__Phần 4__

DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÌM GTLN – GTNN

__A/ LÝ THUYẾT__

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất

Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D.

Hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất trên D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le M \text{ (là một số cố định) } \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: GTLN của f(x) là: Maxf(x)

2. Định nghĩa giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số y = f(x) xác định trên miền D.

Hàm số f(x) đạt giá trị nhỏ nhất trên D

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge N \text{ (là một số cố định) } \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D \text{ sao cho } f(x_0) = N \end{cases}$$

Kí hiệu: GTNN của f(x) là: Minf(x)

__B/ CÁC DẠNG TOÁN:__

__Dạng 1:__ TÌM MAX – MIN BẰNG CÁCH ĐẠO HÀM TRỰC TIẾP

__1. Phương pháp giải__

Bước 1: Tìm miền xác định D của hàm y = f(x) (nếu đề chưa cho)

Bước 2: Tính y' = f'(x); giải phương trình y' = 0 tìm nghiệm x $\in$ D

Bước 3: Lập bảng biến thiên

x	
f'(x)	
f(x)	

__2. Chú ý__

Nếu hàm y = f(x) đạt được Minf(x); Maxf(x) trì nhiều điểm thì chỉ cần chỉ ra một điểm $x_0 \in D$ là đủ.

__3. Bài tập__

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của hàm:

$$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxf(x) = 2 đạt được khi $x = \sqrt{2}$
- Minf(x) = -2 đạt được khi $x = -\sqrt{2}$

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Giải

Điều kiện: $-2 \le x \le 2$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{2}$		2
f'(x)		+	0	-	
f(x)	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxf(x) = $2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = \sqrt{2}$
- Minf(x) = $-2\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -2$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1 - x^2} + 2\sqrt[3]{\left(1 - x^2\right)^2}$$

Giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{8x}{3}\sqrt[3]{1-x^2} = -x\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{8}{\sqrt[3]{1-x^2}}\right)}_{(>0)}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	3	↘	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = 3 đạt được khi x = 0
- Miny = 0 đạt được khi x = 1 hoặc x = -1

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x + 1 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}$$

Giải

Điều kiện: $-3x^2 + 6x + 9 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$

Ta có: $y' = 1 + \dfrac{6-6x}{2\sqrt{-3x^2+6x+9}} = \dfrac{\sqrt{-3x^2+6x+9} + 3 - 3x}{\sqrt{-3x^2+6x+9}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+6x+9} = 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 \ge 0 \\ -3x^2 + 6x + 9 = (3x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 12x^2 - 24x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	-1		2		3
y'		+	0	-	
y	0	↗	6	↘	4

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = 6 đạt được khi x = 2
- Miny = 0 đạt được khi x = -1

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 5\cos x - \cos 5x \text{ với } -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

Giải

Ta có: $y' = -5\sin x + \sin 5x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \left(k \in Z\right)$$

Do $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ nên: $x = -\dfrac{\pi}{5}\,; x = 0\,; x = \dfrac{\pi}{6}$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$3\sqrt{2}$	↗	$3\sqrt{3}$	↘	4	↗	$3\sqrt{3}$	↘	$3\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = $3\sqrt{3}$ đạt được khi x = $\dfrac{\pi}{6}$
- Miny = 4 đạt được khi x = 0

Bài 6: Giả sử (x,y) là nghiệm của phương trình: $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 6 - a^2 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = xy + 2\left(x + y\right)$

Giải

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \left(x + y\right)^2 - 2xy = 6 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ xy = a^2 - 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - aX + a^2 - 3 = 0$$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow -2 \le a \le 2$

lúc đó: $F = xy + 2\left(x + y\right) = a^2 - 3 + 2a$

$F' = 2a + 2;\ F' = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Bảng biến thiên:

a	-2		-1		2
F’		-	0	+	
F	-3	↘	-4	↗	5

Dựa vào bảng biến thiên, ta được: MinF = -4 đạt được khi a = -1

Bài 7: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình:

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0 \qquad (1)$$

Tìm m để biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Giải

Điều kiện để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 là: $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right) = -3m^2 - \frac{144}{m^2} + 48 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Theo định lý Viet:

$$A = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2\right)$$

$$= \left(x_1 + x_2\right)\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left[\frac{m^2}{4} - \frac{3}{12}\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(m - \frac{3}{m}\right)$$

Xét hàm số: $f(m) = m - \dfrac{3}{m}$ với $\left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{m^2} > 0$$

