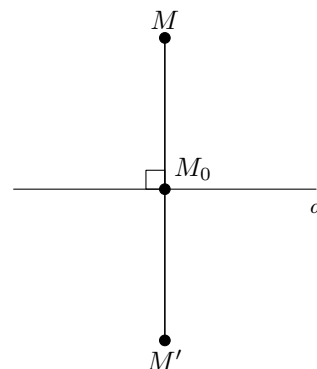
**BÀI 3.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  sao cho  $C$  nằm trong tam giác  $MBD$ . Giả sử  $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$ . Chứng minh:  $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$ .

**BÀI 4.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và đường tròn  $(C)$  tâm  $O$  bán kính  $R$  nằm về một phía của đường thẳng  $AB$ . Lấy điểm  $M$  trên  $(C)$  rồi dựng hình bình hành  $ABMM'$ . Tìm tập hợp các điểm  $M'$  khi  $M$  di động trên  $(C)$ .

## BÀI 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC (BÀI ĐỌC THÊM)

### A ĐỊNH NGHĨA

- Điểm  $M'$  được gọi là đối xứng với điểm  $M$  qua đường thẳng  $d$  nếu  $d$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $MM'$ . Khi điểm  $M$  nằm trên  $d$  thì ta xem  $M$  đối xứng với chính nó qua đường thẳng  $d$ .
- Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $d$  được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng  $d$ , hay gọi tắt là phép đối xứng trục.
- Đường thẳng  $d$  được gọi là trục đối xứng. Kí hiệu  $D_d$ .  
 Như vậy  $M' = D_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$ , với  $M_0$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $d$ .



### B BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , với mỗi điểm  $M(x_M; y_M)$ , gọi  $M'(x_{M'}; y_{M'}) = D_d(M)$ .

— Nếu chọn  $d$  là trục  $Ox$  thì ta có  $\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = -y_M \end{cases}$ .

— Nếu chọn  $d$  là trục  $Oy$  thì ta có  $\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}$ .

## 📍 TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục là một phép dời hình nên có đầy đủ tính chất của phép dời hình:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho;
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho;
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

## 📍 TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Đường thẳng  $d$  gọi là trục đối xứng của hình  $H$  nếu phép đối xứng trục  $D_d$  biến hình  $H$  thành chính nó, tức là  $H = D_d(H)$ .

# BÀI 4. PHÉP QUAY

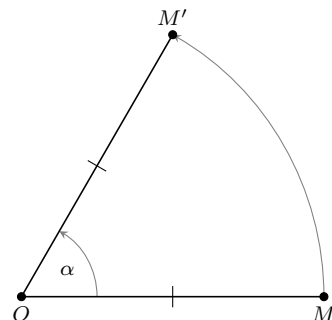
## 📍 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

### ① Định nghĩa

Cho điểm  $O$  và góc lượng giác  $\alpha$ . Phép biến hình biến  $O$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $O$  thành điểm  $M'$  sao cho  $OM' = OM$  và góc lượng giác  $(OM; OM')$  bằng  $\alpha$  được gọi là phép quay tâm  $O$  góc quay  $\alpha$ .

Điểm  $O$  gọi là tâm quay,  $\alpha$  gọi là góc quay. Phép quay tâm  $O$  góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $Q_{(O; \alpha)}$ .

$$Q_{(O; \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (OM, OM') = \alpha \\ OM = OM' \end{cases}$$



- Phép quay nào biến lá cờ ( $C$ ) thành lá cờ ( $C'$ ):
- Phép quay nào biến lá cờ ( $C'$ ) thành lá cờ ( $C$ ):

### ② Tính chất

Phép tịnh tiến là phép biến hình biến:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

⚠️ Giả sử phép quay tâm  $O$  góc quay  $\alpha$  biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$ . Khi đó:

- Nếu  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  thì góc giữa  $d$  và  $d'$  bằng  $\alpha$ .
- Nếu  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  thì góc giữa  $d$  và  $d'$  bằng  $\pi - \alpha$ .

### ③ Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### DẠNG 4.1. Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép quay

**Phương pháp xác định ảnh của một điểm qua phép quay**

**① Phương pháp 1.** Sử dụng định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , gọi  $M'(x_M; y_M)$  là ảnh của  $M(x_M; y_M)$  qua phép quay tâm  $I(a; b)$ , góc quay  $\alpha$ . Khi đó:

$$M'(x_M; y_M) = Q_{(I; \alpha)}(M) \Rightarrow \begin{cases} IM' = IM & (1) \\ \widehat{MIM'} = \alpha. & (2) \end{cases}$$

Từ (1), sử dụng công thức tính độ dài, sẽ tìm được phương trình thứ nhất theo hai ẩn.

Từ (2), sử dụng định lý hàm số  $\cos$ , sẽ tìm được phương trình thứ hai theo hai ẩn.

Giải hệ phương trình này tìm được  $x_M, y_M$ , từ đó suy ra tọa độ điểm  $M'(x_M; y_M)$ .

**⚠** Chú ý góc của phép quay để chọn được tọa độ điểm phù hợp.

**② Phương pháp 2.** Sử dụng công thức tọa độ

$$M'(x'_M; y'_M) = Q_{(I; \alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'_M = (x_M - a) \cos \alpha - (y_M - b) \sin \alpha + a \\ y'_M = (x_M - a) \sin \alpha + (y_M - b) \cos \alpha + b. \end{cases}$$

**③ Phương pháp 3.** Trong các trường hợp đơn giản sử dụng hệ trục tọa độ, thực hiện phép quay tìm ngay được tọa độ điểm ảnh.

## 1 Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm tọa độ  $A', B'$  lần lượt là ảnh của  $A, B$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ . Biết

①  $A(1; 0)$ .

②  $B(0; -2)$ .

**Lời giải.**

**① Xét điểm  $A(1; 0)$ .**

Gọi  $A'$  có tọa độ là  $(x'; y')$ . Khi đó

$$A'(x'; y') = Q_{(O; 90^\circ)}(A) \Rightarrow \begin{cases} OA = OA' & (1) \\ \widehat{AOA'} = 90^\circ. & (2) \end{cases}$$

Từ (1), suy ra  $(x')^2 + (y')^2 = 1$ .

Từ (2), suy ra  $1 \cdot x' + 0 \cdot y' = 0$ .

Vậy, thu được  $(x'; y') = (0; 1)$  hoặc  $(x'; y') = (0; -1)$ . Vì góc quay dương nên thu được điểm  $A'(0; 1)$ .

**② Xét điểm  $B(0; -2)$ .**

Gọi  $B'$  có tọa độ là  $(x'; y')$ . Khi đó

$$\begin{cases} x' = (x_B - x_O) \cos 90^\circ - (y_B - y_O) \sin 90^\circ + x_O \\ y' = (x_B - x_O) \sin 90^\circ + (y_B - y_O) \cos 90^\circ + y_O. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B'(2; 0).$$

**⚠** Biểu diễn điểm  $A, B$  trên hệ trục tọa độ, có thể suy ra ngay tọa độ điểm  $A'$  và  $B'$ .

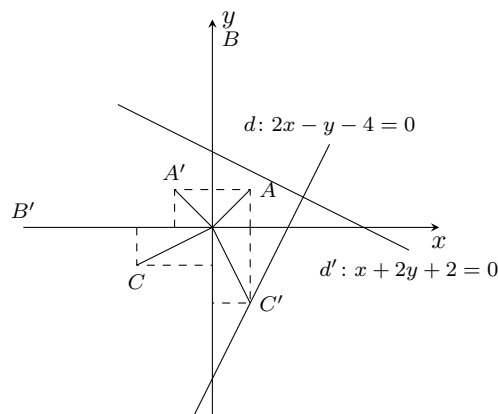
□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1)$ ,  $B(0; 5)$ ,  $C(-2; -1)$  và đường thẳng  $d: 2x - y - 4 = 0$ . Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác  $A'B'C'$  và phương trình đường thẳng  $d'$  theo thứ tự là ảnh của tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ .

**Lời giải.**

- ① Phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến  $A(1;1)$  thành  $A'(-1;1)$ , biến  $B(0;5)$  thành  $B'(-5;0)$ , biến  $C(-2;-1)$  thành  $C'(1;-2)$ .
- ② Phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến đường thẳng  $d: 2x - y - 4 = 0$  thành đường thẳng  $d': x + 2y + 2 = 0$ .



□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $A(2;0)$  và đường thẳng  $d: x + y - 2 = 0$ . Tìm ảnh của  $A$  và  $d$  qua phép quay tâm  $O$  góc  $90^\circ$ .

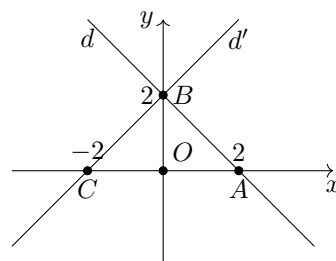
**Lời giải.**

Ta có:  $Q_{(O, 90^\circ)}(A) = B$  với  $B(0;2)$ .

$Q_{(O, 90^\circ)}(d) = d'$  với  $d': x - y + 2 = 0$ .

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua  $Q_{(O, 90^\circ)}$ . Vì  $A, B$  thuộc  $d$  nên  $B, C$  thuộc  $d'$ .

Phương trình đường thẳng  $d': x - y + 2 = 0$ .



□

#### 📁 DẠNG 4.2. Tìm phương trình ảnh của một đường tròn qua phép quay

##### **Phương pháp xác định ảnh của một đường tròn qua phép quay**

Vì phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên để tìm phương trình ảnh của đường tròn qua phép quay, chúng ta thực hiện qua ba bước sau đây:

- ① Xác định tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của đường tròn tạo ảnh từ phương trình đường tròn đã cho.
- ② Tìm tọa độ tâm  $I'$  là ảnh của tâm  $I$  qua phép quay.
- ③ Viết phương trình đường tròn ảnh với tọa độ tâm  $I'$  và bán kính  $R$ .

### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy tìm ảnh của đường tròn  $(C')$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\alpha$  trong các trường hợp sau đây:

- ①  $(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad \alpha = 90^\circ$ .
- ②  $(C): x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0, \quad \alpha = 90^\circ$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có:  
+ Tâm  $I(2;1)$ ,  $R = 1$ . Suy ra:  $I'(-1;2)$ ,  $R' = R = 1$ .  
+  $(C'): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ .
- ② Ta có:  
+ Tâm  $I(2;0)$ ,  $R = 3$ . Suy ra:  $I'(0;2)$ ,  $R' = R = 3$ .  
+  $(C'): x^2 + (y - 2)^2 = 9$ .

□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy tìm ảnh của đường tròn  $(C')$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\alpha$  trong các trường hợp sau đây:

①  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1, \quad \alpha = -90^\circ.$

②  $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad \alpha = 60^\circ.$

**Lời giải.**

① Ta có:

+ Tâm  $I(1; -2), R = \sqrt{6}$ . Suy ra:  $I'(-2; -1),$   
 $R' = R = \sqrt{6}.$   
 +  $(C'): (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 6.$

② Ta có:

+ Tâm  $I(0; 1), R = 1$ . Suy ra:  $I'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), R' =$   
 $R = 1.$   
 +  $(C'): \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1.$

□

## 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy tìm ảnh của đường tròn  $(C')$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\alpha$  trong các trường hợp sau đây:

①  $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0, \quad \alpha = -30^\circ.$

②  $(C): x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0, \quad \alpha = 90^\circ.$

**BÀI 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy tìm ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $\alpha$  trong các trường hợp sau đây

①  $d: x + y - 2 = 0, \quad \alpha = 90^\circ;$

②  $d: x - 3y + 11 = 0, \quad \alpha = -90^\circ;$

③  $d: x - 3y + 5 = 0, \quad \alpha = 60^\circ;$

④  $d: 2x - y + 6 = 0, \quad \alpha = 45^\circ.$

**Lời giải.**

① Lấy  $M(0; 2), N(2; 0) \in d.$

Gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}.$

Khi đó  $\begin{cases} x_{M'} = 0 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ = -2 \\ y_{M'} = 0 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ = 0 \end{cases}$  và  $\begin{cases} x_{N'} = 2 \cdot \cos 90^\circ - 0 \cdot \sin 90^\circ = 0 \\ y_{N'} = 2 \cdot \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ = 2. \end{cases}$

Suy ra  $M'(-2; 0), N'(0; 2).$

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$ , khi đó  $d'$  đi qua  $M', N'.$

Ta có  $\overrightarrow{M'N'} = (2; 2) = 2(1; 1).$

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $1(x - 0) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0.$

② Lấy  $M(-11; 0), N(1; 4) \in d.$

Gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua phép quay  $Q_{(O, -90^\circ)}.$

Khi đó  $\begin{cases} x_{M'} = -11 \cdot \cos(-90^\circ) - 0 \cdot \sin(-90^\circ) = 0 \\ y_{M'} = -11 \cdot \sin(-90^\circ) + 0 \cdot \cos(-90^\circ) = 11 \end{cases}$  và  $\begin{cases} x_{N'} = 1 \cdot \cos(-90^\circ) - 4 \cdot \sin(-90^\circ) = 4 \\ y_{N'} = 1 \cdot \sin(-90^\circ) + 4 \cdot \cos(-90^\circ) = -1. \end{cases}$

Suy ra  $M'(0; 11), N'(4; -1).$

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, -90^\circ)}$ , khi đó  $d'$  đi qua  $M', N'.$

Ta có  $\overrightarrow{M'N'} = (4; -12) = 4(1; -3).$

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $3(x - 0) + 1(y - 11) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 11 = 0.$

③ Lấy  $M(-5; 0), N(1; 2) \in d.$

Gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua phép quay  $Q_{(O, 60^\circ)}.$

Khi đó  $\begin{cases} x_{M'} = -5 \cdot \cos 60^\circ - 0 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{5}{2} \\ y_{M'} = -5 \cdot \sin 60^\circ + 0 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases}$  và  $\begin{cases} x_{N'} = 1 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} \\ y_{N'} = 1 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

Suy ra  $M' \left( -\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2} \right), N' \left( \frac{1-2\sqrt{3}}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right)$ .

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, 60^\circ)}$ , khi đó  $d'$  đi qua  $M', N'$ .

Ta có  $\overrightarrow{M'N'} = (3 - \sqrt{3}; 1 + 3\sqrt{3})$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $(1 + 3\sqrt{3}) \left( x + \frac{5}{2} \right) + (\sqrt{3} - 3) \left( y + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow (1 + 3\sqrt{3})x + (\sqrt{3} - 3)y + 10 = 0$ .

④ Lấy  $M(-3; 0), N(0; 6) \in d$ .

Gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = -3 \cdot \cos 45^\circ - 0 \cdot \sin 45^\circ = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_{M'} = -3 \cdot \sin 45^\circ + 0 \cdot \cos 45^\circ = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{N'} = 0 \cdot \cos 45^\circ - 6 \cdot \sin 45^\circ = -3\sqrt{2} \\ y_{N'} = 0 \cdot \sin 45^\circ + 6 \cdot \cos 45^\circ = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra  $M' \left( -\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right), N' (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ .

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$ , khi đó  $d'$  đi qua  $M', N'$ .

Ta có  $\overrightarrow{M'N'} = \left( -\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1; -3)$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $3(x + 3\sqrt{2}) + 1(y - 3\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 6\sqrt{2} = 0$ .

□

**BÀI 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 2x - 3y + 2 = 0$  và đường tròn có phương trình là  $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ .

① Viết phương trình  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép  $Q_{(O, 90^\circ)}$ .

② Viết phương trình  $(C')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép  $Q_{(O, 90^\circ)}$ .

**Lời giải.**

① Lấy  $M(-1; 0), N(2; 2) \in d$ .

Gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = -1 \cdot \cos 90^\circ - 0 \cdot \sin 90^\circ = 0 \\ y_{M'} = -1 \cdot \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{N'} = 2 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ = -2 \\ y_{N'} = 2 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ = 2 \end{cases}$$

Suy ra  $M'(0; -1), N'(-2; 2)$ .

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$ , khi đó  $d'$  đi qua  $M', N'$ .

Ta có  $\overrightarrow{M'N'} = (-2; 3)$ .

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $3(x - 0) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2 = 0$ .

② Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; 2)$ , bán kính  $R = 3$ .

Gọi  $I'$  là ảnh của  $I$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{I'} = 2 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ = -2 \\ y_{I'} = 2 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ = 2 \end{cases}$$

Suy ra  $I'(-2; 2)$ .

Vì  $(C')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép quay  $Q_{(O, 90^\circ)}$  nên  $(C')$  có tâm là  $I'$  và bán kính bằng 3.

Vậy  $(C'): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .

□

**BÀI 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $M(2; 2)$ , đường thẳng  $d: 2x - y - 2 = 0$  và đường tròn  $(C): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ . Tìm ảnh của  $M, d, (C)$  qua:

① Phép quay tâm  $O$  góc quay  $45^\circ$ .

② Phép quay tâm  $I(1; 2)$  góc quay  $45^\circ$ .

**Lời giải.**

① — Gọi  $M'$  là ảnh của  $M$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = 2 \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ y_{M'} = 2 \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra  $M'(0; 2\sqrt{2})$ .

— Lấy  $A(1; 0), B(0; -2) \in d$ .

Gọi  $A', B'$  lần lượt là ảnh của  $A, B$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A'} = 1 \cdot \cos 45^\circ - 0 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{A'} = 1 \cdot \sin 45^\circ + 0 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{B'} = 0 \cdot \cos 45^\circ + 2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2} \\ y_{B'} = 0 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot \cos 45^\circ = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra  $A'(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}), B'(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ .

Gọi  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$ , khi đó  $d'$  đi qua  $A', B'$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B'} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1; -3).$$

Suy ra phương trình đường thẳng  $d'$  là  $3(x - \sqrt{2}) + 1(y + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2\sqrt{2} = 0$ .

— Đường tròn  $(C)$  có tâm  $E(1; 1)$ , bán kính  $R = 2$ .

Gọi  $E'$  là ảnh của  $E$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{E'} = 1 \cdot \cos 45^\circ - 1 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ y_{E'} = 1 \cdot \sin 45^\circ + 1 \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra  $E'(0; \sqrt{2})$ .

Gọi  $(C')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép quay  $Q_{(O, 45^\circ)}$  nên  $(C')$  có tâm là  $E'$  và bán kính bằng 2.

Vậy  $(C')$ :  $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 4$ .

② — Gọi  $M''$  là ảnh của  $M$  qua phép quay  $Q_{(I, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M''} = (2 - 1) \cdot \cos 45^\circ - (2 - 2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{M''} = (2 - 1) \cdot \sin 45^\circ + (2 - 2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$$

Suy ra  $M''\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)$ .

— Lấy  $A(1; 0), B(0; -2) \in d$ .

Gọi  $A'', B''$  lần lượt là ảnh của  $A, B$  qua phép quay  $Q_{(I, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A''} = (1 - 1) \cdot \cos 45^\circ - (0 - 2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \sqrt{2} + 1 \\ y_{A''} = (1 - 1) \cdot \sin 45^\circ + (0 - 2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = -\sqrt{2} + 2 \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} x_{B''} = (0 - 1) \cdot \cos 45^\circ - (-2 - 2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{B''} = (0 - 1) \cdot \sin 45^\circ + (-2 - 2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$$

Suy ra  $A''(\sqrt{2} + 1; -\sqrt{2} + 2), B''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1; -\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2\right)$ .

Gọi  $d''$  là ảnh của  $d$  qua phép quay  $Q_{(I, 45^\circ)}$ , khi đó  $d''$  đi qua  $A'', B''$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A''B''} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1; -3).$$

Suy ra phương trình đường thẳng  $d''$  là  $3 \cdot (x - \sqrt{2} - 1) + 1 \cdot (y + \sqrt{2} - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2\sqrt{2} - 5 = 0$ .

— Đường tròn  $(C)$  có tâm  $E(1; 1)$ , bán kính  $R = 2$ .

Gọi  $E''$  là ảnh của  $E$  qua phép quay  $Q_{(I, 45^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{E''} = (1 - 1) \cdot \cos 45^\circ - (1 - 2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{E''} = (1 - 1) \cdot \sin 45^\circ + (1 - 2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$$

Suy ra  $E''\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)$ .

Gọi  $(C'')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép quay  $Q_{(I, 45^\circ)}$  nên  $(C'')$  có tâm là  $E''$  và bán kính bằng 2.

$$\text{Vậy } (C''): \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)^2 = 4.$$

□

**BÀI 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $A(4; 3)$ , đường tròn  $(C): (x - 2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 5$ . Tìm ảnh của  $A, (C)$  qua phép quay tâm  $O$  góc quay  $60^\circ$ .

**Lời giải.**

— Gọi  $A'$  là ảnh của  $A$  qua phép quay  $Q_{(O, 60^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A'} = 4 \cdot \cos 60^\circ - 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2} \\ y_{A'} = 4 \cdot \sin 60^\circ + 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A' \left( \frac{4 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2} \right).$$

— Đường tròn  $(C)$  có tâm  $E(2; 2\sqrt{3})$ , bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Gọi  $E'$  là ảnh của  $E$  qua phép quay  $Q_{(O, 60^\circ)}$ .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{E'} = 2 \cdot \cos 60^\circ - 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = -2 \\ y_{E'} = 2 \cdot \sin 60^\circ + 2\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra  $E'(-2; 2\sqrt{3})$ .

Gọi  $(C')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép quay  $Q_{(O, 60^\circ)}$  nên  $(C')$  có tâm là  $E'$  và bán kính bằng  $\sqrt{5}$ .

$$\text{Vậy } (C'): (x + 2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 5.$$

□

**BÀI 7.** Cho tam giác  $ABC$  có các đỉnh kí hiệu theo hướng âm, dựng bên ngoài các hình vuông  $ABDE, BCKF$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $AC$ ,  $H$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $B$ ,  $M$  là trung điểm của  $FH$ .

① Xác định ảnh của  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}$  trong phép quay  $Q_{(B, 90^\circ)}$ .

② Chứng minh  $DF = 2BP$  và  $DF \perp BP$ .

**Lời giải.**

① Từ giả thiết ta có

$$Q_{(B, 90^\circ)}: B \rightarrow B$$

$$A \rightarrow H$$

$$\overrightarrow{BA} \rightarrow \overrightarrow{BH}$$

$$C \rightarrow F$$

$$AC \rightarrow HF$$

$$P \rightarrow M$$

$$\overrightarrow{BP} \rightarrow \overrightarrow{BM}.$$

② Vì  $Q_{(B, 90^\circ)}: \overrightarrow{BP} \rightarrow \overrightarrow{BM}$

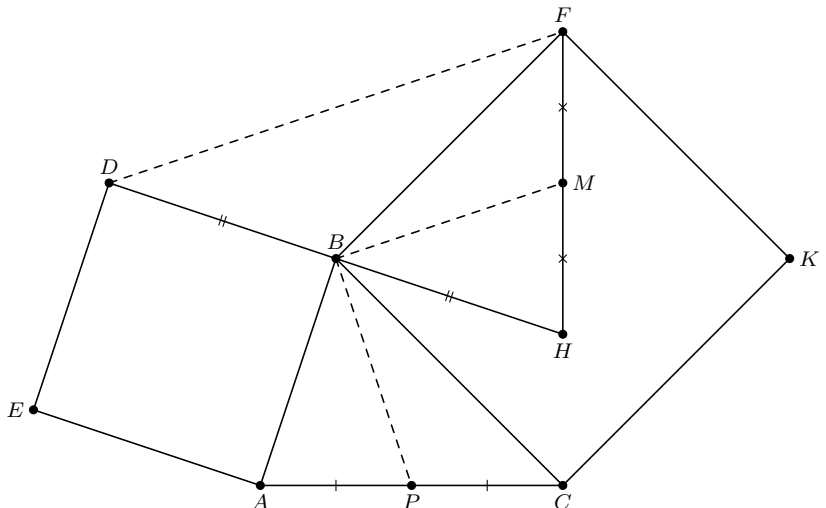
$$\begin{cases} BP = BM \\ (\widehat{BP, BM}) = 90^\circ \end{cases}$$

nên ta có

mà  $BM$  là đường trung bình của tam giác  $HFD$  nên

$$DF = 2BP \text{ và } DF \perp BP.$$

□



**BÀI 8.** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác  $BAE$  và  $CAF$  vuông cân tại  $A$ . Gọi  $I, M, J$  theo thứ tự là trung điểm của  $EB, BC, CF$ . Chứng minh tam giác  $IMJ$  vuông cân.

**Lời giải.**

Vì  $\triangle ABE, \triangle ACF$  là những tam giác vuông cân tại  $A$  nên ta có

$$Q_{(A, 90^\circ)}: B \rightarrow E$$

$$F \rightarrow C$$

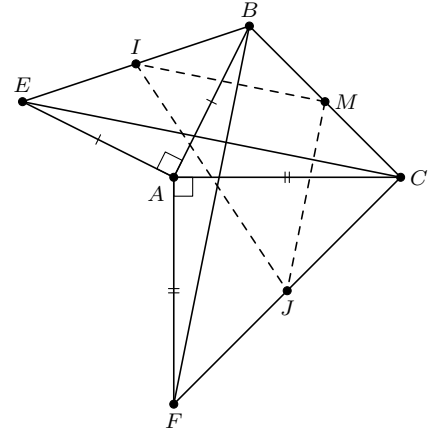
$$BF \rightarrow EC$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} BF = EC \\ \widehat{(BF, EC)} = 90^\circ. \end{cases}$$

Mà  $MI, MJ$  lần lượt là đường trung bình của  $\triangle BEC, \triangle CBF$  nên

$$\begin{cases} MI = MJ \\ \widehat{(MI, MJ)} = 90^\circ. \end{cases}$$

Do đó  $\triangle IMJ$  vuông cân tại  $M$ .



□

**BÀI 9.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng theo thứ tự. Lấy các đoạn thẳng  $AB, BC$  làm cạnh, dựng các tam giác đều  $ABE$  và  $BCF$  nằm cùng về một phía so với đường thẳng  $AB$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AF$  và  $CE$ . Chứng minh tam giác  $BMN$  đều.

**Lời giải.**

Vì tam giác  $ABE$  và  $BCF$  là những tam giác đều nên ta có

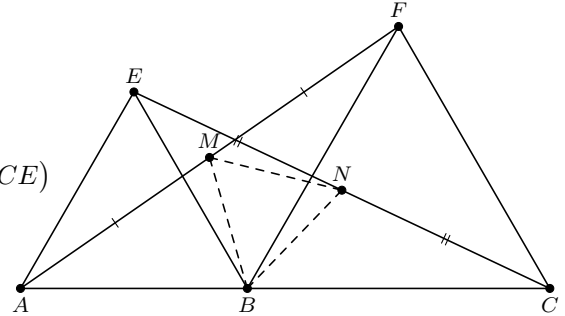
$$Q_{(B, 60^\circ)}: A \rightarrow E$$

$$F \rightarrow C$$

$$AF \rightarrow EC$$

$$M \rightarrow N \text{ (Vì } M, N \text{ lần lượt là trung điểm của } AF, CE)$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} BM = BN \\ \widehat{(BM, BN)} = 60^\circ \end{cases} \text{ hay tam giác } BMN \text{ đều.}$$



□

## BÀI 5. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1 (Phép đối xứng tâm).** Cho điểm  $I$ . Phép biến hình biến điểm  $I$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $I$  thành điểm  $M'$  sao cho  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $MM'$ , được gọi là phép đối xứng tâm  $I$ , nghĩa là  $\vec{IM} + \vec{IM'} = \vec{0}$ . Phép đối xứng tâm  $I$  thường được kí hiệu là  $\mathcal{E}_I$ .

**Nhận xét. (Biểu thức tọa độ)** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $I(x_I; y_I)$ ,  $M(x_M; y_M)$  và  $M'(x_{M'}; y_{M'})$  là ảnh của  $M$  qua phép đối xứng tâm  $I$ . Khi đó  $\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M. \end{cases}$

**Tính chất 1.** Phép đối xứng tâm

- bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

**Định nghĩa 2 (Tâm đối xứng của một hình).** Điểm  $I$  được gọi là tâm đối xứng của hình  $\mathcal{H}$  nếu phép đối xứng tâm  $I$  biến hình  $\mathcal{H}$  thành chính nó. Khi đó  $\mathcal{H}$  được gọi là hình có tâm đối xứng.

## BÀI 6. PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

### TÓM TẮT LÝ THUYẾT

**Định nghĩa 1 (Phép vị tự).** Cho điểm  $O$  cố định và một số thực  $k$  không đổi,  $k \neq 0$ . Phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$  được gọi là phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $k$  và kí hiệu là  $V_{(O;k)}$  ( $O$  được gọi là tâm vị tự).

**Định lý 1.** Nếu phép vị tự tâm  $I$  tỉ số  $k$  biến hai điểm  $M, N$  lần lượt thành hai điểm  $M', N'$  thì  $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$  và  $M'N' = |k|MN$ .

**Định lý 2.** Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

**Hệ quả 1.** Phép vị tự

- biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
- biến tia thành tia.
- biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với  $|k|$ .
- biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là  $|k|$ .
- biến góc bằng góc ban đầu.



- Qua phép vị tự  $V_{(O;k)}$  đường thẳng  $d$  biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng  $d$  qua tâm vị tự  $O$ .
- Nếu  $M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(I;\frac{1}{k})}(M')$ .

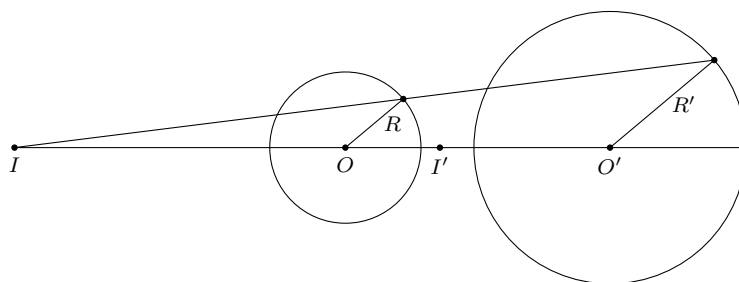
**Định lý 3 (Ảnh của đường tròn qua phép vị tự).** Phép vị tự tỉ số  $k$  biến một đường tròn có bán kính  $R$  thành đường tròn có bán kính  $R' = |k| \cdot R$ .

⚠ Nếu phép vị tự tâm  $O$  tỉ số  $k$  biến đường tròn  $(I; R)$  thành đường tròn  $(I'; R')$  thì  $|k| = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm \frac{R'}{R}$  và  $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ .

**Định nghĩa 2 (Tâm vị tự của hai đường tròn).** Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn. Nếu tỉ số vị tự  $k > 0$  thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự  $k < 0$  thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự trong.

**Nhận xét. (Cách xác định tâm vị tự)**

- Nếu  $I$  là tâm vị tự ngoài, ta có  $\overrightarrow{IO} = \frac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$ .
- Nếu  $I$  là tâm vị tự trong, ta có  $\overrightarrow{IO} = -\frac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$ .



**Định nghĩa 3 (Phép đồng dạng).** Phép biến hình  $F$  được gọi là phép đồng dạng tỉ số  $k$  ( $k > 0$ ) nếu với hai điểm bất kì  $M, N$  và ảnh  $M', N'$  tương ứng của chúng, ta luôn có  $M'N' = k \cdot MN$ . Mọi phép đồng dạng tỉ số  $k$  đều hợp thành của một phép vị tự tỉ số  $k$  và một phép dời hình  $D$ .

## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### DẠNG 6.1. Phép vị tự trong hệ tọa độ $Oxy$

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

—  $V_{(O,k)}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ .

— Phép vị tự  $V_{(I,k)}$  biến

① Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

② Đường tròn có bán kính  $R$  thành đường tròn có bán kính  $|k|R$ .

### 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , xét phép vị tự tâm  $O(0;0)$  sau

① Cho  $A(1; -1)$ ,  $B(2; 3)$ . Tìm  $A' = V_{(O;k)}(A)$  và  $B' = V_{(O;k)}(B)$  với  $k = -3$ .

② Cho  $M'(3; -1)$  và  $M' = V_{(O;k)}(M)$  với  $k = 3$ . Tìm tọa độ  $M$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{① } A' = V_{(O;-3)}(A) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = -3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3x_A = -3 \\ y_{A'} = -3y_A = 3 \end{cases} \cdot \text{Vậy } A'(-3; 3). \\ B' = V_{(O;-3)}(B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OB'} = -3\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = -3x_B = -6 \\ y_{B'} = -3y_B = -9 \end{cases} \cdot \text{Vậy } B'(-6; -9). \end{aligned}$$

$$\text{② } M' = V_{(O;3)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O;\frac{1}{3})}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{3}x_{M'} = 1 \\ y_M = \frac{1}{3}y_{M'} = -\frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy } M\left(1; -\frac{1}{3}\right).$$

□

**VÍ DỤ 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy tìm ảnh của đường thẳng  $(d)$  trong các trường hợp

① Cho  $d: 2x - y + 3 = 0$ . Tìm  $d' = V_{(O;k)}(d)$  với  $O(0;0)$  và  $k = 2$ .

② Cho  $d: 3x + 2y - 6 = 0$ . Tìm  $d' = V_{(I;k)}(d)$  với  $I(1;2)$  và  $k = -2$ .

③ Cho  $d: 2x - 3y + 6 = 0$ . Tìm  $d' = V_{(I;k)}(d)$  với  $I(2;-1)$  và  $k = -2$ .

**Lời giải.**

①  $O \notin d$  do đó  $d': 2x - y + c = 0$  ( $c \neq 3$ ) là ảnh của  $d$  qua  $V_{(O;2)}$ . Lấy  $A(0;3) \in d$ . Gọi  $A'$  là ảnh của  $A$  qua  $V_{(O;2)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A' = V_{(O;2)}(A) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_A = 0 \\ y_{A'} = 2y_A = 6 \end{cases} \Leftrightarrow A'(0;6). \text{ Mà } A' \in d' \Rightarrow 2 \cdot 0 - 6 + c = 0 \Rightarrow \\ c &= 6. \\ \text{Vậy } d' &: 2x - y + 6 = 0. \end{aligned}$$

②  $I \notin d$  do đó  $d': 3x + 2y + c = 0$  ( $c \neq -6$ ) là ảnh của  $d$  qua  $V_{(I;-2)}$ . Lấy  $A(0;3) \in d$ . Gọi  $A'$  là ảnh của  $A$  qua  $V_{(I;-2)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A' = V_{(I;-2)}(A) &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2x_A + 3x_I = 3 \\ y_{A'} = -2y_A + 3y_I = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A'(3;0). \text{ Mà } A' \in d' \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot \\ 0 + c &= 0 \Rightarrow c = -9. \\ \text{Vậy } d' &: 3x + 2y - 9 = 0. \end{aligned}$$

- ③  $I \notin d$  do đó  $d': 2x - 3y + c = 0$  ( $c \neq 6$ ) là ảnh của  $d$  qua  $V_{(I;-2)}$ . Lấy  $A(0; 2) \in d$ . Gọi  $A'$  là ảnh của  $A$  qua  $V_{(I;-2)}$ .

$$\text{Ta có } A' = V_{(I;-2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2x_A + 3x_I = 6 \\ y_{A'} = -2y_A + 3y_I = -7 \end{cases} \Leftrightarrow A'(6; -7). \text{ Mà } A' \in d' \Rightarrow 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-7) + c = 0 \Rightarrow c = -33. \\ \text{Vậy } d': 2x - 3y - 33 = 0.$$

□

**VÍ DỤ 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , hãy tìm ảnh của đường tròn  $(C)$  trong các trường hợp

- ① Cho  $(C): (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$ . Tìm  $(C') = V_{(O;k)}((C))$  với  $O(0; 0)$  và  $k = 3$ .  
 ② Cho  $(C): (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ . Tìm  $(C') = V_{(M;k)}((C))$  với  $M(1; 2)$  và  $k = -2$ .  
 ③ Cho  $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Tìm  $(C') = V_{(M;k)}((C))$  với  $M(2; 1)$  và  $k = 3$ .

**Lời giải.**

- ① Đường tròn có tâm  $I(-1; 3)$  và bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

Vì  $(C') = V_{(O;3)}((C))$  nên  $I' = V_{(O;3)}(I)$  là tâm và  $R' = 3R = 3\sqrt{2}$  của là bán kính của  $(C')$ .

$$I' = V_{(O;3)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 3x_I = -3 \\ y_{I'} = 3y_I = 9 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-3; 9). \text{ Vậy } (C'): (x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 18.$$

- ② Đường tròn có tâm  $I(3; -1)$  và bán kính  $R = 3$ .

Vì  $(C') = V_{(M;-2)}((C))$  nên  $I' = V_{(M;-2)}(I)$  là tâm và  $R' = 2R = 6$  của là bán kính của  $(C')$ .

$$I' = V_{(M;-2)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI'} = -2\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = -2x_I + 3x_M = -3 \\ y_{I'} = -2y_I + 3y_M = 8 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-3; 8). \text{ Vậy } (C'): (x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 36.$$

- ③ Đường tròn có tâm  $I(0; 1)$  và bán kính  $R = 1$ .

Vì  $(C') = V_{(M;3)}((C))$  nên  $I' = V_{(M;3)}(I)$  là tâm và  $R' = 3R = 3$  của là bán kính của  $(C')$ .

$$I' = V_{(M;3)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI'} = 3\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 3x_I - 2x_M = -4 \\ y_{I'} = 3y_I - 2y_M = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-4; 1). \text{ Vậy } (C'): (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

□

**VÍ DỤ 4.** Cho đường tròn  $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ . Gọi  $f$  là phép biến hình có được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ; rồi đến phép vị tự tâm  $M\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$  với tỉ số  $k = 2$ . Viết phương trình đường tròn  $(C')$  qua phép biến hình  $f$ .

**Lời giải.**

Đường tròn có tâm  $I(1; 2)$  và bán kính  $R = 2$ .

Gọi  $(C'') = T_{\vec{v}}((C))$ . Do đó,  $I'' = T_{\vec{v}}(I)$  là tâm và  $R'' = R = 2$  của là bán kính của  $(C'')$ .

$$I'' = T_{\vec{v}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{II''} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I''} = x_I + x_{\vec{v}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_{I''} = y_I + y_{\vec{v}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I''\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right). \text{ Vì } (C') = V_{(M;2)}((C'')) \text{ nên}$$

$I' = V_{(M;2)}(I'')$  là tâm và  $R' = 2R'' = 4$  là bán kính của  $(C')$ .

$$I' = V_{(M;2)}(I'') \Leftrightarrow \overrightarrow{MI'} = 2\overrightarrow{MI''} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 2x_{I''} - x_M = \frac{5}{3} \\ y_{I'} = 2y_{I''} - y_M = \frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow I'\left(\frac{5}{3}; \frac{20}{3}\right). \text{ Vậy } (C'): \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{3}\right)^2 =$$

16.

□



## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $B(4; -2)$ , đường thẳng  $d: x - y + 2 = 0$  và đường tròn  $(C): (x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ .

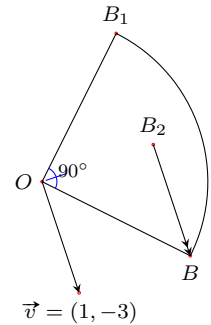
- ① Tìm tọa độ điểm  $B_1$  là ảnh của  $B$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  và điểm  $B_2$ , biết  $B$  là ảnh của  $B_2$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v} = (1; -3)$ .

- ② Viết phương trình  $(C')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $-3$ .
- ③ Viết phương trình đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k = 2$ .

**Lời giải.**

①

$B_1(x; y)$  là ảnh của  $B(4; -2)$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  nên  
 $\begin{cases} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB_1} = 0 \\ OB = OB_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}$ . Góc quay theo chiều  
 dương nên  $B_1(2; 4)$ .  
 $B(4; -2)$  là ảnh của  $B_2(m; n)$  qua phép tịnh tiến theo véc-tơ  $\vec{v} = (1; -3)$  nên  
 $\overrightarrow{B_2B} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m = 1 \\ -2 - n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$ . Vậy  $B_2(3; 1)$ .



- ②  $(C)$  có tâm  $I(-2; -5)$  và bán kính  $R = 3$ .  $(C')$  có tâm  $I'(x; y)$  và bán kính  $R'$ .  
 $(C')$  là ảnh của  $(C)$  qua phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $-3$  nên  $R' = 3R = 9$  và  $\overrightarrow{OI'} = -3\overrightarrow{OI} \Rightarrow x = 6; y = 15$ .  
 Vậy  $(C') : (x - 6)^2 + (y - 15)^2 = 81$ .
- ③  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k = 2$ .  
 $M(x; x + 2) \in d$ , qua phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k = 2$  biến  
 $M$  thành  $M'$  với  $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$  do đó  $M'(2x; 2x + 4) \in d'$ .  
 Vậy  $d' : x - y + 4 = 0$ .

□

**BÀI 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d : 3x - 4y - 8 = 0$  và đường tròn có phương trình  $(C) : x^2 + y^2 - 18x + 4y + 36 = 0$

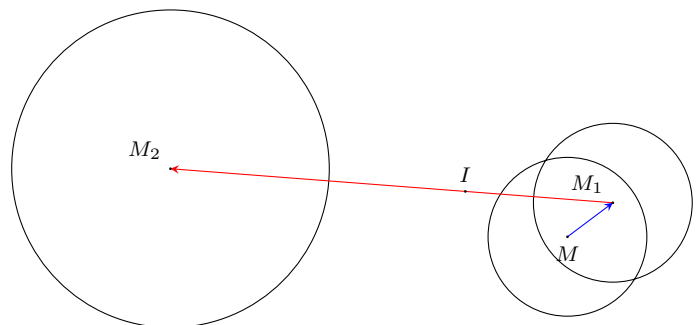
- ① Tìm ảnh của  $d$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ .
- ② Tìm ảnh của đường tròn  $(C)$  qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (4; 3)$  và phép vị tự tâm  $I(0; 2), k = -2$ .

**Lời giải.**

- ① Phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến  $N(x; y)$  thành  $N'(-y; x)$ .  
 Ảnh của  $d$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  là đường thẳng  $d'$ .  
 Có  $M\left(x; \frac{1}{4}(3x - 8)\right) \in d : 3x - 4y - 8 = 0$ , qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến  $M$  thành  
 $M'\left(-\frac{1}{4}(3x - 8); x\right) \in d'$ . Vậy  $d' : 4x + 3y - 8 = 0$

②

Đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 18x + 4y + 36 = 0$   
 có tâm  $M(9; -2)$  và bán kính  $R = 7$ .  
 Phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (4; 3)$  biến  
 $(C)$  thành  $(C_1)$  có tâm  $M_1(13; 1)$   
 và bán kính  $R_1 = R = 7$ . Nên  
 $(C_1) : (x - 13)^2 + (y - 1)^2 = 49$ .  
 Phép vị tự tâm  $I(0; 2), k = -2$  biến  
 $(C_1)$  thành đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $M_2$   
 và bán kính  $R_2$  với  $\overrightarrow{IM_2} = -2\overrightarrow{IM_1}$ ,  
 $R_2 = 2R_1$ . Nên  $M_2(-26; 4), R_2 = 14$ . Vậy  
 $(C_2) : (x + 26)^2 + (y - 4)^2 = 14^2$ .



□

**BÀI 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $B(-2; 3)$ ,  $I(3; -1)$ , đường thẳng  $d : 2x + y - 1 = 0$  và đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$ .

- ① Tìm ảnh của điểm  $B$  qua phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  và phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (-1; 2)$ .
- ② Tìm ảnh của đường thẳng  $d$  qua phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $-2$ .
- ③ Tìm ảnh của đường tròn  $(C)$  qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm  $I$ , tỉ số  $3$  và phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$ .

**Lời giải.**

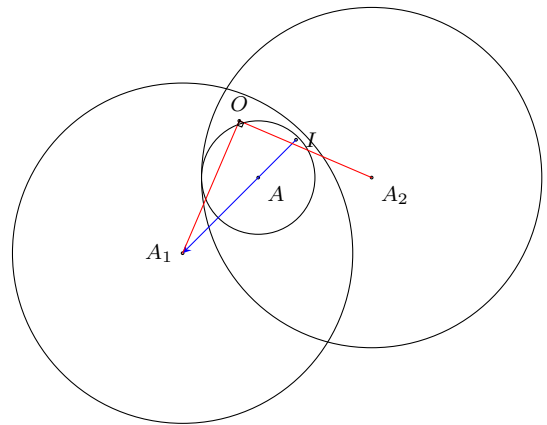
- ① Phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến  $B(-2; 3)$  thành  $B_1(-3; -2)$ .  
Phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (-1; 2)$  biến  $B_1(-3; -2)$  thành  $B_2(-4; 0)$ .
- ② Phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $-2$  biến đường thẳng  $d$  thành đường thẳng  $d'$ .  
Phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $-2$  biến  $M(x; -2x+1) \in d$  thành  $M'$  với  $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$  nên  $M'(-2x; 4x-2) \in d'$ .  
Vậy  $d': 2x + y + 2 = 0$ .

③

Đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$  có tâm  $A(1; -3)$  và bán kính  $R = \sqrt{11}$

Phép vị tự tâm  $I$ , tỉ số  $3$  biến  $(C)$  thành  $(C_1)$  có tâm  $A_1$  và bán kính  $R_1$  với  $\overrightarrow{IA_1} = 3\overrightarrow{IA}$ ,  $R_1 = 3R$ . Nên  $A_1(-3; -7)$ ,  $R_1 = 3\sqrt{11}$ . Vậy  $(C_1): (x+3)^2 + (y+7)^2 = 99$ .

Phép quay tâm  $O$ , góc quay  $90^\circ$  biến  $A_1(-3; -7)$  thành  $A_2(7; -3)$  và biến  $(C_1)$  thành đường tròn  $(C_2)$  có tâm  $A_2(7; -3)$  và bán kính  $R_2 = R_1 = 3\sqrt{11}$ . Vậy  $(C_2): (x-7)^2 + (y+3)^2 = 99$



□

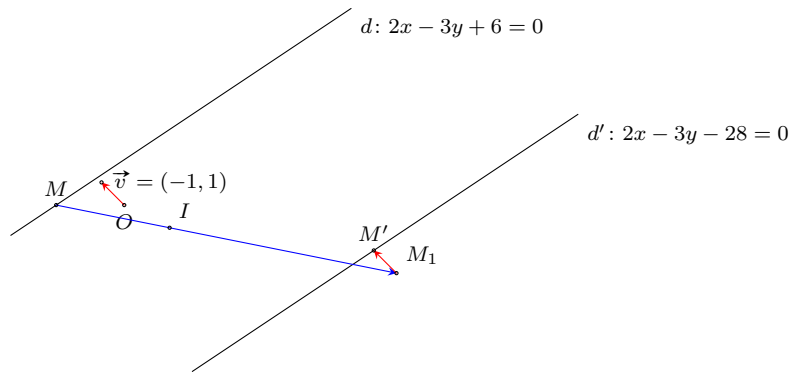
**BÀI 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 2x - 3y + 6 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $d'$  là ảnh của  $d$  qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm  $I(2; -1)$  tỉ số vị tự  $k = -2$  và phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (-1; 1)$ .

**Lời giải.**

Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm  $I(2; -1)$  tỉ số vị tự  $k = -2$  và phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (-1; 1)$  biến đường thẳng  $d: 2x - 3y + 6 = 0$  thành  $d': 2x - 3y + m = 0$  ( $d'$  và  $d$  song song hoặc trùng nhau).

Phép vị tự tâm  $I(2; -1)$  tỉ số vị tự  $k = -2$  biến điểm  $M(-3; 0) \in d$  thành  $M_1$  với  $\overrightarrow{IM_1} = -2\overrightarrow{IM}$  nên  $M_1(12; -3)$ .

Phép tịnh tiến theo  $\vec{v} = (-1; 1)$  biến  $M_1(12; -3)$  thành  $M'(11; -2) \in d'$ :  $2x - 3y + m = 0$  do đó  $m = -28$ . Vậy  $d': 2x - 3y - 28 = 0$ .



□

**BÀI 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai parabol  $(P_1): y = ax^2$  và  $(P_2): y = bx^2$  (với  $a \neq b$ ). Chứng minh rằng có một phép vị tự biến parabol này thành parabol kia.

**Lời giải.**

Giả sử  $M(m; am^2) \in (P_1)$ , với  $m \neq 0$ . Đường thẳng  $OM$  có phương trình  $y = amx$ .

Khi đó đường thẳng  $OM$  cắt  $(P_2)$  tại hai điểm  $O(0; 0)$  và  $N\left(\frac{am}{b}; \frac{a^2m^2}{b}\right)$ .

Đặt  $k = \frac{a}{b}$  ta được  $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$ .

Do đó phép vị tự tâm  $O$ , tỉ số  $k = \frac{a}{b}$  biến  $(P_1)$  thành  $(P_2)$ .

□

**BÀI 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2; 1)$  và  $B(8; 4)$ . Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn  $(A; 2)$  và  $(B; 4)$ .

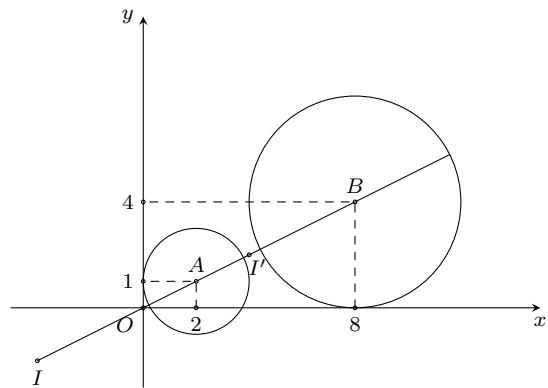
**Lời giải.**

Gọi  $I(x; y)$ ,  $I'(x'; y')$  lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn  $(A; 2)$  và  $(B; 4)$ . Ta có

$$\textcircled{1} \quad \vec{IA} = \frac{1}{2}\vec{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = \frac{1}{2}(8 - x) \\ 1 - y = \frac{1}{2}(4 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{I'A} = -\frac{1}{2}\vec{I'B} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x' = -\frac{1}{2}(8 - x') \\ 1 - y' = -\frac{1}{2}(4 - y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 2. \end{cases}$$

Vậy có hai tâm vị tự thỏa mãn bài toán là  $I(-4; -2)$  và  $I'(4; 2)$ .



□

# ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

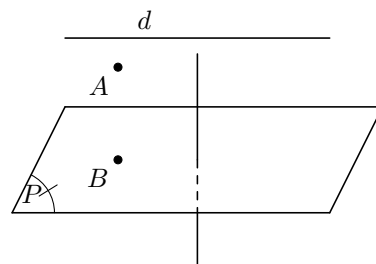
## BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Mở đầu về hình học không gian.

— Đối tượng cơ bản:

- . Điểm: kí hiệu  $A, B, C, \dots$
- . Đường thẳng: kí hiệu  $a, b, c, d, \dots$
- . Mặt phẳng: kí hiệu  $(P), (Q), (\alpha), (\beta), \dots$



— Quan hệ cơ bản:

- . Thuộc: kí hiệu  $\in$ . Ví dụ  $A \in d, M \in (P) \dots$
- . Chứa, nằm trong: kí hiệu  $\subset$ . Ví dụ:  $d \subset (P), b \subset (\alpha)$ .

— Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

- . Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- . Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
- . Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.
- . Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn  $(- - -)$  để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

② Các tính chất thừa nhận trong hình học không gian.

— Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.

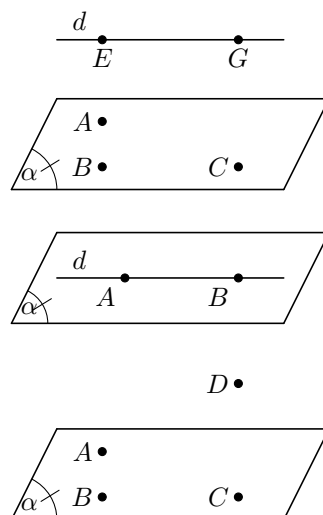
— Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

— Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

— Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

— Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.



**③ Điều kiện xác định mặt phẳng.**

- . Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
  - . Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
  - . Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.

**④ Hình chóp và hình tứ diện.**

— Cho đa giác  $A_1A_2A_3...A_n$  nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  và điểm  $S \notin (\alpha)$ . Lần lượt nối điểm  $S$  với các đỉnh  $A_1A_2A_3...A_n$  ta được  $n$  tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ . Hình gồm đa giác  $A_1A_2A_3...A_n$  và  $n$  tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$  được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là  $S.A_1A_2A_3...A_n$ . Khi đó ta gọi:

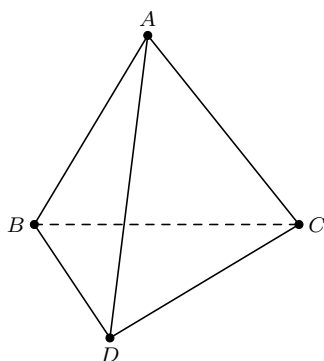
- .  $S$  là đỉnh của hình chóp.
- .  $A_1A_2A_3...A_n$  là mặt đáy của hình chóp.
- . Các tam giác  $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$  được gọi là các mặt bên.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ....

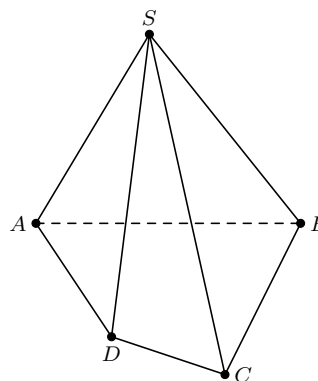
— Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác  $ABC, ACD, BCD, ABD$  gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn gọi là tứ diện) và được kí hiệu là  $ABCD$ .

- . Các điểm  $A, B, C, D$  là bốn đỉnh của tứ diện.
- . Các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DA, CA, BD$  gọi là các cạnh của tứ diện.
- . Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.
- . Các tam giác  $ABC, ACD, ABD, BCD$  gọi là các mặt của tứ diện.

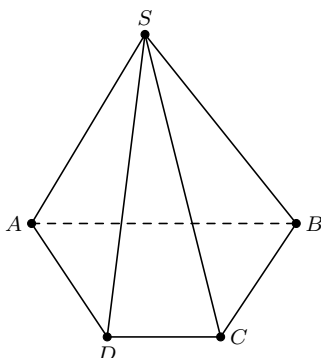
Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



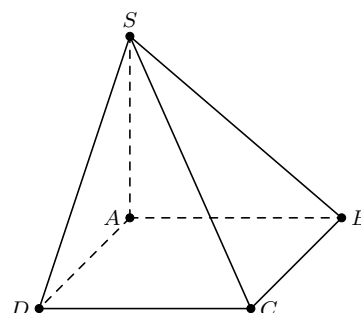
**Hình chóp tam giác (Tứ diện)**



**Hình chóp tứ giác**



**Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang**



**Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành**

## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### DẠNG 1.1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

- Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.
- Đường thẳng nối hai điểm đó là giao tuyến của chúng.

### 1 Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm trên cạnh  $AB$  và  $BC$  sao cho  $MN$  không song song với  $AC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ①  $(SMN)$  và  $(SAC)$ ;                      ②  $(SAN)$  và  $(SCM)$ .

**Lời giải.**

- ① Trong  $(ABC)$ , gọi  $K = MN \cap AC$ , ta có

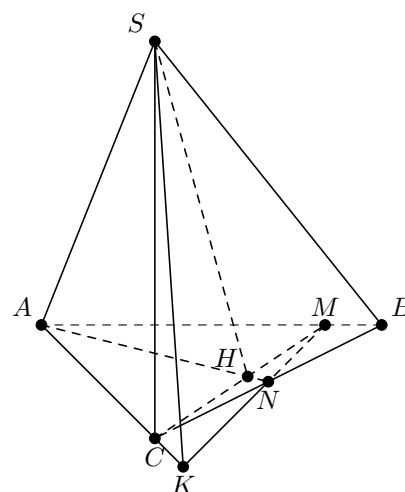
$$\begin{cases} S \in (SMN) \cap (SAC) \\ K \in (SMN) \cap (SAC). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng  $SK$ .

- ② Trong  $(ABC)$ , gọi  $H = AN \cap CM$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SAN) \cap (SCM) \\ H \in (SAN) \cap (SCM). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng  $SH$ .



□

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , trong đó mặt đáy  $ABCD$  có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ①  $(SAC)$  và  $(SBD)$ ;                      ②  $(SAB)$  và  $(SCD)$ ;                      ③  $(MBC)$  và  $(SAD)$ .

**Lời giải.**

- ① Trong  $(ABCD)$ , gọi  $E = AC \cap BD$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ E \in (SAC) \cap (SBD) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là  $SE$ .

- ② Trong  $(ABCD)$ , gọi  $F = AB \cap CD$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ F \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$$

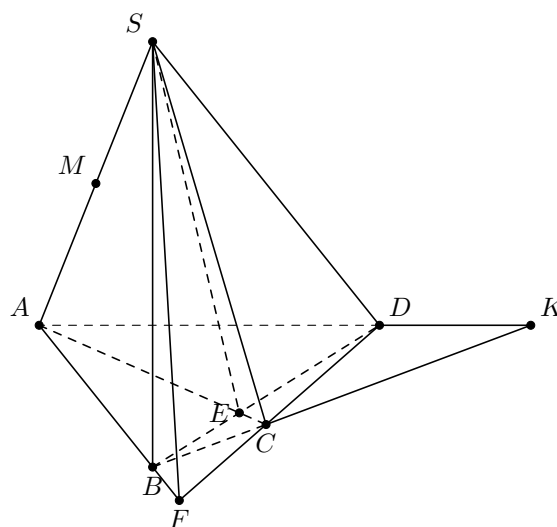
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là  $SF$ .

- ③ Trong  $(ABCD)$ , gọi  $K = AD \cap CB$ , ta có

$$\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ K \in (MBC) \cap (SAD) \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là  $MK$ .

□



## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $K, M$  lần lượt là hai điểm trên cạnh  $SA$  và  $SC$ . Gọi  $N$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ①  $(SAN)$  và  $(ABM)$ ;

- ②  $(SAN)$  và  $(BCK)$ .

**Lời giải.**

- ① Trong  $(SBC)$ , gọi  $E = SN \cap BM$ , ta có

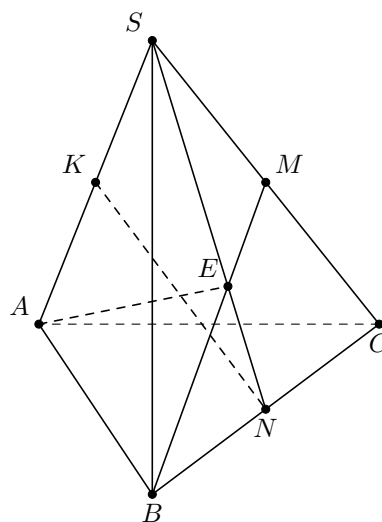
$$\begin{cases} A \in (SAN) \cap (ABM) \\ E \in (SAN) \cap (ABM) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là  $AE$ .

- ② Ta có

$$\begin{cases} N \in (SAN) \cap (BCK) \\ K \in (SAN) \cap (BCK) \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng là  $KN$ .



□

**BÀI 2.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB \parallel CD$  và  $AB > CD$ . Lấy điểm  $M$  trên đoạn  $BC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ①  $(SAC)$  và  $(SBD)$ ;

- ②  $(SAD)$  và  $(SBC)$ ;

- ③  $(SAM)$  và  $(SBD)$ ;

- ④  $(SDM)$  và  $(SAB)$ .

**Lời giải.**

- ① Trong  $(ABCD)$ , gọi  $E = AC \cap BD$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ E \in (SAC) \cap (SBD) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là  $SE$ .

- ② Trong  $(ABCD)$ , gọi  $K = AD \cap CB$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ K \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là  $SK$ .

- ③ Trong  $(ABCD)$ , gọi  $F = AM \cap DB$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SAM) \cap (SBD) \\ F \in (SAM) \cap (SBD) \end{cases}$$

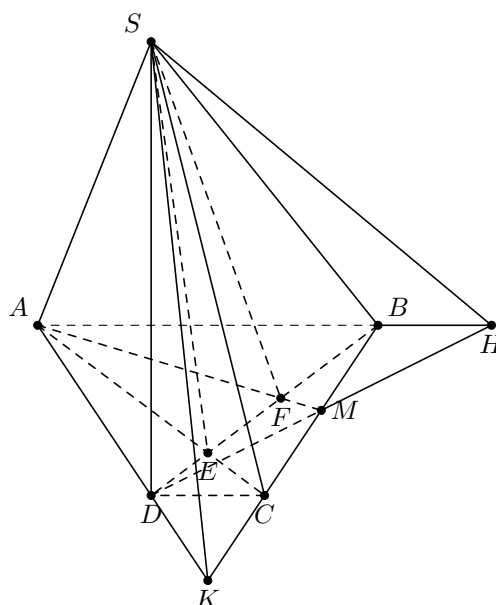
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là  $SF$ .

- ④ Trong  $(ABCD)$ , gọi  $H = DM \cap AB$ , ta có

$$\begin{cases} S \in (SDM) \cap (SAB) \\ H \in (SDM) \cap (SAB) \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là  $SH$ .

□



**BÀI 3.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, SA$ .

- ① Tìm giao tuyến  $SH$  của hai mặt phẳng  $(SCD)$  và  $(SAE)$ ;  
 ② Tìm giao tuyến  $CI$  của hai mặt phẳng  $(SCD)$  và  $(BFC)$ ;  
 ③  $SH$  và  $CI$  có cắt nhau không? Giải thích? Nếu có, gọi giao điểm đó là  $O$ , chứng minh  $IH \parallel SC$ . Tính tỉ số  $\frac{OH}{OS}$ .

**Lời giải.**

- ① Trong  $(ABC)$ , gọi  $H = AE \cap CD \equiv H$ .

Ta có giao tuyến của  $(SCD)$  và  $(SAE)$  là  $SH$ .

- ② Trong  $(SAB)$ , gọi  $I = SD \cap BF$ .

Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SCD)$  và  $(BFC)$  là  $CI$ .

- ③ Ta có  $CI$  và  $SH$  cùng nằm trong mặt phẳng  $(SCD)$ .

Xét tam giác  $SCD$  có  $I \in SD$ ;  $H \in CD$  nên  $CI$  và  $SH$  cắt nhau tại  $O$ .

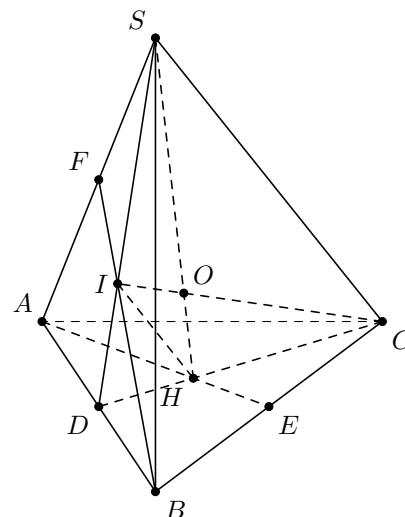
Ta có  $I$  là trọng tâm tam giác  $SAB$  suy ra  $\frac{ID}{SD} = \frac{1}{3}$ .

$H$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  suy ra  $\frac{DH}{CD} = \frac{1}{3}$ .

Suy ra  $\frac{ID}{SD} = \frac{DH}{CD} \Leftrightarrow IH \parallel SC$ .

Vậy  $\frac{OH}{OS} = \frac{IH}{SC} = \frac{ID}{SD} = \frac{1}{3}$ .

□



3

**BÀI 4.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là tứ giác lồi. Trên cạnh  $SA$  lấy điểm  $M$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ① ( $SAC'$ ) và ( $SBD$ ).

③ ( $CDM$ ) và ( $SAB$ ).

② ( $BCM$ ) và ( $SAD$ ).

④ ( $BDM$ ) và ( $SAC$ ).

**BÀI 5.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Trung điểm của  $CD$  là  $M$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ① (*SAC'*) và (*SBD*).

③ (*SBM*) và (*SAD*).

② (*SBM*) và (*SAC*).

④ (*SAM*) và (*SBC*).

**BÀI 6.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB \parallel CD$  và  $AB > CD$ . Lấy điểm  $M$  nằm trên đoạn  $SA$ . Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ① (*BDM*) và (*SAC'*).

③ (*BCM*) và (*SCD*).

② (*BCM*) và (*SAD*).

**BÀI 7.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $SA$ , trung điểm  $CD$  là  $N$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ① ( $BMN$ ) và ( $SAC'$ ).

③ ( $MCD$ ) và ( $SBD$ ).

② ( $BMN$ ) và ( $SAD$ ).

④ ( $MCD$ ) và ( $SAB$ ).

**BÀI 8.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là tứ giác có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm  $M$  thuộc miền trong tam giác  $SCD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ① (*SBM*) và (*SCD*).

③ (*ABM*) và (*SAC*).

② (*ABM*) và (*SCD*).

**BÀI 9.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là tứ giác lồi. Lấy  $I$  thuộc cạnh  $SA$ ,  $J$  thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $IJ$  không song song với  $AB$ . Lấy  $K$  là một điểm thuộc miền trong tứ giác  $ABCD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ①** ( $IJK$ ) và ( $ABCD$ ).

**②** ( $IJK$ ) và ( $SAB$ ).

**③** ( $IJK$ ) và ( $SAD$ ).

**④** ( $IJK$ ) và ( $SAC$ ).

**⑤** ( $IJK$ ) và ( $SBD$ ).

**BÀI 10.** Cho hình chóp  $SABC$ . Trên cạnh  $SA, SC$  lấy điểm  $M, N$  sao cho  $MN$  không song song với  $AC$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $BC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ①** ( $MNK$ ) và ( $ABC$ ).                      **②** ( $MNK$ ) và ( $SAB$ ).

**BÀI 11.** Cho hình chóp  $SABC$ . Trên cạnh  $SA, SC$  lấy điểm  $M, N$  sao cho  $MN$  không song song với  $AC$ . Gọi  $O$  là điểm thuộc miền trong của tam giác  $ABC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ①  $(MNO)$  và  $(ABC)$ .

③  $(SMO)$  và  $(SBC)$ .

②  $(MNO)$  và  $(SAB)$ .

④  $(ONC)$  và  $(SAB)$ .

**BÀI 12.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $M$  là điểm trên cạnh  $AB$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $AD$  sao cho  $MB = 2MA$ ,  $AN = 2ND$ . Gọi  $P$  là điểm nằm trong tam giác  $BCD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

- ①  $(CMN)$  và  $(BCD)$ .  
 ②  $(MNP)$  và  $(SAD)$ .  
 ③  $(MNP)$  và  $(ABC)$ .

**BÀI 13.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$ ,  $N$  là điểm nằm trong tam giác  $ACD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

①  $(CDM)$  và  $(ABD)$ .

②  $(BCN)$  và  $(ABD)$ .

③  $(CMN)$  và  $(BCD)$ .

**BÀI 14.** Cho tứ diện  $SAC$ . Lấy điểm  $E, F$  lần lượt trên đoạn  $SA, SB$  và điểm  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

①  $(EFG)$  và  $(ABC)$ .

②  $(EFG)$  và  $(SBC)$ .

③  $(EFG)$  và  $(SGC)$ .

**BÀI 15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Hai điểm  $G, H$  lần lượt là trọng tâm  $\triangle SAB, \triangle SCD$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

①  $(SGH)$  và  $(ABCD)$ .

②  $(SAC)$  và  $(SGH)$ .

③  $(SAC)$  và  $(BGH)$ .

④  $(SCD)$  và  $(BGH)$ .

**BÀI 16.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang có  $AB \parallel CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ . Lấy  $M$  thuộc cạnh  $SC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

①  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .

②  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

③  $(ADM)$  và  $(SBC)$ .

**BÀI 17.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CD, SA$ . Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

①  $(MNP)$  và  $(SAB)$ .

②  $(MNP)$  và  $(SAD)$ .

③  $(MNP)$  và  $(SBC)$ .

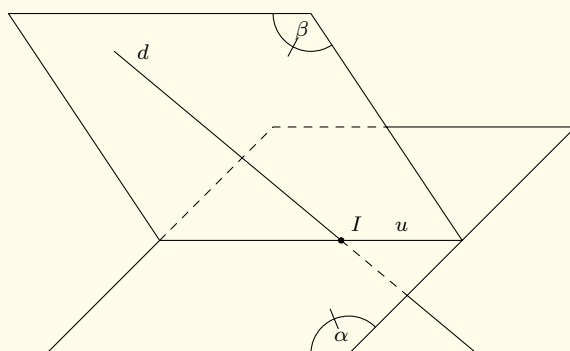
④  $(MNP)$  và  $(SCD)$ .

**BÀI 18.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $SAB, SBC$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$ ,  $I \in SM$  sao cho  $SI > SM$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

①  $(IHK)$  và  $(ABC)$ .

②  $(IHK)$  và  $(SBC)$ .

### 📁 DẠNG 1.2. Tìm giao điểm của đường thẳng $d$ và mặt phẳng $(\alpha)$



- Tìm một mặt phẳng phụ  $(\beta)$  chứa  $d$  sao cho dễ tạo giao tuyến với  $(\alpha)$ . Mặt phẳng này thường xác định bởi  $d$  và một điểm của  $(\alpha)$ .
- Tìm giao tuyến  $u$  của  $(\alpha)$  và  $(\beta)$ .
- Trong  $(\beta)$ ,  $d$  cắt  $u$  tại  $I$ , mà  $u \subset (\alpha)$ . Vậy  $d$  cắt  $(\alpha)$  tại  $I$ .

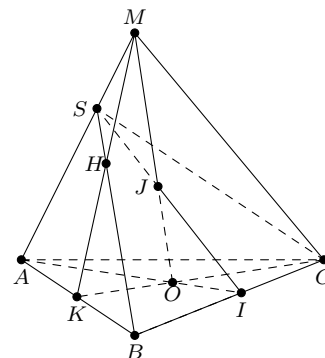
### 1 Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $SABC$  có  $M$  là điểm nằm trên tia đối của tia  $SA$ ,  $O$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Tìm các giao điểm của

- ① Đường thẳng  $BC$  và mặt phẳng  $(SOA)$ ;
- ② Đường thẳng  $MO$  và mặt phẳng  $(SBC)$ ;
- ③ Đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(MOC)$ ;
- ④ Đường thẳng  $SB$  và mặt phẳng  $(MOC)$ .

**Lời giải.**

- ① Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , kéo dài  $AO$  cắt  $BC$  tại  $I$ .  
Ta có  $\begin{cases} I \in BC \\ I \in AO \subset (SOA) \end{cases} \Rightarrow I$  là giao điểm của  $BC$  và  $(SOA)$ .
- ② Chọn mặt phẳng phụ chứa  $MO$  là  $(SOA)$ , ta có  $(SOA) \cap (SBC) = SI$ .  
Trong  $(SOA) \equiv (SMI)$ , gọi  $J$  là giao điểm của  $SI$  và  $MO$ .  
Ta có  $\begin{cases} J \in MO \\ J \in SI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J$  là giao điểm của  $MO$  và  $(SBC)$ .
- ③ Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , kéo dài  $CO$  cắt  $AB$  tại  $K$ .  
Ta có  $\begin{cases} K \in AB \\ K \in CO \subset (MOC) \end{cases} \Rightarrow K$  là giao điểm của  $AB$  và  $(MOC)$ .
- ④ Chọn mặt phẳng phụ chứa  $SB$  là  $(SAB)$ , ta có  $(SAB) \cap (MOC) = MK$ .  
Trong  $(SAB) \equiv (MAB)$ , gọi  $H$  là giao điểm của  $SB$  và  $MK$ .  
Ta có  $\begin{cases} H \in SB \\ H \in MK \subset (MOC) \end{cases} \Rightarrow H$  là giao điểm của  $SB$  và  $(MOC)$ .

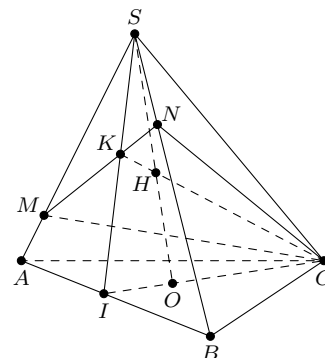


**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện  $SABC$  có hai điểm  $M, N$  lần lượt thuộc hai cạnh  $SA, SB$  và  $O$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Xác định giao điểm của

- ① Đường thẳng  $AB$  và mặt phẳng  $(SOC)$ ;
- ② Đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SOC)$ ;
- ③ Đường thẳng  $SO$  và mặt phẳng  $(CMN)$ .

**Lời giải.**

- ① Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , kéo dài  $CO$  cắt  $AB$  tại  $I$ .  
Ta có  $\begin{cases} I \in AB \\ I \in CO \subset (SOC) \end{cases} \Rightarrow I$  là giao điểm của  $AB$  và  $(SOC)$ .
- ② Chọn mặt phẳng phụ chứa  $MN$  là  $(SAB)$ , ta có  $(SAB) \cap (SOC) = SI$ .  
Trong  $(SAB)$ , gọi  $K$  là giao điểm của  $SI$  và  $MN$ .  
Ta có  $\begin{cases} K \in MN \\ K \in SI \subset (SOC) \end{cases} \Rightarrow K$  là giao điểm của  $MN$  và  $(SOC)$ .
- ③ Chọn mặt phẳng phụ chứa  $SO$  là  $(SIC)$ , ta có  $(SIC) \cap (CMN) = KC$ .  
Trong  $(SIC)$ , gọi  $H$  là giao điểm của  $KC$  và  $SO$ .  
Ta có  $\begin{cases} H \in SO \\ H \in KC \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow H$  là giao điểm của  $SO$  và  $(CMN)$ .



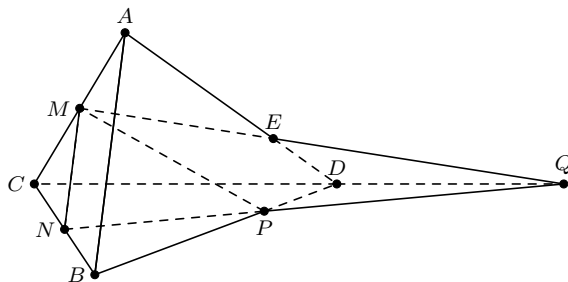
## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Lấy điểm  $P$  trên cạnh  $BD$  sao cho  $PB > PD$ . Tìm giao điểm của

①  $CD$  và  $(MNP)$ .

②  $AD$  và  $(MNP)$ .

Lời giải.



- ① Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , xét tam giác  $BCD$  có  $\frac{NB}{NC} = 1 \neq \frac{PB}{PC}$  nên  $NP$  và  $DC$  cắt nhau giả sử tại  $Q$ . Rõ ràng  $Q \in CD$  theo cách dựng. Lại có  $Q \in NP \subset (MNP)$  nên  $Q \in (MNP)$ . Vậy  $Q = CD \cap (MNP)$ .
- ② Trong mặt phẳng  $(ACD)$  nối  $Q$  với  $M$  cắt  $AD$  tại  $E$ . Dễ thấy  $E \in AD$  theo cách dựng. Lại có  $E \in MQ \subset (MNP)$  nên  $E \in (MNP)$ . Vậy  $E = AD \cap (MNP)$ .

□

**BÀI 2.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên  $AC$  và  $AD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $MN$  không song song với  $CD$ . Gọi  $O$  là điểm thuộc miền trong  $\triangle BCD$ . Tìm giao điểm của

①  $BD$  và  $(OMN)$ .

②  $BC$  và  $(OMN)$ .

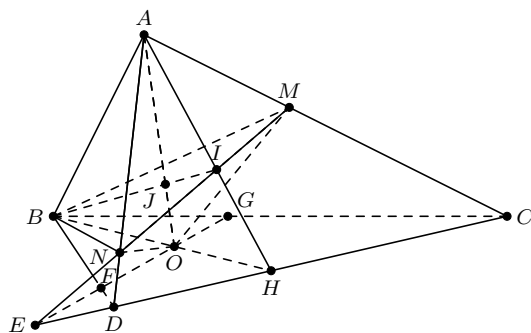
③  $MN$  và  $(ABO)$ .

④  $AO$  và  $(BMN)$ .

Lời giải.

Trong mặt phẳng  $(ACD)$ , vì  $MN$  không song song với  $CD$  nên ta giả sử  $MN$  cắt  $CD$  tại  $E$ . Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , nối  $E$  với  $O$  kéo dài cắt  $BD$  và  $BC$  lần lượt tại  $F$  và  $G$ .

- ① Ta có  $F \in OE \subset (OMN)$  và  $F \in BD$ . Suy ra  $F = BD \cap (OMN)$ .
- ② Theo cách dựng thì  $G \in BC$  và  $G \in OE \subset (OMN)$ . Vậy  $G = BC \cap (OMN)$ .
- ③ Trong mặt phẳng  $(BCD)$  kéo dài  $BO$  cắt  $DC$  tại  $H$ . Trong mặt phẳng  $(ADC)$  nối  $H$  với  $A$  cắt  $MN$  tại  $I$ . Vì  $H \in BO \subset (ABO)$  nên  $AH \subset (ABO)$ . Suy ra  $I \in (ABO)$ . Vậy  $I = MN \cap (ABO)$ .



- ④ Trong mặt phẳng  $(ABH)$  nối  $B$  với  $I$  cắt  $AO$  tại  $J$ . Rõ ràng  $J \in AO$  theo cách dựng và  $J \in BI \subset (BMN)$ . Vậy  $J = AO \cap (BMN)$ .

□

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm  $SB$ ,  $N$  là trọng tâm  $\triangle SCD$ . Xác định giao điểm của

①  $MN$  và  $(ABCD)$ .

②  $MN$  và  $(SAC)$ .

③  $SC$  và  $(AMN)$ .

④  $SA$  và  $(CMN)$ .

Lời giải.

Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SD$  và  $DC$ .  
 Trọng tâm của tam giác  $SCD$  là  $N = SJ \cap CI$ .

- ① Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  nối  $B$  với  $J$  cắt  $AC$  và  $AD$  lần lượt tại  $E$  và  $K$ . Vì  $DK \parallel BC$  nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có

$$\frac{JB}{JK} = \frac{JC}{JD} = 1 \Rightarrow JC = JD.$$

Vậy  $\triangle SCD$  và  $\triangle SBK$  có chung đường trung tuyến là  $SJ$ . Vì thế trọng tâm  $N$  của  $\triangle SCD$  cũng là trọng tâm của  $\triangle SBK$ . Suy ra  $K \in MN$ . Lúc đó  $K = MN \cap (ABCD)$ .

- ② Trong mặt phẳng  $(SBJ)$  nối  $S$  với  $E$  cắt  $MN$  tại  $F$ .  
 Ta có  $F = MN \cap (SAC)$ .
- ③ Trong mặt phẳng  $(SCD)$  nối  $N$  với  $D$  kéo dài cắt  $SC$  tại  $H$ . Vì  $D \in AK \subset (AMN)$  nên  $ND \subset (AMN)$ .  
 Suy ra  $H \in (AMN)$ . Vậy  $H = SC \cap (AMN)$ .
- ④ Theo cách dựng ta thấy  $IK = (CMN) \cap (SAD)$ . Trong mặt phẳng  $(SAD)$  kéo dài  $IK$  cắt  $SA$  tại  $G$ . Lúc đó  $G = SA \cap (CMN)$ .

□

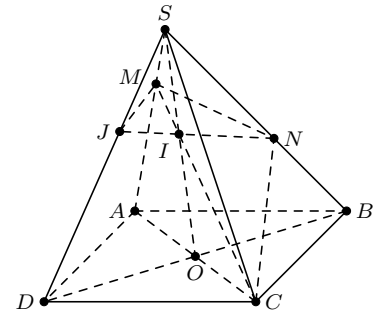
**BÀI 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy hình bình hành tâm  $O$ . Trên  $SA, SB$  lần lượt lấy hai điểm  $M$  và  $N$ .

- ① Tìm giao điểm của  $SO$  và  $(CMN)$ .      ② Tìm giao tuyến của  $(SAD)$  và  $(CMN)$ .

**Lời giải.**

Trong mặt phẳng  $(SAC)$  nối  $S$  với  $O$  cắt  $MC$  tại  $I$ . Trong mặt phẳng  $(SBD)$  kéo dài  $IN$  cắt  $SD$  tại  $J$ . Lúc đó

- ①  $I = SO \cap (CMN)$ .
- ②  $J \in (SAD) \cap (CMN)$ . Lại có  $M \in (SAD) \cap (CMN)$ . Vậy  $JM = (SAD) \cap (CMN)$ .



□

**BÀI 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $SA, SD$  và  $P$  là điểm thuộc cạnh  $SB$  sao cho  $SP = 3PB$ .

- ① Tìm giao điểm  $Q$  của  $SC$  và  $(MNP)$ .      ② Tìm giao tuyến của  $(MNP)$  và  $(ABCD)$ .

**Lời giải.**

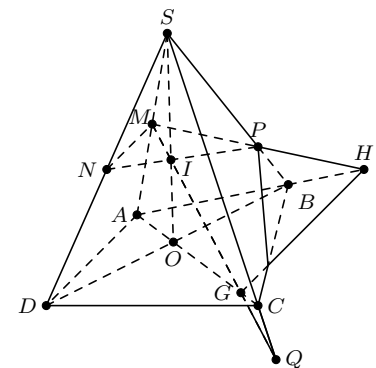
Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Trong mặt phẳng  $(SBD)$  gọi  $I$  là giao điểm của  $NP$  với  $SO$ . Lúc đó  $I \in (MNP)$  và  $MI \subset (SAC)$ .

- ① Trong mặt phẳng  $(SAC)$  gọi  $Q$  là giao điểm của  $MI$  và  $SC$ . Vì  $Q \in MI$  nên  $Q = SC \cap (MNP)$ .
- ② Trong mặt phẳng  $(SAC)$  gọi  $G$  là giao điểm của  $MI$  và  $AC$ . Lúc đó  $G \in (MNP) \cap (ABCD)$ . Trong mặt phẳng  $(SAB)$ , vì

$$1 = \frac{MS}{MA} \neq \frac{PS}{PB} = 3$$

nên  $MP$  và  $AB$  cắt nhau. Gọi  $H$  là giao điểm của  $MP$  và  $AB$ . Ta có  $H \in (MNP) \cap (ABCD)$ . Vậy  $GH = (MNP) \cap (ABCD)$ .

□

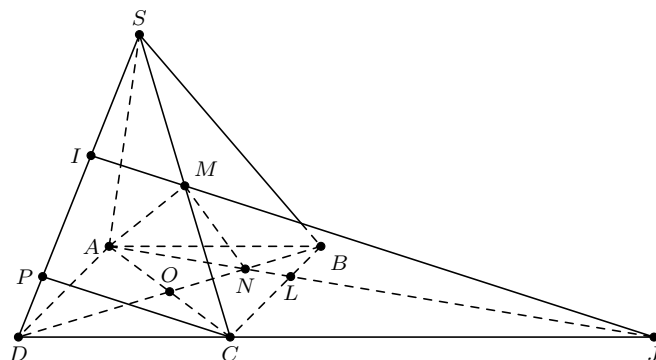


**BÀI 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành,  $M$  là trung điểm của  $SC$ ,  $N$  là trung điểm của  $OB$  với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

① Tìm giao điểm  $I$  của  $SD$  với  $(AMN)$ .

② Tính tỉ số  $\frac{SI}{ID}$ .

Lời giải.



① Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  nối  $A$  với  $N$  kéo dài cắt  $DC$  tại  $J$  và cắt  $BC$  tại  $L$ . Trong mặt phẳng  $(SDC)$  nối  $J$  với  $M$  kéo dài cắt  $SD$  tại  $I$ . Vì  $J \in AN \subset (AMN)$  nên  $MJ \subset (AMN)$ . Suy ra  $I \in (AMN)$ . Vậy  $I = SD \cap (AMN)$ .

② Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , vì  $AB \parallel DJ$  nên  $\triangle NAB$  đồng dạng với  $\triangle NJD$ . Suy ra

$$\frac{DJ}{AB} = \frac{DN}{NB} = 3 \Rightarrow DJ = 3AB = 3DC.$$

Trên cạnh  $SD$  lấy điểm  $P$  sao cho  $I$  là trung điểm của  $SP$ . Ta có  $IM$  là đường trung bình của  $\triangle SPC$  nên  $IM \parallel PC \Rightarrow IM \parallel IJ$ . Áp dụng Định lý Talet trong  $\triangle DIJ$  ta có

$$\frac{DI}{DP} = \frac{DJ}{DC} = 3 \Rightarrow DI = 3DP \text{ và } SI = PI = 2DP.$$

$$\text{Vậy } \frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}.$$

□

**BÀI 7.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $SA$  sao cho  $MA = 2MS$ ,  $K$  là trung điểm  $BC$  và  $D$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $A$ .

① Tìm giao điểm  $H$  của  $SK$  với  $(MCD)$ .

② Tính tỉ số  $\frac{HK}{SK}$ .

Lời giải.

① Trong mặt phẳng  $(SDK)$  kéo dài  $DM$  cắt  $SK$  tại  $H$ . Lúc đó  $H = SK \cap (MCD)$ .

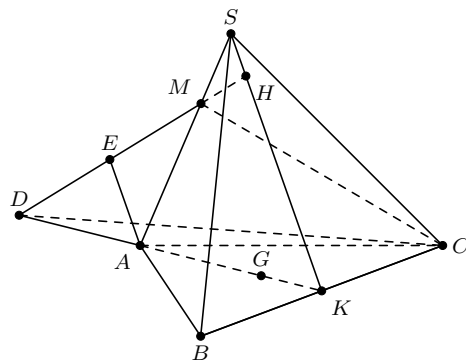
② Trong mặt phẳng  $(SDK)$  vẽ đường thẳng qua  $A$  và song song với  $SK$  cắt  $DH$  tại  $E$ . Vì  $AE \parallel SH$  nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có

$$\frac{AE}{SH} = \frac{MA}{MS} = 2 \Rightarrow SH = \frac{1}{2}AE.$$

Trong  $\triangle DHK$  ta có  $AE \parallel HK$  nên theo Định lý Talet thì

$$\frac{AE}{HK} = \frac{DA}{DK} = \frac{2}{5} \Rightarrow HK = \frac{5}{2}AE.$$

$$\text{Ta có } SK = SH + HK = \frac{1}{2}AE + \frac{5}{2}AE = 3AE. \text{ Vậy } \frac{HK}{SK} = \frac{5}{6}.$$

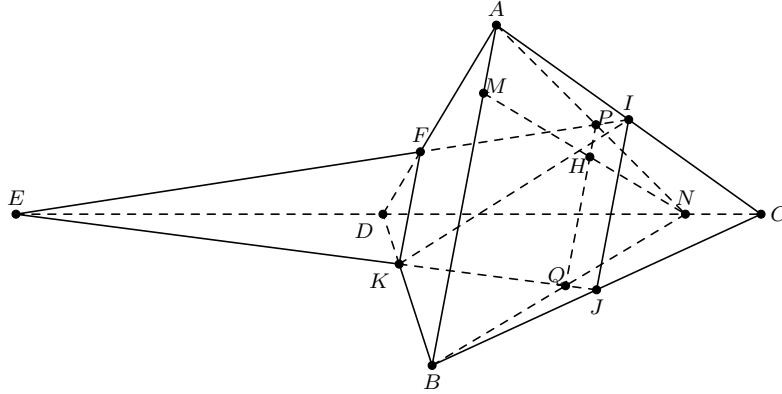


□

**BÀI 8.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Trên cạnh  $BD$  lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = 2KD$ .

- ① Tìm giao điểm  $E$  của  $CD$  với  $(IJK)$ . Chứng minh:  $DE = DC$ .
- ② Tìm giao điểm  $F$  của  $AD$  với  $(IJK)$ . Chứng minh:  $FA = 2FD$  và  $FK \parallel IJ$ .
- ③ Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Tìm giao điểm của  $MN$  với  $(IJK)$ .

**Lời giải.**



- ① Trong mặt phẳng  $(BCD)$  kéo dài  $JK$  cắt  $CD$  tại  $E$ . Lúc đó, dễ thấy  $E \in CD$  theo cách dựng. Lại có  $E \in KJ \subset (IJK)$ . Suy ra  $E = CD \cap (IJK)$ .  
Trong mặt phẳng  $(BCD)$  lấy điểm  $E'$  thuộc đường thẳng  $DC$  sao cho  $D$  là trung điểm của  $E'C$ . Xét  $\triangle E'BC$  có  $BD$  và  $E'J$  là các đường trung tuyến. Vì  $BK = 2KD$  nên  $K$  là trọng tâm  $\triangle E'BC$ . Suy ra  $E', K, J$  thẳng hàng. Từ đây có  $E' = DC \cap KJ$ . Vậy  $E' \equiv E$ . Suy ra  $DE = DC$ .
- ② Trong mặt phẳng  $(ACD)$ , nối  $I$  với  $E$  cắt  $AD$  tại  $F$ . Lúc đó rõ ràng  $F \in AD$  và vì  $F \in EI \subset (IJK)$  nên  $F \in (IJK)$ . Vậy  $F = AD \cap (IJK)$ .  
Trong  $\triangle AEC$ , vì các điểm  $D, I$  lần lượt là trung điểm của  $EC$  và  $AC$  nên  $F = AD \cap EI$  chính là trọng tâm của  $\triangle AEC$ . Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có  $FA = 2FD$ .  
Vì  $IJ$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $IJ \parallel AB$ . Mặt khác, vì  $\frac{DK}{DB} = \frac{DF}{DA} = \frac{1}{3}$  nên theo Định lý Talet ta có  $FK \parallel AB$ . Từ đó suy ra  $FK \parallel IJ$ .
- ③ Trong mặt phẳng  $(BCD)$  nối  $B$  với  $N$  cắt  $KJ$  tại  $Q$ . Ta có  $Q \in (IJK)$ . Trong mặt phẳng  $(ADC)$  nối  $A$  với  $N$  cắt  $EI$  tại  $P$ . Vì  $(IJK) \equiv (IEJ)$  nên  $P \in EI \subset (IEJ) \Rightarrow P \in (IJK)$ . Trong mặt phẳng  $(ABN)$  nối  $P$  với  $Q$  cắt  $MN$  tại  $H$ . Lúc đó, vì  $H \in PQ \subset (IJK)$  nên  $H \in (IJK)$ . Vậy  $H = MN \cap (IJK)$ .

□

**BÀI 9.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AD \parallel BC$  và  $AD = 2BC$ ,  $E$  là trung điểm của  $SA$ . Gọi  $N$  là điểm thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $NB = 2NA$  và  $M$  là điểm thuộc đoạn  $CD$  sao cho  $MD = 2MC$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(EMN)$  và  $(SAD)$ .
- ② Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(EMN)$  và  $(SCD)$ .
- ③ Tìm giao điểm  $L$  của đường thẳng  $EM$  và mặt phẳng  $(SBC)$ .
- ④ Tìm giao tuyến của  $(CDE)$  và  $(SAB)$ . Giao tuyến này cắt  $SB$  tại  $P$  và cắt  $AB$  tại  $I$ . Chứng minh:  $2SB = 3SP$  và  $S_{\triangle IDE} = 3S_{\triangle ICP}$ .

**Lời giải.**

- ① Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  kéo dài  $MN$  và  $AD$  cắt nhau tại  $J$ . Lúc đó  $J \in AD \subset (SAD)$  và  $J \in MN \subset (EMN)$ . Vì thế  $J \in (SAD) \cap (EMN)$ . Dễ thấy  $E \in (SAD) \cap (EMN)$ . Vậy  $EJ = (EMN) \cap (SAD)$ .
- ② Trong mặt phẳng  $(SAD)$  kéo dài  $JE$  cắt  $SD$  tại  $Q$ . Vì  $JE \subset (EJM) \equiv (EMN)$  nên  $Q \in (EMN)$ . Lúc đó  $QM = (EMN) \cap (SCD)$ .
- ③ Trong mặt phẳng  $(SAB)$  kéo dài  $NE$  và  $SB$  cắt nhau tại  $K$ . Lúc đó  $K \in (EMN) \cap (SBC)$ . Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  kéo dài  $MN$  và  $BC$  cắt nhau tại  $H$ . Ta có  $H \in (EMN) \cap (SBC)$ . Suy ra  $GH = (EMN) \cap (SBC)$ . Trong mặt phẳng  $(EMN)$  kéo dài  $KH$  và  $EM$  cắt nhau tại  $L$ . Vì  $KH \subset (SBC)$  nên  $L \in (SBC)$ . Vậy  $L = EM \cap (SBC)$ .

- ④ Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  kéo dài  $CD$  và  $AB$  cắt nhau tại

$I$ . Lúc đó  $IE = (CDE) \cap (SAB)$ .

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  vì  $BC \parallel AD$  nên áp dụng Định lý Talet với  $\triangle IAD$  ta có

$$\frac{IB}{IA} = \frac{IC}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB = AB \text{ và } ID = 2IC.$$

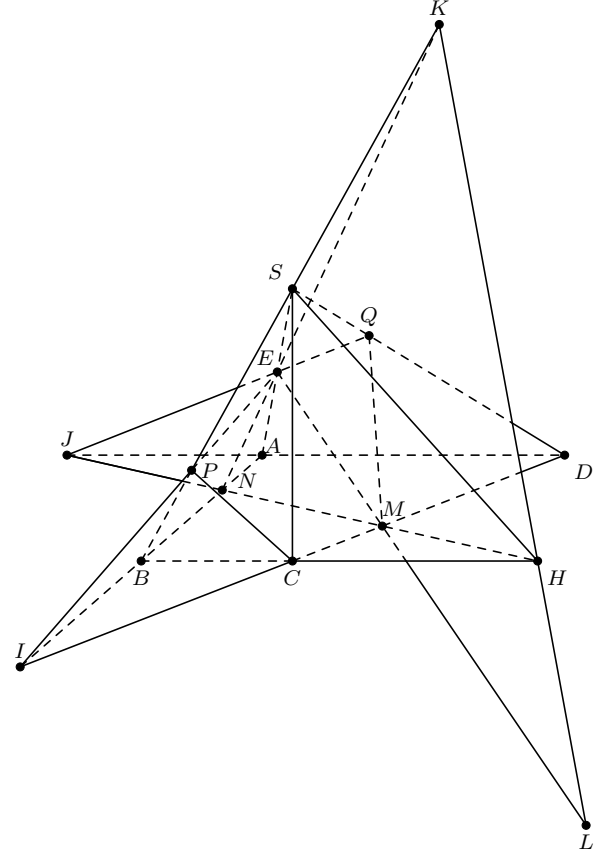
Trong mặt phẳng  $(SAB)$  xét  $\triangle SIA$  có  $B$  và  $E$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $IA$  và  $SA$ . Lúc đó  $P = IE \cap SB$  là trọng tâm  $\triangle SIA$ . Theo tính chất trọng tâm thì

$$IE = \frac{3}{2}IP \text{ và } 2SB = 3SP.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle IDE} &= \frac{1}{2}IE \cdot ID \cdot \sin \widehat{EID} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}IP \cdot 2IC \cdot \sin \widehat{EID} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot IP \cdot IC \cdot \sin \widehat{PIC} = 3S_{\triangle ICP}. \end{aligned}$$

Vậy  $S_{\triangle IDE} = 3S_{\triangle ICP}$ .



□

**BÀI 10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang,  $AB$  đáy lớn và  $AB = 3CD$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $CD$ ,  $M$  là điểm trên cạnh  $SB$  thỏa  $SM = 3MB$ , điểm  $I$  trên cạnh  $SA$  và thỏa  $AI = 3IS$ .

- ① Tìm giao điểm của đường thẳng  $MN$  với  $(SAD)$ .
- ② Gọi  $H$  là giao điểm của  $CB$  với  $(IMN)$ . Tính tỉ số  $\frac{HB}{HC}$ .

**Lời giải.**

Trong mặt phẳng  $(SAB)$  vì  $\frac{1}{3} = \frac{IS}{AI} \neq \frac{MS}{MB} = 3$  nên  $IM$  và  $AB$  cắt nhau. Gọi  $J$  là giao điểm của  $IM$  và  $AB$ . Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  nối  $J, N$  cắt  $AD$  tại  $P$ . Trong mặt phẳng  $(IMN)$  nối  $M, N$  cắt  $IP$  tại  $K$ .

- ① Theo cách dựng, dễ thấy  $K \in MN$ . Vì  $K \in IP \subset (SAD)$  nên  $K \in (SAD)$ . Vậy  $K = MN \cap (SAD)$ .

- ② Vì  $H$  là giao điểm của  $CB$  với  $(IMN)$  nên  $H = CB \cap NJ$ .

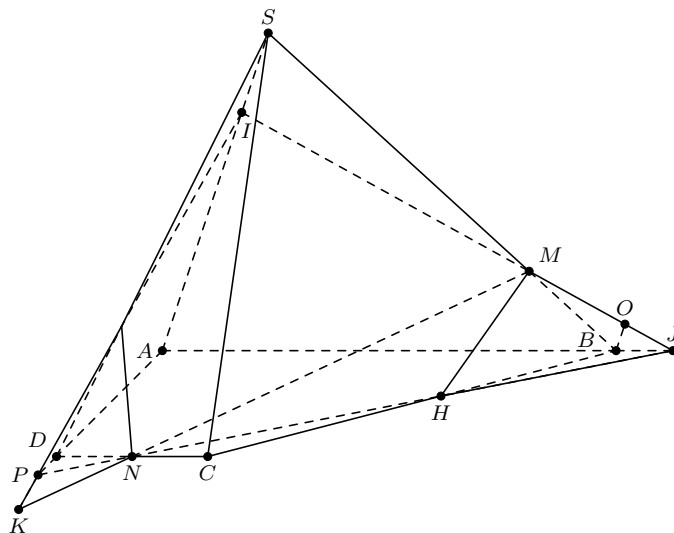
$$\text{Ta có } NC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{6}AB.$$

Vì  $NC \parallel BJ$  nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{BJ}{NC} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = 6 \cdot \frac{BJ}{AB} = 6 \cdot \frac{BJ}{JA - BJ} = 6 \cdot \frac{1}{\frac{JA}{BJ} - 1}.$$

$$\frac{BO}{SI} = \frac{BM}{MS} = \frac{1}{3}.$$
$$\frac{JB}{JA} = \frac{BO}{IA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BO}{SI} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{JA}{BJ} = 9.$$

$$\text{Từ đó có } \frac{HB}{HC} = 6 \cdot \frac{1}{\frac{JA}{BJ} - 1} = 6 \cdot \frac{1}{9 - 1} = \frac{3}{4}.$$

☐

3

①  $MN$  và  $(ABC)$ .

②  $BC$  và  $(MNP)$ .

①  $(SGC) \cap (ABCD) = ?$ .    ②  $AD \cap (SGC) = ?$ .    ③  $SO \cap (SGB) = ?$ .    ④  $SD \cap (BCG) = ?$ .

①  $(SGC) \cap (ABCD) = ?$ .    ②  $AD \cap (SGC) = ?$ .

③  $SO \cap (SGB) = ?.$

④  $SD \cap (BCG) = ?$ .

①  $IM$  với  $(SBC)$ .

②  $JM$  với  $(SAC)$ .

③  $SC$  với  $(IJM)$ .

①  $E = BC \cap (MNQ)$ .

②  $F = CP \cap (MNQ)$ .

③  $K = BG \cap (MNQ)$ .

①  $K = GM \cap (ABCD)$ .

②  $F = AD \cap (OMG)$ .

③  $E = SA \cap (OMG)$ .

① Tìm giao điểm của  $MN$  và  $(ABC)$ .

②  $SB \cap (MNP) = ?$ .

③  $SC \cap (MNP) = ?$ .

④  $NP \cap (SAB) = ?$ .

⑤ Tứ giác  $ABIC$  là hình gì ?

① Tìm  $I = BM \cap (SAC)$ . Chứng minh:  $BI = 2IM$ .

② Tìm  $E = SA \cap (BCM)$ . Chứng minh:  $E$  là trung điểm của  $SA$ .

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(SAC)$ .

② Tìm giao điểm  $E$  của đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(ABCD)$ . Tính  $\frac{EN}{EM}$ .

③ Tìm giao điểm  $K$  của đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(AMN)$ . Gọi  $J$  giao điểm của  $AK$  và  $SO$ . Tính tỉ số:  $\frac{JK}{JA}$ .

**BÀI 19.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$ , lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $CD$ .

① Tìm giao điểm  $E$  của  $AD$  với  $(BMN)$ .

② Tìm giao điểm  $F$  của  $SD$  và  $(BMN)$ . Chứng minh rằng:  $FS = 2FD$ .

**BÀI 20.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, M$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ .

① Tìm giao điểm  $P$  của  $CD$  và  $(IMG)$ . ② Tính tỉ số:  $\frac{PC}{PD}$ .

**BÀI 21.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$ . Trên cạnh  $BD$  lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = 2KD$ .

① Tìm giao điểm  $E$  của đường thẳng  $CD$  và  $(IJK)$ . Chứng minh:  $DE = DC$ .

② Tìm giao điểm  $F$  của đường thẳng  $AD$  và  $(IJK)$ . Tính tỉ số  $\frac{FA}{FD}$ .

### DẠNG 1.3. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $(\alpha)$ .

*Phương pháp giải:* Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng  $(\alpha)$  với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

## 1 VÍ DỤ

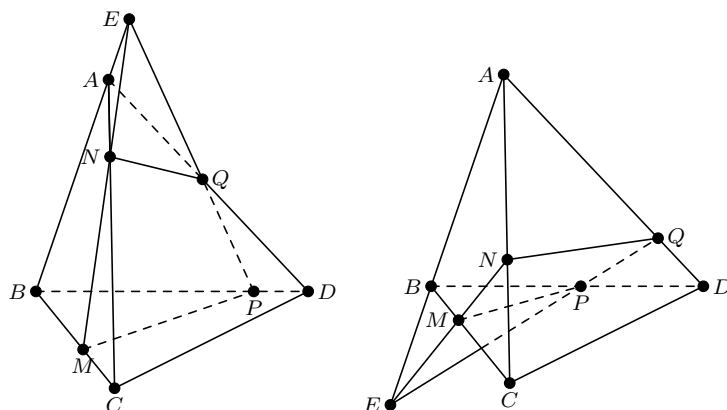
**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ , trên các đoạn  $CA, CB, BD$  lấy lần lượt các điểm  $M, N, P$  sao cho  $MN$  không song song với  $AB$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng xác định bởi ba điểm  $M, N, P$ . Xác định thiết diện tạo bởi  $(\alpha)$  và tứ diện  $ABCD$ ?

### Lời giải.

Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , do  $MN$  và  $AB$  không song song nên chúng cắt nhau giả sử tại  $E$ . Khi đó điểm  $E$  nằm ngoài đoạn  $AB$ . Trong mặt phẳng  $(ABD)$ , gọi  $Q$  là giao điểm của  $EP$  và  $AD$ . Ta có

- $(MNP) \cap (ABC) = MN$ .
- $(MNP) \cap (BCD) = MP$ .
- $(MNP) \cap (ABD) = PQ$ .
- $(MNP) \cap (ACD) = QN$ .

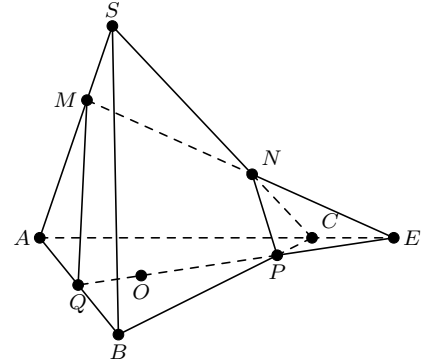
Vậy thiết diện cắt tứ diện  $ABCD$  bởi mặt phẳng  $(MNP)$  là tứ giác  $MNPQ$ . Hay thiết diện cắt tứ diện  $ABCD$  bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  là tứ giác  $MNPQ$ .



**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện  $SABC$  và  $O$  là một điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh  $SA$  và  $SC$  sao cho  $MN$  không song song với  $AC$ . Xác định thiết diện cắt tứ diện  $SABC$  bởi mặt phẳng  $(MNO)$ ?

### Lời giải.

Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , do  $MN$  và  $AC$  không song song nên chúng cắt nhau giả sử tại  $E$ . Khi đó điểm  $E$  nằm ngoài đoạn  $AC$ .  
 Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , gọi  $P, Q$  lần lượt là giao điểm của  $EO$  với  $BC$  và  $AB$ . Ta có



- $(MNO) \cap (SAC) = MN$ .
- $(MNO) \cap (SBC) = NP$ .
- $(MNO) \cap (ABC) = PQ$ .
- $(MNO) \cap (SAB) = QM$ .

Vậy thiết diện cắt tứ diện  $SABC$  bởi mặt phẳng  $(MNO)$  là tứ giác  $MNPQ$ . □

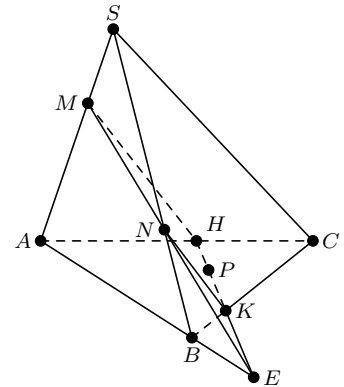
## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho hình chóp  $S.ABC$ . Trên các cạnh  $SA, SB$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $MN$  không song song với  $AB$ . Gọi  $P$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$ . Xác định giao tuyến của  $(MNP)$  và  $(ABC)$  từ đó suy ra thiết diện khi cắt hình chóp  $S.ABC$  bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

**Lời giải.**

Trong mặt phẳng  $(SAB)$ , do  $MN$  không song song với  $AB$  nên chúng cắt nhau giả sử tại  $E$ . Khi đó  $E$  nằm ngoài đoạn  $AB$ .

Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , gọi  $K, H$  lần lượt là giao điểm của  $EP$  với các đoạn  $BC, AC$  (Vì  $P$  thuộc miền trong tam giác  $(ABC)$ ). Khi đó ta có



- $(MNP) \cap (SAB) = MN$ .
- $(MNP) \cap (SBC) = NK$ .
- $(MNP) \cap (ABC) = KH$ .
- $(MNP) \cap (SAC) = HM$ .

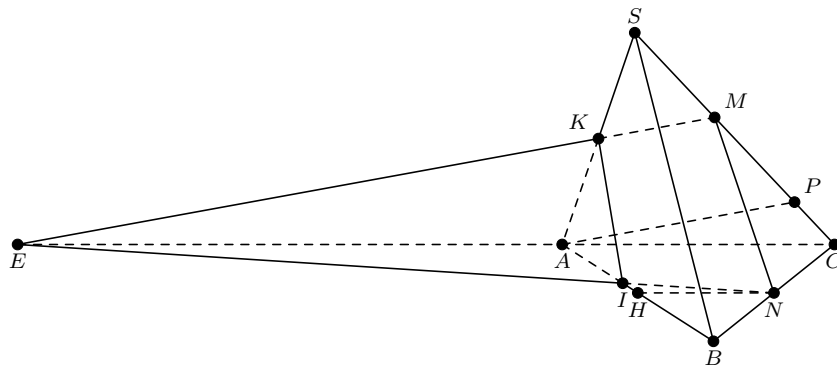
Vậy thiết diện cắt hình chóp  $S.ABC$  bởi mặt phẳng  $(MNP)$  là tứ giác  $MNKH$ . □

**BÀI 2.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $K, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, BC$  và  $M$  là điểm thuộc đoạn  $SC$  sao cho  $3SM = 2MC$ .

① Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng  $(KMN)$ .

② Mặt phẳng  $(KMN)$  cắt  $AB$  tại  $I$ . Tính tỉ số  $\frac{IA}{IB}$ .

**Lời giải.**



- ① Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , vì  $\frac{SM}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SC} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2} = \frac{SK}{SA}$  nên  $KM$  không song song với  $AC$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $KM$  và  $AC$ .  
 Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $EN$  và  $AB$ , khi đó  $I$  là giao điểm của  $AB$  với  $(KMN)$ .  
 Ta có

- $(KMN) \cap (SAC) = MK$ .
- $(KMN) \cap (SAB) = KI$ .
- $(KMN) \cap (ABC) = IN$ .
- $(KMN) \cap (SBC) = NM$ .

Vậy thiết diện cắt tứ diện  $SABC$  bởi mặt phẳng  $(KMN)$  là tứ giác  $MNIK$ .

② Trên  $SC$  lấy điểm  $P$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $SP$ . Khi đó ta có

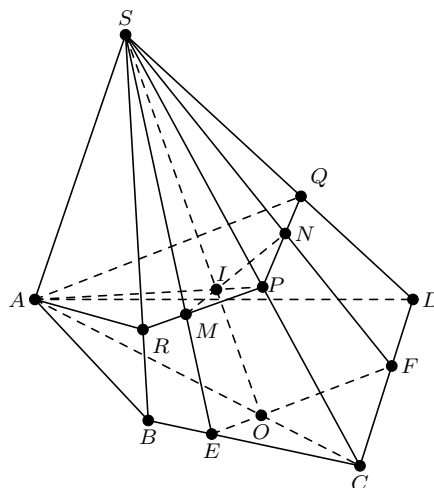
- $AP \parallel KM$  theo tính chất đường trung bình của tam giác  $SAP$  nên  $AP \parallel EM \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{PC}{PM} = \frac{1}{2}$ .
- Gọi  $H$  là trung điểm của  $AB$ , khi đó  $NH \parallel AC$  (Tính chất đường trung bình).  
Do đó  $\frac{IH}{IA} = \frac{NH}{AE} = \frac{1}{4} \Rightarrow AI = \frac{4}{5}AH = \frac{2}{5}AB \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{2}{3}$ .

□

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Lấy một điểm  $M$  thuộc miền trong tam giác  $SBC$ . Lấy điểm  $N$  thuộc miền trong tam giác  $SCD$ .

- ① Tìm giao điểm của  $MN$  và mặt phẳng  $(SAC)$ .
- ② Tìm giao điểm của  $SC$  và mặt phẳng  $(AMN)$ .
- ③ Tìm thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(AMN)$ .

**Lời giải.**



- ① Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $EF$ . Khi đó  $SO = (SAC) \cap (SEF)$ . Trong mặt phẳng  $(SEF)$ , gọi  $\{I\} = MN \cap SO$ . Ta có  $I \in SO \Rightarrow I \in (SAC)$ . Mà  $I \in MN$  nên  $\{I\} = MN \cap (SAC)$ .
- ② Theo chứng minh trên ta suy ra  $AI = (AMN) \cap (SAC)$ . Trong mặt phẳng  $(SAC)$  gọi  $P$  là giao điểm của  $AI$  và  $SC$ . Khi đó do  $P \in AI \Rightarrow P \in (AMN)$ . Mà  $P \in SC$  nên  $\{P\} = SC \cap (AMN)$ .
- ③ Do  $M, P \in (SBC)$  nên trong mặt phẳng  $(SBC)$ , gọi  $R$  là giao điểm của  $PM$  với  $SB$ . Ta có  $PM \subset (AMN)$  nên  $R \in (AMN)$ . Tương tự, trong mặt phẳng  $(SCD)$ , gọi  $Q$  là giao điểm của  $PN$  với  $SD$  ta có  $Q \in (AMN)$ . Vì vậy
  - $(AMN) \cap (SAB) = AR$ .
  - $(AMN) \cap (SBC) = RP$ .
  - $(AMN) \cap (SCD) = PQ$ .
  - $(AMN) \cap (SAD) = QA$ .

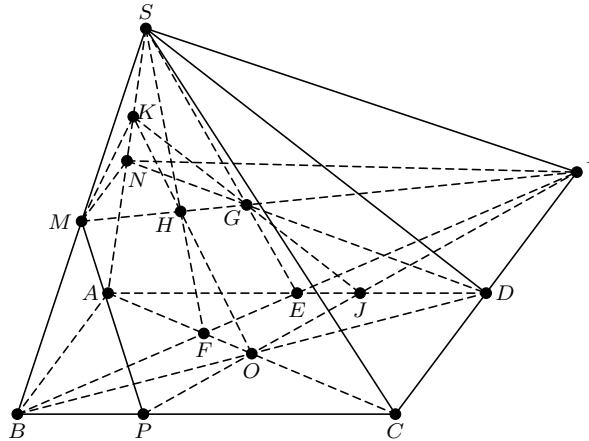
Vậy thiết diện cắt hình chóp  $S.ABCD$  bởi mặt phẳng  $(AMN)$  là tứ giác  $ARPQ$ .

□

**BÀI 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAD$ .

- ① Tìm giao điểm  $I$  của  $GM$  với  $(ABCD)$ . Chứng minh  $I$  thuộc đường thẳng  $CD$  và  $IC = 2ID$ .
- ② Tìm giao điểm  $J$  của  $AD$  và  $(OMG)$ . Tính tỉ số  $\frac{JA}{JD}$ .
- ③ Tìm giao điểm  $K$  của  $SA$  và  $(OMG)$ . Tính tỉ số  $\frac{KA}{KS}$ .
- ④ Tìm thiết diện cắt hình chóp  $S.ABCD$  bởi mặt phẳng  $(OMG)$ .

**Lời giải.**



- ① Gọi  $E, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, SA$ . Ta có  $M$  là trung điểm của  $SB$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SAD$ . Trong mặt phẳng  $(SBE)$  có  $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} = \frac{SG}{SE}$  suy ra  $MG$  và  $BE$  không song song. Do đó  $MG$  và  $BE$  cắt nhau.

Lại do  $BE \subset (ABCD)$ ,  $\{I\} = MG \cap (ABCD)$  nên  $I \in BE$ .

Vậy giao điểm  $I$  của  $MG$  và  $(ABCD)$  là giao điểm  $I$  của  $MG$  và  $BE$ .

Do  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SAB$  nên  $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$ . Suy ra  $MN, CD$  xác định mặt phẳng  $(MNDC)$ .

Lại do  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAD$  nên  $G \in ND \Rightarrow G \in (MNDC)$ ,  $I \in MG \Rightarrow I \in (MNDC)$ .

Mặt khác  $(MNDC) \cap (ABCD) = CD$ ,  $I \in (MNDC)$ ,  $I \in (ABCD)$  nên  $I \in CD$ .

Mà  $AD \parallel BC$  nên  $ED \parallel BC \Rightarrow \frac{ID}{IC} = \frac{ED}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IC = 2ID$ .

- ② Dễ thấy  $I \in (OMG)$ . Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $J'$  là giao điểm của  $AD$  và  $OI$ . Vì  $OI \subset (OMG) \Rightarrow J' \in (OMG)$  nên  $AD \cap (OMG) = \{J'\}$ .

Mà  $J$  là giao điểm của  $AD$  và  $(OMG)$  (gt) nên  $J' \equiv J$ . Vậy  $J$  là giao điểm của  $IO$  và  $AD$ .

Dễ thấy  $J$  là trọng tâm  $\triangle IAC$  nên  $\frac{JA}{JD} = 2$ .

- ③ Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $F$  là giao điểm của  $BI$  và  $AC$  suy ra  $(SBI) \cap (SAC) = SF$ .

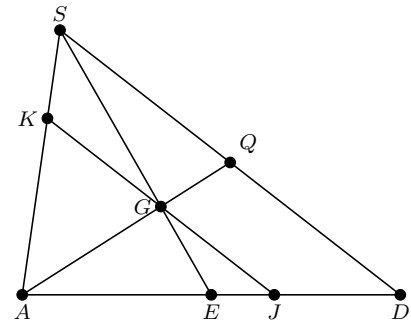
Trong mặt phẳng  $(SBI)$ , gọi  $H$  là giao điểm của  $MI$  và  $SF$ . Ta có  $H \in MG \Rightarrow OH \subset (OMG)$  và  $H$  thuộc  $(SAC)$ .

Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , gọi  $K'$  là giao điểm của  $OH$  và  $SA$ . Khi đó do  $K' \in OH \Rightarrow K' \in (OMG) \Rightarrow SA \cap (OMG) = \{K'\}$  hay  $K' \equiv K$ . Vậy  $K$  là giao điểm của  $OH$  với  $SA$ .

Lại có  $K, G, J$  là các điểm chung của hai mặt phẳng  $(OMG)$  và  $(SAD)$  nên  $K, G, J$  thẳng hàng.

Gọi  $Q$  là trung điểm của  $SD$ , vì  $J$  là trọng tâm  $\triangle IAC$ . Xét  $\triangle SAD$  có

$$\frac{AG}{AQ} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AD} \Rightarrow GJ \parallel SD \Rightarrow KJ \parallel SD \Rightarrow \frac{KA}{KS} = \frac{JA}{JD} = 2.$$



- ④ Từ chứng minh trên ta suy ra

- $(OMG) \cap (SAB) = KM$ .
- $(OMG) \cap (SBC) = MP$ .
- $(OMG) \cap (ABCD) = PJ$ .
- $(OMG) \cap (SAD) = JK$ .

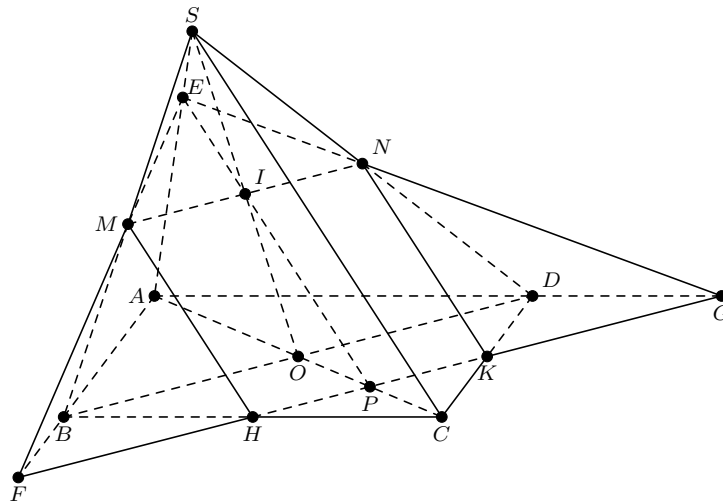
Vậy thiết diện cắt hình chóp  $S.ABCD$  bởi mặt phẳng  $(OMG)$  là tứ giác  $KMPJ$ .

□

**BÀI 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SD$  và  $OC$ .

- ① Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(MNP)$  với các mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(ABCD)$ .
- ② Tìm giao điểm của  $SA$  với mặt phẳng  $(MNP)$ .
- ③ Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  với mặt phẳng  $(MNP)$ . Tính tỉ số mà mặt phẳng  $(MNP)$  chia các cạnh  $SA, BC$  và  $CD$ .

**Lời giải.**



- ① Do  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SD$  nên  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SBD$ , suy ra  $MN \parallel BD$ .  
Ta có  $(PMN) \cap (SBD) = MN$ .  
Trong mặt phẳng  $(SBD)$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  và  $SO$ . Khi đó vì  $I \in SO \Rightarrow I \in (SAC)$ ,  $P \in AC \Rightarrow P \in (SAC)$  suy ra  $(PMN) \cap (SAC) = PI$ .  
Hai mặt phẳng  $(PMN)$  và  $(ABCD)$  có  $P$  là một điểm chung. Mà  $MN \parallel BD$ ,  $P \notin MN$ ,  $P \notin BD$  nên giao tuyến của  $(PMN)$  và  $(ABCD)$  là đường thẳng qua  $P$ , song song với  $MN$  và song song với  $BD$ , cắt các cạnh  $BC, CD$  lần lượt tại  $H$  và  $K$ .
- ② Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , gọi  $E$  là giao điểm của  $PI$  và  $SA$ . Ta có
  - $E \in PI$ ,  $PI \subset (PMN) \Rightarrow E \in (PMN)$ .
  - Mà  $E \in SA$  nên  $E$  là giao điểm của  $SA$  với  $(PMN)$ .
- ③ Ta có  $(PMN)$  lần lượt giao với các cạnh  $SA, SB, BC, CD, SD$  tại các điểm  $E, M, H, K, N$  nên
  - $(PMN) \cap (SAB) = EM$ .
  - $(PMN) \cap (SBC) = MH$ .
  - $(PMN) \cap (ABCD) = HK$ .
  - $(PMN) \cap (SCD) = KN$ .
  - $(PMN) \cap (SAD) = NE$ .

Vậy thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  với mặt phẳng  $(PMN)$  là ngũ giác  $EMHKN$ . Vì  $MN$  là đường trung bình trong tam giác  $ABD$  nên  $I$  là trung điểm của  $SO$ .

Trong tam giác  $SOC$  có  $IP$  là đường trung bình nên  $IP \parallel SC$ .

Do đó trong tam giác  $SAC$  có  $PE \parallel SC$  suy ra  $\frac{ES}{EA} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{3}$ .

Lại có  $P$  là trung điểm của  $OC$ ,  $HK$  qua  $P$  và  $HK \parallel BD$  nên  $HK$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$ .

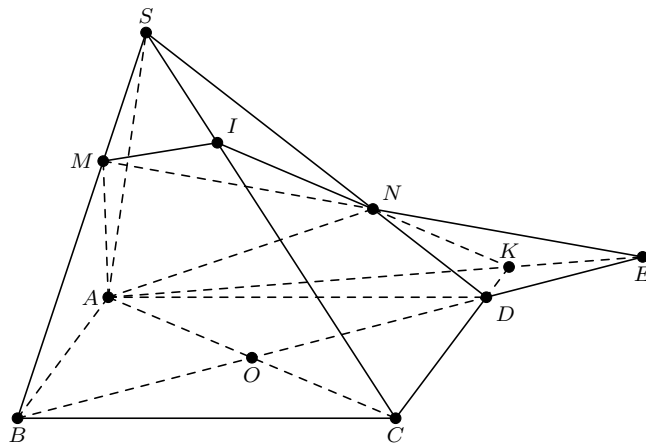
Do đó  $\frac{HB}{HC} = \frac{KD}{KC} = 1$ .

□

**BÀI 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Trên các cạnh  $SB, SD$  ta lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(SCD)$ .
- ② Tìm giao điểm  $I$  của  $SC$  và mặt phẳng  $(AMN)$ . Suy ra thiết diện của mặt phẳng  $(AMN)$  và hình chóp  $S.ABCD$ .
- ③ Gọi  $K$  là giao điểm của  $IN$  và  $CD$ . Tính tỉ số  $\frac{KC}{KD}$ .

**Lời giải.**



- ① Trong mặt phẳng  $(SBD)$ . Theo bài ra ta có  $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SB} \neq \frac{SN}{SD}$ . Do đó  $MN$  cắt  $BD$  giả sử tại  $E$ .

Hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(ABCD)$  có hai điểm chung  $A$  và  $E$  nên  $(AMN) \cap (ABCD) = AE$ .

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $K$  là giao điểm của  $AE$  và  $CD$ . Khi đó

- $K \in AE \Rightarrow K \in (AMN)$ .
- $K \in CD \Rightarrow K \in (SCD)$ . Suy ra  $K$  là một điểm chung của  $(AMN)$  và  $(SCD)$ .
- Mặt khác  $(AMN)$  và  $(SCD)$  có điểm  $N$  chung (vì  $N \in SD$ ).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng  $KN$ .

- ② Trong mặt phẳng  $(SCD)$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $KN$  và  $SC$ . Khi đó  $I \in KN \Rightarrow I \in (AMN)$ . Vậy  $I$  là giao điểm của  $SC$  và  $(AMN)$ .  
Do  $(AMN)$  cắt các cạnh  $SA, SB, SC, SD$  lần lượt tại các điểm  $A, M, I, N$  nên

- $(AMN) \cap (SAB) = AM$ .
- $(AMN) \cap (SBC) = MI$ .
- $(AMN) \cap (SCD) = IN$ .
- $(AMN) \cap (SAD) = NA$ .

Suy ra thiết diện của mặt phẳng  $(AMN)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là tứ giác  $AMIN$ .

③ Ta có  $K \in CD$  và  $K, I, N$  thẳng hàng.

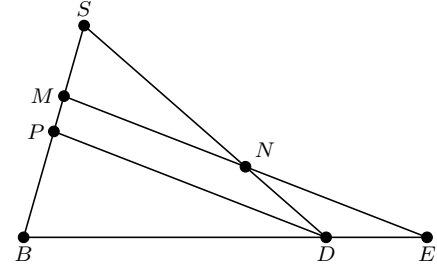
Lấy điểm  $P$  trên cạnh  $SB$  sao cho  $PD \parallel MN$ .

Khi đó ta có  $\frac{SM}{SP} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MP}{MM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MP}{MB} = \frac{1}{4}$  vì  $BM = 2SM$ .

Xét tam giác  $BME$ , ta cũng có  $PD \parallel ME$  nên  $\frac{ED}{EB} = \frac{MP}{MB} = \frac{1}{4}$ .

Xét tam giác  $ABE$ , có  $KD \parallel AB$  nên  $\frac{KD}{AB} = \frac{ED}{EB} = \frac{1}{4}$ .

Suy ra  $\frac{KD}{DC} = \frac{KD}{AB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{KD}{KC} = \frac{KD}{KD+DC} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{KC}{KD} = 5$ .



□

### 3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**BÀI 7.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên  $AB$  lấy điểm  $M$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $N$  thỏa mãn  $BN = 2NC$ . Gọi  $P$  là trung điểm của  $CD$ . Xác định thiết diện của tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

**BÀI 8.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang đáy lớn  $AD$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $SB$ . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(AMD)$ .

**BÀI 9.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh  $BC, CD, SA$ . Tìm thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  cắt bởi mặt phẳng  $(MNP)$ .

**BÀI 10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang đáy lớn  $AD$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB$  và  $AB$  và  $M$  là một điểm nằm trong hình thang  $ABCD$  sao cho đường thẳng  $KM$  cắt hai đường thẳng  $AD$  và  $CD$ . Tìm thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(HKM)$ .

**BÀI 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang đáy lớn  $AB$ . Lấy các điểm  $M, N$  lần lượt trên các cạnh  $SC$  và  $SD$ . Tìm thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  với các mặt phẳng  $(ABM)$  và  $(AMN)$ .

**BÀI 12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Lấy điểm  $M$  bất kỳ trên cạnh  $SA$ . Tìm thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  với mặt phẳng  $(MHK)$ .

**BÀI 13.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$ ,  $J$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $C$ ,  $K$  là điểm đối xứng với  $D$  qua  $B$ . Xác định thiết diện của tứ diện  $ABCD$  khi cắt bởi mặt phẳng  $(IJK)$  và tính diện tích của thiết diện này.

**BÀI 14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $K$  là trọng tâm của tam giác  $SAC$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $CD$  và  $SD$ .

① Tìm giao điểm  $H$  của đường thẳng  $IK$  với mặt phẳng  $(SAB)$ .

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(IJK)$ .

**BÀI 15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  không là hình thang, điểm  $P$  nằm trong tam giác  $SAB$  và điểm  $M$  thuộc cạnh  $SD$  sao cho  $MD = 2MS$ .

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(PCD)$ .

② Tìm giao điểm của  $SC$  với mặt phẳng  $(ABM)$ .

③ Gọi  $N$  là trung điểm của  $AD$ . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(MNP)$  và hình chóp  $S.ABCD$ .

#### □ DẠNG 1.4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

*Phương pháp giải*

*Giả sử chứng minh ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.*

— Xét hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ . Chứng minh ba điểm  $I, J, K$  là ba điểm chung của  $(P)$  và  $(Q)$ .

— Khi đó  $I, J, K$  thuộc giao tuyến của  $(P)$  và  $(Q)$  hay  $I, J, K$  thẳng hàng.

1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $SABC$ . Trên các cạnh  $SA, SB, SC$  lần lượt lấy  $M, N, P$  sao cho  $MN$  cắt  $AB$  tại  $I, NP$  cắt  $BC$  tại  $J$  và  $MP$  cắt  $AC$  tại  $K$ . Chứng minh rằng ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Xét hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(MNP)$ . Ta có

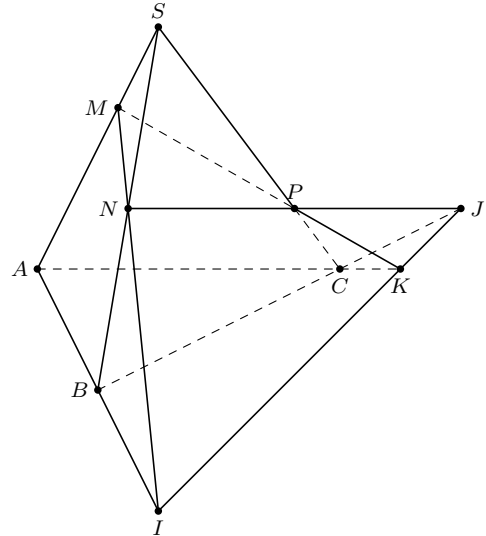
$$\begin{cases} I \in AB \subset (ABC) \\ I \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC) \cap (MNP). \quad (1)$$

$$\begin{cases} J \in BC \subset (ABC) \\ J \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABC) \cap (MNP). \quad (2)$$

$$\begin{cases} K \in AC \subset (ABC) \\ K \in MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABC) \cap (MNP). \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $I, J, K$  cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của  $(ABC)$  và  $(MNP)$ .

Vậy ba điểm  $I, J, K$  thẳng hàng.



□

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$  hai điểm,  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SD$ , điểm  $P$  thuộc  $SC$  và không là trung điểm của  $SC$ .

- ① Tìm giao điểm  $I$  của  $SO$  với mặt phẳng  $(MNP)$ .
- ② Tìm giao điểm  $Q$  của  $SA$  với mặt phẳng  $(MNP)$ .
- ③ Gọi  $F, G, H$  lần lượt là giao điểm của  $QM$  và  $AB$ ,  $QP$  và  $AC$ ,  $QN$  và  $AD$ . Chứng minh ba điểm  $F, G, H$  thẳng hàng.

- ① Trong mặt phẳng  $(SBD)$ , gọi  $I = SO \cap MN$ .  
Ta có  $\begin{cases} I \in SO \\ I \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP)$ .

- ② Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , gọi  $Q = SA \cap IP$ .  
Ta có  $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in IP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SA \cap (MNP)$ .

- ③ Xét hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(MNPQ)$ . Ta có

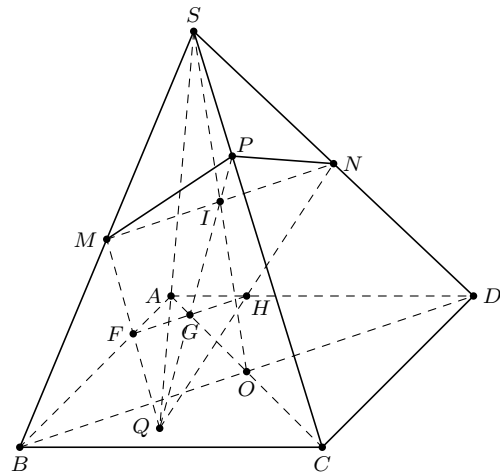
$$\begin{cases} F \in AB \subset (ABCD) \\ F \in QM \subset (MNPQ) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABCD) \cap (MNPQ). \quad (1)$$

$$\begin{cases} G \in AC \subset (ABCD) \\ G \in QP \subset (MNPQ) \end{cases} \Rightarrow G \in (ABCD) \cap (MNPQ). \quad (2)$$

$$\begin{cases} H \in AD \subset (ABCD) \\ H \in QN \subset (MNPQ) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABCD) \cap (MNPQ). \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $F, G, H$  cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của  $(ABCD)$  và  $(MNPQ)$ .

Vậy ba điểm  $F, G, H$  thẳng hàng.



## 2 BÀI TẬP ỨNG DỤNG

**BÀI 1.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD$ .

- ① Tìm giao tuyến của  $(ADN)$  và  $(ABP)$ .
- ② Gọi  $I = AG \cap MP$  và  $J = CM \cap AN$ . Chứng minh  $D, I, J$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Ta có  $A \in (ADN) \cap (ABP)$ .

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} G \in DN \subset (ADN) \\ G \in BP \subset (ABP) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP).$$

Từ (1) và (2) suy ra  $(ADN) \cap (ABP) = AG$ .

- ② Xét hai mặt phẳng  $(CDM)$  và  $(ADN)$ . Ta có

$$+ D \in (CDM) \cap (ADN).$$

$$+ \begin{cases} I \in JD \subset (CDM) \\ I \in AG \subset (AND) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (CDM) \cap (ADN).$$

$$+ \begin{cases} J \in CM \subset (CDM) \\ J \in AN \subset (AND) \end{cases}$$

$$\Rightarrow J \in (CDM) \cap (ADN).$$

Từ (3), (4), (5) suy ra  $D, I, J$  thẳng hàng.

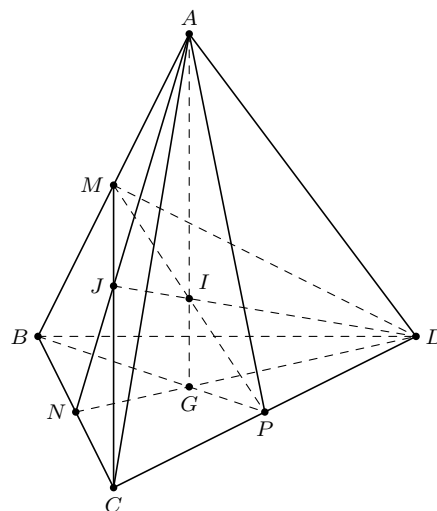
(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

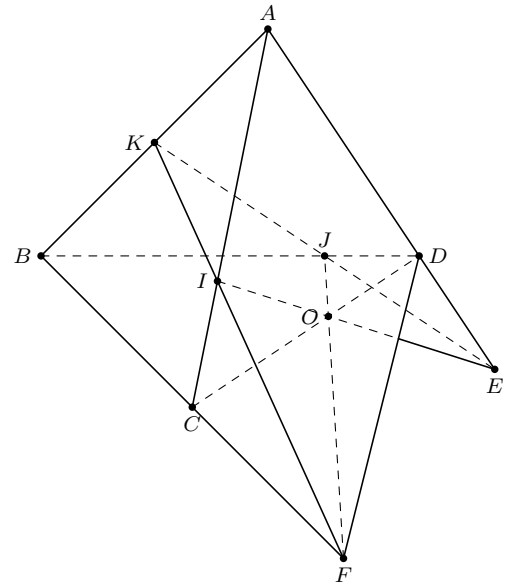


□

**BÀI 2.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $K$  là trung điểm của  $AB$ . Lấy  $I, J$  lần lượt thuộc  $AC, BD$  sao cho  $IA = 2IC$  và  $JB = 3JD$ .

- ① Tìm giao điểm  $E$  của  $AD$  và  $(IJK)$ .
- ② Tìm giao tuyến  $d$  của  $(IJK)$  và  $(BCD)$ .
- ③ Gọi  $O$  là giao điểm của  $d$  với  $CD$ . Chứng minh  $I, O, E$  thẳng hàng.
- ④ Tính các tỉ số  $\frac{OI}{OE}$  và  $\frac{OC}{OD}$ .

**Lời giải.**



① Trong  $(ABD)$ , gọi  $AD \cap KJ = E$ . Ta có  

$$\begin{cases} E \in AD \\ E \in KJ \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = AD \cap (IJK).$$

② Trong  $(ABC)$ , gọi  $KI \cap BC = F$ . Ta có  

$$+ \begin{cases} J \in (IJK) \\ J \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (IJK) \cap (BCD). \quad (1)$$

$$+ \begin{cases} F \in KI \subset (IJK) \\ F \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJK) \cap (BCD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $(IJK) \cap (BCD) = FJ$  hay  $d \equiv FJ$ .

③ Trong  $(BCD)$ ,  $O = FJ \cap CD$ .

Xét hai mặt phẳng  $(IJK)$  và  $(ACD)$ . Ta có

$$+ \begin{cases} I \in (IJK) \\ I \in AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IJK) \cap (ACD). \quad (3)$$

$$+ \begin{cases} O \in FJ \subset (IJK) \\ O \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow O \in (IJK) \cap (ACD). \quad (4)$$

$$+ \begin{cases} E \in KJ \subset (IJK) \\ E \in AD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJK) \cap (ACD). \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra  $I, O, E$  thẳng hàng.

④ Áp dụng định lí Menelaus trong các tam giác sau.

Tam giác  $ABC$  có  $K, I, F$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{FC}{FB} \cdot \frac{KB}{KA} \cdot \frac{IA}{IC} = 1 \Leftrightarrow \frac{FC}{FB} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \frac{FC}{FB} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow C$  là trung điểm của  $BF$ .

Tam giác  $BCD$  có  $F, O, J$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{OC}{OD} \cdot \frac{JD}{JB} \cdot \frac{FB}{FC} = 1 \Leftrightarrow \frac{OC}{OD} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{3}{2}.$$

Tam giác  $ABD$  có  $K, J, E$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{ED}{EA} \cdot \frac{KA}{KB} \cdot \frac{JB}{JD} = 1 \Leftrightarrow \frac{ED}{EA} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{1}{3}.$$

Tam giác  $AIE$  có  $C, O, D$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{OI}{OE} \cdot \frac{DE}{DA} \cdot \frac{CA}{CI} = 1 \Leftrightarrow \frac{OI}{OE} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{OI}{OE} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{OI}{OE} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{OC}{OD} = \frac{3}{2}.$$

□

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang,  $AD$  là đáy lớn và  $AD = 2BC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, SC$  và  $O = AC \cap BD$ .

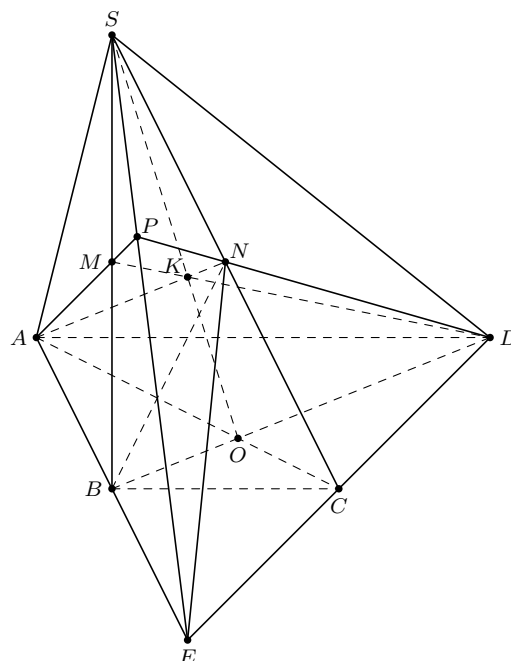
① Tìm giao tuyến của  $(ABN)$  và  $(SCD)$ .

② Tìm giao điểm  $P$  của  $DN$  và  $(SAB)$ .

③ Gọi  $K = AN \cap DM$ . Chứng minh  $S, K, O$  thẳng hàng. Tính tỉ số  $\frac{KS}{KO}$ .

Lời giải.

- (3)

$$\Rightarrow \frac{KS}{KO} \cdot \frac{AO}{AC} \cdot \frac{NC}{NS} = 1 \Leftrightarrow \frac{KS}{KO} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{KS}{KO} = \frac{3}{2}.$$


9

④ Chứng minh rằng ba điểm  $B, E, F$  thẳng hàng.

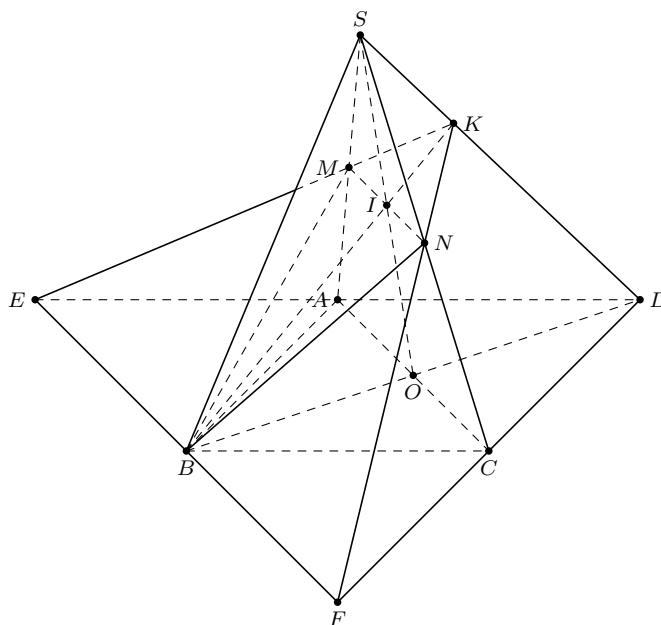


- ① Ta có  $(BMN) \cap (SAB) = BM$  và  $(BMN) \cap (SBC) = BN$ .
- ② Trong  $(SAC)$ , gọi  $SO \cap MN = I$   
 $\Rightarrow I = SO \cap (BMN)$ .  
 Trong  $(SBD)$ , gọi  $SD \cap BI = K$   
 $\Rightarrow K = SD \cap (BMN)$ .
- ③ Trong  $(SAD)$ , gọi  $MK \cap AD = E$   
 $\Rightarrow E = AD \cap (BMN)$ .  
 Trong  $(SCD)$ , gọi  $NK \cap CD = F$   
 $\Rightarrow F = CD \cap (BMN)$ .
- ④ Xét hai mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $(BMN)$  có  

$$+ \begin{cases} B \in (ABCD) \\ B \in (BMN) \end{cases} \Rightarrow B \in (ABCD) \cap (BMN). \quad (1)$$
  

$$+ \begin{cases} E \in AD \subset (ABCD) \\ E \in (BMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (ABCD) \cap (BMN). \quad (2)$$
  

$$+ \begin{cases} F \in CD \subset (ABCD) \\ F \in (BMN) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABCD) \cap (BMN). \quad (3)$$
  
 Từ (1), (2), (3) suy ra  $B, E, F$  thẳng hàng.



□

**BÀI 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $I$  và  $J$  là hai điểm trên hai cạnh  $AD, SB$ .

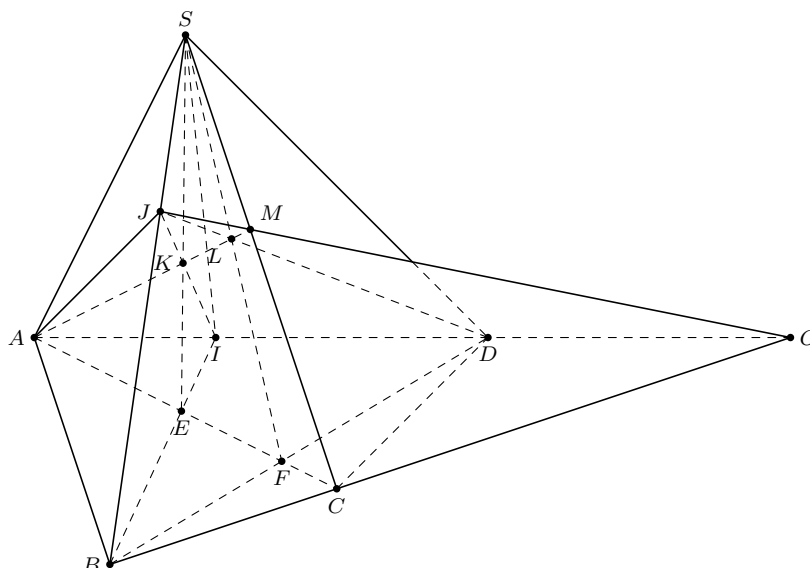
- ① Tìm giao tuyến của  $(SBI)$  và  $(SAC)$ . Tìm giao điểm  $K$  của  $IJ$  và  $(SAC)$ .
- ② Tìm giao tuyến của  $(SBD)$  và  $(SAC)$ . Tìm giao điểm  $L$  của  $DJ$  và  $(SAC)$ .
- ③ Gọi  $O = AD \cap BC, M = OJ \cap SC$ . Chứng minh rằng  $A, K, L, M$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Ta có  $S \in (SBI) \cap (SAC)$ .  
 Trong  $(ABCD)$ , gọi  $BI \cap AC = E$   
 $\Rightarrow E \in (SBI) \cap (SAC)$   
 Suy ra  $(SBI) \cap (SAC) = SE$ .  
 Trong  $(SBI)$ , gọi  $IJ \cap SE = K$   
 $\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$ .

- ② Ta có  $S \in (SBD) \cap (SAC)$ .  
 Trong  $(ABCD)$ , gọi  $AC \cap BD = F$   
 $\Rightarrow F \in (SBD) \cap (SAC)$ .  
 Suy ra  $(SBD) \cap (SAC) = SF$ .  
 Trong  $(SBD)$ , gọi  $DJ \cap SF = L$   
 $\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$ .

- ③ Xét  $(SAC)$  và  $(AOJ)$  có  
 $+ A \in (SAC) \cap (AOJ)$ . (1)  
 $+ \begin{cases} K \in SE \subset (SAC) \\ K \in IJ \subset (AOJ) \end{cases}$   
 $\Rightarrow K \in (SAC) \cap (AOJ)$ . (2)  
 $+ \begin{cases} L \in SF \subset (SAC) \\ L \in JD \subset (AOJ) \end{cases}$   
 $\Rightarrow L \in (SAC) \cap (AOJ)$ . (3)  
 $+ \begin{cases} M \in SC \subset (SAC) \\ M \in OJ \subset (AOJ) \end{cases}$   
 $\Rightarrow M \in (SAC) \cap (AOJ)$ . (4)  
 Từ (1), (2), (3), (4) suy ra  $A, K, L, M$  thẳng hàng.



□

**BÀI 6.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AB, AC, BD$  lần lượt lấy ba điểm  $E, F, G$  sao cho  $AB = 3AE$ ,  $AC = 2AF$ ,  $DB = 4DG$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(EFG)$  và  $(BCD)$ .
- ② Tìm giao điểm  $H$  của đường thẳng  $CD$  với  $(EFG)$ . Tính tỉ số  $\frac{HC}{HD}$ .
- ③ Tìm giao điểm  $I$  của đường thẳng  $AD$  với  $(EFG)$ . Tính tỉ số  $\frac{IA}{ID}$ .
- ④ Chứng minh ba điểm  $F, H, I$  thẳng hàng.
- ⑤ Gọi  $J$  là trung điểm của  $BC$ ,  $AJ$  cắt  $EF$  tại  $K$ . Tính tỉ số  $\frac{AK}{AJ}$ .

**Lời giải.**

① Trong  $(ABC)$ , gọi  $EF \cap BC = M \Rightarrow (EFG) \cap (BCD) = MG$ .

② Trong  $(BCD)$ , gọi  $MG \cap CD = H \Rightarrow H = CD \cap (EFG)$ .

Áp dụng định lý Menelaus với các tam giác sau.

Tam giác  $ABC$  có  $E, F, M$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{MC}{MB} \cdot \frac{EB}{EA} \cdot \frac{FA}{FC} = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}.$$

Tam giác  $BCD$  có  $M, H, G$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{HC}{HD} \cdot \frac{GD}{GB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow \frac{HC}{HD} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{HC}{HD} = \frac{3}{2}.$$

③ Trong  $(ABD)$ , gọi  $AD \cap EG = I \Rightarrow I = AD \cap (EFG)$ .

Tam giác  $ABD$  có  $E, G, I$  thẳng hàng

$$\Rightarrow \frac{IA}{ID} \cdot \frac{GD}{GB} \cdot \frac{EB}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{IA}{ID} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{IA}{ID} = \frac{3}{2}.$$

④ Xét hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(EFG)$  có

$$+ \begin{cases} F \in AC \subset (ACD) \\ F \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow F \in (ACD) \cap (EFG). (1)$$

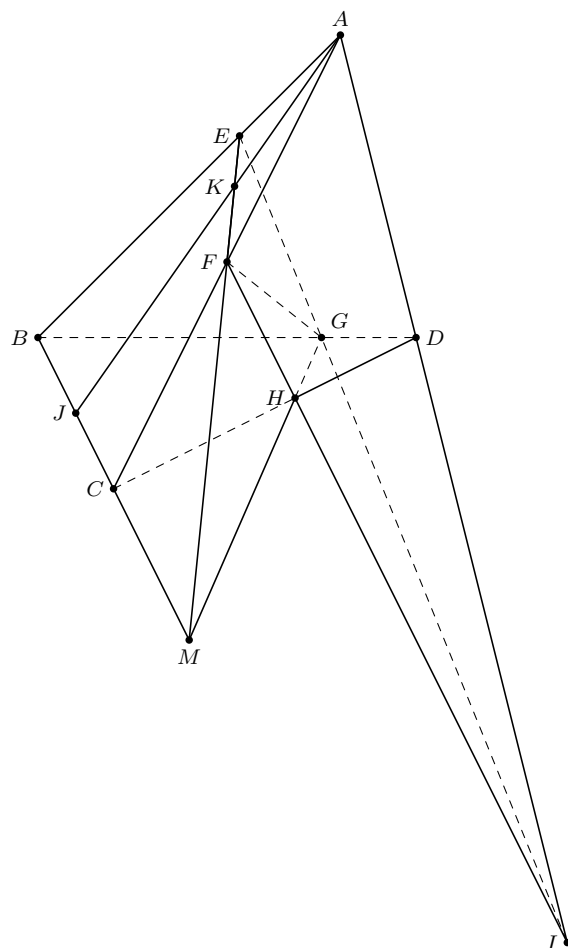
$$+ \begin{cases} H \in CD \subset (ACD) \\ H \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow H \in (ACD) \cap (EFG). (2)$$

$$+ \begin{cases} I \in AD \subset (ACD) \\ I \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow I \in (ACD) \cap (EFG). (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $F, H, I$  thẳng hàng.

⑤ Tam giác  $AJC$  có  $K, F, M$  thẳng hàng

$$\frac{KA}{KJ} \cdot \frac{MJ}{MC} \cdot \frac{FC}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{KA}{KJ} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{KA}{KJ} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{AK}{AJ} = \frac{2}{5}.$$



□

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AD$  không song song với  $BC$ . Lấy  $M$  thuộc  $SB$  và  $O$  là giao điểm  $AC$  với  $BD$ .

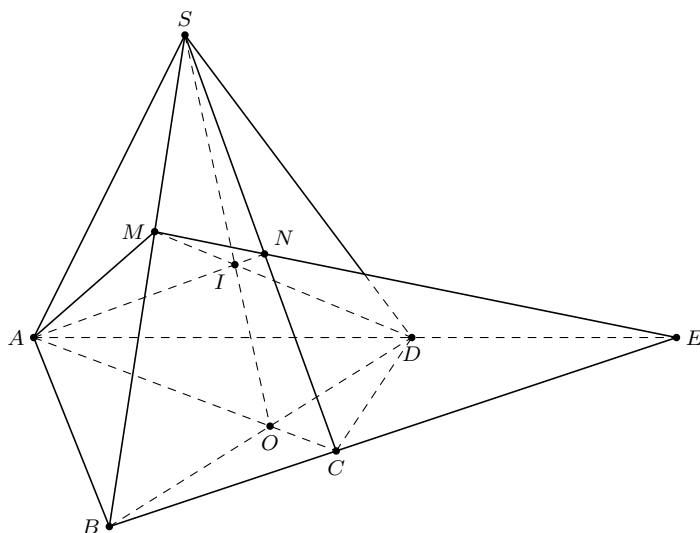
① Tìm giao điểm  $N$  của  $SC$  với  $(AMD)$ .

② Gọi  $I = AN \cap DM$ . Chứng minh  $S, I, O$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Trong  $(ABCD)$ , gọi  $AD \cap BC = E$ .  
 Trong  $(SBC)$ , gọi  $SC \cap ME = N$   
 $\Rightarrow N = SC \cap (AMD)$ .

- ② Xét  $(SAC)$  và  $(SBD)$  có  
 $+ S \in (SAC) \cap (SBD)$ .  
 $+ \begin{cases} I \in AN \subset (SAC) \\ I \in DM \subset (SBD) \end{cases}$   
 $\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$ .  
 $+ \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$   
 $\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ .  
 Suy ra  $S, I, O$  thẳng hàng.



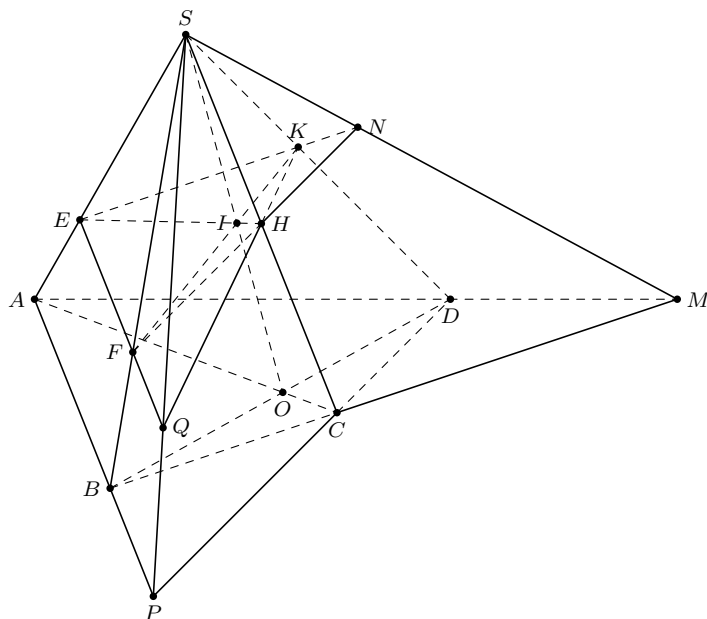
□

**BÀI 8.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $E, F, H$  lần lượt là các điểm thuộc cạnh  $SA, SB, SC$ .

- ① Tìm giao điểm  $K = SD \cap (EFH)$ .
- ② Gọi  $O = AC \cap BD$  và  $I = EH \cap FK$ . Chứng minh  $S, I, O$  thẳng hàng.
- ③ Gọi  $M = AD \cap BC$  và  $N = EK \cap FH$ . Chứng minh  $S, M, N$  thẳng hàng.
- ④ Gọi  $P = AB \cap CD$  và  $Q = EF \cap HK$ . Chứng minh  $S, P, Q$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Trong  $(SAC)$ , gọi  $I = EH \cap SO$ .  
 Trong  $(SBD)$ , gọi  $FI \cap SD = K$   
 $\Rightarrow K = SD \cap (EFH)$ .
- ② Hiển nhiên  $S, I, O$  thẳng hàng.
- ③ Chứng minh  $S, M, N$  là điểm chung của  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- ④ Chứng minh  $S, P, Q$  là điểm chung của  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .

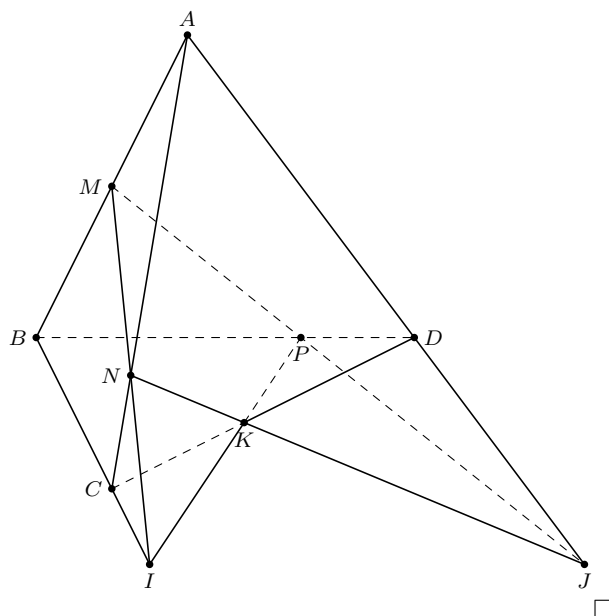


□

**BÀI 9.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là các điểm thuộc cạnh  $AB, AC, BD$  và  $MN \cap BC = I$ ,  $MP \cap AD = J$ ,  $NJ \cap IP = K$ . Chứng minh  $C, D, K$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

Chứng minh  $C, D, K$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$ .

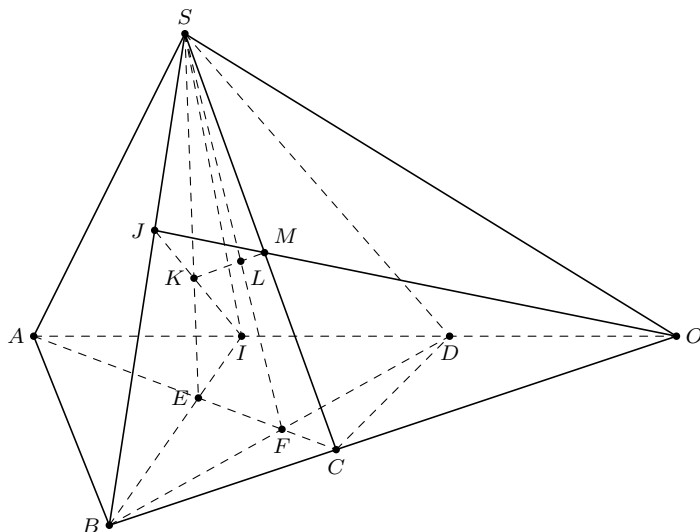


**BÀI 10.** Cho tứ giác  $ABCD$  có các cạnh đối đôi một không song song và điểm  $S \notin (ABCD)$ . Lấy điểm  $I$  thuộc cạnh  $AD$ , lấy điểm  $J$  thuộc cạnh  $SB$ .

- ① Tìm  $K = IJ \cap (SAC)$ .
- ② Tìm  $L = DJ \cap (SAC)$ .
- ③ Gọi  $O = AD \cap BC$ ,  $M = OJ \cap SC$ . Chứng minh rằng  $K, L, M$  thẳng hàng.

**Lời giải.**

- ① Gọi  $AC \cap BI = E$ ;  $IJ \cap SE = K$   
 $\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$ .
- ② Gọi  $AC \cap BD = F$ ;  $DJ \cap SF = L$   
 $\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$ .
- ③ Chứng minh  $K, L, M$  là điểm chung của  $(SAC)$  và  $(AOJ)$ .



**BÀI 11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh  $BC$  và  $SD$ .

- ① Tìm giao điểm  $I$  của  $BN$  và  $(SAC)$ .
- ② Tìm giao điểm  $J$  của  $MN$  và  $(SAC)$ .
- ③ Chứng minh  $I, J, C$  thẳng hàng.
- ④ Xác định thiết diện của mặt phẳng  $(BCN)$  với hình chóp.

**Lời giải.**

- 

7

**BÀI 12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M, N$  và  $B$ .

- Lời giải.**

- 

7

**BÀI 13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi  $M$ ,  $E$  là trung điểm  $SA$ ,  $AC$  và  $F \in CD$  sao cho  $CD = 3CF$ .

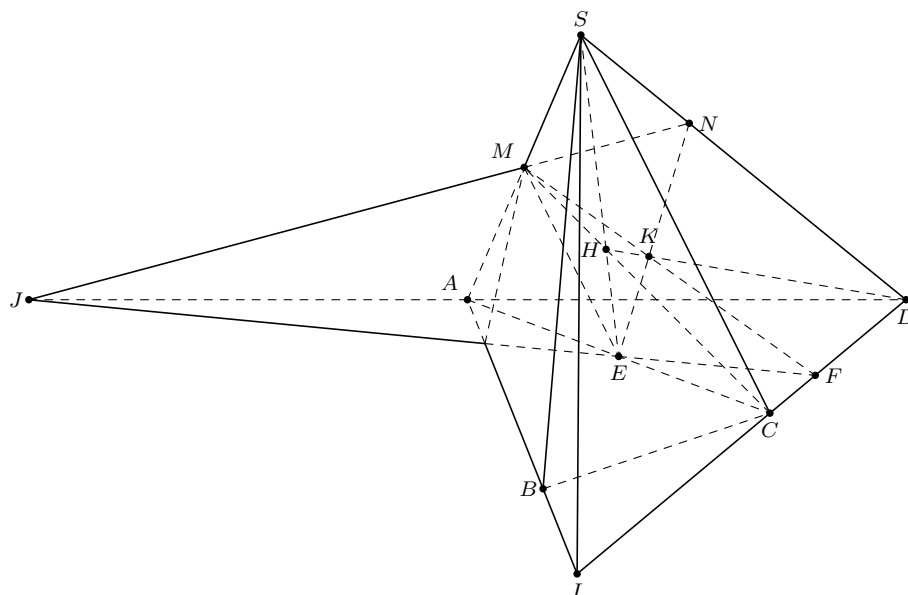
- Lời giải.**

① Gọi  $AB \cap CD = I$   
 $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI$ .

② Gọi  $AD \cap EF = J$ ,  
 $SD \cap JM = N$   
 $\Rightarrow N = SD \cap (MEF)$ .  
 $\frac{NS}{ND} = \frac{1}{2}$

③ Chứng minh  $D, H, K$  là điểm chung của  $(MCD)$  và  $(SED)$ .

④ Ta có  
 $\frac{HM}{HC} = \frac{1}{2}; \frac{HS}{HE} = 2;$   
 $\frac{KM}{KE} = \frac{1}{2}; \frac{KN}{KE} = 1;$   
 $\frac{KH}{KD} = \frac{1}{4}.$



□

### 📁 DẠNG 1.5. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp: Tìm giao của hai đường thẳng, sau đó chứng minh đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó.

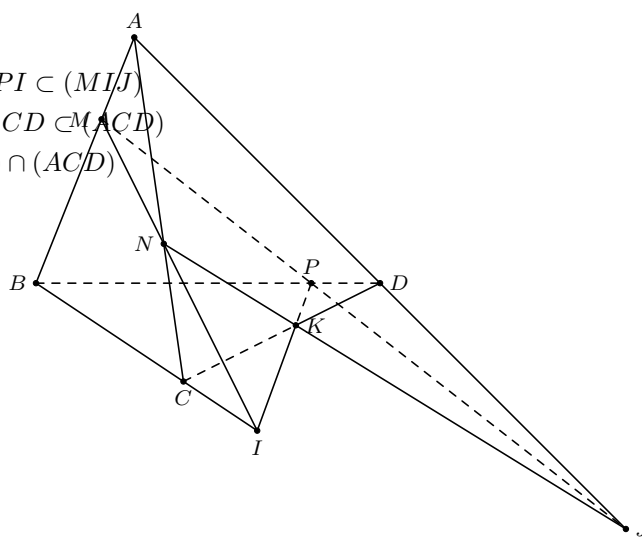
## 1 Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt trên các cạnh  $AB, AC, BD$  sao cho  $MN$  cắt  $BC$  tại  $I$ ,  $MP$  cắt  $AD$  tại  $J$ . Chứng minh  $PI, NJ, CD$  đồng quy.

**Lời giải.**

Trong  $(BCD)$ : Gọi  $K = PI \cap CD \Rightarrow \begin{cases} K \in PI, PI \subset (MIJ) \\ K \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases}$   
 $\Rightarrow K \in (MIJ) \cap (ACD)$   
 $\Rightarrow K \in NJ.$

Vậy  $PI, NJ, CD$  đồng quy tại  $K$ .



□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AB$  không song song  $CD$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $SC$  và  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

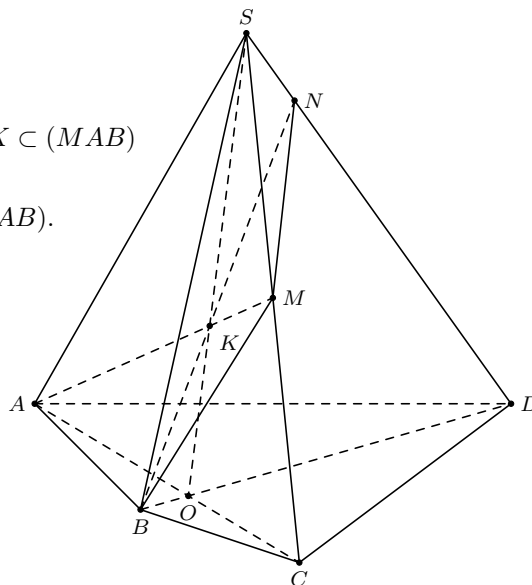
- ① Tìm giao điểm  $N$  của  $SD$  và  $(MAB)$ .
- ② Chứng minh ba đường thẳng  $SO$ ,  $AM$ ,  $BN$  đồng quy.

**Lời giải.**

- ① Trong  $(SAC)$ : Gọi  $K = AM \cap SO$ .

$$\begin{aligned} \text{Trong } (SBD) : \text{Gọi } N = BK \cap SD &\Rightarrow \begin{cases} N \in BK, BK \subset (MAB) \\ N \in SD \end{cases} \\ &\Rightarrow N = SD \cap (MAB). \end{aligned}$$

- ② Ta có  $K = AM \cap SO \Rightarrow SO, AM$  đi qua  $K$ .  
Mà  $N = BK \cap SD \Rightarrow BN$  cũng đi qua  $K$ .  
Vậy ba đường thẳng  $SO, AM, BN$  đồng quy tại  $K$ .



□

**BÀI 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Trên cạnh  $SC$  lấy một điểm  $E$  không trùng với  $S$  và  $C$ .

- ① Tìm giao điểm  $F$  của đường thẳng  $SD$  và  $(ABE)$ .
- ② Giả sử  $AB$  không song song  $CD$ . Chứng minh ba đường thẳng  $AB, CD, EF$  đồng quy.

**Lời giải.**

- ① Trong  $(ABCD)$ : Gọi  $I = AC \cap BD$ .  
Trong  $(SAC)$ : Gọi  $J = AE \cap SI$ .

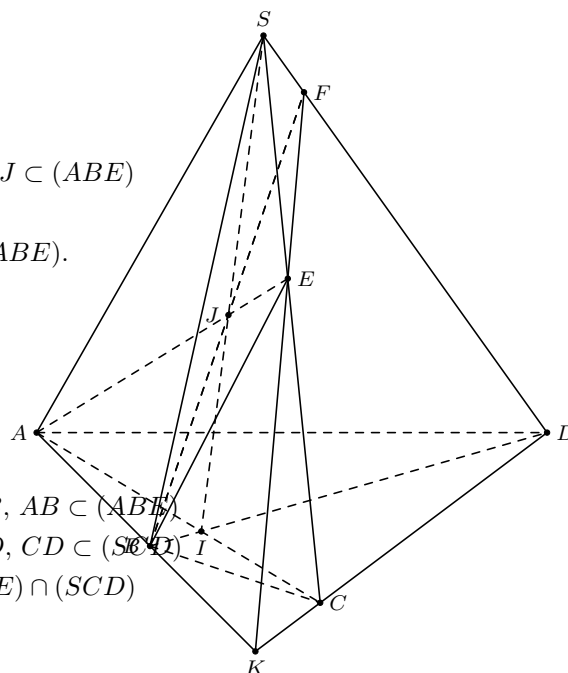
$$\begin{aligned} \text{Trong } (SBD) : \text{Gọi } F = BJ \cap SD &\Rightarrow \begin{cases} F \in BJ, BJ \subset (ABE) \\ F \in SD \end{cases} \\ &\Rightarrow F = SD \cap (ABE). \end{aligned}$$

- ② Ta có

$$\begin{cases} E \in (ABE) \cap (SCD) \\ F \in (ABE) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (ABE) \cap (SCD) = EF.$$

$$\begin{aligned} \text{Trong } (ABCD) : \text{Gọi } K = AB \cap CD &\Rightarrow \begin{cases} K \in AB, AB \subset (ABE) \\ K \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \\ &\Rightarrow K \in (ABE) \cap (SCD) \\ &\Rightarrow K \in EF. \end{aligned}$$

Vậy  $AB, CD, EF$  đồng quy tại  $K$ .



□

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là tứ giác lồi. Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $SC$ . Gọi  $N$  là giao điểm của  $SB$  và  $(ADM)$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh  $SO, AM, DN$  đồng quy.

**Lời giải.**

Ta có  $S \in (SAB) \cap (SCD)$ . (1)

Trong  $(ABCD)$ : Gọi  $I = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$ . (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI$ .

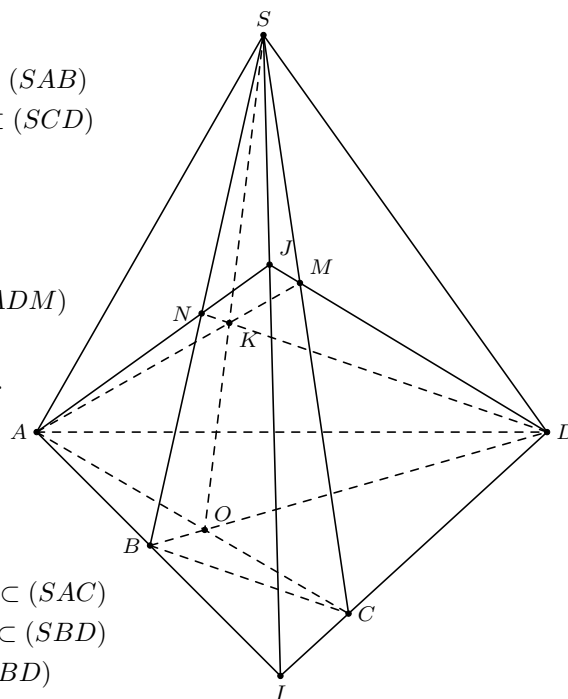
Trong  $(SID)$ : Gọi  $J = DM \cap SI$ .

Trong  $(SAI)$ : Gọi  $N = AJ \cap SB \Rightarrow \begin{cases} N \in AJ, AJ \subset (ADM) \\ N \in SB \end{cases}$   
 $\Rightarrow N = SB \cap (ADM)$ .

Ta có:  $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ O \in (SAC) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$ .

Trong  $(AJD)$ : Gọi  $K = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} K \in AM, AM \subset (SAC) \\ K \in DN, DN \subset (SBD) \end{cases}$   
 $\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$   
 $\Rightarrow K \in SO$ .

Vậy  $SO, AM, DN$  đồng quy tại  $K$ .



□

**BÀI 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $AB \cap CD = E$  và  $AD \cap BC = K$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB, SC$ .

① Tìm giao tuyến của  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .

② Tìm giao tuyến của  $(MNP)$  và  $(SBD)$ .

③ Tìm giao điểm  $Q$  của  $SD$  và  $(MNP)$ .

④ Gọi  $H = MN \cap PQ$ . Chứng minh  $S, H, E$  thẳng hàng.

⑤ Chứng minh  $SK, QM, NP$  đồng quy.

**Lời giải.**

① Ta có  $S \in (SAC) \cap (SBD)$ . (1)

$$\text{Trong } (ABCD) : I = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} I \in AC, AC \subset (SAC) \\ I \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD). \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI.$$

② Ta có  $N \in (MNP) \cap (SBD)$ . (3)

$$\text{Trong } (SAC) : \text{Gọi } J = MP \cap SI \Rightarrow \begin{cases} J \in MP, MP \subset (MNP) \\ J \in SI, SI \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow J \in (MNP) \cap (SBD). \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow (MNP) \cap (SBD) = NJ.$$

③

$$\begin{aligned} \text{Trong } (SBD) : \text{Gọi } Q = NJ \cap SD &\Rightarrow \begin{cases} Q \in NJ, NJ \subset (MNP) \\ Q \in SD \end{cases} \\ &\Rightarrow Q = SD \cap (MNP). \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} \text{Trong } (MNPQ) : H = MN \cap PQ &\Rightarrow \begin{cases} H \in MN, MN \subset (SAB) \\ H \in PQ, PQ \subset (SCD) \end{cases} \\ &\Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD) \\ &\Rightarrow H \in SE. \end{aligned}$$

Suy ra  $S, H, E$  thẳng hàng.

⑤ Ta có  $S \in (SAD) \cap (SBC)$ . (5)

$$\text{Trong } (ABCD) : K = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} K \in AD, AD \subset (SAD) \\ K \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases}$$

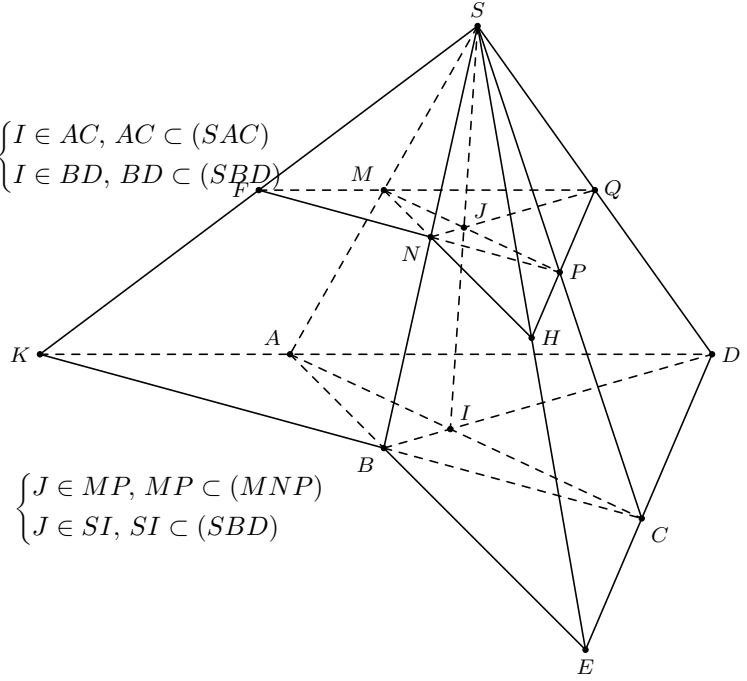
$$\Rightarrow K \in (SAD) \cap (SBC). \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SK.$$

$$\begin{aligned} \text{Trong } (MNPQ) : \text{Gọi } F = QM \cap PN &\Rightarrow \begin{cases} F \in QM, QM \subset (SAD) \\ F \in PN, PN \subset (SBC) \end{cases} \\ &\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC) \\ &\Rightarrow F \in SK. \end{aligned}$$

Suy ra  $SK, QM, NP$  đồng quy tại  $F$ .

□



### BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 5.** Cho tứ diện  $S.ABC$  với  $I$  là trung điểm của  $SA$ ,  $J$  là trung điểm của  $BC$ . Gọi  $M$  là điểm di động trên  $IJ$  và  $N$  là điểm di động trên  $SC$ .

- ① Xác định giao điểm  $P$  của  $MC$  và  $(SAB)$ .
- ② Tìm giao tuyến của  $(SMP)$  và  $(ABC)$ .
- ③ Tìm giao điểm  $E$  của  $MN$  và  $(ABC)$ .
- ④ Gọi  $F = IN \cap AC$ . Chứng minh đường thẳng  $EF$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $M, N$  di động.

**BÀI 6.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Gọi  $J$  là một điểm trên đoạn  $AD$  sao cho  $AD = 3JD$ .

- ① Tìm giao điểm  $F$  của  $IJ$  và  $(BCD)$ .
- ② Tìm giao điểm  $E$  của  $(IJK)$  và đường thẳng  $BC$ . Tính tỉ số  $\frac{EB}{EC}$ .
- ③ Chứng minh ba đường thẳng  $AC, KJ, IE$  đồng quy tại điểm  $H$ . Tính tỉ số  $\frac{HC}{HA}$ .
- ④ Chứng minh  $EJ \parallel HF$  và đường thẳng  $IK$  đi qua trung điểm của đoạn  $HF$ .
- ⑤ Gọi  $O$  là trung điểm  $IK$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$ . Chứng minh ba điểm  $A, O, G$  thẳng hàng.  
Tính tỉ số  $\frac{OA}{OG}$ .

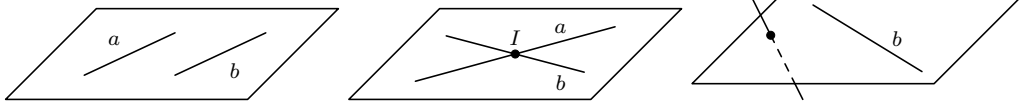
# ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG.

## BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### ① Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt  $a, b$ .



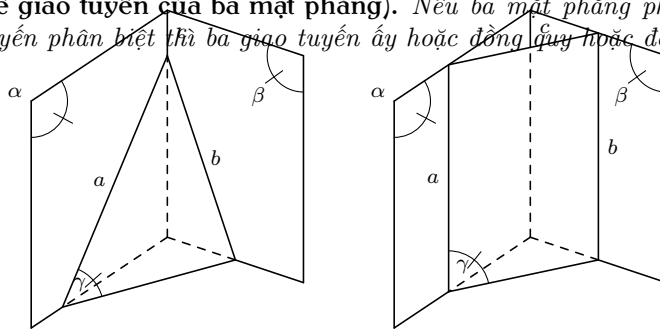
#### Định nghĩa 1.

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

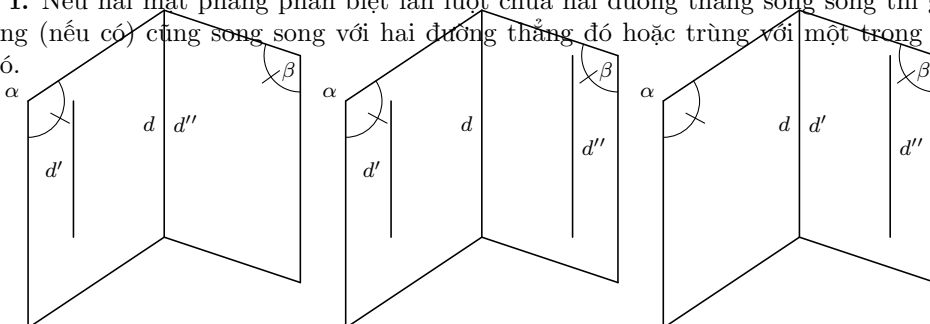
#### ② Tính chất hai đường thẳng song song

**Định lý 1.** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

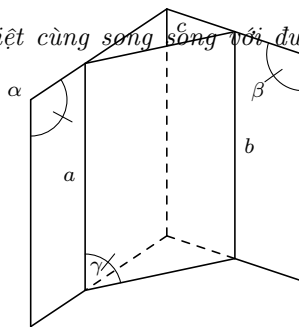
**Định lý 2 (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng).** Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



**Hệ quả 1.** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



**Định lý 3.** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### DẠNG 1.1. Chứng minh hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

Cách 1. Chứng minh hai đường thẳng  $a, b$  đồng phẳng, rồi dùng các định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn định lý đường trung bình, định lý đảo Thales, ... để chứng minh  $a \parallel b$ .

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Chẳng hạn, chứng minh

$$\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Cách 3. Áp dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó. Chẳng hạn, chứng minh

$$\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha), c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c. \end{cases}$$

## 1 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $I, J$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $ABD$ . Chứng minh rằng  $IJ \parallel CD$ .

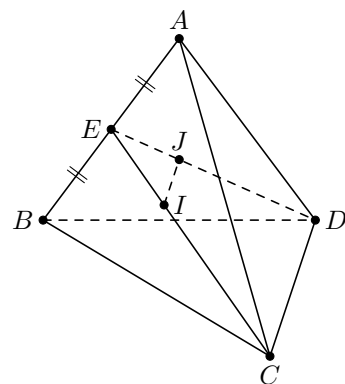
**Lời giải.**

Gọi  $E$  là trung điểm  $AB$ . Ta có  $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases} \Rightarrow IJ$  và  $CD$  đồng phẳng.

Vì  $I, J$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $ABD$  nên

$$\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Theo định lý đảo Thales suy ra  $IJ \parallel CD$  (đpcm).



□

**VÍ DỤ 2.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD, BC, AD, AC, BD$ . Chứng minh  $MPNQ$  là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng  $MN, PQ, RS$  cắt nhau tại trung điểm  $G$  của mỗi đoạn.

**Lời giải.**

$$\begin{cases} MP \parallel AC \\ MP = \frac{1}{2}AC. \end{cases} \quad (1)$$

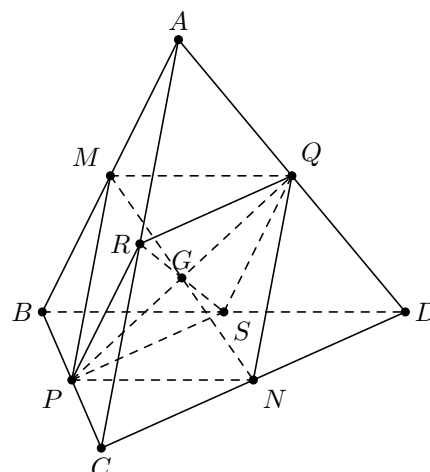
$$\begin{cases} NQ \parallel AC \\ NQ = \frac{1}{2}AC. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} MP \parallel NQ \\ MP = NQ. \end{cases}$$

Do đó,  $MPNQ$  là hình bình hành. Suy ra  $MN, PQ$  cắt nhau tại trung điểm  $G$  của mỗi đoạn.

Chứng minh tương tự ta được  $PSQR$  là hình bình hành nên  $PQ, RS$  cắt nhau tại trung điểm  $G$  của mỗi đoạn.

Vậy  $MN, PQ, RS$  cắt nhau tại trung điểm  $G$  của mỗi đoạn.



□

**Nhận xét.** Điểm  $G$  nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.

Trọng tâm của tứ diện là điểm đồng quy của các đoạn nối trung điểm của các cạnh đối, nó cũng là trung điểm của các cạnh này.

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SD$ . Chứng minh

①  $MN \parallel AD$  và  $MN \parallel BC$ ;

②  $MO \parallel SC$  và  $NO \parallel SB$ .

**Lời giải.**

① Xét tam giác  $SAD$  có

- $M$  là trung điểm của  $SA$  (giả thiết);
- $N$  là trung điểm của  $SD$  (giả thiết).

Suy ra  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle SAD$ .

Do đó  $MN \parallel AD$ .

Ta có  $\begin{cases} MN \parallel AD \text{ (chứng minh trên)} \\ BC \parallel AD \text{ (} ABCD \text{ là hình bình hành)} \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$ .

② Xét tam giác  $ASC$  có

—  $M$  là trung điểm của  $SA$  (giả thiết);

—  $O$  là trung điểm của  $AC$  ( $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ ).

Suy ra  $OM$  là đường trung bình của  $\triangle SAC$ . Do đó  $MO \parallel SC$ .

Tương tự,  $NO$  là đường trung bình của  $\triangle SDB$  nên  $NO \parallel SB$ . □

**BÀI 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$ . Gọi  $I, J, G$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $SAB, SAD$  và  $AOD$ . Chứng minh

①  $IJ \parallel MN$ ;

②  $IJ \parallel BD$  và  $GJ \parallel SO$ .

**Lời giải.**

① Xét tam giác  $SMN$  có

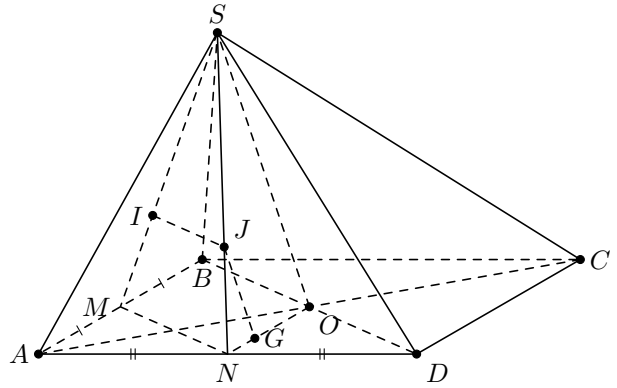
- $SI = \frac{2}{3}SM$  ( $I$  là trọng tâm của  $\triangle SAB$ );
- $SJ = \frac{2}{3}SN$  ( $J$  là trọng tâm của  $\triangle SAD$ ).

suy ra  $IJ \parallel MN$  (định lý Ta-lét đảo).

② Vì  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle ABD$  nên  $MN \parallel BD$ .  
Mà  $IJ \parallel MN$  (chứng minh trên) nên  $IJ \parallel BD$ .  
Xét tam giác  $SON$  có

- $NG = \frac{1}{3}NO$  ( $G$  là trọng tâm của  $\triangle AOD$ );
- $NJ = \frac{1}{3}SN$  ( $J$  là trọng tâm của  $\triangle SAD$ ).

suy ra  $GJ \parallel SO$  (định lý Ta-lét đảo). □



### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$  và  $I$  là một điểm trên cạnh  $SO$ .

- ① Tìm giao điểm  $E$  và  $F$  của mặt phẳng  $(ICD)$  lần lượt với các đường  $SA, SB$ . Chứng minh  $EF \parallel AB$ ;
- ② Gọi  $K$  là giao điểm của  $DE$  và  $CF$ . Chứng minh  $SK \parallel BC$ .

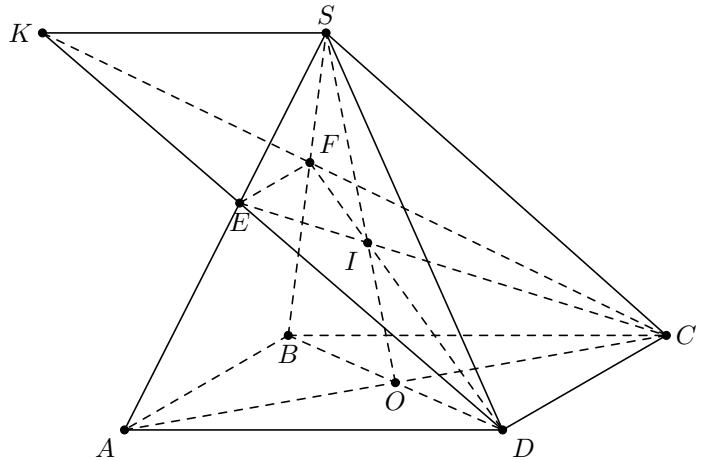
**Lời giải.**

① Vì  $I \in SO$  mà  $SO \subset (SBD)$  nên  $I \in (SBD)$ . Do đó  $F = DI \cap SB$  và  $E = CI \cap SA$ .

Ta có

- $(CDI) \cap (ABCD) = CD$ ;
- $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ ;
- $(CDI) \cap (SAB) = EF$ .

Mà  $AB \parallel CD$  ( $ABCD$  là hình bình hành) nên  $EF \parallel AB \parallel CD$  (tính chất giao tuyến của ba mặt phẳng).



② *Cách 1.* Ta có

- $\begin{cases} K \in ED \subset (SAD) \\ K \in FE \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K$  là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- $\begin{cases} S \in (SAD) \\ S \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow S$  là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

Suy ra  $SK$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (SBC) = SK \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow SK \parallel BC \parallel AD.$$

Vậy  $SK \parallel BC$ .

*Cách 2.* Trong  $\triangle SCD$  có  $EF \parallel CD$  nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{KF}{KC} = \frac{EF}{CD}. \quad (1)$$

Tương tự, trong  $\triangle SAB$  có  $EF \parallel AB$  nên

$$\frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB} = \frac{EF}{CD} \quad (AB = CD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{KF}{KC} = \frac{SF}{SB} \Leftrightarrow \frac{KF}{FC} = \frac{SF}{FB}.$$

Xét  $\triangle FSK$  và  $\triangle FBC$  có

- $\frac{KF}{FC} = \frac{SF}{FB}$  (chứng minh trên);
- $\widehat{SKF} = \widehat{BFC}$  (đối đỉnh).

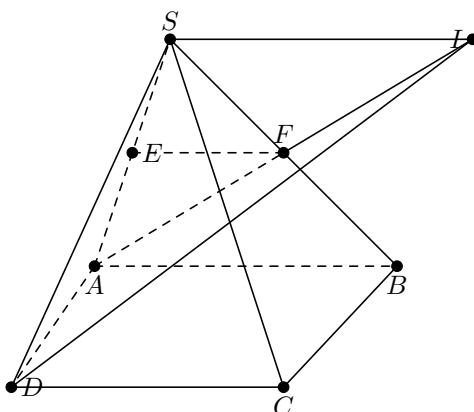
Do đó  $\triangle FSK \sim \triangle FBC$  (cạnh - góc - cạnh) suy ra  $SK \parallel BC$ .

□

**BÀI 4.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang đáy lớn  $AB$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $SB$ .

- ① Chứng minh  $EF \parallel CD$ .      ② Tìm  $I = AF \cap (SCD)$ .      ③ Chứng minh  $SI \parallel AB \parallel CD$ .

**Lời giải.**



- ① Ta có  $EF$  là đường trung bình của tam giác  $SAB$  nên  $EF \parallel AB$  mà  $AB \parallel CD$  (hai đáy của hình thang) nên  $EF \parallel CD$ .
- ② Hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  có  $AB \parallel CD$  nên giao tuyến là đường thẳng  $Sx \parallel AB \parallel CD$ . Kéo dài  $AF$  cắt  $Sx$  tại  $I$ . Ta thấy  $I$  là điểm chung của  $AF$  và  $(SCD)$ .
- ③ Theo ý ②.

□

**DẠNG 1.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.**

Phương pháp giải:

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b. \\ a \parallel b \end{cases}$$

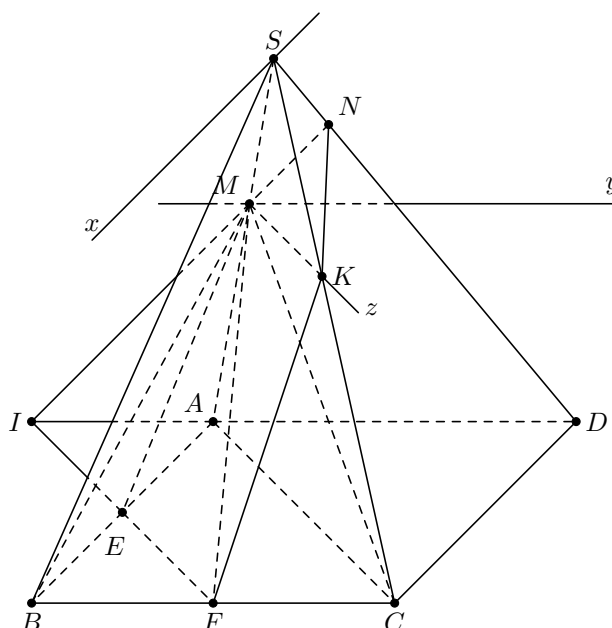
**1** **VÍ DỤ**

**VÍ DỤ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$ . Điểm  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ .

- ① Tìm  $(SAB) \cap (SCD)$ .
- ② Tìm  $(MBC) \cap (SAD)$ .
- ③ Tìm  $(MEF) \cap (SAC)$ .
- ④ Tìm  $AD \cap (MEF)$ .
- ⑤ Tìm  $SD \cap (MEF)$ .
- ⑥ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(MEF)$ .

**Lời giải.**

- ①  $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$   
 $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$  với  $Sx \parallel AB \parallel CD$ .
- ②  $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC), AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$   
 $\Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = My$  với  $My \parallel BC \parallel AD$ .
- ③  $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF), AC \subset (SAC) \\ EF \parallel AC \end{cases}$   
 $\Rightarrow (MEF) \cap (SAC) = Mz$  với  $Mz \parallel EF \parallel AC$ .
- ④ Trong  $(ABCD)$ , gọi  $I = EF \cap AD$ .  
 Mà  $EF \subset (MEF)$  nên  $AD \cap (MEF) = I$ .
- ⑤ Trong  $(SAD)$ , gọi  $N = SD \cap IM$ .  
 Mà  $IM \subset (MEF)$  nên  $SD \cap (MEF) = N$ .
- ⑥ Thiết diện của hình chóp cắt bởi  $(MEF)$  là ngũ giác  $MNKFE$ .



□

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn  $AD$ ,  $AB$  cắt  $CD$  tại điểm  $K$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên cạnh  $SD$ .

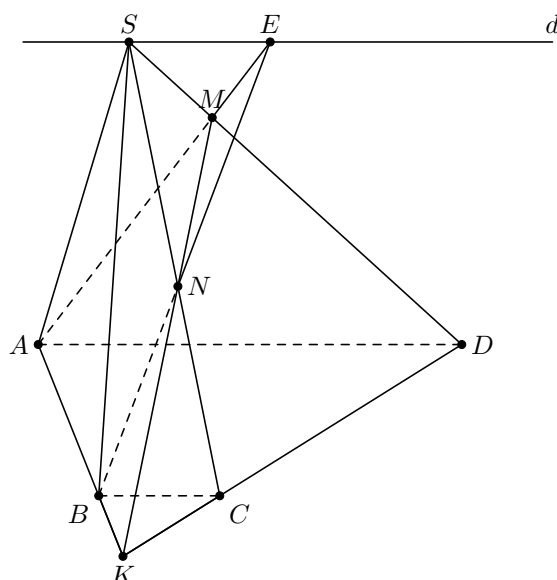
- ① Tìm  $d = (SAD) \cap (SBC')$  và  $N = KM \cap (SBC)$ .
- ② Chứng minh rằng  $AM, BN$  và  $d$  đồng qui.

**Lời giải.**

- ① •  $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$   
 $\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d$  với  $S \in d, d \parallel AD \parallel BC$ .  
 • Trong  $(SCD)$ , gọi  $N = KM \cap SC$ .  
 Mà  $SC \subset (SBC)$  nên  $N = KM \cap (SBC)$ .

- ②  $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (MAB) = BN \\ (MAB) \cap (SAD) = AM \end{cases}$

Theo định lý về giao tuyến của 3 mặt phẳng, suy ra  $AM, BN$  và  $d$  hoặc đồng qui hoặc đôi một song song. Mà  $AM, d$  cắt nhau nên  $AM, BN$  và  $d$  phải đồng qui.



□

## 2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$ . Gọi  $P$  là một điểm trên cạnh  $BC$ . Tìm giao tuyến của

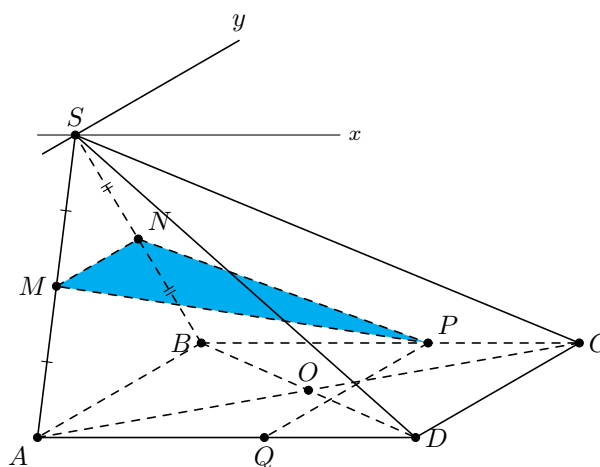
- ①  $(SBC)$  và  $(SAD)$ ;                      ②  $(SAB)$  và  $(SCD)$ ;                      ③  $(MNP)$  và  $(ABCD)$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có

- $(SBC) \cap (ABCD) = BC$ ;
- $(SAD) \cap (ABCD) = AD$ ;
- $AD \parallel BC$  ( $ABCD$  là hình bình hành).

Mà  $S$  là điểm chung của 2 mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SAD)$  nên giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SAD)$  là đường thẳng  $Sx \parallel BC \parallel AD$ .



- ② Giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng  $Sy \parallel AB \parallel CD$ .  
 ③ Vì  $MN \parallel AB$  ( $MN$  là đường trung bình của  $\triangle SAB$ ) nên qua  $P$  kẻ  $PQ \parallel AB$  ( $Q \in AD$ ). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(ABCD)$  là đường thẳng  $PQ$ .

□

**BÀI 2.** Cho tứ diện  $SABC$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $SB$  và  $AB$ ,  $G$  là một điểm trên cạnh  $AC$ . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

- ①  $(SAC)$  và  $(EFC)$ ;                      ②  $(SAC)$  và  $(EFG)$ .

**Lời giải.**

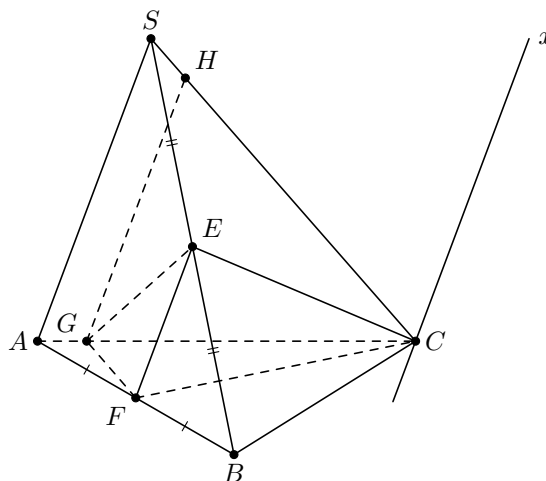
① Ta có

- $(SAC) \cap (SAB) = SA$ ;
- $(EFC) \cap (SAB) = EF$ ;
- $SA \parallel EF$  ( $EF$  là đường trung bình của  $\triangle SAB$ ).

Do đó giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(EFC)$  sẽ song song với  $SA$  và  $EF$ .

Mà  $C$  là điểm chung của 2 mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(EFC)$  nên giao tuyến của chúng là đường thẳng  $Cx \parallel SA \parallel EF$ .

② Vì  $EF \parallel SA$  ( $EF$  là đường trung bình của  $\triangle SAB$ ) nên qua  $G$  kẻ  $GH \parallel SA$  ( $H \in SC$ ). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(EFG)$  là đường thẳng  $GH$ .

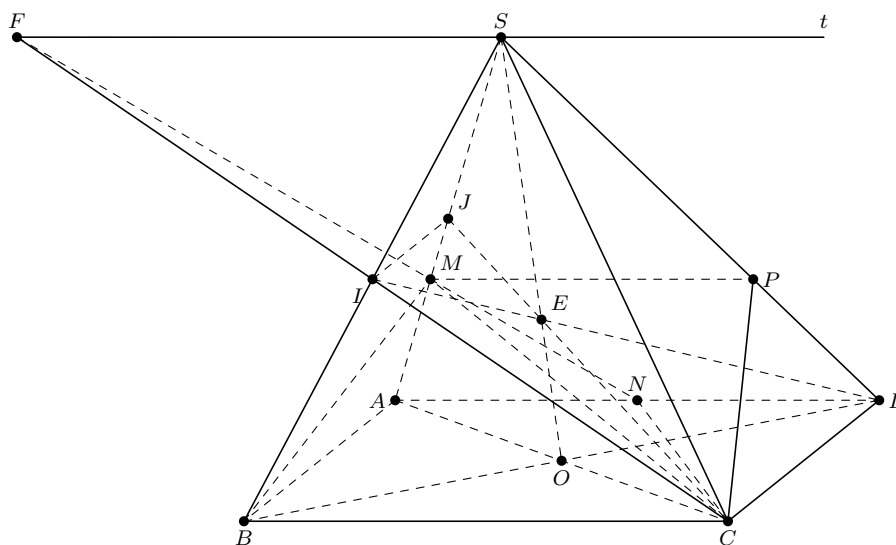


□

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $O$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$  sao cho  $SM = 2MA$ ,  $N$  là trung điểm của  $AD$ .

- ① Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(MBC)$ .
- ② Tìm giao điểm  $I$  của  $SB$  và  $(CMN)$ , giao điểm  $J$  của  $SA$  và  $(ICD)$ .
- ③ Chứng minh ba đường thẳng  $ID$ ,  $JC$ ,  $SO$  đồng quy tại  $E$ . Tính tỉ số  $\frac{SE}{SO}$ .

**Lời giải.**



- ① Vì  $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC) \text{ và } AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$   
nên  $(SAD) \cap (MBC) = MP \parallel BC \parallel AD$  (với  $P \in SD$ ).

- ② Vì  $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$   
nên  $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$ .

Gọi  $F = MN \cap St$ ;  $I = CF \cap SB$ .

- Vì  $\begin{cases} I \in SB \\ I \in CF \subset (CMN) \end{cases}$  nên  $I = SB \cap (CMN)$ .

Qua  $I$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $SA$  tại  $J$ .

Vì  $\begin{cases} J \in SA \\ J \in JI \subset (ICD) \text{ (vì } IJ \parallel CD \Rightarrow (IJCD) \equiv (ICD)) \end{cases}$  nên  $J = SA \cap (ICD)$ .

③ Xét 3 mặt phẳng  $(SAC)$ ,  $(SBD)$  và  $(CDJI)$ , ta có

$$\begin{cases} SO = (SAC) \cap (SBD) \\ ID = (SBD) \cap (CDJI) \\ JC = (SAC) \cap (CDJI). \end{cases}$$

Do đó ba đường thẳng  $ID$ ,  $JC$ ,  $SO$  đồng quy. Gọi điểm đồng quy là  $E$ .

Trong mặt phẳng  $(SFAD)$ , áp dụng định lý Thales (để ý rằng  $AN \parallel SF$ ) ta có

$$\frac{MA}{MS} = \frac{AN}{SF} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra  $SF = AD = BC$  và  $SFBC$  là hình bình hành.

$I = SB \cap CF$  nên  $I$  là trung điểm của  $SB$ .

$\triangle SBD$  có  $DI$  và  $SO$  là trung tuyến nên  $E$  là trọng tâm của  $\triangle SBD$ .

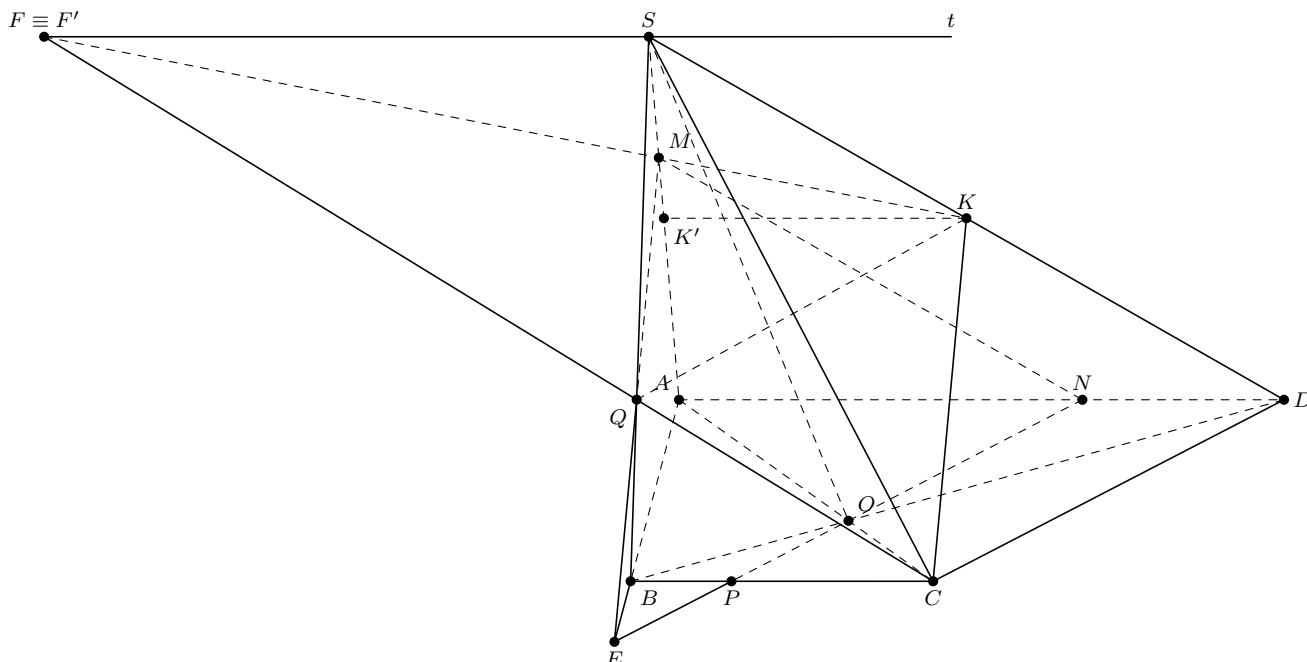
$$\text{Vậy } \frac{SE}{SO} = \frac{2}{3}.$$

□

**BÀI 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AD$  là đáy lớn và  $AD = 2BC$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt thuộc các đoạn  $SA$ ,  $AD$ ,  $BC$  sao cho  $MA = 2MS$ ,  $NA = 2ND$ ,  $PC = 2PB$ .

- ① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:  $(SAD)$  và  $(SBC)$ ,  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .
- ② Xác định giao điểm  $Q$  của  $SB$  với  $(MNP)$ .
- ③ Gọi  $K$  là trung điểm của  $SD$ . Chứng minh  $CK = (MQK) \cap (SCD)$ .

**Lời giải.**



- ① Vì  $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

nên  $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$ .

Gọi  $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$  suy ra  $SO = (SAC) \cap (SBD)$ .

- ② Gọi  $E = NP \cap AB$  và  $Q = EM \cap SB$ . Vì  $\begin{cases} Q \in SB \\ Q \in ME \subset (MNP) \end{cases}$  nên  $Q = SB \cap (MNP)$ .
- ③ Gọi  $F = MK \cap St$  và  $F' = QC \cap St$ . Dựa vào các vị trí các điểm  $Q, C, M$  và  $K$  của giả thiết cho, dễ thấy  $F$  và  $F'$  cùng nằm về một phía so với mặt phẳng  $(SAB)$ .  
Trong mặt phẳng  $(SF'BC)$ , áp dụng định lý Thales (để ý rằng  $SF' \parallel BC$ ) ta có

$$\frac{QS}{QB} = \frac{BC}{SF'} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Gọi  $K'$  là trung điểm của  $SA$ . suy ra  $\frac{MK'}{MS} = \frac{1}{2}$ .

Trong mặt phẳng ( $SFAD$ ), áp dụng định lý Thales (để ý rằng  $SF \parallel KK'$ ) ta có

$$\frac{MK'}{MS} = \frac{KK'}{SF} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và  $AD = 2BC$  suy ra  $SF = SF'$ . Do đó  $F \equiv F'$ , suy ra bốn điểm  $Q, C, M$  và  $K$  đồng phẳng. Vậy  $CK = (MQK) \cap (SCD)$ .

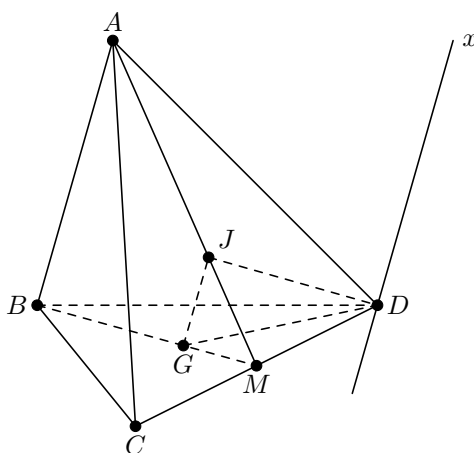
1

### 3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**BÀI 5.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G, J$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $BCD$  và  $ACD$ .

- (1) Chứng minh  $GJ \parallel AB$ .                      (2) Tìm  $(ABD) \cap (GJD)$ .

**Lời giải.**



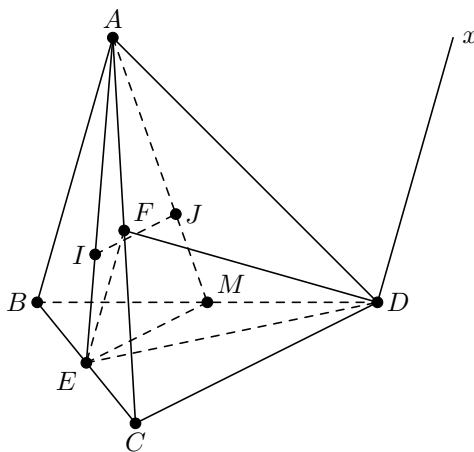
- ① Gọi  $M$  là trung điểm  $CD$ .  
Xét tam giác  $ABM$  có  $\frac{MG}{MB} = \frac{MJ}{MA} = \frac{1}{3}$   
Suy ra  $GJ \parallel AB$ .
- ② Hai mặt phẳng  $(ABD)$  và  $(GJD)$  có điểm  $D$  chung và  $GJ \parallel AB$  nên giao tuyến là đường thẳng  $Dx \parallel GJ \parallel AB$ .

1

**BÀI 6.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm  $\triangle ABC, \triangle ABD$  và  $E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, AC$ .

- (1)** Chứng minh  $IJ \parallel CD$ .                  **(2)** Tìm  $(DEF) \cap (ABD)$ .

**Lời giải.**



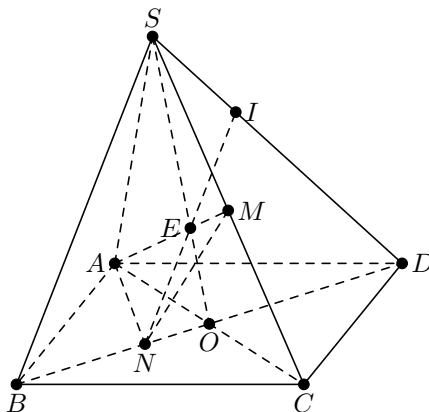
- ① Gọi  $M$  là trung điểm  $BD$ .  
 Tam giác  $AEM$  có  $\frac{AI}{AE} = \frac{AJ}{AM} = \frac{1}{3}$  nên  $IJ \parallel ME$ .  
 Mà  $ME \parallel CD$  (đường trung bình)  
 Suy ra  $IJ \parallel CD$ .
- ② Hai mặt phẳng  $(DEF)$  và  $(ABD)$  có điểm chung  $D$  và  $EF \parallel AB$  nên giao tuyến là đường thẳng  $Dx \parallel AB \parallel EF$ .

□

**BÀI 7.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$  và  $N$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

- ① Tìm  $I = SD \cap (AMN)$ .      ② Chứng minh  $NI \parallel SB$ .      ③ Tìm  $(AMN) \cap (SAD)$ .

**Lời giải.**



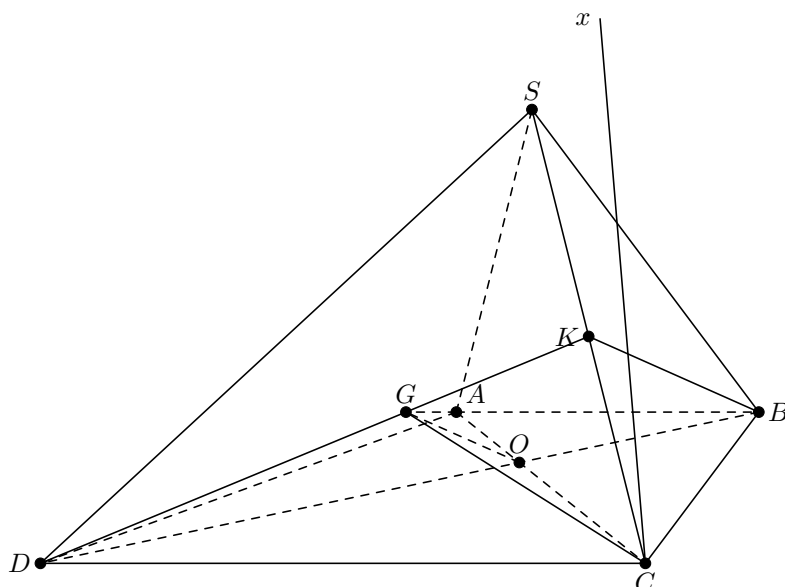
- ① Gọi  $O$  là giao điểm  $AC$  và  $BD$ ,  $E$  là giao điểm  $SO$  và  $AM$ .  
 Khi đó  $NE$  và  $SD$  cắt nhau tại  $I$ .  
 Ta thấy  $I \in SD$  và  $I \in NE \subset (AMN)$  nên  $I = SD \cap (AMN)$ .
- ② Tam giác  $SOB$  có  $\frac{OE}{OS} = \frac{ON}{OB} = \frac{1}{3}$  nên  $NE \parallel SB$ .  
 Suy ra  $NI \parallel SB$ .
- ③ Hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(SAD)$  có hai điểm chung  $A, I$  nên  $(AMN) \cap (SAD) = AI$ .

□

**BÀI 8.** Cho hình chóp  $SABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang ( $AB \parallel CD$ ) với  $CD = 2AB$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $K$  là trung điểm  $SC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ .

- ① Chứng minh  $OG \parallel BK$ .      ② Tìm  $(ACG) \cap (SBC)$ .

**Lời giải.**



- ① Ta có  $\triangle OCD \sim \triangle OAB$  do  $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$  và  $\widehat{ODC} = \widehat{OBA}$ .  
 Suy ra  $\frac{OD}{OB} = \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB} = 2$ .  
 Suy ra  $OD = \frac{2}{3}DB$ .  
 Tam giác  $DBK$  có  $\frac{DG}{DK} = \frac{DO}{DB} = \frac{2}{3}$  nên  $OG \parallel BK$ .
- ② Hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ACG)$  có điểm  $C$  chung và  $OG \parallel BK$  nên giao tuyến là đường thẳng  $Cx \parallel OG \parallel BK$ .

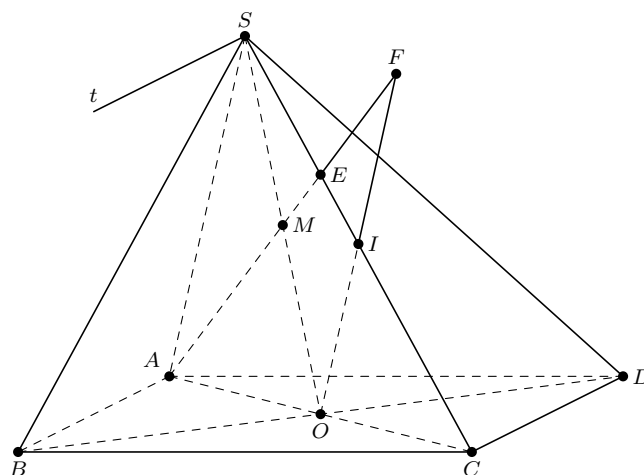
□

**BÀI 9.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành và  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Lấy điểm  $E$  trên cạnh  $SC$  sao cho  $EC = 2ES$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$
- ② Tìm giao điểm  $M$  của đường thẳng  $AE$  và mặt phẳng  $(SBD)$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $SO$ .

**Lời giải.**

- ① Vì  $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \text{ và } CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$   
 nên  $(SAB) \cap (SCD) = St \parallel AB \parallel CD$ .
- ② Gọi  $M = AE \cap SO$ .  
 Vì  $\begin{cases} M \in AE \\ M \in SO \cap (SBD) \end{cases}$  nên  $M = AE \cap (SBD)$ .  
 Gọi  $I$  là trung điểm  $SC$ , suy ra  $\frac{EI}{ES} = \frac{1}{2}$ .  
 Gọi  $F = OI \cap AE$ . Trong mặt phẳng  $(SAC)$ , áp dụng định lý Thales (để ý rằng  $OI \parallel SA$ )



$$\frac{FI}{SA} = \frac{EI}{ES} = \frac{1}{2}.$$

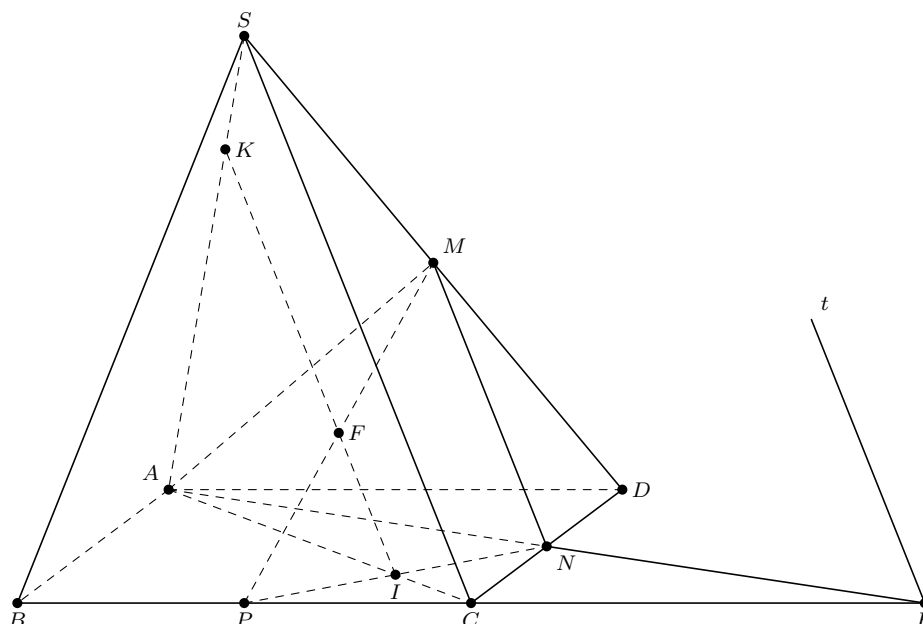
Suy ra  $FI = OI = \frac{SA}{2}$ , từ đó dẫn đến  $SFOA$  là hình bình hành. Vậy  $M$  là trung điểm của  $SO$ .

□

**BÀI 10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành, gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $SD, CD, BC$ .

- ① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:  $(SAC)$  và  $(SBC)$ ,  $(AMN)$  và  $(SBC)$ .
- ② Tìm giao điểm  $I$  của  $(PMN)$  và  $AC$ ,  $K$  của  $(PMN)$  và  $SA$ .
- ③ Gọi  $F$  là trung điểm của  $PM$ , chứng minh ba điểm  $K, F, I$  thẳng hàng.

**Lời giải.**



- ① Dễ thấy  $SC = (SAC) \cap (SBC)$ .  
Gọi  $E = BC \cap AN$   
Ta có  $\begin{cases} E \in (SBC) \cap (AMN) \\ SC \subset (SBC) \text{ và } MN \subset (AMN) \\ SC \parallel MN \end{cases}$   
suy ra  $(SBC) \cap (AMN) = Et \parallel SC \parallel MN$ .
- ② Gọi  $I = AC \cap PN \Rightarrow \begin{cases} I \in AC \\ I \in PN \subset (PMN) \end{cases} \Rightarrow I = AC \cap (PMN)$ .  
Gọi  $K$  là giao điểm của  $SA$  với đường thẳng đi qua  $I$  và song song với  $SC$ .  
Vì  $\begin{cases} K \in SA \\ K \in IK \subset (PMN) \text{ (vì } MN \parallel SC) \end{cases}$  nên  $K = SA \cap (PMN)$ .
- ③ Theo cách dựng ta có  $IK \parallel MN$ . (1)  
 $ABCD$  là hình bình hành nên  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Mà  $PN$  là đường trung bình của  $\triangle CBD$  nên  $AC$  cũng cắt  $PN$  tại  $I$  là trung điểm của  $PN$ .  
Suy ra  $IF$  là đường trung bình của  $\triangle PMN \Rightarrow IF \parallel MN$ . (2)  
(1) và (2) suy ra  $K, F, I$  thẳng hàng.

□

## BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG

### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- ① **Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt** Cho đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$ . Có ba trường hợp xảy ra:

- Đường thẳng  $d$  và  $(P)$  có 2 điểm chung phân biệt  $\Rightarrow d \subset (P)$ .
- Đường thẳng  $d$  và  $(P)$  có 1 điểm chung duy nhất  $\Rightarrow d \cap (P) = A$ .
- Đường thẳng  $d$  và  $(P)$  không có điểm chung nào  $\Rightarrow d \parallel (P)$ .

**Định nghĩa 1.** Đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$  gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

## ② Các định lý

**Định lý 1.** Nếu đường thẳng  $d$  không nằm trong mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $d$  song song với đường thẳng  $d'$  nằm trong  $(\alpha)$  thì  $d$  song song với  $(\alpha)$ .

**Định lý 2.** Cho đường thẳng  $a$  song song với mặt phẳng  $(\alpha)$ . Nếu mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $a$  và cắt  $(\alpha)$  theo giao tuyến  $b$  thì  $b$  song song với  $(\alpha)$ .

**Hệ quả 1.** Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

**Định lý 3.** Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

## B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

### 📁 DẠNG 2.1. Chứng minh đường thẳng $a$ song song với mặt phẳng $(P)$

**Phương pháp:** Chứng minh  $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \notin (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P).$

## 1 Ví dụ

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ACD$  và  $BCD$ . Chứng minh rằng  $MN$  song song với các mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ABD)$ .

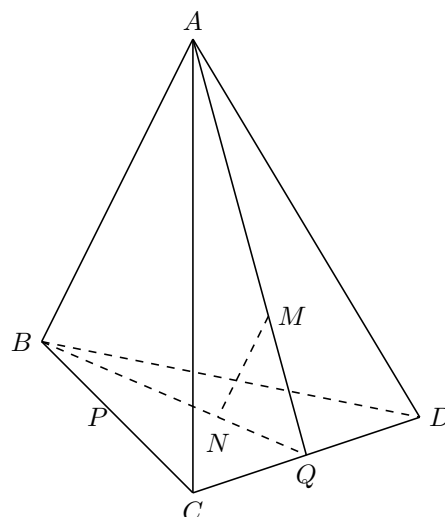
**Lời giải.**

Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ .

Khi đó, ta có  $\frac{QM}{MA} = \frac{QN}{NB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel AB$ .

Vì  $\begin{cases} MN \not\subset (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ MN \parallel AB \end{cases}$  nên  $MN \parallel (ABC)$ .

Tương tự, ta có  $\begin{cases} MN \not\subset (ABD) \\ AB \subset (ABD) \\ MN \parallel AB \end{cases}$  nên  $MN \parallel (ABD)$ .



□

**VÍ DỤ 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ .

① Chứng minh  $MN$  song song với các mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SAD)$ .

② Gọi  $E$  là trung điểm của  $SA$ . Chứng minh  $SB$  và  $SC$  đều song song với mặt phẳng  $(MNE)$ .

**Lời giải.**

- ① Từ giả thiết, ta suy ra  $MN \parallel BC$  và  $MN \parallel AD$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \end{cases} \text{ nên } MN \parallel (SBC).$$

$$\text{Tương tự, ta có } \begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ AD \subset (SAD) \\ MN \parallel AD \end{cases} \text{ nên } MN \parallel (SAD).$$

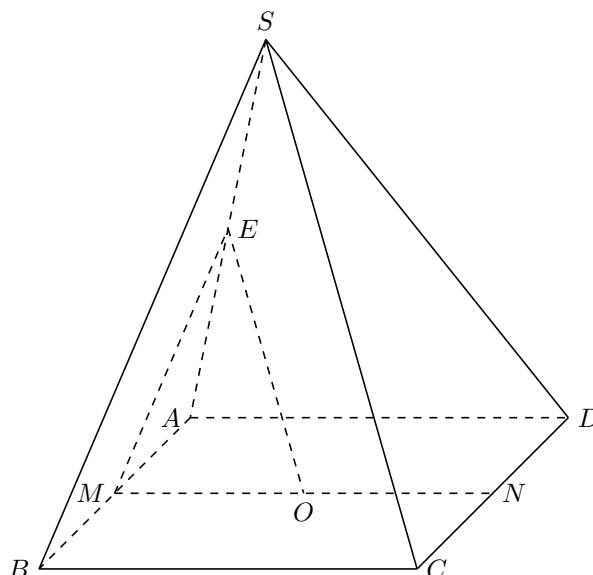
- ② Từ giả thiết, ta có  $\frac{AE}{AS} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow ME \parallel SB$ .

$$\text{Vì } \begin{cases} SB \not\subset (MNE) \\ ME \subset (MNE) \\ ME \parallel SB \end{cases} \text{ nên } SB \parallel (MNE).$$

Tương tự, gọi  $O$  là tâm của hình bình hành.

$$\text{Khi đó } \frac{AO}{AC} = \frac{AE}{AS} = \frac{1}{2} \Rightarrow EO \parallel SC.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} SC \not\subset (MNE) \\ EO \subset (MNE) \\ EO \parallel SC \end{cases} \text{ nên } SC \parallel (MNE).$$



□

### 📁 DẠNG 2.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

**Phương pháp:** Áp dụng một trong hai cách sau

$$\text{① Cách 1: } \begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a.$$

$$\text{② Cách 2: } \begin{cases} a \parallel (P) \\ a \parallel (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a.$$

**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ ,  $M \in CD$  với  $MC = 2MD$ .

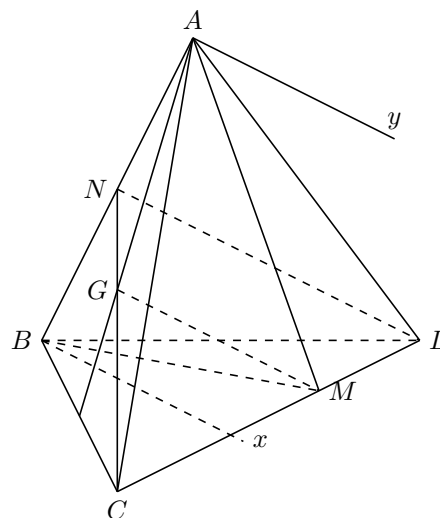
- ① Chứng minh  $MG \parallel (ABD)$ . ② Tìm  $(ABD) \cap (BGM)$ . ③ Tìm  $(ABD) \cap (AGM)$ .

**Lời giải.**

- ① Gọi  $N$  là trung điểm của  $AB$ . Trong tam giác  $CDN$ , ta có  $\frac{CM}{CD} = \frac{CG}{CN} = \frac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel ND$ . Vì  $ND \subset (ABD)$ ,  $GM \not\subset (ABD)$  nên  $GM \parallel (ABD)$ .

- ② Vì  $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ B \in (ABD) \cap (BGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (BGM) = Bx \parallel GM \parallel ND$ .

- ③ Vì  $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ A \in (ABD) \cap (AGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (AGM) = Ay \parallel GM \parallel ND$ .



□

**DẠNG 2.3. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng**

**Phương pháp:** Để tìm thiết diện của mặt phẳng song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc  $(\alpha)$  chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng

sử dụng tích chất sau: 
$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a \parallel d, (với M \in a).$$

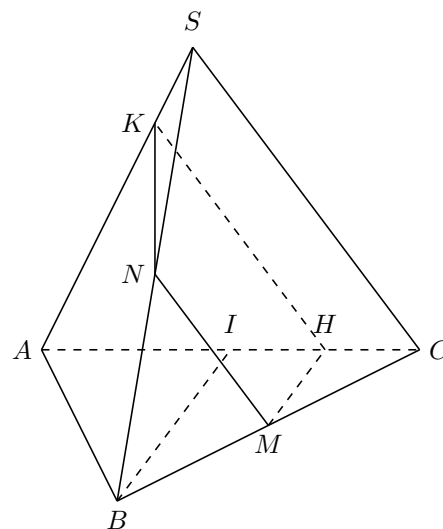
**VÍ DỤ 1.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M, I$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AC$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M$ , song song với  $BI$  và  $SC$ . Xác định trên hình vẽ các giao điểm của  $(P)$  với các cạnh  $AC, SA, SB$ . Từ đó suy ra thiết diện của  $(P)$  cắt hình chóp.

**Lời giải.**

Vì  $\begin{cases} (P) \parallel SC \\ M \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = MN \parallel SC, N \in SB$   
(1)

Tương tự,  $\begin{cases} (P) \parallel BI \\ M \in (P) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MH \parallel BI, H \in AC$   
(2)

Mặt khác,  $\begin{cases} (P) \parallel (SC) \\ N \in (P) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = HK \parallel SC, K \in SA$   
(3) Từ (1), (2) và (3) ta có thiết diện của  $(P)$  với tứ diện  $ABCD$  là tứ giác  $MNKH$ .



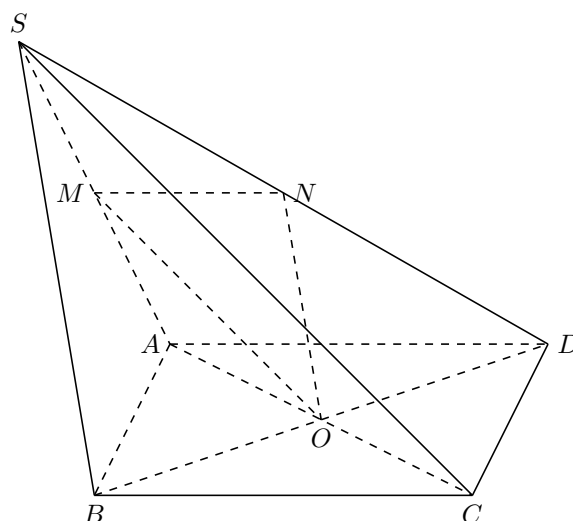
□

**1 BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**BÀI 550.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD$ . Chứng minh rằng:

- ①  $BC \parallel (SAD)$ .
- ②  $AD \parallel (SBC)$ .
- ③  $MN \parallel (ABCD)$ .
- ④  $MN \parallel (SBC)$ .
- ⑤  $MO \parallel (SCD)$ .
- ⑥  $NO \parallel (SBC)$ .

**Lời giải.**



①  $BC \parallel (SAD)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow BC \parallel (SAD). \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases}$$

② Ta có  $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow AD \parallel (SBC). \\ AD \not\subset (SBC) \end{cases}$

③ Ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel AD$ . Khi đó  $\begin{cases} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD). \\ MN \not\subset (ABCD) \end{cases}$

④ Ta có  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SD} \Rightarrow MN \parallel AD$ , vì  $AD \parallel BC$  nên  $MN \parallel BC$  Khi đó  $\begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel (SBC). \\ MN \not\subset (SBC) \end{cases}$

⑤ Ta có  $\frac{AM}{AS} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MO \parallel SC$ . Vì  $\begin{cases} MO \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \Rightarrow MO \parallel (SCD). \\ MO \not\subset (SCD) \end{cases}$

⑥ Ta có  $\frac{DN}{DS} = \frac{DO}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow NO \parallel SB$ . Vì  $\begin{cases} NO \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \Rightarrow NO \parallel (SBC). \\ NO \not\subset (SBC) \end{cases}$

□

**BÀI 551.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật. Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAD$  và  $E$  là điểm trên cạnh  $DC$  sao cho  $DC = 3DE$ ,  $I$  là trung điểm  $AD$ .

① Chứng minh  $OI \parallel (SAB)$  và  $OI \parallel (SCD)$ .

② Tìm giao điểm  $P$  của  $IE$  và  $(SBC)$ . Chứng minh  $GE \parallel (SBC)$ .

**Lời giải.**

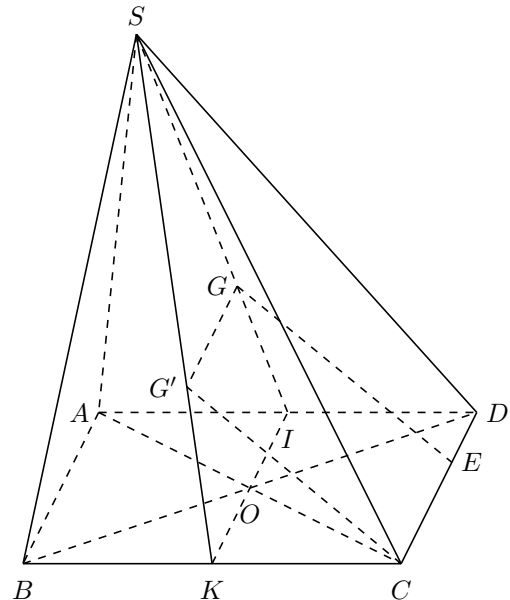
① Ta có  $\begin{cases} OI \parallel AB \\ AB \subset (SAB) \Rightarrow OI \parallel (SAB). \\ OI \not\subset (SAB) \end{cases}$

Tương tự,  $\begin{cases} OI \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow OI \parallel (SCD). \\ OI \not\subset (SCD) \end{cases}$

② Vì  $\frac{DI}{DA} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \frac{DE}{DC}$  nên  $IE$  không song song với  $AC$ . Trong hình chữ nhật  $ABCD$ , gọi  $P = IE \cap BC \Rightarrow P = IE \cap (SBC)$ .

Gọi  $K$  là trung điểm của  $BC$ ,  $G'$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ .

Khi đó  $\frac{SG'}{SK} = \frac{SG}{SI} = \frac{G'G}{KI} = \frac{2}{3}$ , suy ra  $G'G \parallel KI \parallel CE$  và  $\Rightarrow G'G = \frac{2}{3}KI = \frac{2}{3}CD = CE$ . Do đó tứ giác  $G'GEC$  là hình bình hành, suy ra  $CG' \parallel CE \Rightarrow CG' \parallel (SBC)$ .



□

**BÀI 552.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB$  và  $CD$ .

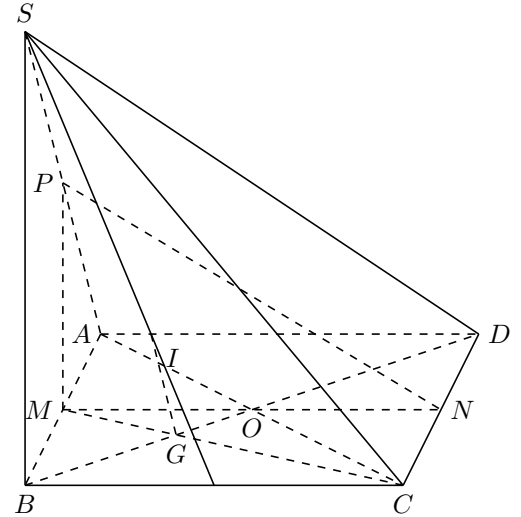
① Chứng minh  $MN \parallel (SBC)$  và  $MN \parallel (SAD)$ .

② Gọi  $P$  là trung điểm cạnh  $SA$ . Chứng minh  $SB \parallel (MNP)$  và  $SC \parallel (MNP)$ .

③ Gọi  $G, I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $SBC$ . Chứng minh  $GI \parallel (MNP)$ .

**Lời giải.**

- ① Từ giả thiết, ta có  $MN \parallel AD \parallel BC$ . Vì  $MN \not\subset (SBC)$ ,  $MN \not\subset (SAD)$  nên  $MN \parallel (SBC)$  và  $MN \parallel (SAD)$ .
- ② Ta có  $\frac{AP}{AS} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow SB \parallel PM \Rightarrow SB \parallel (MNP)$ .  
Tương tự,  $\frac{AO}{AC} = \frac{AP}{AS} = \frac{1}{2} \Rightarrow PO \parallel SC$  vì  $OP \subset (MNP)$  nên  $SC \parallel (MNP)$ .
- ③



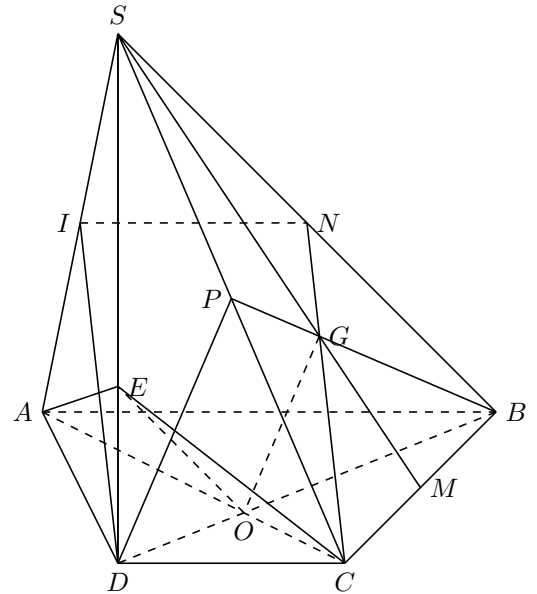
□

**BÀI 553.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình thang đáy lớn  $AB$ , với  $AB = 2CD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $I$  là trung điểm của  $SA$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SBC$  và  $E$  là một điểm trên cạnh  $SD$  sao cho  $3SE = 2SD$ . Chứng minh:

- ①  $DI \parallel (SBC)$ .
- ②  $GO \parallel (SCD)$ .
- ③  $SB \parallel (ACE)$ .

**Lời giải.**

- ① Gọi  $N$  là trung điểm  $SB$ , khi đó  $IN \parallel AB$  và  $IN = \frac{1}{2}AB$ . Suy ra  $IN \parallel CD$ ,  $IN = DC$  suy ra tứ giác  $INCD$  là hình bình hành, do đó  $ID \parallel NC$ . Vậy  $ID \parallel (SBC)$ .
- ②  $GO \parallel (SCD)$   
Gọi  $P$  là trung điểm của  $SC$ , khi đó  $GO \parallel PD$ , suy ra  $GO \parallel (SCD)$ .
- ③ Ta có  $EO \parallel SB$ , suy ra  $SB \parallel (ACE)$ .



□

**BÀI 554.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của các cạnh  $AB, AD$ . Gọi  $I, J$  thuộc  $SM, SN$  sao cho  $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$ . Chứng minh

- ①  $MN \parallel (SBD)$ .
- ②  $IJ \parallel (SBD)$ .
- ③  $SC \parallel (IJO)$ .

**Lời giải.**

- ①

Ta có  $M, N$  là trung điểm của các cạnh  $AB, AD$ .  
Suy ra  $MN \parallel BD$ , mà  $BD \subset (SBD)$ .  
Nên  $MN \parallel (SBD)$ .

- ② Ta có  $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$ . Hay  $IJ \parallel BD$ .  
Mà  $BD \subset (SBD)$ . Nên  $IJ \parallel (SBD)$ .

- ③ Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $H$  là giao điểm của  $MN$  và  $AC$ .

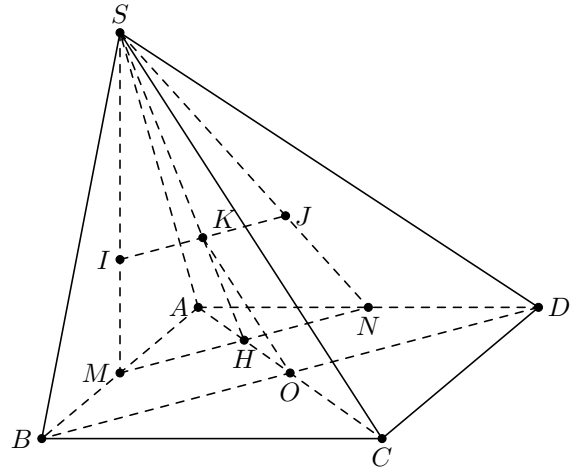
Trong mặt phẳng  $(SMN)$  gọi  $K$  là giao điểm của  $IJ$  và  $SH$ .

Dễ thấy  $H$  là trung điểm của  $AO$ , suy ra  $\frac{HO}{HC} = \frac{1}{3}$ .

Lại có  $IJ \parallel MN \Rightarrow IK \parallel MH \Rightarrow \frac{HK}{SH} = \frac{MI}{SM} = \frac{1}{3}$ .

Do đó  $\frac{HK}{HS} = \frac{HO}{HC} = \frac{1}{3} \Rightarrow KO \parallel SC$ .

Mà  $KO \subset (IJO) \Rightarrow SC \parallel (IJO)$ .



□

**BÀI 555.** Cho tứ diện  $ABCD$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$  và  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BI = 2IC$ . Chứng minh  $IG \parallel (ACD)$ .

**Lời giải.**

Gọi  $H$  là trung điểm của  $BD$ . Trong mặt phẳng  $(BCD)$ , gọi  $K$  là giao điểm của  $HI$  và  $CD$ .

Theo định lý Menelaus có  $\frac{BH}{HD} \cdot \frac{IC}{BI} \cdot \frac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{KD}{KC} = 1$ .

$\frac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow \frac{KD}{KC} = 2$ .

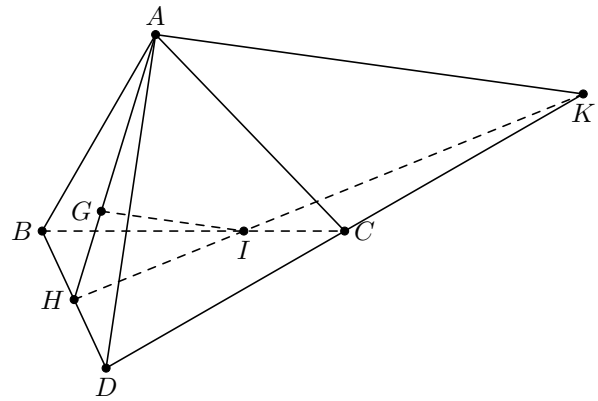
Suy ra  $C$  là trung điểm của  $KD$ , suy ra  $BC$  là trung tuyến của  $\triangle BDK$ .

Mà  $BI = 2IC$ , suy ra  $I$  là trọng tâm của  $\triangle BDK$ .

Suy ra  $\frac{HI}{HK} = \frac{1}{3}$ . Lại có  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABD \Rightarrow$

$\frac{HG}{HK} = \frac{1}{3}$ .

Do đó,  $GI \parallel AK$ , mà  $AK \subset (ACD) \Rightarrow IG \parallel (ACD)$ .



□

**BÀI 556.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G$  và  $P$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ACD$  và  $ABC$ . Chứng minh rằng  $GP \parallel (BCD)$ ,  $GP \parallel (ABD)$ .

**Lời giải.**

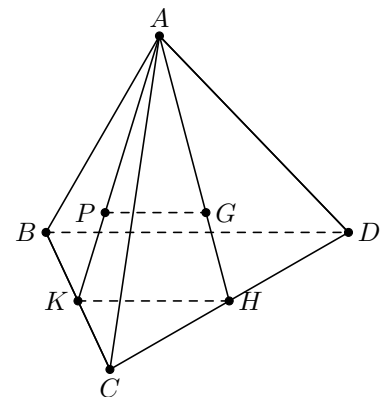
Gọi  $K, H$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Suy ra  $KH \parallel BD$  (1).

Ta có  $G, P$  lần lượt là trọng tâm của  $\triangle ACD, \triangle ABC$ .

Suy ra  $\frac{AP}{AK} = \frac{2}{3}, \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow PG \parallel HK$  (2).

Từ (1) và (2), suy ra  $GP \parallel BD$ .

Mà  $BD \subset (BCD), BD \subset (ABD)$ , suy ra  $GP \parallel (BCD), GP \parallel (ABD)$ .



□

**BÀI 557.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành,  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $M$  là trung điểm của  $SA$ .

- ① Chứng minh  $OM \parallel (SCD)$ .

- ② Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $M$ , đồng thời song song với  $SC$  và  $AD$ . Tìm thiết diện của mặt phẳng  $(\alpha)$  với hình chóp  $S.ABCD$ .

**Lời giải.**

①

Ta có  $M, O$  là trung điểm của  $SA$  và  $AC$ , suy ra  $MO \parallel SC$ .  
Mà  $SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD)$ .

② Vì  $MO \parallel SC \Rightarrow O \in (\alpha)$ .

Ta có  $\begin{cases} O \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ$ .

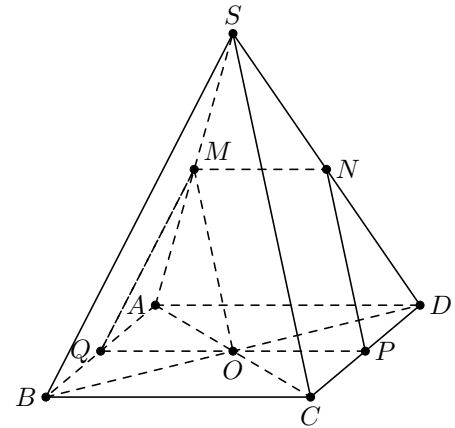
Với  $PQ \parallel AD, O \in PQ, Q \in AB, P \in CD$ .

Lại có  $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SCD) \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PN$ , với  $PN \parallel SC$ .

Có  $(\alpha) \cap (SAD) = MN, (\alpha) \cap (SAB) = MQ$ .

Nhận thấy  $P, Q$  là trung điểm của  $CD$  và  $AB$ . Suy ra  $N$  là trung điểm của  $SD$ .

Suy ra  $MN \parallel PQ$ . Vậy thiết diện là hình thang  $MNPQ$ .



□

**BÀI 558.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ . Gọi  $M, N$  thuộc cạnh  $AB, CD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $MN$  và song song với  $SA$ .

① Tìm thiết diện của  $(\alpha)$  với hình chóp.

② Tìm điều kiện của  $MN$  để thiết diện là hình thang.

**Lời giải.**

①

Ta có  $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$ , với  $MP \parallel SA$ .

$SA$ .

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$ , gọi  $R = MN \cap AC$ .

Ta có  $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$ , với  $RQ \parallel SA$ .

Ta có  $(\alpha) \cap (SCD) = QN$ . Vậy thiết diện là tứ giác  $MNPQ$ .

② Ta có  $MNPQ$  là hình thang  $\Rightarrow \begin{cases} MP \parallel QN & (1) \\ MN \parallel PQ & (2) \end{cases}$ .

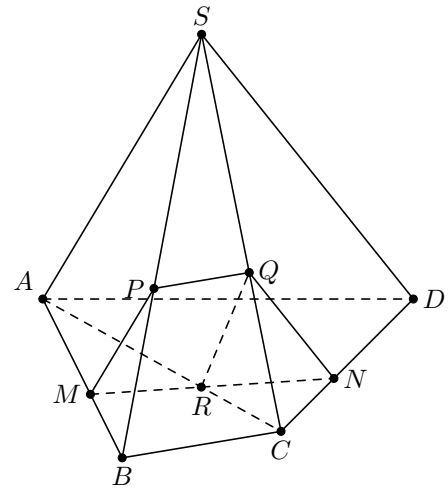
Xét (1) ta có  $\begin{cases} SA \parallel MP \\ MP \parallel QN \end{cases} \Rightarrow SA \parallel QN$ .

Do đó  $\begin{cases} SA \parallel QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (SCD)$  (vô lý).

Xét (2) ta có  $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$ .

Ngược lại, nếu  $MN \parallel BC$  thì  $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (SBC) \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$ .

Vậy để thiết diện là hình thang thì  $MN \parallel PQ$ .



□

**BÀI 559.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SC$ .  $(P)$  là mặt phẳng qua  $AM$  và song song với  $BD$ .

① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

- ② Gọi  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  với các cạnh  $SB, SD$ . Tìm tỉ số diện tích của  $\triangle SME$  với  $\triangle SBC$  và tỉ số diện tích của  $\triangle SMF$  với  $\triangle SCD$ .
- ③ Gọi  $K$  là giao điểm của  $ME$  và  $CB$ ,  $J$  là giao của  $MF$  và  $CD$ . Chứng minh  $K, A, J$  nằm trên đường thẳng song song với  $EF$  và tìm tỉ số  $\frac{EF}{KJ}$ .

**Lời giải.**

①

Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  gọi  $AC \cap BD = O$ ,  
trong mặt phẳng  $(SAC)$ , gọi  $AM \cap SO = I$ .

Ta có

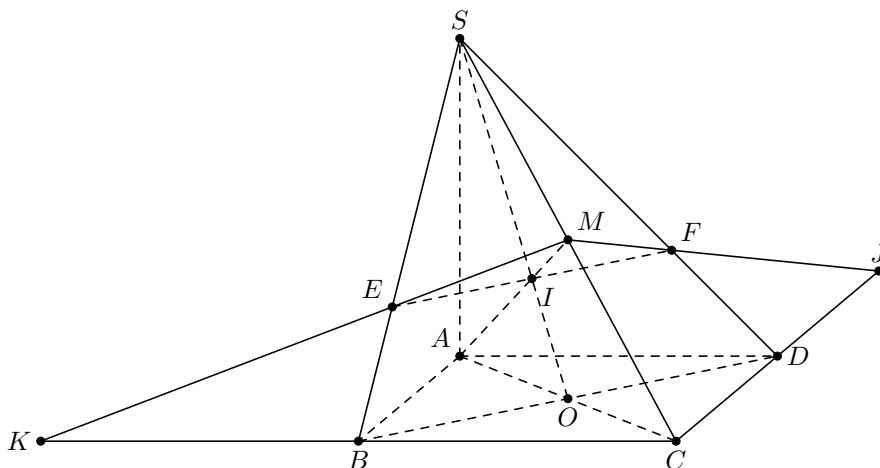
$$\text{Ia} \quad \begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = EF,$$

với  $I \in EF, E \in SB, F \in SD$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (P) \cap (SAB) &= \\ AE, (P) \cap (SBC) &= \\ EM, (P) \cap (SCD) &= \\ MF. \end{aligned}$$

Vậy thiết diện là tứ giác  $AEMF$ .



- ② Trong  $\triangle SAC$ , có  $I$  là trọng tâm của tam giác  $\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{EF}{BD} = \frac{2}{3}$  (1).  
Do đó  $\frac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ .

- ③ Ta có  $\begin{cases} (MEF) \cap (ABCD) = AK \\ (MEF) \cap (ABCD) = AJ \end{cases} \Rightarrow K, A, J \text{ thẳng hàng.}$

Theo định lý Menelaus, xét  $\triangle SBC$  ta có  $\frac{MS}{MC} \cdot \frac{EB}{ES} \cdot \frac{KC}{KB} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{KC}{KB} = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KB} = 2$ .  
 Hay  $B$  là trung điểm của  $KC$ . Tương tự, ta có  $D$  là trung điểm của  $CJ$ .

Do đó,  $BD$  là đường trung bình của  $\triangle KCJ \Rightarrow \begin{cases} BD \parallel KJ \\ BD = \frac{1}{2} \cdot KJ \end{cases} \quad (2)$ .

Mà  $BD \parallel EF$ . Vậy  $A, K, J$  nằm trên đường song song với  $EF$ .

Từ (1) và (2), suy ra  $\frac{EF}{KI} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ .

☐

**BÀI 560.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh  $BC$  và  $AD$ . Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MN$  và song song với  $CD$ . Xác định vị trí của hai điểm  $M, N$  để thiết diện là hình bình hành.

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} M = (\alpha) \cap (BCD) \\ CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = MI, \text{ với } MI \parallel CD.$$

$$\begin{cases} N = (\alpha) \cap (ACD) \\ CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = NK, \text{ với } NK \parallel CD.$$

Ta có  $(\alpha) \cap (ABD) = NI, (\alpha) \cap (ABC) = MK$ .

Vậy thiết diện là hình thang  $MINK$ , (vì  $MI \parallel NK$ ).

$$\text{Lại có } \begin{cases} MI \parallel CD \\ KN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MI}{CD} = \frac{BM}{CB} \\ \frac{KN}{CD} = \frac{AN}{AD} \end{cases}.$$

Để thiết diện  $MINK$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $MI = NK \Leftrightarrow \frac{BM}{CD} = \frac{AN}{AD}$ .

Vậy  $M, N$  lần lượt là hai điểm nằm trên  $BC$  và  $AD$  và  $\frac{BM}{CD} = \frac{AN}{AD}$ .

□

**BÀI 561.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ ,  $M$  là một điểm trên đoạn  $IJ$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng qua  $M$  và song song với  $AB$  và  $CD$ .

- ① Tìm giao tuyến của mặt phẳng  $(P)$  và  $(ICD)$ .
- ② Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng  $(P)$ . Thiết diện là hình gì?

**Lời giải.**

- ① Gọi  $\Delta_1 = (P) \cap (ICD)$ , ta có
 
$$\begin{cases} M \in (P) \\ M \in IJ, IJ \subset (ICD) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta_1.$$

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ICD) \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel CD.$$

$$(P) \cap (ICD) = \Delta_1$$

Vậy  $\Delta_1$  là đường thẳng qua  $M$  và song song với  $CD$ .

Gọi  $E = \Delta_1 \cap IC, F = \Delta_1 \cap ID$ , ta được  $(P) \cap (ICD) = EF$ .

- ② Gọi  $\Delta_2 = (P) \cap (ABD)$ , ta có
 
$$\begin{cases} F \in (P) \\ F \in ID, ID \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow F \in \Delta_2.$$

$$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel AB.$$

$$(P) \cap (ABD) = \Delta_2$$

Vậy  $\Delta_2$  là đường thẳng qua  $F$  và song song với  $AB$ .

Gọi  $G = \Delta_2 \cap BD, P = \Delta_2 \cap AD$ , ta được  $(P) \cap (ABD) = GP$ .

Gọi  $\Delta_3 = (P) \cap (ABC)$ , ta có

$$\begin{cases} E \in (P) \\ E \in IC, IC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in \Delta_3.$$

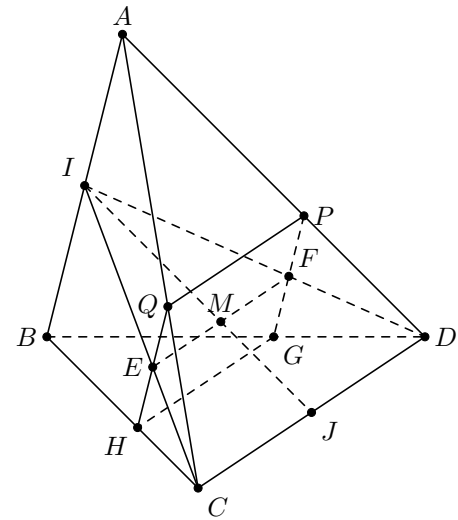
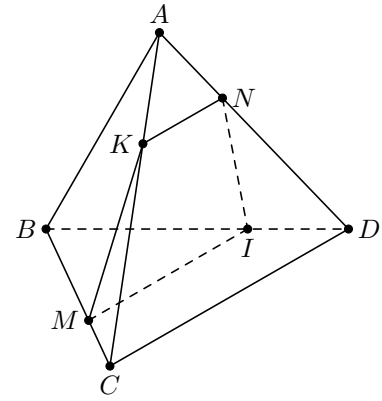
Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ (P) \cap (ABC) = \Delta_3 \end{cases} \Rightarrow \Delta_3 \parallel AB.$$

Vậy  $\Delta_3$  là đường thẳng qua  $E$  và song song với  $AB$ .

Gọi  $H = \Delta_3 \cap BC, Q = \Delta_3 \cap AC$ , ta được  $(P) \cap (ABC) = HQ$ .

Giao tuyến của  $(P)$  với các mặt phẳng  $(BCD), (ABD), (ACD), (ABC)$  lần lượt là  $GH, GP, PQ, QH$ .



Do đó thiết diện của tứ diện với mặt phẳng  $(P)$  là tứ giác  $HGPQ$ .

Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ (P) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

và

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ (P) \cap (BCD) = HG \end{cases} \Rightarrow HG \parallel CD.$$

Ta có  $\begin{cases} HG \parallel PQ \text{ (cùng song song với } CD) \\ HQ \parallel PG \text{ (cùng song song với } AB) \end{cases} \Rightarrow$  tứ giác  $HGPQ$  là hình bình hành.

□

**BÀI 562.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $K$  và  $J$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ABC$  và  $SBC$ .

- ① Chứng minh  $KJ \parallel (SAB)$ .
- ② Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $KJ$  và song song với  $AD$ . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

**Lời giải.**

- ① Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ , theo tính chất trọng tâm

$$\text{ta có } \frac{HK}{HA} = \frac{HJ}{HS} = \frac{1}{3} \Rightarrow KJ \parallel SA \text{ (Định lý Ta-lét}$$

$$\text{đảo)}. \text{ Ta có } \begin{cases} KJ \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \\ KJ \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow KJ \parallel (SAB).$$

- ② Gọi  $\Delta_1 = (P) \cap (ABCD)$ , ta có  $\begin{cases} K \in KJ, KJ \subset (P) \\ K \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_1.$

$$\begin{cases} (P) \parallel AD \\ AD \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel AD.$$

Vậy  $\Delta_1$  là đường thẳng qua  $K$  và song song với  $AD$ .

Gọi  $E = \Delta_1 \cap AB, F = \Delta_1 \cap CD$ , ta được  $(P) \cap (ABCD) = EF$ .

Gọi  $\Delta_2 = (P) \cap (SBC)$ , ta có

$$\begin{cases} J \in KJ, KJ \subset (P) \\ J \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow J \in \Delta_2.$$

Và

$$\begin{cases} (P) \parallel AD \parallel BC \\ BC \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel BC.$$

Vậy  $\Delta_2$  là đường thẳng qua  $J$  và song song với  $BC$ .

Gọi  $M = \Delta_2 \cap SB, N = \Delta_1 \cap SD$ , ta được  $(P) \cap (SBC) = MN$ .

Ta có giao tuyến của  $(P)$  với các mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $(SCD)$ ,  $(SBC)$ ,  $(SAB)$  lần lượt là  $EF, FN, NM, NE$ , do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(P)$  là tứ giác  $MNFE$ .

□

**BÀI 563.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $G_1, G_2$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác  $ACD$  và  $BCD$ . Chứng minh rằng  $G_1G_2 \parallel (ABC)$  và  $G_1G_2 \parallel (ABD)$ .

**Lời giải.**

Xét tam giác  $ABM$  ta có

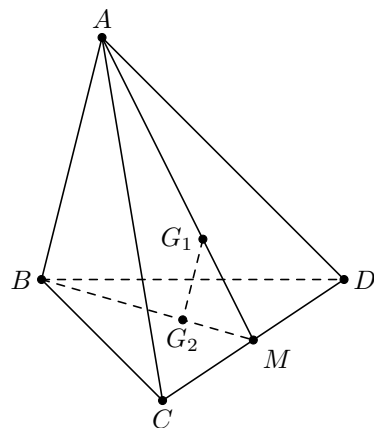
$$\frac{MG_2}{MB} = \frac{1}{3} \quad (G_2 \text{ là trọng tâm } \triangle BCD).$$

$$\frac{MG_1}{MA} = \frac{1}{3} \quad (G_1 \text{ là trọng tâm } \triangle ACD).$$

Suy ra  $\frac{MG_2}{MB} = \frac{MG_1}{MA} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$  (Định lý Ta-lét đảo).

$$\text{Ta có } \begin{cases} G_1G_2 \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ G_1G_2 \notin (ABC) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} G_1G_2 \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ G_1G_2 \notin (ABD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD).$$



□

**BÀI 564.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle SAB$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ , lấy điểm  $M$  trong đoạn  $AD$  sao cho  $AD = 3AM$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .
- ② Đường thẳng qua  $M$  và song song với  $AB$  cắt  $CI$  tại  $N$ . Chứng minh  $NG \parallel (SCD)$ .
- ③ Chứng minh  $MG \parallel (SCD)$ .

**Lời giải.**

- ① Gọi  $\Delta = (SAD) \cap (SBC)$ , ta có  $S \in \Delta$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ (SAD) \cap (SBC) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AD.$$

Vậy  $\Delta$  là đường thẳng qua  $S$  và song song với  $AD$ .

- ② Hình thang  $AICD$  có  $MN \parallel AI \parallel CD$  nên  $\frac{IN}{IC} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$  (Định lý Ta-lét).

$$\triangle SAB \text{ có } G \text{ là trọng tâm nên } \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}.$$

$$\triangle ISC \text{ có } \frac{IN}{IC} = \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC \text{ (Định lý Ta-lét đảo)}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} NG \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ NG \notin (SCD) \end{cases} \Rightarrow NG \parallel (SCD).$$

- ③ Gọi  $E$  là giao điểm của  $IM$  và  $CD$ . Vì  $AI \parallel DE$  nên ta có  $\frac{IM}{ME} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$  (Định lý Ta-lét).

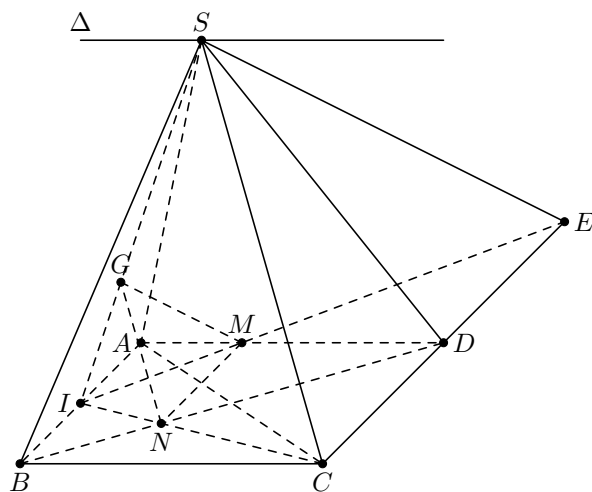
$$\text{Xét } \triangle ASE \text{ có } \frac{IG}{GS} = \frac{IM}{ME} = \frac{1}{2} \Rightarrow GM \parallel SE.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} MG \parallel SE \\ SE \subset (SCD) \\ MG \notin (SCD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (SCD).$$

□

**BÀI 565.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với đáy lớn  $AD$  và  $AD = 2BC$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SCD$ .

- ① Chứng minh  $OG \parallel (SBC)$ .
- ② Cho  $M$  là trung điểm của  $SD$ . Chứng minh  $CM \parallel (SAB)$ .



③ Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $SC$  sao cho  $2SC = 3SI$ . Chứng minh  $SA \parallel (BDI)$ .

**Lời giải.**

① Gọi  $N$  là trung điểm  $SC$ , vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle SCD$  nên  $\frac{NG}{GD} = \frac{1}{2}$ .

Ta có  $BC \parallel AD \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{AO} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$  (Định lí Ta-lét).

$\triangle BND$  có  $\frac{NG}{GD} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{2} \Rightarrow OG \parallel BN$  (Định lí Ta-lét đảo).

Ta có  $\begin{cases} OG \parallel BN \\ BN \subset (SBC) \Rightarrow OG \parallel (SBC). \\ OG \not\subset (SBC) \end{cases}$

② Gọi  $E$  là trung điểm của  $SA$ , theo tính chất đường trung bình ta có  $ME \parallel AD$  và  $ME = \frac{1}{2}AD$ .

$\begin{cases} ME = BC = \frac{1}{2}AD \\ ME \parallel BC (\parallel AD) \end{cases} \Rightarrow$  Tứ giác  $MEBC$  là hình bình hành.

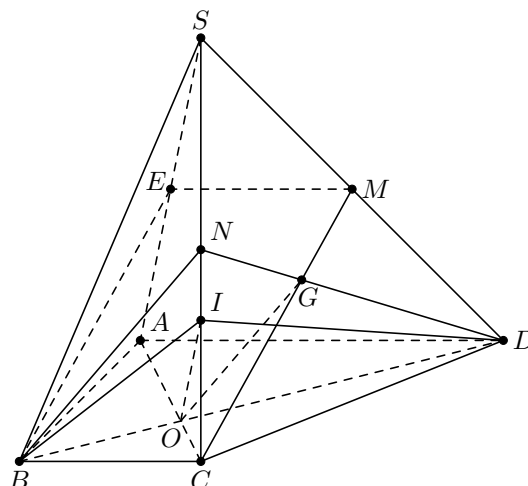
Suy ra  $CM \parallel BE$ .

Ta có  $\begin{cases} CM \parallel BE \\ BE \subset (SAB) \Rightarrow CM \parallel (SAB). \\ CM \not\subset (SAB) \end{cases}$

③ Ta có  $2SC = 3SI \Leftrightarrow 2SI + 2IC = 3SI \Leftrightarrow SI = 2IC$ .

Xét  $\triangle SAC$  có  $\frac{CI}{IS} = \frac{CO}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OI \parallel SA$  (Định lí Ta-lét đảo).

Ta có  $\begin{cases} SA \parallel BI \\ BI \subset (BDI) \Rightarrow AB \parallel (BDI). \\ AB \not\subset (BDI) \end{cases}$



□

**BÀI 566.** Cho hình chóp  $S.ABCD$ , đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AD, SB$ .

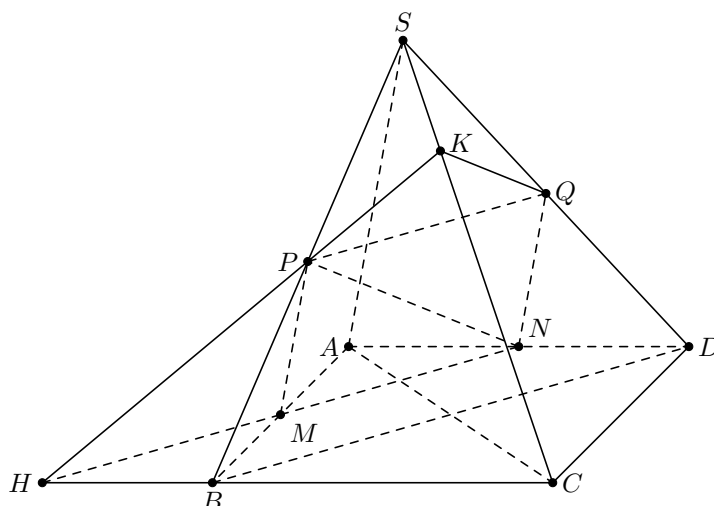
① Chứng minh  $BD \parallel (MNP)$ .

② Tìm giao điểm của  $(MNP)$  với  $BC$ .

③ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MNP)$  và  $(SBD)$ .

④ Tìm thiết diện của hình chóp với  $(MNP)$ .

**Lời giải.**



- ①  $\triangle ABD$  có  $MN$  là đường trung bình nên  $MN \parallel BD$  và  $MN = \frac{1}{2}BD$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \Rightarrow BD \parallel (MNP). \\ BD \not\subset (MNP) \end{cases}$$

- ② Trong  $(ABCD)$ , dựng  $H = MN \cap BC$ , ta có

$$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = (MNP) \cap BC.$$

- ③ Gọi  $\Delta = (MNP) \cap (SBD)$ , ta có  $\begin{cases} P \in (SBD) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in \Delta$ .

Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP), (BD) \subset (SBD) \Rightarrow \Delta \parallel MN. \\ (MNP) \cap (SBD) = \Delta \end{cases}$$

Vậy  $\Delta$  là đường thẳng qua  $P$  và song song với  $MN$ .

Gọi  $Q = \Delta \cap SD$ , ta được  $(MNP) \cap (SBD) = PQ$ .

- ④ Trong  $(SBC')$ , dựng  $K = HP \cap SC$ . Giao tuyến của  $(MNP)$  với các mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $(SAB)$ ,  $(SBC')$ ,  $(SCD)$ ,  $(SDA)$  lần lượt là  $MN$ ,  $PM$ ,  $PK$ ,  $KQ$ ,  $QN$ . Vậy thiết diện của hình chóp với  $(MNP)$  là ngũ giác  $PMNQK$ .

☐

**BÀI 567.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Gọi  $N, P$  lần lượt trung điểm của  $BD$  và  $AD$ .

- ① Chứng minh  $NP \parallel (ABC)$ .

- ② Tìm giao điểm  $Q$  của  $AC$  với  $(MNP)$  và tính  $\frac{QA}{QC}$ . Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi  $(MNP)$ .

- ③ Chứng minh  $MG \parallel (ABD)$ , với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACD$ .

**Lời giải.**

- ①  $\triangle ABD$  có  $NP$  là đường trung bình nên  $NP \parallel AB$  và  $NP = \frac{1}{2}AB$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} NP \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \Rightarrow NP \parallel (ABC). \\ NP \not\subset (ABC) \end{cases}$$

- ② Gọi  $\Delta = (MNP) \cap (ABC)$ , ta có

$$\begin{cases} M \in (SBD) \\ M \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta.$$

$$\begin{cases} NP \parallel (ABC) \\ NP \subset (MNP) \\ (MNP) \cap (ABC) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AB.$$

Vậy  $\Delta$  là đường thẳng qua  $M$  và song song với  $AB$ .

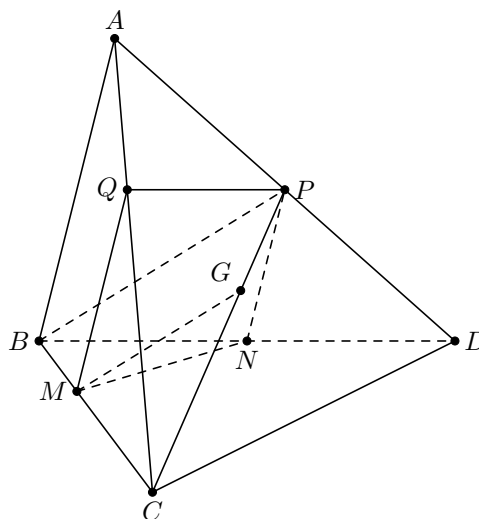
Trong  $(ABC)$  dựng  $Q = \Delta \cap AC$ , ta có

$$\begin{cases} Q \in AC \\ Q \in \Delta, \Delta \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = AC \cap (MNP).$$

$$\text{Ta có } MC = 2MB \Leftrightarrow MC + MB = 3MB \Leftrightarrow BC = 3MB \Leftrightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Xét  $\triangle ABC$  có  $QM \parallel AB \Rightarrow \frac{QA}{QC} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$ .

Ta có giao tuyến của  $(MNP)$  với các mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $(ACD)$ ,  $(ABD)$ ,  $(BCD)$  lần lượt là  $QM$ ,  $QP$ ,  $PN$ ,  $MN$ . Vậy thiết diện của hình chóp bị cắt bởi  $(MNP)$  là tứ giác  $MNPQ$ .



- ③ Vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle ACD$  nên  $\frac{PG}{PC} = \frac{1}{3}$ .

Xét  $\triangle BCP$  có  $\frac{PG}{PC} = \frac{BM}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MG \parallel BP$  (Định lí Ta-lét đảo).

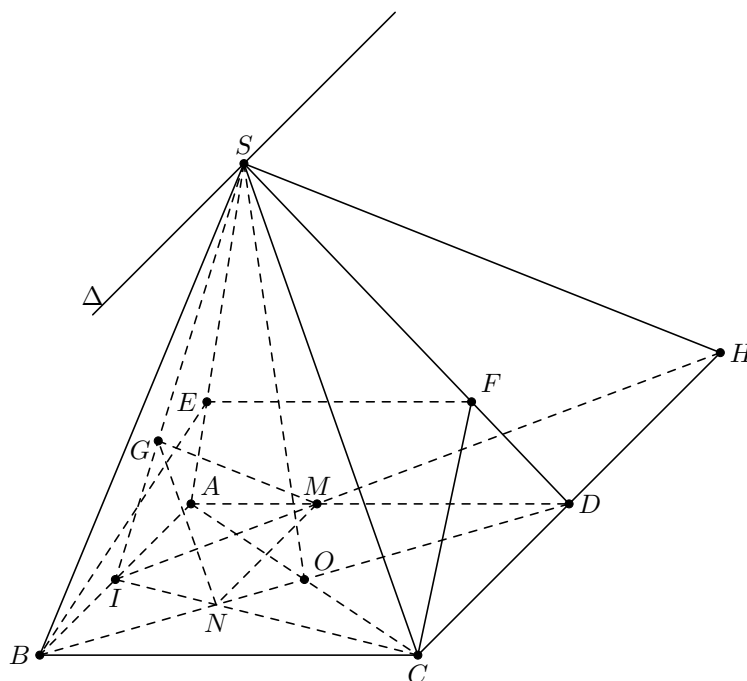
$$\text{Ta có } \begin{cases} MG \parallel BP \\ BP \subset (ABD) \Rightarrow MG \parallel (ABD). \\ MG \not\subset (ABD) \end{cases}$$

□

**BÀI 568.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành.

- ① Tìm giao tuyến của  $(SAC)$  và  $(SBD)$ ;  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .
- ② Một mặt phẳng qua  $BC$  và song song với  $AD$  cắt  $SA$  tại  $E$ , ( $E \neq S$ ,  $E \neq A$ ), cắt  $SD$  tại  $F$ , ( $F \neq S$ ,  $F \neq D$ ). Tứ giác  $BEFC$  là hình gì?
- ③ Gọi  $M$  thuộc đoạn  $AD$  sao cho  $AD = 3AM$  và  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAB$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Đường thẳng qua  $M$  và song song  $AB$  cắt  $CI$  tại  $N$ . Chứng minh  $NG \parallel (SCD)$  và  $MG \parallel (SCD)$ .

**Lời giải.**



- ① Ta có  $S \in (SAC) \cap (SBD)$

Trong  $(ABCD)$ , dựng  $O = AC \cap BD$ , ta có

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD).$$

Vậy  $(SAC) \cap (SBD) = SO$ .

Gọi  $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$ , ta có  $S \in \Delta$

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AB.$$

$$(SAB) \cap (SCD) = \Delta$$

Vậy  $\Delta$  là đường thẳng qua  $S$  và song song với  $AB$ .

- ② Ta có

$$\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC \subset (BCFE) \\ AD \subset (SAD) \\ (BCFE) \cap (SAD) = EF \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AD \parallel BC.$$

Vậy tứ giác  $BCFE$  là hình thang.

- ③ Xét hình thang  $AICD$  có  $MN \parallel AI \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$  (Định lí Ta-lét).

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $SAB$  nên  $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$ .

Xét  $\triangle ISC$  ta có

$$\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GN \parallel SC \text{ (Định lí Ta-lét đảo)}.$$

Ta có

$$\begin{cases} GN \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \Rightarrow NG \parallel (SCD). \\ NG \not\subset (SCD) \end{cases}$$

Trong  $(ABCD)$ , dựng  $H = IM \cap CD$ . Vì  $AI \parallel DM$  nên ta có  $\frac{IM}{IH} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$  (Định lí Ta-lét).

Xét  $\triangle ISH$  ta có

$$\frac{IG}{IS} = \frac{IM}{IH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GM \parallel SH \text{ (Định lí Ta-lét đảo)}.$$

Ta có

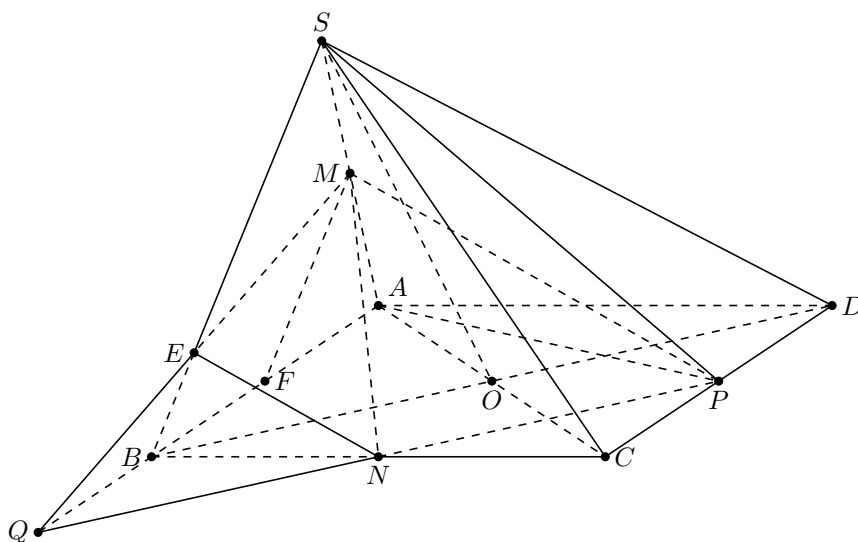
$$\begin{cases} MG \parallel SH \\ SH \subset (SCD) \Rightarrow MG \parallel (SCD). \\ MG \not\subset (SCD) \end{cases}$$

□

**BÀI 569.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $SA, BC, CD$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$ .
- ② Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .
- ③ Tìm giao điểm  $E$  của  $SB$  và  $(MNP)$ .
- ④ Chứng minh  $NE \parallel (SAP)$ .

**Lời giải.**



- ① Ta có  $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD). \end{cases}$

Do đó  $O$  là điểm chung của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$   
mà  $S$  là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$   
nên  $SO = (SAC) \cap (SBD)$ .

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \text{ và } Sx \parallel CD.$$

$\textcircled{3}$  Gọi  $Q = NP \cap AB \Rightarrow Q$  là điểm chung của  $(SAB)$  và  $(MNP)$  mà  $M$  là điểm chung thứ hai nên  $(SAB) \cap (MNP) = MQ$ .

Trong mặt phẳng  $(SAB)$  gọi  $E = MQ \cap SB$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} E \in SB \\ E \in MQ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E = SB \cap (MNP).$$

$\textcircled{4}$  Ta có  $N$  là trung điểm của  $BC$  và  $BQ \parallel CP$  nên  $BQ = CP$  và  $NQ = NP$  (1).

$$\text{Gọi } F \text{ là trung điểm của } AB, \text{ ta có } AF = BF = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = CP = BQ.$$

Ta có  $M, F$  là trung điểm của  $SA$  và  $AB$  nên  $MF$  là đường trung bình tam giác  $SAB$  nên  $MF \parallel SB$ .

Trong tam giác  $QMF$  có  $B$  là trung điểm  $QF$  và  $BE \parallel MF$  nên  $E$  là trung điểm  $MQ$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $EN$  là đường trung bình tam giác  $QMP \Rightarrow EN \parallel MP$ .

Mặt khác, do  $MP \subset (SAP)$  nên  $NE \parallel (SAP)$ .

□

**BÀI 570.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $AB$  sau cho  $AM = 2MB$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle BCD$  và  $I$  là trung điểm  $CD$ ,  $H$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $I$ .

$\textcircled{1}$  Chứng minh  $GD \parallel (MCH)$ .

$\textcircled{2}$  Tìm giao điểm  $K$  của  $MG$  với  $(ACD)$ . Tính tỉ số  $\frac{GK}{GM}$ .

**Lời giải.**

$\textcircled{1}$  Ta có  $IC = ID$  và  $IG = IH$  nên  $GDHC$  là hình bình hành.

Do đó  $GD \parallel CH$

mà  $CH \subset (MCH)$  nên  $GD \parallel (MCH)$ .

$\textcircled{2}$  Trong mp( $ABI$ ), gọi  $K = AI \cap MG$ , ta có  $\begin{cases} K \in AI \subset (ACD) \\ K \in MG \end{cases}$

$\Rightarrow K = MG \cap (ACD)$ .

Trong mp( $ABI$ ), kẻ  $GE \parallel AB$ , ( $E \in AI$ ).

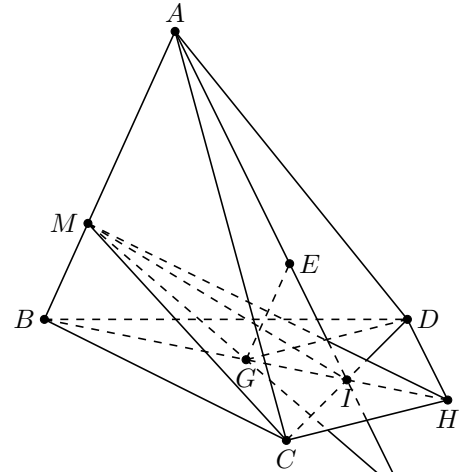
Xét tam giác  $ABI$ , có  $GE \parallel AB$ , suy ra  $\frac{GE}{AB} = \frac{IG}{IB} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\frac{GE}{AM} = \frac{1}{2}.$$

Xét tam giác  $AKM$ , có  $GE \parallel AM$ , suy ra  $\frac{KG}{KM} = \frac{GE}{AM} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{GK}{GM} = 1.$$

□



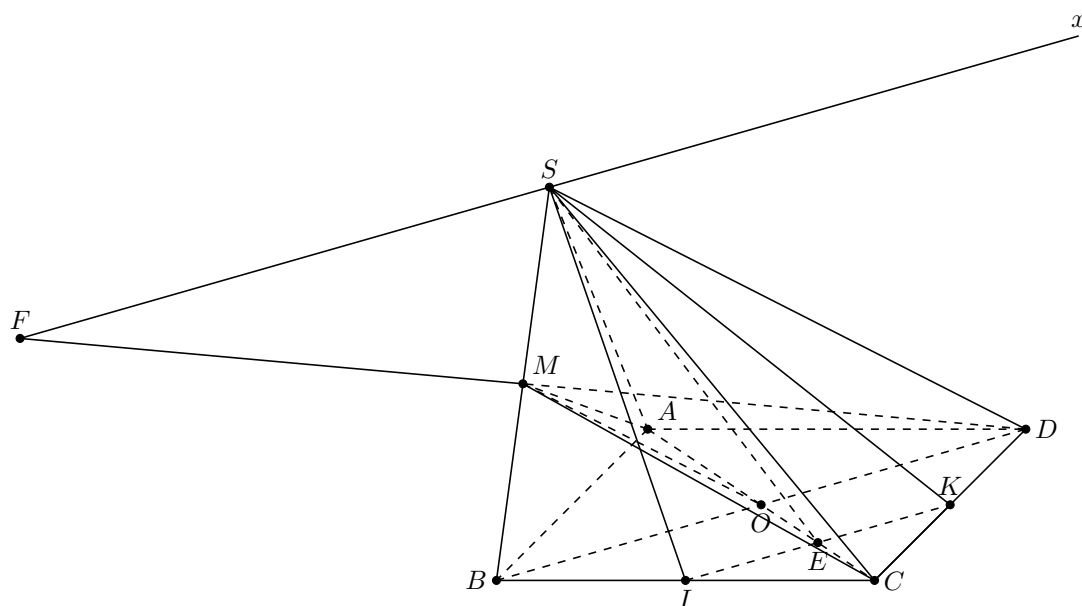
**BÀI 571.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ .

$\textcircled{1}$  Tìm giao tuyến của  $(SIK)$  và  $(SAC)$ ,  $(SIK)$  và  $(SBD)$ .

$\textcircled{2}$  Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Chứng minh  $SD \parallel (ACM)$ .

$\textcircled{3}$  Tìm giao điểm  $F$  của  $DM$  và  $(SIK)$ . Tính tỉ số  $\frac{MF}{MD}$ .

**Lời giải.**



① — Ta có  $S \in (SIK) \cap (SAC)$ .

Trong mp(ABCD), gọi  $E = IK \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in IK \subset (SIK) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (SIK) \cap (SAC)$ .

Suy ra  $SE = (SIK) \cap (SAC)$ .

— Ta có  $\begin{cases} S \in (SIK) \cap (SBD) \\ BD \in (SBD), IK \in (SIK), BD \parallel IK \end{cases} \Rightarrow (SIK) \cap (SBD) = Sx, \text{ (với } Sx \parallel BD \parallel IK \text{)}.$

② Trong mp(ABCD), gọi  $O = AC \cap BD$ , ta có  $SD \parallel MO$ . Mà  $MO \subset (ACM)$ , suy ra  $SD \parallel (ACM)$ .

③ — Trong mp(SBD), gọi  $F = Sx \cap DM \Rightarrow \begin{cases} S \in DM \\ S \in Sx \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow F = DM \cap (SIK)$ .

— Ta có  $SF \parallel BD \Rightarrow \frac{MF}{MD} = \frac{MS}{MB} = 1$ .

□

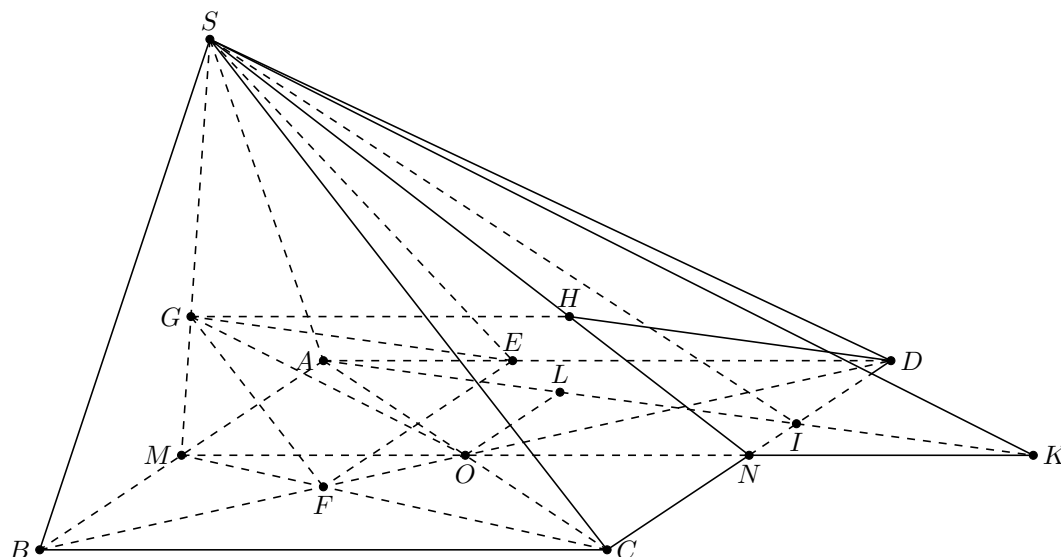
**BÀI 572.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle SAB$ , trên  $AD$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AD = 3AE$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ .

① Chứng minh  $EG \parallel (SCD)$ .

② Đường thẳng qua  $E$  song song  $AB$  cắt  $MC$  tại  $F$ . Chứng minh  $GF \parallel (SCD)$ .

③ Gọi  $I$  là điểm thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $CI = 2ID$ . Chứng minh  $GO \parallel (SAI)$ .

**Lời giải.**



- ① Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $SCD$ , ta có  $GH \parallel MN$  và  $\frac{GH}{MN} = \frac{2}{3}$ .

Lại có  $ED \parallel MN$  và  $\frac{ED}{MN} = \frac{ED}{AD} = \frac{2}{3}$ .

Suy ra  $GH \parallel ED$  và  $GH = ED$ . Suy ra  $GHDE$  là hình bình hành.

Ta có  $\begin{cases} EG \parallel DH \\ DH \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow EG \parallel (SCD)$ .

- ② Ta có  $MA \parallel EF \parallel CD$ , suy ra  $\frac{MF}{MC} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$ .

Xét tam giác  $MSC$  có  $\frac{MF}{MC} = \frac{MG}{MS} = \frac{1}{3}$ , suy ra  $GF \parallel SC$ .

Mà  $SC \subset (SCD)$ . Vậy  $GF \parallel (SCD)$ .

- ③ Trong mp( $ABCD$ ), gọi  $K = AI \cap MN$ . Ta có  $SK = (SMN) \cap (SAI)$ .

Gọi  $L$  là trung điểm của  $AI$ , ta có  $OL$  là đường trung bình của hình thang  $AMNI$ , suy ra

$$OL = \frac{AM + NI}{2} = \frac{AM + \frac{CD}{6}}{2} = \frac{AM + \frac{AB}{6}}{2} = \frac{AM + \frac{AM}{3}}{2} = \frac{2AM}{3} \Rightarrow \frac{OL}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Xét tam giác  $AKM$ , có  $OL \parallel AM$ , suy ra  $\frac{KO}{KM} = \frac{OL}{AM} = \frac{2}{3}$ .

Xét tam giác  $SMK$ , có  $\frac{SG}{SM} = \frac{KO}{KM} = \frac{2}{3}$ , suy ra  $GO \parallel SK$ .

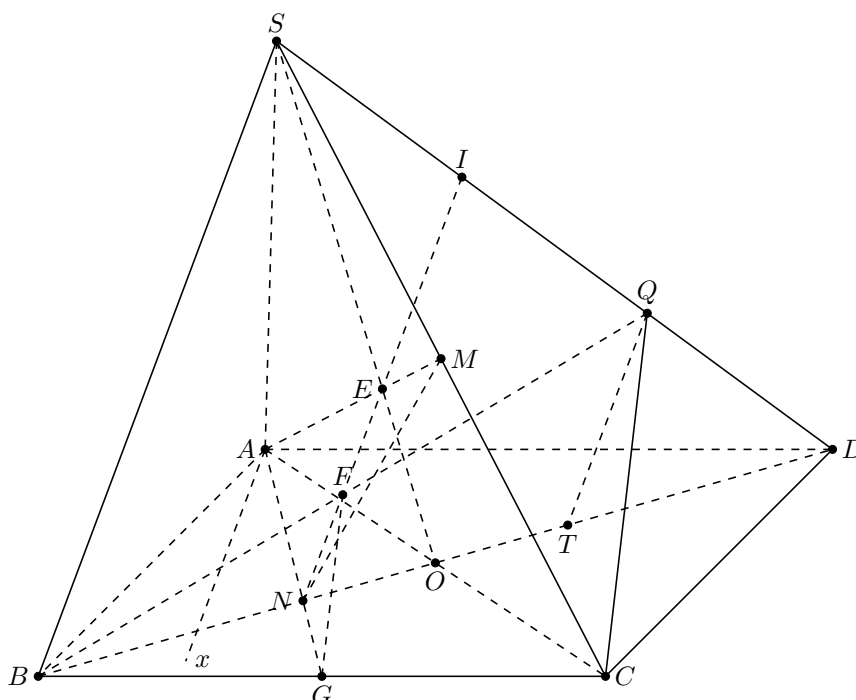
Mà  $SK \subset (SAI)$ . Vậy  $GO \parallel (SAI)$ .

□

**BÀI 573.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$  và  $N$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

- ① Chứng minh  $SB \parallel (AMN)$ .
- ② Tìm giao tuyến  $(AMN)$  và  $(SAB)$ .
- ③ Tìm giao điểm  $I$  của  $SD$  với  $(AMN)$ . Tính tỉ số  $\frac{IS}{ID}$ .
- ④ Gọi  $Q$  là trung điểm của  $ID$ . Chứng minh  $QC \parallel (AMN)$ .

**Lời giải.**



① Trong mp( $ABCD$ ), gọi  $O = AC \cap BD$ .

Trong mp( $SAC$ ), gọi  $E = AM \cap SO$ , ta có  $E$  là trọng tâm tam giác  $SAC$ . Suy ra  $\frac{OE}{OS} = \frac{1}{3}$ .

Ta có  $N$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $\frac{ON}{OB} = \frac{1}{3}$ .

Xét tam giác  $OSB$  có  $\frac{OE}{OS} = \frac{ON}{OB} = \frac{1}{3}$ . Suy ra  $NE \parallel SB$ .

Mà  $NE \subset (AMN)$ . Vậy  $SB \parallel (AMN)$ .

② Ta có  $\begin{cases} A \in (SAB) \cap (AMN) \\ SB \subset (SAB), SB \parallel (AMN) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (AMN) = Ax, \text{ (với } Ax \parallel SB \text{)}.$

③ Trong mp( $SBD$ ), gọi  $I = NE \cap SD \Rightarrow \begin{cases} I \in NE \subset (AMN) \\ I \in SD \end{cases} \Rightarrow I = SD \cap (AMN).$

Ta có  $NE \parallel SB \Rightarrow NI \parallel SB \Rightarrow \frac{IS}{ID} = \frac{BN}{ND} = \frac{BN}{BD - BN} = \frac{\frac{2BO}{3}}{2BO - \frac{2BO}{3}} = \frac{1}{2}.$

④ Trong mp( $SBD$ ), gọi  $F = NE \cap BQ$ .

Trong mp( $ABCD$ ), gọi  $G = AN \cap BC$ , vì  $N$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $G$  là trung điểm của  $BC$ .

Ta có  $FG = (AMN) \cap (BQC)$ .

Kẻ  $QT \parallel FN, (T \in BD)$ . (1)

Xét tam giác  $DNI$  có  $QT \parallel NI$ , suy ra  $\frac{NT}{DN} = \frac{IQ}{DI} = \frac{1}{2}$

Mà  $\frac{BN}{ND} = \frac{1}{2}$  nên  $BN = NT$ , hay  $N$  là trung điểm của  $BT$ . (2)

Từ (1) và (2), ta có  $F$  là trung điểm của  $BQ$ .

Do đó  $GF$  là đường trung bình của tam giác  $BQC$ . Suy ra  $QC \parallel GF$ .

Mà  $GF \subset (AMN)$ . Vậy  $QC \parallel (AMN)$ .

□

**BÀI 574.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ .

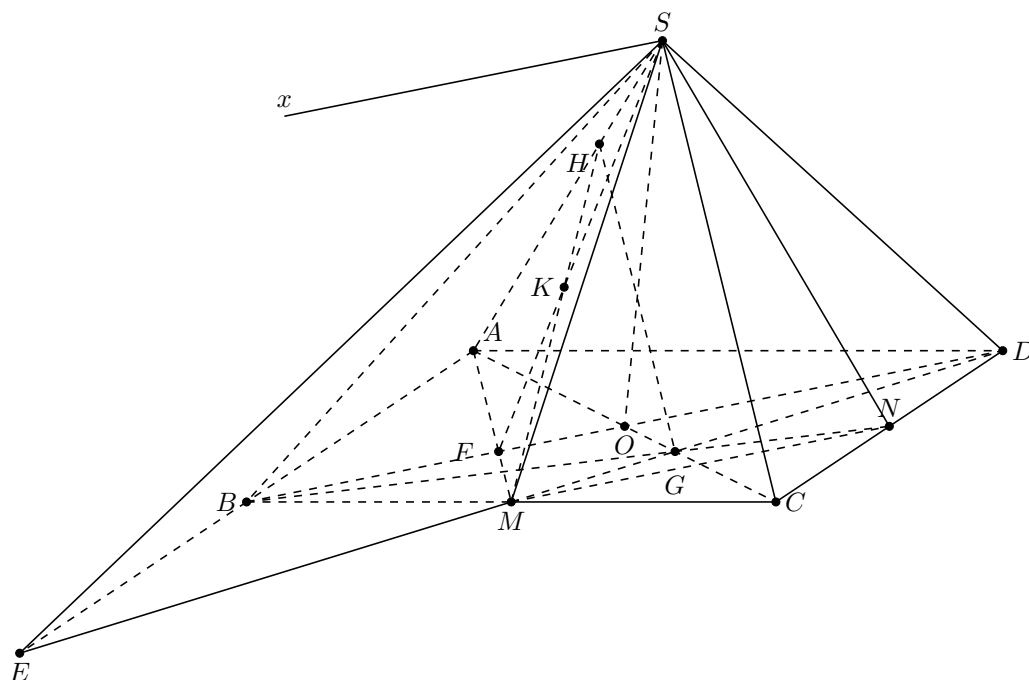
① Tìm giao tuyến của  $(SMD)$  và  $(SAB)$ .

② Tìm giao tuyến của  $(SMN)$  và  $(SBD)$ .

③ Gọi  $H$  là điểm trên cạnh  $SA$  sao cho  $HA = 2HS$ . Tìm giao điểm  $K$  của  $MH$  và  $(SBD)$ . Tính tỉ số  $\frac{KH}{KM}$ .

④ Gọi  $G$  là giao điểm của  $BN$  và  $DM$ . Chứng minh  $HG \parallel (SBC)$ .

**Lời giải.**



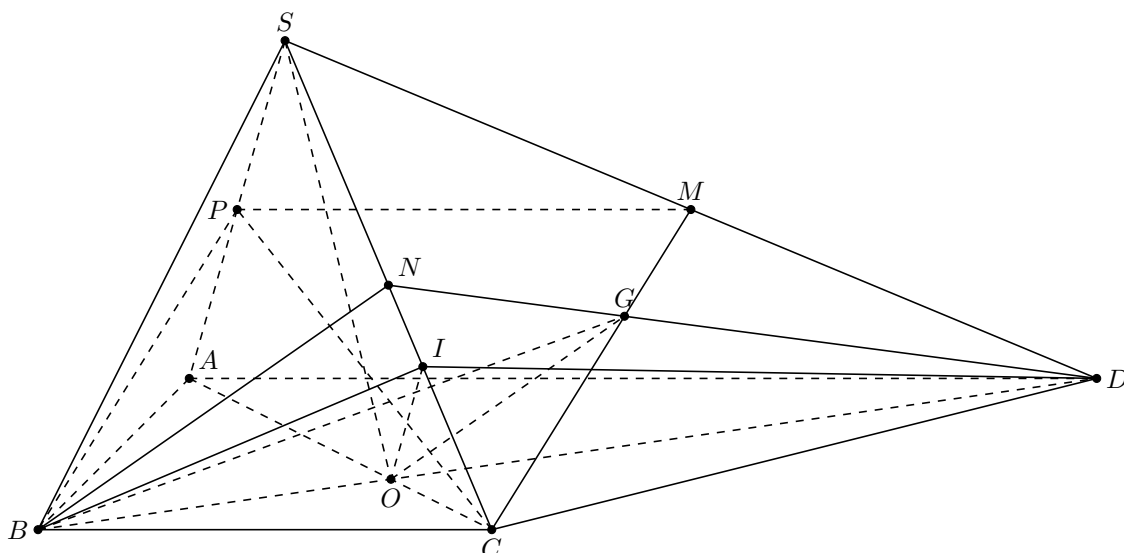
- ① Trong mp( $ABCD$ ), gọi  $E = MD \cap AB \Rightarrow \begin{cases} E \in MD \subset (SMD) \\ E \in AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow E \in (SMD) \cap (SAB)$ .  
mà  $S \in (SAB) \cap (SMD) \Rightarrow SE = (SAB) \cap (SMD)$ .
- ② Ta có  $\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (SMN), BD \subset (SBD) \Rightarrow (SMN) \cap (SBD) = Sx \parallel BD \parallel MN. \\ S \in (SMN) \cap (SBD) \end{cases}$
- ③ Trong mp( $ABCD$ ), gọi  $F = AM \cap BD$ .  
Trong mp( $SAM$ ), gọi  $K = MH \cap SF \Rightarrow \begin{cases} K \in SF \subset (SBD) \\ K \in MH \end{cases} \Rightarrow K = MH \cap (SBD)$ .
- ④ Trong tam giác  $BCD$ ,  $BN$  và  $DM$  là hai trung tuyến nên  $G$  là trọng tâm. Từ đó ta có  $\frac{GC}{CO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{GC}{AC} = \frac{1}{3}$ .  
Mặt khác, do  $HA = 2HS$  nên  $\frac{HS}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GC}{AC} = \frac{HS}{SA} \Rightarrow HG \parallel SC \Rightarrow HG \parallel (SBC)$ .

☐

**BÀI 575.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AD$  là đáy lớn và  $AD = 2BC$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $SCD$ .

- ① Chứng minh  $OG \parallel (SBC')$ .
- ② Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SD$ . Chứng minh  $CM \parallel (SAB)$ .
- ③ Giả sử điểm  $I$  trên đoạn  $SC$  sao cho  $2SC = 3SI$ . Chứng minh  $SA \parallel (BID)$ .
- ④ Xác định giao điểm  $K$  của  $BG$  và mặt phẳng  $(SAC)$ . Tính tỉ số  $\frac{KB}{KG}$ .

**Lời giải.**



- ① Ta có  $AD \parallel BC \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = 2$ .

Mặt khác, gọi  $N$  là trung điểm  $SC$ . Vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle SCD$  nên  $\frac{GD}{GN} = 2$   
 $\Rightarrow \frac{GD}{GN} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow OG \parallel BN \Rightarrow OG \parallel (SBC)$ .

- ② Gọi  $P$  là trung điểm  $SA$ , ta có ngay  $PM$  là đường trung bình của  $\triangle SAD$ .

Suy ra  $PM = \frac{AD}{2} = BC$  và  $PM \parallel AD \parallel BC$ . Do đó  $PMCB$  là hình bình hành.  
 Vậy  $CM \parallel BP \Rightarrow CM \parallel (SAB)$ .

- ③ Ta có  $AD \parallel BC \Rightarrow \frac{OA}{OC} = 2$ .

Mặt khác, vì  $2SC = 3SI$  nên  $\frac{SI}{IC} = 2 \Rightarrow \frac{SI}{IC} = \frac{OA}{OC} \Rightarrow OI \parallel SA \Rightarrow SA \parallel (BID)$ .

- ④ Trong mp( $BCMP$ ), gọi  $K = BG \cap CP$   
 mà  $CP \in (SAC) \Rightarrow K = BG \cap (SAC)$ .

Ta lại có  $CG \parallel BP \Rightarrow \frac{KB}{KG} = \frac{BP}{CG} = \frac{CM}{CG} = \frac{3}{2}$ .

□

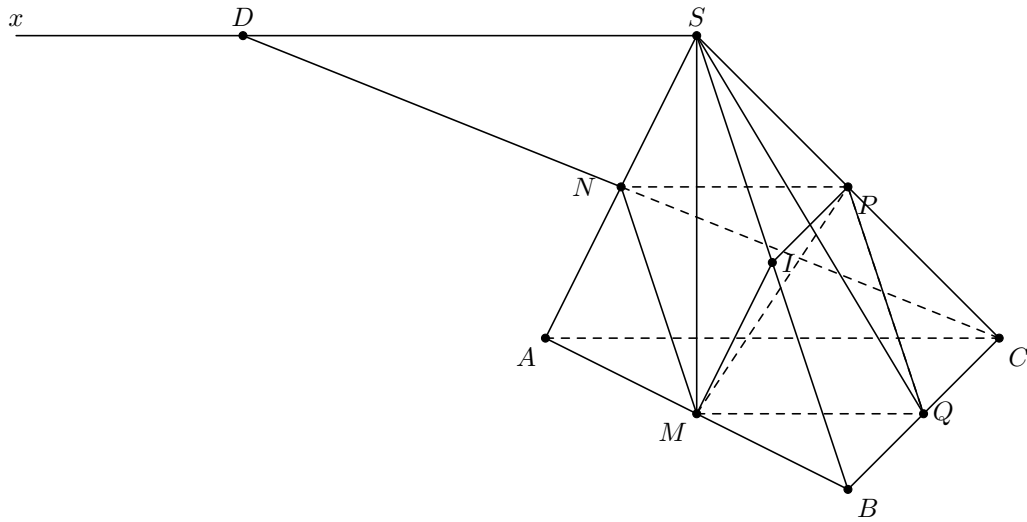
**BÀI 576.** Cho hình chóp  $S.ABC$  Gọi  $M, P, I$  lần lượt là trung điểm của  $AB, SC, SB$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  qua  $MP$  và song song với  $AC$  và cắt các cạnh  $SA, BC$  tại  $N, Q$ .

- ① Chứng minh  $BC \parallel (IMP)$ .

- ② Xác định thiết diện của  $(\alpha)$  với hình chóp. Thiết diện này là hình gì?

- ③ Tìm giao điểm của đường thẳng  $CN$  và mặt phẳng  $(SMQ)$ .

**Lời giải.**



① Ta có  $IP$  là đường trung bình của tam giác  $SBC$  nên  $IP \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (IMP)$ .

② Ta có  $(\alpha)$  cắt  $BC$  tại  $Q$  nên  $(\alpha) \cap (SBC) = PQ$  và  $(\alpha) \cap (ABC) = MQ$ .  
Ta lại có  $(\alpha)$  cắt  $SA$  tại  $N$  nên  $(\alpha) \cap (SAB) = MN$  và  $(\alpha) \cap (SAC) = PN$ .  
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác  $MNPQ$ .

Mặt khác, do  $\begin{cases} (\alpha) \parallel AC \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel AC \Rightarrow Q$  là trung điểm  $BC$ .

Tương tự ta chứng minh được  $NP \parallel AC$  và  $N$  là trung điểm  $SA$ .

Lúc này  $NP$  và  $MQ$  là đường trung bình tam giác  $SAC$  và  $ABC$  nên  $NP = MQ = \frac{AC}{2}$  và  $NP \parallel MQ$ .

Suy ra  $MNPQ$  là hình bình hành.

③ Ta có  $\begin{cases} AC \parallel MQ \\ AC \subset (SAC), MQ \subset (SMQ) \Rightarrow (SAC) \cap (SMQ) = Sx \parallel AC. \\ S \in (SAC) \cap (SMQ) \end{cases}$

Trong mp( $SAC$ ), gọi  $D = CN \cap Sx$ . Ta có  $D \in Sx \subset (SMQ)$  và  $D \in CN$  nên  $D = CN \cap (SMQ)$ .

□

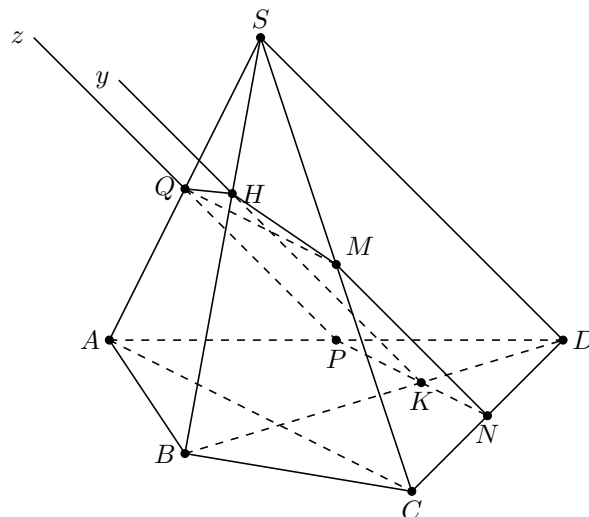
**BÀI 577.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $SC$  và  $CD$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua  $M, N$  và song song với đường thẳng  $AC$ .

① Tìm giao tuyến của  $(\alpha)$  với  $(ABCD)$ .

② Tìm giao điểm của  $SB$  và  $(\alpha)$ .

③ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$ .

**Lời giải.**



① Ta có  $\begin{cases} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABCD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = Nx \parallel AC. \text{ Gọi } P = Nx \cap AD \text{ ta có } (\alpha) \cap (ABCD) = NP.$

② Ta có  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $SCD$  nên  $SD \parallel MN \Rightarrow SD \Rightarrow SD \parallel (\alpha).$

Gọi  $K = NP \cap BD$ , ta có  $\begin{cases} SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SBD) \\ K \in (\alpha) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Ky \parallel SD. \text{ Gọi } H = Ky \cap SB.$

Ta có  $H \in Ky \subset (\alpha)$  và  $H \in SB \Rightarrow H = SB \cap (\alpha).$

③ Ta có  $\begin{cases} SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SAD) \\ P \in (\alpha) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = Pz \parallel SD. \text{ Gọi } Q = Pz \cap SA.$

$(\alpha)$  và  $(SAB)$  có  $H, Q$  là điểm chung nên giao tuyến là  $QH.$

$(\alpha)$  và  $(SAD)$  có  $P, Q$  là điểm chung nên giao tuyến là  $PQ.$

$(\alpha)$  và  $(ABCD)$  có  $P, N$  là điểm chung nên giao tuyến là  $PN.$

$(\alpha)$  và  $(SCD)$  có  $M, N$  là điểm chung nên giao tuyến là  $MN.$

$(\alpha)$  và  $(SBC)$  có  $H, M$  là điểm chung nên giao tuyến là  $HM.$

Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác  $MNPQH.$

□

**BÀI 578.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với  $AB \parallel CD$ . Gọi  $M, N, I$ , lần lượt là trung điểm của  $AD, BC, SA$ .

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IMN)$  và  $(SAC)$ ;  $(IMN)$  và  $(SAB).$

② Tìm giao điểm của  $SB$  và  $(IMN).$

③ Tìm thiết diện của mặt phẳng  $(IDN)$  với hình chóp  $S.ABCD.$

**Lời giải.**

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(IMN)$  và  $(SAC)$ ;  $(IMN)$  và  $(SAB).$

(a) Tìm giao tuyến của  $(IMN)$  và  $(SAC).$

Ta có  $I \in (SAC) \cap (IMN).$

Trong  $(ABCD)$  gọi  $E = AC \cap MN \Rightarrow E \in (SAC) \cap (IMN).$

Vậy  $IE = (IMN) \cap (SAC).$

(b) Ta có  $I \in (IMN) \cap (SAB)$  và  $MN$  là đường trung bình của hình thang  $ABCD$  nên  $MN \parallel AB$ . Nên giao tuyến của  $(IMN)$  và  $(SAB)$  là đường thẳng  $a$  đi qua  $I$  song song với  $AB.$

② Ta thấy  $SB \subset (SAB)$  và  $a = (IMN) \cap (SAB)$ . Gọi  $J = SB \cap a$ , vậy  $J = SB \cap (IMN).$

③ Ta thấy

$IJ = (SAB) \cap (IDN), ID = (SAD) \cap (IDN), DN = (ABCD) \cap (IDN), NJ = (SBC) \cap (IDN).$

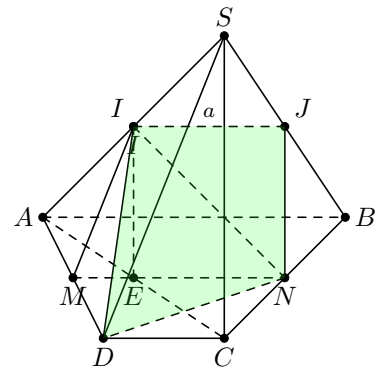
Vậy thiết diện của  $(IDN)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là tứ giác  $IJND.$

□

**BÀI 579.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle SAB$ ;  $N$  là một điểm thuộc đoạn  $AC$  sao cho  $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$ ;  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

① Chứng minh  $OI \parallel (SAD)$  và  $GN \parallel SD.$

② Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua  $O$ , song song với  $SA$  và  $BC$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  cắt  $SB, SC$  lần lượt tại  $L$  và  $K$ . Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng  $(\alpha)$  với hình chóp.



**Lời giải.**

① Chứng minh  $OI \parallel (SAD)$  và  $GN \parallel SD$ .

(a) Chứng minh  $OI \parallel (SAD)$ .

Ta có  $OI \parallel BC$  ( $OI$  là đường trung bình trong  $\triangle ABC$ )  
nên  $OI \parallel AD$  (vì  $AD \parallel BC$ ) mà  $AD \subset (SAD)$  suy ra  
 $OI \parallel (SAD)$ .

(b) Chứng minh  $GN \parallel SD$ .

Do  $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AO} = \frac{2}{3}$  suy ra  $N$  là trọng tâm  $\triangle ABD$ .

Từ đó ta có  $\frac{IN}{ID} = \frac{1}{3} = \frac{IG}{IS} \Rightarrow GN \parallel SD$ .

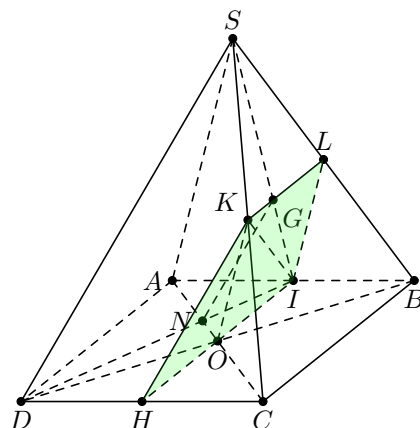
② Xác định giao điểm  $L = SB \cap (\alpha)$ .

Ta thấy  $(\alpha)$  là  $(KIH)$  với  $H, K$  lần lượt là trung điểm  $CD, SC$ . Ta thấy  $SB \subset (SBC)$ ,  $K = (\alpha) \cap (SBC)$  và  $IH \parallel BC$  nên giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(SBC)$  là đường thẳng  $d$  đi qua  $K$  song song với  $BC$ . Khi đó  $L = d \cap SB$  suy ra  $L$  là trung điểm  $SB$ .

Ta thấy

$(\alpha) \cap (ABCD) = HI$ ,  $(\alpha) \cap (SBC) = KL$ ,  $(\alpha) \cap (SAB) = LI$ .

Vậy thiết diện của  $(\alpha)$  với hình chóp là hình thang  $LKHI$ .



□

**BÀI 580.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $SA, SB$  và  $M$  là điểm thuộc cạnh  $CD$ , ( $M$  khác  $C$  và  $D$ ).

① Tìm giao tuyến của  $(KAM)$  và  $(SBC)$ ,  $(SBC)$  và  $(SAD)$ .

② Tìm thiết diện tạo bởi  $(HKO)$  với hình chóp  $S.ABCD$ . Thiết diện là hình gì?

③ Gọi  $L$  là trung điểm đoạn  $HK$ . Tìm  $I = OL \cap (SBC)$ . Chứng minh  $SI \parallel BC$ .

**Lời giải.**

- ① Tìm giao tuyến của  $(KAM)$  và  $(SBC)$ ,  $(SBC)$  và  $(SAD)$ .

— Tìm giao tuyến của  $(KAM)$  và  $(SBC)$ .

Ta có  $K \in (KAM) \cap (SBC)$ . Trong  $(ABCD)$  gọi  $F = AM \cap BC$ , nên  $F \in (KAM) \cap (SBC)$ . Suy ra  $KF = (KAM) \cap (SBC)$ .

— Tìm giao tuyến của  $(SBC)$  và  $(SAD)$ .

Ta thấy  $S \in (SBC) \cap (SAD)$ , mà  $BC \parallel AD$  nên giao tuyến của  $(SBC)$  và  $(SAD)$  là đường thẳng  $d$  đi qua  $S$  song song với  $AD$  và  $BC$ .

- ② Tìm thiết diện tạo bởi  $(HKO)$  với hình chóp  $S.ABCD$ . Thiết diện là hình gì?

Ta thấy  $(HKO)$  và  $(ABCD)$  chứa có chung điểm  $O$  và lần lượt chứa  $HK$  và  $AB$  song song với nhau nên giao tuyến là đường thẳng  $a$  đi qua  $O$  song song với  $AB$  cắt  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $E$  và  $G$ . Ta thấy

$$(HKO) \cap (ABCD) = EG, (HKO) \cap (SAD) = HE,$$

$(HKO) \cap (SAB) = HK, (HKO) \cap (SBC) = KG$ . Vậy thiết diện của  $(HKO)$  và hình chóp là hình thang  $HKGE$  do  $HK \parallel AB$  mà  $AB \parallel EG$  nên  $HK \parallel EG$ .

- ③ Tìm  $I = OL \cap (SBC)$ . Chứng minh  $SI \parallel BC$ .

Trong  $(HKGE)$  gọi  $I = OL \cap GK$

mà  $GK \subset (SBC) \Rightarrow I \in OL \cap (SBC)$ .

Trong  $(SAB)$  gọi  $J = SL \cap AB$  khi đó  $L$  là trung điểm của  $AB$  do  $HK \parallel AB$ .

Xét  $(SJO)$  và  $(SBC)$  ta thấy có  $S$  là điểm chung và  $OJ \parallel BC$  nên giao tuyến là đường thẳng đi  $d$  đi qua  $S$  và song song với  $BC$ . Mặt khác  $I \in (SJO) \cap (SBC)$  nên  $SI \equiv d$ . Vậy  $SI \parallel BC$ .

□

**BÀI 581.** Cho tứ diện  $ABCD$ , có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACD$ .

- ① Tìm giao điểm  $E$  của  $MG$  và  $(BCD)$ .  
 ② Tìm  $d = (MNG) \cap (BCD)$ . Giả sử  $d \cap CD = P$ . Chứng minh  $GP \parallel (ABC)$ .  
 ③ Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng chứa  $MN$  và song song với  $AD$ . Tìm thiết diện của  $(\alpha)$  với tứ diện.

**Lời giải.**

- ① Tìm giao điểm  $E$  của  $MG$  và  $(BCD)$ .

Ta thấy  $(ABF)$  chứa  $MG$  với  $F$  là trung điểm của  $DC$  và  $BF = (ABF) \cap (BCD)$ . Gọi  $E = MG \cap BF \Rightarrow E = MG \cap (BCD)$ .

- ② Tìm  $d = (MNG) \cap (BCD)$ . Giả sử  $d \cap CD = P$ . Chứng minh  $GP \parallel (ABC)$ .

Ta có  $N \in (BCD) \cap (MNG)$  và  $E \in MG \subset (MNG); E \in BF \subset (BCD)$ . Suy ra  $d \equiv NE = (MNG) \cap (BCD)$ .

Ta thấy

$$(ABC) \cap (EMN) = MN, (DAC) \cap (ABC) = AC, (EMN) \cap (DAC) = GA$$

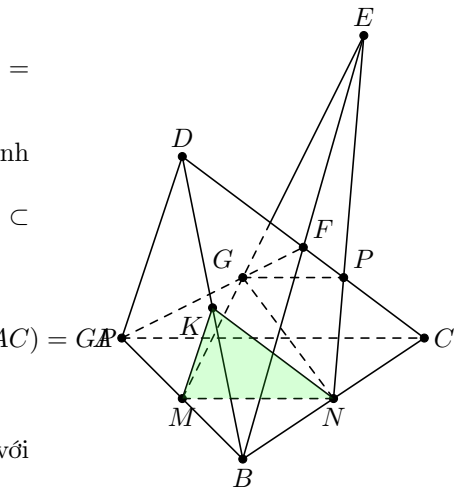
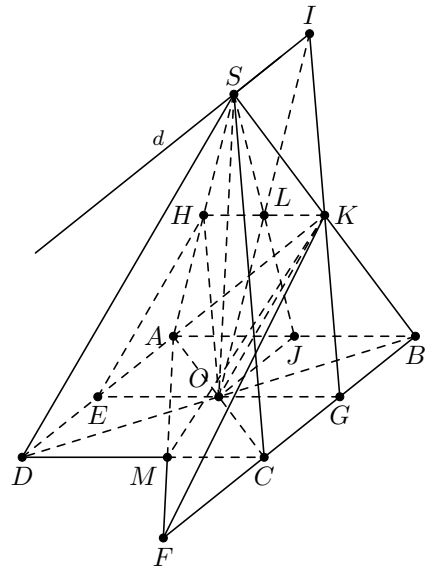
mà  $MN \parallel AC$  nên  $GP \parallel AC \Rightarrow GP \parallel (ABC)$ .

- ③ Gọi  $K$  là trung điểm của  $BD$ , do  $(\alpha)$  chứa  $MN$  và song song với  $AD$  nên  $(\alpha)$  đi qua  $K$ . Ta thấy

$$(\alpha) \cap (ABD) = NK, (\alpha) \cap (ABC), (\alpha) \cap (BCD) = KN.$$

Vậy thiết diện của  $(\alpha)$  và hình chóp là tam giác  $MNK$ .

□



**BÀI 582.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Điểm  $M$  thuộc cạnh  $SA$  thỏa mãn  $3MA = 2MS$ . Hai điểm  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ .

- ① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MEF)$  và  $(SAC)$ .
- ② Xác định giao điểm  $K$  của mặt phẳng  $(MEF)$  với cạnh  $SD$ . Tính tỉ số  $\frac{KS}{KD}$ .
- ③ Tìm giao điểm  $I$  của  $MF$  với  $(SBD)$ . Tính tỉ số  $\frac{IM}{IF}$ .
- ④ Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(MEF)$  với hình chóp  $S.ABCD$ .

**Lời giải.**

- ① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng  $(MEF)$  và  $(SAC)$ .  
Ta thấy  $M \in (MEF) \cap (SAC)$  và  $EF \parallel AC$  với  $EF \subset (MEF)$ ,  $AC \subset (SAC)$  nên giao tuyến của  $(MEF)$  và  $(SAC)$  là đường thẳng  $d$  đi qua  $M$  song song với  $AC$ .

- ② Xác định giao điểm  $K$  của mặt phẳng  $(MEF)$  với cạnh  $SD$ .  
Tính tỉ số  $\frac{KS}{KD}$ .

Ta thấy  $SD \subset (SBD)$ , gọi  $H = EF \cap BD$ ,  $O = AC \cap BD$ ,  $L = d \cap SO$ . Khi đó  $HL = (MEF) \cap (SBD)$ , gọi  $K = HL \cap SD \Rightarrow K = SD \cap (MEF)$ .

Do  $ML \parallel AC$  nên  $\frac{MA}{MS} = \frac{LO}{LS} = \frac{3}{2}$ .

Xét tam giác  $SOD$  trong  $(SBD)$  vì  $K, L, H$  thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta có  $\frac{SK}{KD} \cdot \frac{HD}{HO} \cdot \frac{LO}{LS} = 1 \Rightarrow$

$$\frac{SK}{KD} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow \frac{SK}{KD} = \frac{2}{9}.$$

- ③ Tìm giao điểm  $I$  của  $MF$  với  $(SBD)$ . Tính tỉ số  $\frac{IM}{IF}$ .

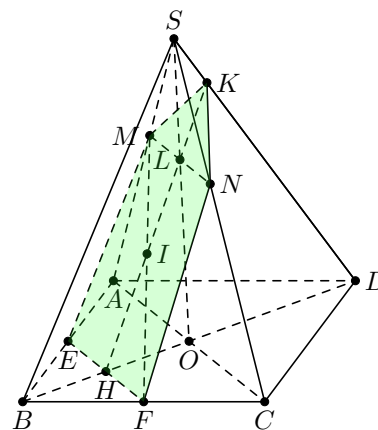
Trong  $(MEF)$  gọi  $I = HL \cap MF$  mà  $HL \subset (SBD) \Rightarrow I = MF \cap (SBD)$ .

Do  $ML \parallel AC$  và  $EF \parallel AC$  nên  $ML \parallel EF$ . Từ đó ta suy ra  $\frac{IM}{IF} = \frac{ML}{HF} = \frac{HL}{AO} : \frac{HF}{AO} = \frac{2}{5} : \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ .

- ④ Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng  $(MEF)$  với hình chóp  $S.ABCD$ .

Gọi  $N = ML \cap SC$ . Ta thấy  $(MEF) \cap (SAB) = EM$ ,  $(MEF) \cap (ABCD) = EF$ ,  $(MEF) \cap (SAD) = MK$ ,  $(MEF) \cap (SCD) = KN$ ,  $(MEF) \cap (SBC) = NF$ . Vậy thiết diện của  $(MEF)$  với hình chóp là ngũ giác  $EMKNF$ .

□

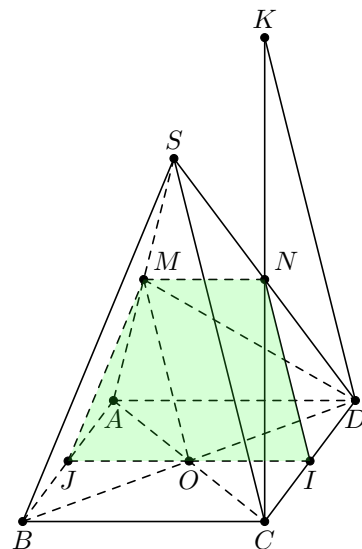


**BÀI 583.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $SA, SD$ .

- ① Xác định giao điểm của  $NC$  và  $(OMD)$ .
- ② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$  qua  $MN$  và song song với  $SC$ .

**Lời giải.**

- ① Xác định giao điểm của  $NC$  và  $(OMD)$ .  
Ta thấy  $CN \subset (SCD)$ ,  $OM \parallel SC$  mà  $OM \subset (OMD)$ ,  $SC \subset (SCD)$  và  $O \in (OMD) \cap (SCD)$  nên giao tuyến của  $(OMD)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng  $d$  đi qua  $D$  và song song với  $OM, SC$ . Gọi  $K = d \cap NC \Rightarrow K = NC \cap (OMD)$ .
- ② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng  $(P)$  qua  $MN$  và song song với  $SC$ .  
Ta thấy  $(P) \equiv (OMN)$ .  
Xác định giao tuyến của  $(OMN)$  và  $(SCD)$ .  
Ta thấy  $N \in (OMN) \cap (SCD)$  và  $OM \parallel SC$  nên giao tuyến của  $(OMN)$  và  $(SCD)$  là đường thẳng đi qua  $N$  song song với  $SC$  cắt  $CD$  tại  $I$  là trung điểm  $CD$ .  
Gọi  $J = OI \cap AB$ . Ta thấy  $(OMN) \cap (SAB) = JM$ ,  $(OMN) \cap (SAD) = MN$ ,  $(OMN) \cap (SCD) = IN$ ,  $(OMN) \cap (ABCD)$ . Vậy thiết diện của mặt phẳng  $(P)$  với hình chóp là hình thang  $MNIJ$ .



□

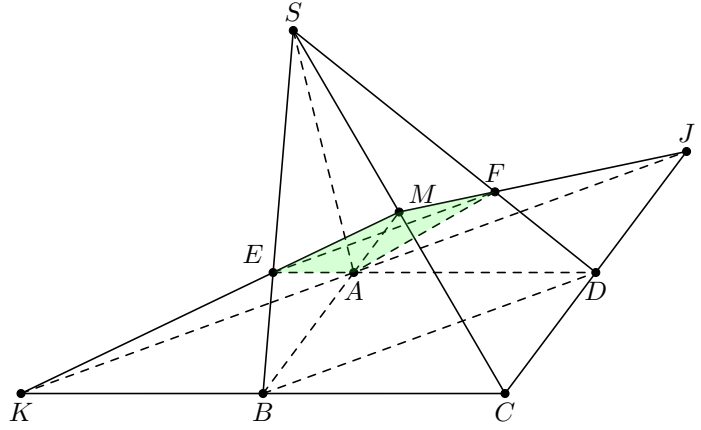
**BÀI 584.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$ ,  $(P)$  là mặt phẳng qua  $AM$  và song song với  $BD$ .

- ① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .
- ② Gọi  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  với cạnh  $SB$  và  $SD$ . Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác  $SME$  với diện tích tam giác  $SBC$  và tỉ số diện tích của tam giác  $SMF$  và diện tích tam giác  $SCD$ .
- ③ Gọi  $K$  là giao điểm của  $ME$  và  $CB$ ,  $J$  là giao điểm của  $MF$  và  $CD$ . Chứng minh ba điểm  $K, A, J$  nằm trên một đường thẳng song song với  $EF$  và tìm tỉ số  $\frac{EF}{KJ}$ .

Lời giải.

- ① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

Trong  $(ABCD)$  qua  $A$  kẻ đường thẳng song song  $BD$  cắt  $BC$  và  $CD$  lần lượt tại  $K$  và  $J$ . Khi đó  $(P) \equiv (MKJ)$ . Gọi  $E = MK \cap SB$ ,  $F = CD \cap SD$ . Khi đó, ta thấy  $(P) \cap (SAB) = EA$ ,  $(P) \cap (SBC) = EM$ ,  $(P) \cap (SCD) = MF$ ,  $(P) \cap (SAD) = AF$ . Vậy thiết diện của  $(P)$  với hình chóp là tứ giác  $AEMF$ .



- ② Tính tỉ số diện tích của tam giác  $SME$  với diện tích tam giác  $SBC$  và tỉ số diện tích của tam giác  $SMF$  và diện tích tam giác  $SCD$ .

$$\text{Ta có } \frac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SBC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

(Vì  $E$  là giao điểm của hai đường trung tuyến  $KM$  và  $SB$  nên  $E$  là trọng tâm của tam giác  $SCK$ .)

$$\text{Tương tự ta có } \frac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \text{ (Vì } F \text{ là giao điểm của hai đường trung tuyến } JM \text{ và } SD \text{ nên } F \text{ là trọng tâm của tam giác } SCJ.)$$

- ③ Chứng minh ba điểm  $K$ ,  $A$ ,  $J$  nằm trên một đường thẳng song song với  $EF$  và tìm tỉ số  $\frac{EF}{KJ}$ .

Ta có

$$\frac{SE}{SB} = \frac{2}{3} = \frac{SF}{SD} \Rightarrow EF \parallel KJ \Rightarrow \frac{EF}{KJ} = \frac{ME}{MK} = \frac{1}{3}.$$

□

**BÀI 585.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $H$  lần lượt là trung điểm của  $SA$ ,  $SC$ ,  $CB$ ,  $BA$ ,  $QN$ ,  $AG$ .

- ① Chứng minh rằng  $S$ ,  $R$ ,  $G$  thẳng hàng và  $SG = 2MH = 4RG$ .

- ② Gọi  $G'$  là trọng tâm  $\triangle SBC$ . Chứng minh rằng  $GG' \parallel (SAB)$  và  $GG' \parallel (SAC)$ .

**Lời giải.**

- ① Chứng minh rằng  $S, R, G$  thẳng hàng và  $SG = 2MH = 4RG$ .

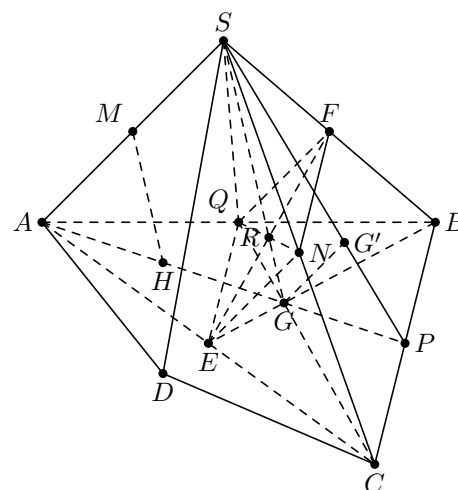
Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $SB$  khi đó ta có  $QENF$  là hình bình hành (do  $EQ = NF = \frac{1}{2}BC$ ,  $EQ \parallel BC \parallel NF$ ) nên  $R$  là trung điểm của  $EF$ . Ta thấy  $S \in (SQC) \cap (SEB)$ ,  $G \in (SQC) \cap (SEB)$ ,  $R \in (SQC) \cap (SEB)$  suy ra  $S, R, G$  thẳng hàng.

Vì  $M, H$  lần lượt là trung điểm của  $SA, AG$  nên  $SG = 2MH$ .

Xét  $\triangle SGB$  vì  $E, R, F$  thẳng hàng nên theo định lý Menelaus ta có  $\frac{RS}{RG} \cdot \frac{EG}{EB} \cdot \frac{FB}{FS} = 1 \Rightarrow \frac{RS}{RG} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{RS}{RG} = 3 \Rightarrow SG = 4RG$ .

- ② Chứng minh rằng  $GG' \parallel (SAB)$  và  $GG' \parallel (SAC)$ .

Xét  $\triangle SAP$  có  $\frac{PG'}{PS} = \frac{1}{3} = \frac{PG}{PA} \Rightarrow GG' \parallel SA$  mà  $SA \subset (SAB)$  và  $SA \subset (SAC)$  nên suy ra  $GG' \parallel (SAB)$ ,  $GG' \parallel (SAC)$ .

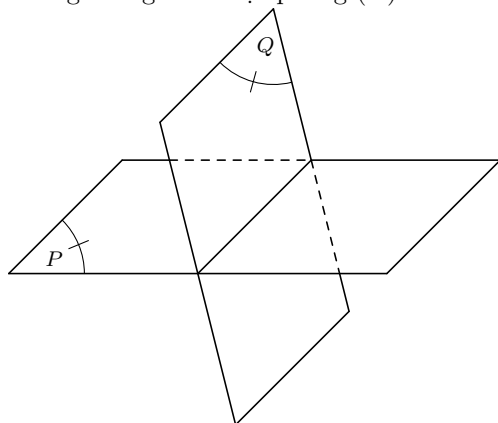


## BÀI 3. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

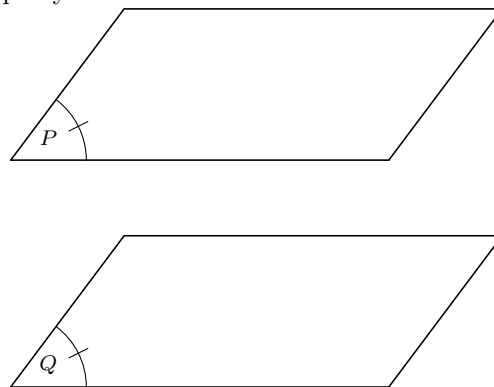
### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

#### 1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG PHÂN BIỆT

Cho đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$ . Có ba trường hợp xảy ra:



$(P), (Q)$  có 1 điểm chung:  $(P) \cap (Q) = a$

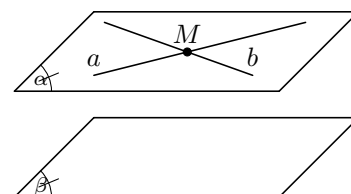


$(P), (Q)$  không có điểm chung:  $(P) \parallel (Q)$

**Định nghĩa 1.** Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

#### 2 CÁC ĐỊNH LÝ

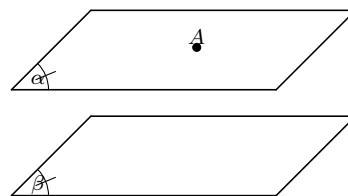
**Định lý 1.** Nếu mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa hai đường thẳng cắt nhau  $a, b$  và  $a, b$  cùng song song với mặt phẳng  $(\beta)$  thì  $(\alpha)$  song song với  $(\beta)$ .



⚠ — Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

— Muốn chứng minh đường thẳng  $a \parallel (Q)$ , ta chứng minh đường thẳng  $a$  nằm trong mặt phẳng  $(P) \parallel (Q)$ .

**Định lý 2.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

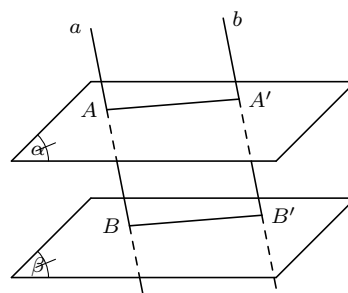


**Hệ quả 1.** — Nếu đường thẳng  $d$  song song với mặt phẳng  $(\alpha)$  thì trong  $(\alpha)$  có một đường thẳng song song với  $d$  và qua  $d$  có duy nhất một mặt phẳng song song với  $(\alpha)$ . Do đó đường thẳng  $d$  song song với  $(\alpha)$  ta phải chứng minh  $d$  thuộc mặt phẳng  $(\beta)$  và có  $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$ .

— Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

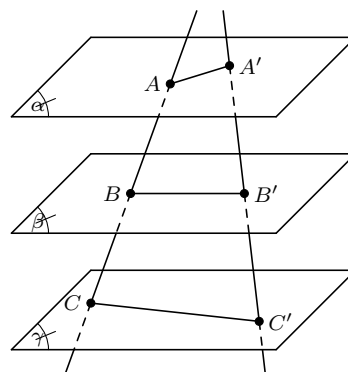
— Cho điểm  $A$  không nằm trên mặt phẳng  $(\alpha)$ . Mọi đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $(\alpha)$  đều nằm trong mặt phẳng đi qua  $A$  và song song với  $(\alpha)$ .

**Định lý 3.** Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



**Hệ quả 2.** Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

**Định lý 4. Định lý Thales:** Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



### 3 VÍ DỤ

**VÍ DỤ 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  với đáy  $ABCD$  là hình thang mà  $AD \parallel BC$  và  $AD = 2BC$ . Gọi  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $AD$ . Chứng minh:  $(BMN) \parallel (SCD)$ .

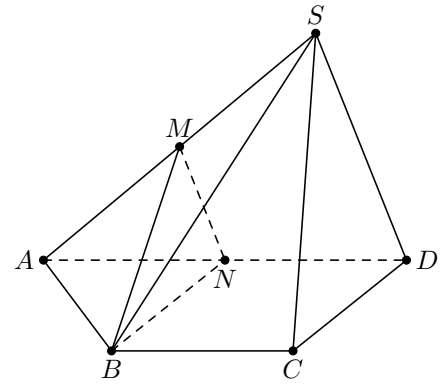
Lời giải.

Vì  $N$  là trung điểm của  $AD$  nên  $NA = ND = \frac{AD}{2} = BC$ .

Tứ giác  $NBCD$  có  $ND = BC$  và  $ND \parallel BC$  nên  $NBCD$  là hình bình hành, suy ra  $NB \parallel CD \Rightarrow NB \parallel (SCD)$ .

Tam giác  $SAD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AS$  và  $AD$  nên  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle ADS$ , suy ra  $MN \parallel SD \Rightarrow MN \parallel (SCD)$ .

Từ  $\begin{cases} MN \parallel (SCD), MN \subset (BMN) \\ BN \parallel (SCD), BN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$ .



□

## B BÀI TẬP ÁP DỤNG

**BÀI 587.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB, SD$  và  $K, I$  là trung điểm của  $BC, OM$ .

① Chứng minh  $(OMN) \parallel (SCD)$ .

② Chứng minh  $(PMN) \parallel (ABCD)$ .

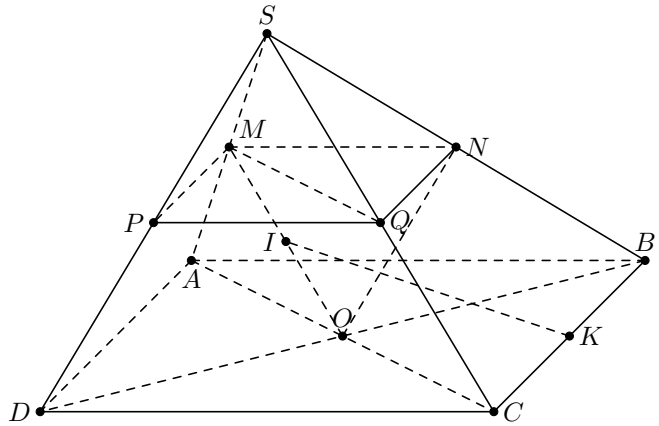
③ Chứng minh  $KI \parallel (SCD)$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $O, M$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $SA$  nên  $OM \parallel SC$ , suy ra  $OM \parallel (SCD)$ . Tương tự  $ON \parallel (SCD)$ . Khi đó  $(OMN) \parallel (SCD)$ .

② Ta có  $N, M$  lần lượt là trung điểm của  $SB$  và  $SA$  nên  $MN \parallel AB$ , suy ra  $MN \parallel (ABCD)$ . Tương tự  $PM \parallel (ABCD)$ . Vậy  $(PMN) \parallel (ABCD)$ .

③ Ta có  $O, K$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BC$  nên  $OK \parallel AB$ , suy ra  $OK \parallel MN$ . Khi đó 5 điểm  $M, N, K, O, I$  đồng phẳng. Từ câu trên  $(OMN) \parallel (SCD)$ , thì  $KI \parallel (SCD)$ .



□

**BÀI 588.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SD$

① Chứng minh  $(OMN) \parallel (SBC)$ .

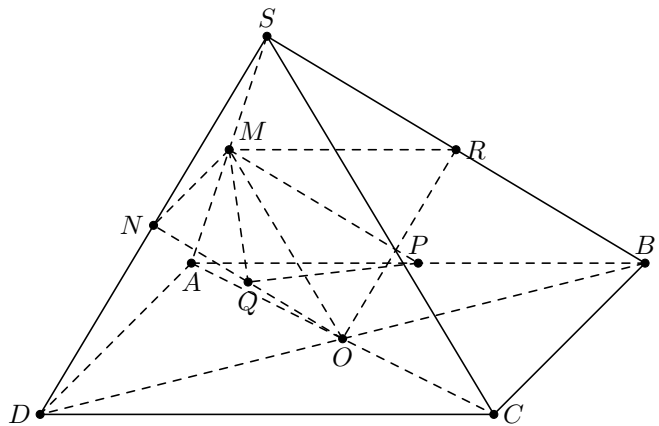
② Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, ON, SB$ . Chứng minh  $PQ \parallel (SBC)$  và  $(ROM) \parallel (SCD)$ .

**Lời giải.**

① Ta có  $O, M$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $SA$  nên  $OM \parallel SC$ , suy ra  $OM \parallel (SBC)$ . Tương tự  $ON \parallel (SBC)$ . Khi đó  $(OMN) \parallel (SBC)$ .

② Ta có  $O, P$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $BA$  nên  $OP \parallel CB$ , suy ra  $OP \parallel (SBC)$  hay  $P \in (OMN)$ . Mặt khác  $Q \in (OMN)$ . Theo trên  $(OMN) \parallel (SBC)$  thì  $PQ \parallel (SBC)$ .

Ta có  $R, O$  lần lượt là trung điểm của  $SB$  và  $BD$  nên  $RO \parallel SD$ , suy ra  $RO \parallel (SCD)$ . Theo trên  $OM \parallel SC$  nên  $OM \parallel (SCD)$ . Vậy  $(ROM) \parallel (SCD)$ .



□

**BÀI 589.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  có chung cạnh  $AB$  và không đồng phẳng. Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD, EF$ . Chứng minh

①  $(ADF) \parallel (BCE)$ .

②  $(DIK) \parallel (JBE)$ .

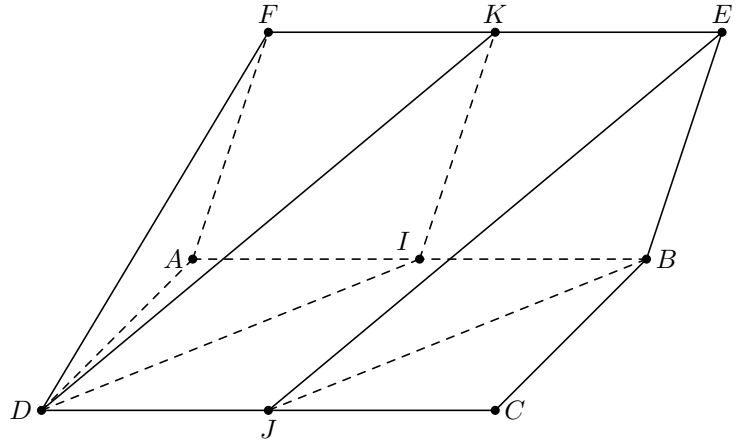
**Lời giải.**

① Ta có  $AD \parallel BC$ , suy ra  $AD \parallel (BCE)$ . Tương tự  $AF \parallel (BCE)$ .  
Khi đó  $(ADF) \parallel (BCE)$ .

② Trong hình bình hành  $ABCD$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  nên  $BI = DJ$ . Do đó  $IBJD$  là hình bình hành. Suy ra  $DI \parallel BJ$  nên  $DI \parallel (JBE)$ .

Trong hình bình hành  $ABEF$  có  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $EF$  nên  $IK \parallel EF$ , suy ra  $IK \parallel (JBE)$ .

Vậy  $(DIK) \parallel (JBE)$ .



□

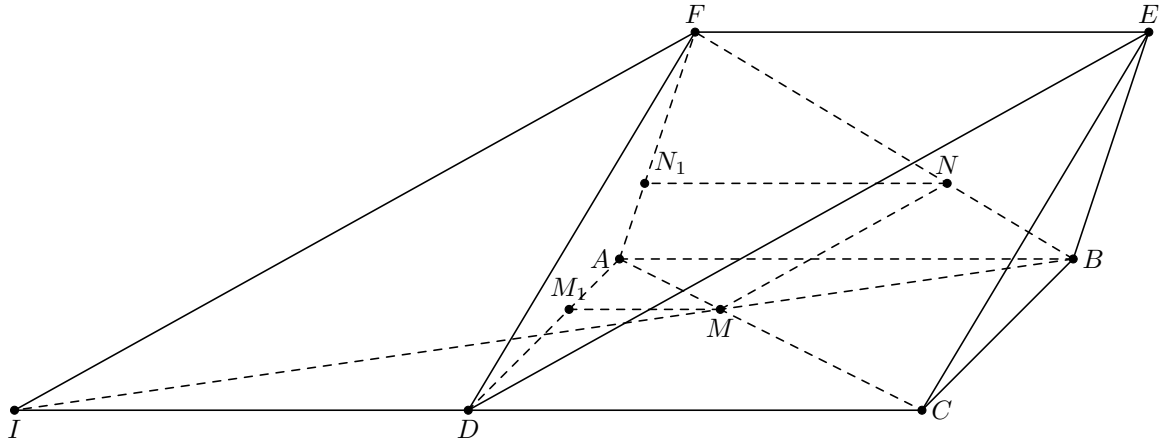
**BÀI 590.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo  $AC, BF$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $MC = 2AM, NF = 2BN$ . Qua  $M, N$  lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh  $AB$ , cắt các cạnh  $AD, AF$  theo thứ tự tại  $M_1, N_1$ . Chứng minh rằng

①  $MN \parallel DE$ .

②  $M_1N_1 \parallel (DEF)$ .

③  $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$ .

**Lời giải.**



① Gọi  $I$  là giao điểm của  $BM$  với  $CD$ . Khi đó ta có  $\frac{BM}{MI} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ . Mặt khác  $\frac{BN}{NF} = \frac{1}{2}$ .

Khi đó  $MN \parallel IF$ .

Theo trên  $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$  nên  $\frac{AB}{CI} = \frac{1}{2}$ . Suy ra  $DI = CD = AB$ .

Lại có  $DI \parallel EF$ . Do đó  $DEFI$  là hình bình hành, hay  $FI \parallel DE$ .

Vậy  $MN \parallel DE$ .

② Theo giả thiết thì  $MM_1 \parallel NN_1$  (vì cùng song song với  $AB$ ) nên  $M, M_1, N, N_1$  đồng phẳng.

Lại có  $MM_1 \parallel (DEF)$  (vì  $MM_1 \parallel CD \parallel AB$ ) và theo câu trên thì  $MN \parallel DE$  nên  $MN \parallel (DEF)$ .

Vậy  $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$ , suy ra  $M_1N_1 \parallel (DEF)$ .

③ Đã chứng minh ở câu 2.

□

**BÀI 591.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  nằm trên hai mặt phẳng phân biệt. Gọi  $I, J, K$  theo thứ tự là trọng tâm các tam giác  $ADF, ADC, BCE$ . Chứng minh rằng  $(IJK) \parallel (CDFE)$ .

**Lời giải.**

Ta có  $CD \parallel EF \parallel AB$  nên  $CD$  và  $EF$  đồng phẳng.

Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DF, CD$ . Khi đó, vì  $I, J$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ADF, ADC$  nên

$$\frac{AI}{AM} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN \Rightarrow IJ \parallel (CDFE).$$

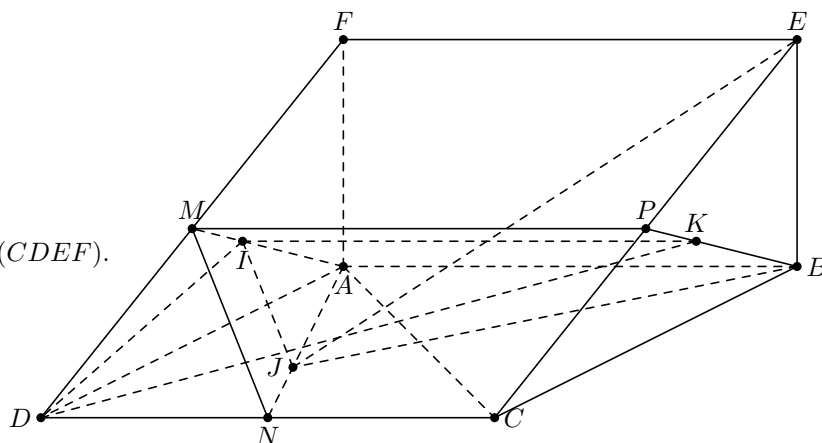
Mặt khác, gọi  $P$  là trung điểm  $CE$ .

$$\text{Khi đó } \frac{BK}{BP} = \frac{2}{3}.$$

Ta có  $ABCD, ABEF$  là hình bình hành nên  $CDFE$  cũng là hình bình hành. Khi đó với  $M, P$  là trung điểm của hai cạnh đối của hình bình hành  $CDFE$  nên  $MP \parallel CD \parallel AB$  suy ra  $IK \parallel MP \parallel AB$ .

Do đó  $ABPK$  cũng là hình bình hành. Ta có  $\frac{AI}{AM} = \frac{2}{3} = \frac{BK}{BP}$ . Suy ra  $IK \parallel MN$ . Khi đó  $IK \parallel (CDFE)$ .

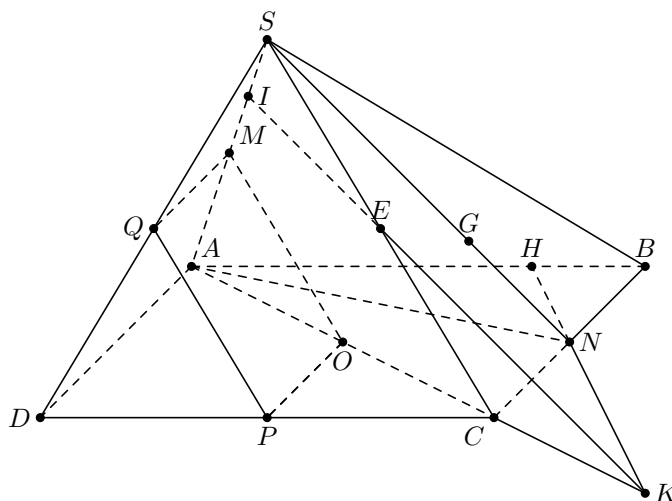
Vậy  $(IJK) \parallel (CDFE)$ . □



**BÀI 592.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $SA, BC, CD$ .

- ① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(MOP)$ .
- ② Gọi  $E$  là trung điểm của  $SC$  và  $I$  là điểm trên cạnh  $SA$  thỏa  $AI = 3IS$ . Tìm  $K = IE \cap (ABC)$  và  $H = AB \cap (EIN)$ . Tính tỉ số  $\frac{AH}{AB}$ .
- ③ Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ . Tìm thiết diện hình chóp  $S.ABC$  bị cắt bởi  $(IMG)$ .

**Lời giải.**



- ① Ta có  $O, P$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $CD$  nên  $OP \parallel AD$ , suy ra  $OP \parallel (SAD)$ . Khi đó giao tuyến của  $(SAD)$  và  $(OMP)$  là đường thẳng qua  $M$  và song song với  $AD$  và cắt  $SD$  tại trung điểm  $Q$  của  $SD$ .

- ② Xét mặt phẳng  $(SAC)$  có  $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = \frac{SE}{SC}$  suy ra  $IE$  cắt  $AC$  tại  $K$ .

Khi đó  $K = IE \cap (ABC)$ .

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác  $SAC$  với ba điểm  $K, E, I$  thẳng hàng có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{IA}{IS} \cdot \frac{ES}{EC} = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KA} \cdot \frac{3}{1} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác  $ABC$  với ba điểm  $K, N, H$  thẳng hàng có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{HA}{HB} \cdot \frac{NB}{NC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{HA}{HB} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{HA}{HB} = 3.$$

Khi đó  $\frac{AH}{AB} = \frac{3}{4}$ .

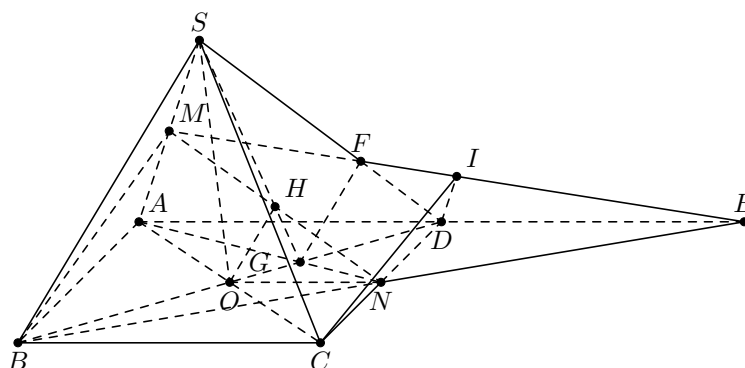
- ③ Ta thấy mặt phẳng  $(IMG)$  cũng chính là mặt phẳng  $(SAG)$ .  
Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $SBC$  và  $N$  là trung điểm  $BC$  nên  $(IMG) \cap (SBC) = SN$ .  
Vậy thiết diện hình chóp  $S.ABC$  bị cắt bởi  $(IMG)$  là tam giác  $SAN$ .

□

**BÀI 593.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$  và  $CD$ . Gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  và  $(BMN)$ ,  $I$  là trung điểm của  $ME$  và  $G = AN \cap BD$ .

- ① Tìm điểm  $E$  và giao điểm  $F$  của  $SD$  với mặt phẳng  $(BMN)$ . Chứng minh  $FS = 2FD$ .  
② Chứng minh  $FG \parallel (SAB)$  và  $(CDI) \parallel (SAB)$ .  
③ Gọi  $H$  là giao điểm của  $MN$  và  $SG$ . Chứng minh  $OH \parallel GF$ .

**Lời giải.**



- ① Trong mặt phẳng  $(ABCD)$  kéo dài  $BN$  cắt đường thẳng  $AD$  tại  $E$ . Khi đó  $E$  là giao điểm của  $(BMN)$  với  $AD$ .  
Gọi  $F$  là giao điểm của  $ME$  với  $SD$ . Khi đó  $F$  là giao điểm của  $SD$  với  $(BMN)$ .  
Vì  $\frac{ED}{EA} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$  nên  $D$  là trung điểm của đoạn  $AE$ . Từ đó suy ra  $SD$  và  $EM$  là các đường trung tuyến của tam giác  $SAE$ . Suy ra  $F$  là trọng tâm tam giác  $SAE$ . Vậy  $FS = 2FD$ .  
② Tam giác  $DGN$  và tam giác  $BGA$  đồng dạng nên  $\frac{GD}{GB} = \frac{DN}{BA} = \frac{1}{2}$ .  
Từ đó suy ra  $\frac{GD}{GB} = \frac{FD}{FS}$ . Nên  $FG \parallel SB \Rightarrow FG \parallel (SAB)$ .  
Ta có  $CD \parallel AB$  và  $DI \parallel MA$ . Từ đó suy ra  $(CDI) \parallel (SAB)$ .  
③ Ta có  $G$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ . Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $SAG$  với bộ ba điểm thẳng hàng  $M, H, N$ , ta có

$$\frac{NG}{NA} \cdot \frac{MA}{MS} \cdot \frac{HS}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{HS}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HG} = 3.$$

Ta cũng có  $\frac{OG}{OB} = \frac{OG}{OD} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH \parallel SB$ .

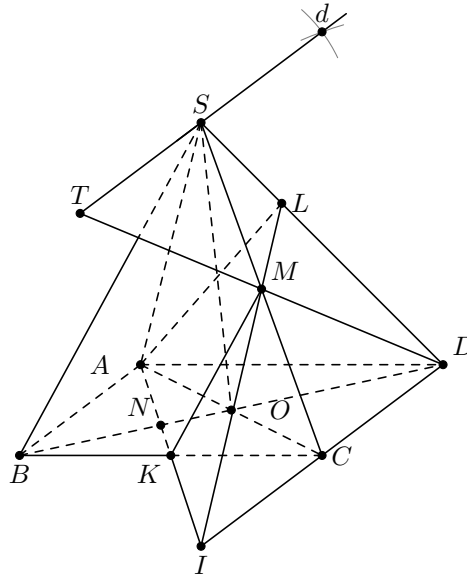
Theo chứng minh trên ta cũng có  $GF \parallel SB$ . Vậy  $OH \parallel GF$ .

□

**BÀI 594.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SC$ ,  $N$  là điểm trên đường chéo  $BD$  sao cho  $BD = 3BN$ .

- ① Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(SCD)$  và  $(SAB)$  và tìm  $T = DM \cap (SAB)$ . Tính  $\frac{TM}{TD}$ .
- ② Gọi  $K = AN \cap BC$ . Chứng minh rằng  $MK \parallel (SBD)$ .
- ③ Gọi  $I = AN \cap DC$ ,  $L = IM \cap SD$ . Tính tỉ số  $\frac{LS}{LD}$  và  $\frac{S_{IKM}}{S_{IAL}}$ .

**Lời giải.**



- ① — Mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SCD)$  lần lượt chứa hai đường thẳng song song là  $AB$  và  $CD$  nên giao tuyến của chúng là đường thẳng  $d$  qua  $S$  và  $d \parallel AB \parallel CD$ .  
— Trong mặt phẳng  $(SCD)$  kéo dài  $DM$  cắt  $d$  tại  $T$ . Khi đó  $T \in d \Rightarrow T \in (SAB)$ . Vậy  $T = DM \cap (SAB)$ .  
— Do  $CD \parallel ST$  nên hai tam giác  $MCD$  và  $MST$  đồng dạng. Do đó  $\frac{MT}{MD} = \frac{MS}{MC} = 1$ . Vậy  $\frac{TM}{TD} = \frac{1}{2}$ .
- ② Vì  $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BN}{BO} = \frac{2}{3}$ . Do đó  $N$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .  
Suy ra  $K$  là trung điểm của  $BC$ . Dẫn đến  $MK$  là đường trung bình của tam giác  $SBC$ .  
Nên  $MK \parallel SB \Rightarrow MK \parallel (SBD)$ .

- ③ — Tam giác  $IKC$  và tam giác  $IAD$  đồng dạng nên  $\frac{IC}{ID} = \frac{KC}{AD} = \frac{1}{2}$ .  
Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác  $SCD$  với bộ điểm thẳng hàng  $I, M, L$  ta có

$$\frac{LS}{LD} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{MC}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{LS}{LD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{LS}{LD} = \frac{1}{2}.$$

— Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $IDL$  với ba điểm thẳng hàng  $S, M, C$  ta có

$$\frac{SD}{SL} \cdot \frac{ML}{MI} \cdot \frac{CI}{CD} = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{ML}{MI} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{ML}{MI} = \frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra  $IM = \frac{3}{4}IL$ .

Gọi  $h, k$  là lượt là độ dài đường cao các tam giác  $IKM$  và  $IAL$  kẻ từ  $M$  và  $L$ . Dễ thấy rằng  $\frac{h}{k} = \frac{IM}{IL} = \frac{3}{4}$ . Vậy

$$\frac{S_{IKM}}{S_{IAL}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot IK}{\frac{1}{2}k \cdot IA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

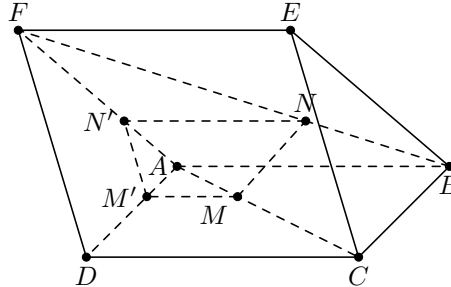
□

**BÀI 595.** Cho hai hình vuông  $ABCD$  và  $ABEF$  ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo  $AC$  và  $BF$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = BN$ . Các đường thẳng song song với  $AB$  vẽ từ  $M, N$  lần lượt cắt  $AD$  và  $AF$  tại  $M'$  và  $N'$ .

① Chứng minh rằng  $(ADF) \parallel (BCE)$ .

② Chứng minh rằng  $(CDF) \parallel (MM'N'N)$ .

**Lời giải.**



$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AF \parallel BE \\ AD \cap AF = A \end{cases} \Rightarrow (ADE) \parallel (BCF).$$

② Ta có

$$MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD} \quad (1)$$

Ta cũng có

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF} \quad (2)$$

Mà từ giả thiết ta có

$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \quad (3)$$

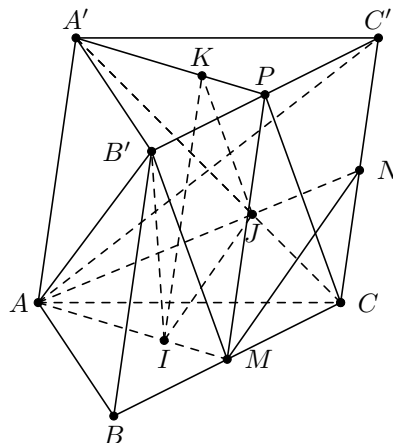
Từ (3) suy ra  $M'N' \parallel DF$ . Ta cũng có  $MM' \parallel NN' \parallel DC \parallel FE$ .

Vậy  $(CDF) \parallel (MM'N'N)$ .

□

**BÀI 596.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, ACC', A'B'C'$ . Chứng minh rằng  $(IJK) \parallel (BCC'B')$  và  $(A'JK) \parallel (AIB')$ .

**Lời giải.**



① Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CC'$  và  $B'C'$ . Theo tính chất của trọng tâm tam giác ta có

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN.$$

Tứ giác  $AMPA'$  là hình bình hành và có  $\frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AP} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK \parallel MP$ .

Vậy  $(IJK) \parallel (BCC'B')$ .

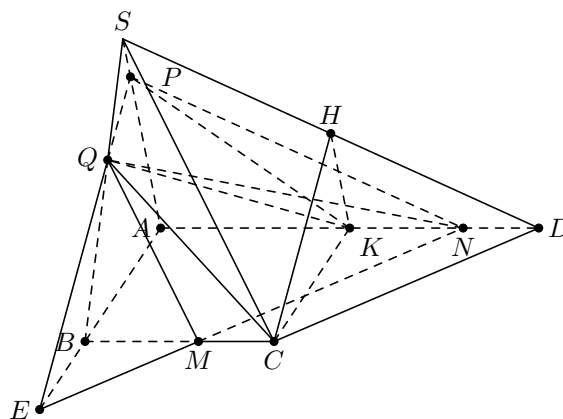
- ② Chú ý rằng mặt phẳng  $(AIB')$  chính là mặt phẳng  $(AMB')$ . Mặt phẳng  $(A'JK)$  chính là mặt phẳng  $(A'CP)$ .  
Vì  $AM \parallel A'P$ ,  $MB' \parallel CP$  (do tứ giác  $B'MCP$  là hình bình hành). Vậy ta có  $(A'JK) \parallel (AIB')$ .

□

**BÀI 597.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang với đáy lớn  $AD$  và  $AD = 2BC$ ,  $M \in BC$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $M$ ,  $(P) \parallel CD$ ,  $(P) \parallel SC$ ,  $(P)$  cắt  $AD$ ,  $SA$ ,  $SB$  lần lượt tại  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ .

- ① Chứng minh rằng  $NQ \parallel (SCD)$  và  $NP \parallel SD$ .  
② Gọi  $H$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $SD$  và  $AD$ . Chứng minh rằng  $(CHK) \parallel (SAB)$ .

**Lời giải.**



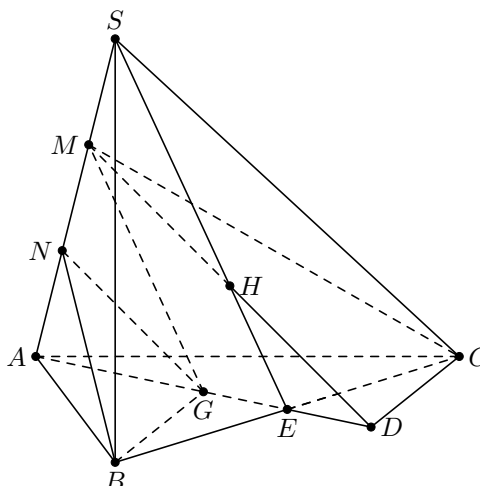
- ① - Từ  $M$  ta kẻ đường thẳng song song với  $CD$  cắt  $AD$  tại  $N$  và cắt  $AB$  tại  $E$ .  
Từ  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $SC$  cắt  $SB$  tại  $Q$ . Kéo dài  $EQ$  cắt  $SA$  tại  $P$ .  
Theo cách dựng ta suy ra  $(EPN) \parallel (SCD)$  và  $NQ \subset (EPN)$ . Vậy  $NQ \parallel (SCD)$ .  
- Do  $(P) \parallel (SCD)$  và hai mặt phẳng này cùng cắt  $(SAD)$  theo các giao tuyến là  $NP$  và  $SD$ . Do đó ta suy ra  $NP \parallel SD$ .  
② Ta có  $HK$  là đường trung bình của tam giác  $SAD$  nên  $HK \parallel SA$  (1)  
Vì  $K$  là trung điểm của  $AD$  nên  $AK = BC$ . Do đó tứ giác  $ABCK$  là hình bình hành. Suy ra  $CK \parallel AB$  (2)  
Từ (1) và (2) suy ra  $(CKH) \parallel (SAB)$ .

□

**BÀI 598.** Cho hình chóp  $SABC$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Trên đoạn  $SA$  lấy hai điểm  $M$ ,  $N$  sao cho  $SM = MN = NA$ .

- ① Chứng minh rằng  $GM \parallel (SBC)$ .  
② Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $G$ . Chứng minh rằng  $(MCD) \parallel (NBG)$ .  
③ Gọi  $H = DM \cap (SBC)$ . Chứng minh rằng  $H$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ .

**Lời giải.**



- ① Gọi  $E$  là trung điểm của  $BC$ . Khi đó ta có  $\frac{AG}{AE} = \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel SE$ . Vậy  $GM \parallel (SBC)$ .
- ② Từ giả thiết ta suy ra  $G, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $AM$ . Do đó  $NG \parallel MD$  (1)  
 Từ giác  $BDCG$  có  $E$  là trung điểm của hai đường chéo nên đó là hình bình hành. Suy ra  $BG \parallel CD$  (2)  
 Từ (1) và (2) suy ra  $(MCD) \parallel (NBG)$ .

- ③ Ta có  $AE$  là đường trung tuyến của tam giác  $SBC$  (3)

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác  $SAE$  với ba điểm thẳng hàng  $M, H, D$  ta có

$$\frac{HS}{HE} \cdot \frac{DE}{DA} \cdot \frac{MA}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HE} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HE} = 2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra  $H$  là trọng tâm tam giác  $SBC$ .

□

## BÀI 4. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 2

**BÀI 1.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ .

- ① Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SCD)$ .
- ② Gọi  $E$  là trung điểm của  $SC$ . Chứng minh  $OE \parallel (SAB)$ .
- ③ Gọi  $F$  là điểm trên đoạn  $BD$  sao cho  $3BF = 2BD$ . Tìm giao điểm  $M$  của  $SB$  và  $(AEF)$ . Tính tỉ số  $\frac{SM}{SB}$ .

**Lời giải.**

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \begin{cases} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \begin{cases} OE \parallel SA \text{ (đường trung bình)} \\ SA \subset (SAB) \\ OE \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow OE \parallel (SAB).$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} & \text{ Trong mặt phẳng } (SAC) \text{ có } I = SO \cap AE. \\ & \text{ Suy ra } \begin{cases} I \in (SBF) \\ I \in (AEF) \end{cases} \\ & \begin{cases} SB \subset (SBF) \\ FI = (SBF) \cap (AEF) \Rightarrow M \in SB \cap (AEF). \\ M = FI \cap SB \end{cases} \\ & \text{Ta có} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3BF = 2BD \\ \Rightarrow & 3(OB + OF) = 4OD \\ \Rightarrow & 3OD + 3OF = 4OD \\ \Rightarrow & 3OF = OD \\ \Rightarrow & \frac{OF}{OD} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Mặt khác } \triangle IOE \sim \triangle ISM \text{ (g.g), suy ra } \frac{OE}{SM} = \frac{OI}{SI} = \frac{1}{2} \\ & \text{suy ra} \end{aligned}$$

$$\frac{OI}{OS} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \text{Từ (1) và (2) suy ra } FI \parallel SD, \text{ suy ra } MF \parallel AD. \\ & \text{Mà } FD = \frac{2}{3}OD = \frac{1}{3}BD, \text{ suy ra } SM = \frac{1}{3}SB. \\ & \text{Vậy } \frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

**BÀI 2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $SAB$  và  $SAD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SB$ .

- ① Chứng minh  $IJ \parallel (ABCD)$ .
- ② Chứng minh  $(OMN) \parallel (SDC)$ .
- ③ Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SDC)$ .
- ④ Tìm giao điểm của  $BC$  và  $(OMN)$ .

**Lời giải.**

- ① Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AD$ , ta có:

$$\frac{SI}{SP} = \frac{SJ}{SQ} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra  $IJ \parallel PQ$ .

$$\begin{cases} IJ \parallel PQ \\ PQ \subset (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel (ABCD). \\ IJ \not\subset (SBCD) \end{cases}$$

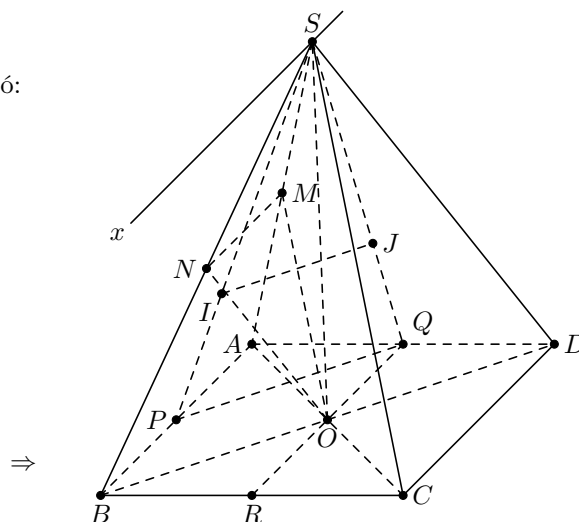
- ② Xét hai mặt phẳng  $(OMN)$  và  $(SCD)$  có:

$$\begin{cases} MN \parallel CD \text{ (cùng song song AB)} \\ MO \parallel SC \\ M = MN \cap MO \\ MN \parallel (SCD) \\ MO \parallel (SCD) \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD). \\ M = MN \cap MO \end{cases}$$

- ③ Ta có  $\begin{cases} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB.$

- ④ Gọi  $R$  là trung điểm  $BC$ , dễ dàng chứng minh  $MN \parallel RQ$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \subset (ABCD) \\ (OMN) \cap (ABCD) = RQ \Rightarrow R = BC \cap \\ R = BC \cap RQ \\ (OMN). \end{cases}$$



□

**BÀI 3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ . Gọi  $H, I, K, L$  lần lượt là trung điểm của  $SA, SC, OB, SD$ .

- ① Xác định giao tuyến của mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBD)$ ;  $(HIK)$  và  $(SBD)$ .

- ② Chứng minh  $OL$  song song với  $(HIK)$ .

- ③ Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  bị cắt bởi mặt phẳng  $(HIK)$ .

**Lời giải.**

- ① Ta có  $\begin{cases} SO \subset (SAC) \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$

Gọi  $M$  là giao điểm của  $SO$  và  $HI$ , ta có:

$$\begin{cases} K \in BO \subset (SBD) \\ K \in (HIK) \\ M \in SO \subset (SBD) \\ M \in HI \subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow MK = (HIK) \cap (SBD).$$

- ② Trong tam giác  $SAC$  có  $HI \parallel AC$  nên theo định lí Talet ta có  $\frac{SM}{SO} = \frac{1}{2}$ , suy ra  $M$  là trung điểm  $SO$ .

Trong tam giác  $SOB$  có  $MK \parallel SB$  (tính chất trung bình), trong tam giác  $SBD$  có  $OL \parallel SB$  (tính chất trung bình). Do đó,  $OL \parallel MK$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} OL \parallel MK \\ MK \subset (HIK) \Rightarrow OL \parallel (HIK). \\ OL \not\subset (HIK) \end{cases}$$

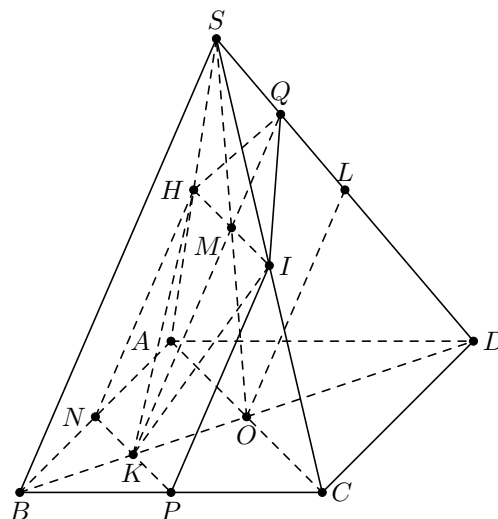
- ③ Gọi  $N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ , từ đó dễ dàng chứng minh được  $N, K, P$  thẳng hàng. Gọi  $Q$  là giao điểm của  $MK$  và  $SD$ .

Suy ra  $NP \parallel AC \Rightarrow NP \parallel HI$  (tính chất trung bình).

$$\text{Ta có } \begin{cases} HN = (HIK) \cap (SAB) \\ PI = (HIK) \cap (SBC) \\ QI = (HIK) \cap (SCD) \\ HQ = (HIK) \cap (SAD) \\ NP = (HIK) \cap (ABCD). \end{cases}$$

Do đó, thiết diện tạo bởi  $(HIK)$  và hình chóp  $S.ABCD$  là ngũ giác  $HNPIQ$ .

□



**BÀI 4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang cạnh đáy lớn  $AD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là các điểm trên hai cạnh  $SA, SD$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SD} = \frac{1}{3}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

- ① Tìm giao tuyến của  $(SAB)$  và  $(SCD)$ , của  $(SAD)$  và  $(SBC)$ .

- ② Tìm giao điểm  $H$  của  $CD$  và  $(EFG)$ .

- ③ Chứng minh  $EG \parallel (SBC)$ .

- ④ Xác định thiết diện của hình chóp  $S.ABCD$  bị cắt bởi  $(EFG)$ . Nó là hình gì?

Lời giải.

① Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$ , ta có:

$$\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \\ I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAB) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel BC.$$

② Theo định lý Talet thì  $EF \parallel AD$ , lấy điểm  $K$  trên  $AB$  sao cho

$$\frac{AK}{AB} = \frac{2}{3}, \text{ do đó:}$$

Cũng theo định lý Talet thì  $KG \parallel BC$  mà  $BC \parallel AD$  nên  $EF \parallel KG$ .

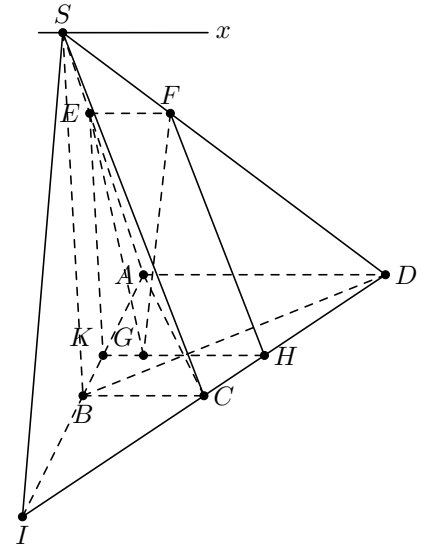
Gọi  $H$  là giao điểm của  $KG$  và  $CD$ , ta có:

$$\begin{cases} H \in CD \\ H \in KH \subset (EFG) \end{cases} \Rightarrow H \in CD \cap (EFG).$$

③ Ta có  $\begin{cases} EF \parallel BC \subset (SBC) \\ EK \parallel SB \subset (SBC) \\ E = EF \cap EK \end{cases} \Rightarrow (EFG) \parallel (SBC) \Rightarrow EG \parallel (SBC).$

④ Ta có  $\begin{cases} EF = (EFG) \cap (SAD) \\ FH = (EFG) \cap (SBD) \\ KH = (EFG) \cap (ABCD) \\ EK = (EFG) \cap (SAB) \\ \emptyset = (EFG) \cap (SBC) \\ EF. \end{cases}$

Vậy mặt phẳng  $(EFG)$  cắt hình chóp  $S.ABCD$  là hình thang  $EFHK$ .



□

**BÀI 5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle SAB$ . Lấy điểm  $M$  thuộc cạnh  $AD$  sao cho  $AD = 3AM$ .

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng  $(SAD)$  và  $(GCD)$ .

② Tìm giao điểm  $I$  của  $CD$  và mặt phẳng  $(SGM)$ .

③ Chứng minh  $MG$  song song  $(SCD)$ .

Lời giải.

- ① Lấy điểm  $N$  trên  $SA$  sao cho  $SN = \frac{2}{3}SA$ , ta có:

$$\begin{cases} GN \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow GN \parallel CD \Rightarrow GN \subset (GCD).$$

$$\text{Do đó, } \begin{cases} N \in SA \subset (SAD) \\ N \in GD \subset (GCD) \\ D \in (SAD) \\ D \in (GCD) \end{cases} \Rightarrow ND = (GCD) \cap (SAD).$$

- ② Gọi  $P$  là trung điểm  $AB$  và  $I$  là giao điểm của  $PM$  và  $CD$ , ta có:

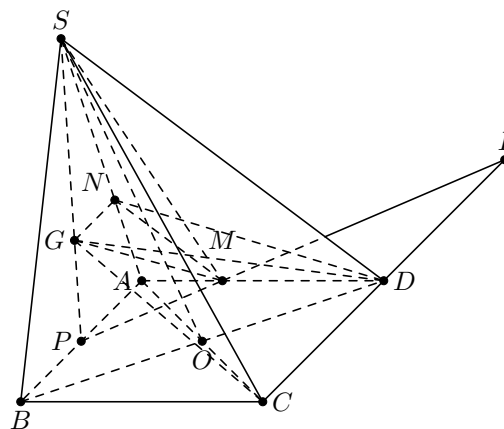
$$\begin{cases} I \in CD \\ I \in PM \subset (SGM) \end{cases} \Rightarrow I \in CD \cap (SGM).$$

- ③ Ta có  $\begin{cases} CD \parallel GN \\ GN \subset (GMN) \Rightarrow CD \parallel (GMN). \end{cases} \quad (1)$

$$\frac{AN}{AS} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}, \text{ theo định lí Talet ta được } MN \parallel SD.$$

$$\begin{cases} SD \parallel MN \\ MN \subset (GMN) \Rightarrow SD \parallel (GMN). \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra,  $(SCD) \parallel (GMN) \Rightarrow GM \parallel (SCD).$



□

**BÀI 6.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB$ .

- ① Tìm giao tuyến của  $(MBC)$  và  $(SAD)$ .

- ② Chứng minh  $MN \parallel (SCD)$ .

- ③ Gọi  $I = DM \cap CN$ . Chứng minh  $SI \parallel (NAD)$ .

**Lời giải.**

① Gọi  $P$  là trung điểm của  $SD$ , ta có:

$$\begin{cases} MP \parallel AD \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow MP \parallel BC \Rightarrow MP \subset (MBC). \\ \begin{cases} M \in (MBC) \\ M \in (SAD) \\ P \in SD \subset (SAD) \\ P \in MP \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow MP = (MBC) \cap (SAD).$$

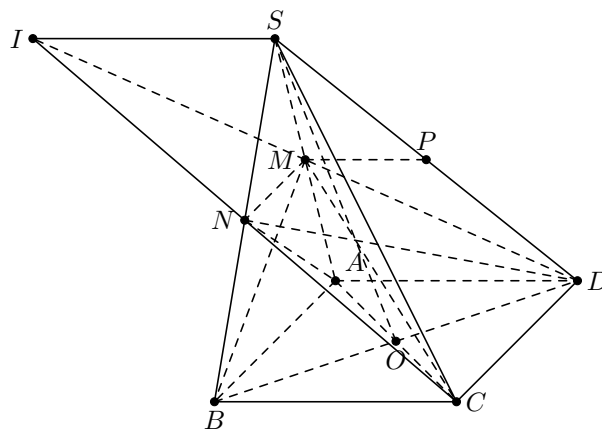
② Ta có  $\begin{cases} MN \parallel AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD).$

③ Ta có  $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$  suy ra  $MN$  là đường trung bình của  $\triangle ICD$ , do đó  $M$  là trung điểm  $ID$ .

Dễ dàng chứng minh  $\triangle MSI = \triangle MAD$  (c.g.c).

Suy ra  $\widehat{SIM} = \widehat{ADM} \Rightarrow SI \parallel AD$  (so le trong).

$$\begin{cases} SI \parallel AD \\ AD \subset (NAD) \Rightarrow SI \parallel (NAD). \\ SI \not\subset (NAD) \end{cases}$$



□