Bảng biến thiên:

x	$-2\sqrt{3}$		-2		2		$2\sqrt{3}$
f’(x)							
f(x)	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- MaxA = $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi x = $2\sqrt{3}$

- MinA = $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi x = $-2\sqrt{3}$

Bải 8: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình:

$$x^2 + ax + \frac{1}{a^2} = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (1)$$

Định a để $A = x_1^4 + x_2^4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là: $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{2}$$

Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x1 \cdot x2 = \dfrac{1}{a^2} \end{cases}$

Ta có:

$$A = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right) - 2x_1^2 x_2^2$$

$$= \left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1 x_2\right]^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$= \left(a^2 - \frac{2}{a^2}\right)^2 - \frac{2}{a^4} = a^4 - 4 + \frac{2}{a^4}$$

$$A' = 4a^3 - \frac{8}{a^5} = 4 \cdot \frac{a^8 - 2}{a^5}$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow a^8 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm \sqrt[8]{2}$$

Bảng biến thiên:

a	$-\infty$		$-\sqrt{2}$	$-\sqrt[8]{2}$	$\sqrt[8]{2}$	$\sqrt{2}$		$+\infty$
A'								
A	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

minA $= \dfrac{1}{2}$ đạt được $\Leftrightarrow a = \pm \sqrt[8]{2}$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |x^3 - 3x| \text{ với } -2 \leq x \leq 1$$

Giải

Ta có: Miny = 0 đạt được khi $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$y = |x^3 - 3x| = \begin{cases} x^3 - 3x \text{ nêu } x^3 - 3x \geq 0 \\ 3x - x^3 \text{ nêu } x^3 - 3x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 - 3x \text{ nêu } \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \\ x \geq \sqrt{3} \end{array}\right. \\ 3x - x^3 \text{ nêu } \left[\begin{array}{l} 0 \leq x < \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

Xét hàm $y_1 = x^3 - 3x$

$$y'_1 = 3x^2 - 3;\ y'_1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$y_2 = 3x^2 - x^3$$

$$y'_2 = 3 - 3x^2;\ y'_2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$-\sqrt{3}$		-1		0		1 $\sqrt{3}$			$+\infty$
y'_1				+	0	-			0		+	
y'_2		-			0			+	0	-		
y'		-		+	0	-		+	0	-	+	
y	14	↘	0	↗	4	↘	0	↗	2			

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ Maxy = 14 đạt được khi x= -2

Bải 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x^2\sqrt{2 - |x|}$$

Giải

Điều kiện: $2 - |x| \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Đặt $t = |x|$ với $0 \leq t \leq 2$

Hàm số đã cho trở thành: $y = t^2\sqrt{2 - t}$

$$y' = \frac{4t - 5t^2}{2\sqrt{2} - t}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{4}{5} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{4}{5}$		2
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	$\frac{16\sqrt{6}}{25\sqrt{5}}$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta được:

- Maxy = $\frac{16\sqrt{6}}{25\sqrt{5}}$ đạt được khi x = 0
- Miny = 0 đạt được khi x = $\frac{4}{5}$

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x^4 - 6ax^2 + a^2 \text{ với } -2 \le x \le 1$$

Giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 12ax$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^3 - 3a\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3a = 0 \end{array}\right.$$

- Nếu $a \le 0$ ta có bảng biến thiên:

x	-2		0		1
f'(x)	0	-	0	+	
f(x)		$\searrow$	a^2	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta được:

- Min $f(x) = f(0) = a^2$ đạt được khi x = 0
- Min $f(x) = \max\left\{f(1), f(-2)\right\} = \max\left\{a^2 - 6a + 1,\ a^2 - 24a + 16\right\}$

  $= a^2 - 24a + 16$

- Nếu $a>0$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3a}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3a}$		0		$\sqrt{3a}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

- Khi $x = \pm\sqrt{3a}$ thì hàm số đạt cực tiểu, do đó:

  hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x \in \left[-2,\ 1\right]$ là:

$$\max f(x) = \max\left\{f(-2), f(0), f(1)\right\}$$

$$f(-2) = a^2 - 24a + 16$$

$$f(0) = a^2$$

$$f(1) = a^2 - 6a + 1$$

Ta có: $f(-2) - f(0) = -24a + 16$

$$f(0) - f(1) = 6a - 1$$

$$f(1) - f(-2) = 18a - 15$$

Bảng xét dấu:

a	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
f(-1) - f(0)		+	|	+	0	-	|	-	
f(0) - f(1)		-	0	+	|	+	|	+	
f(1) - f(-2)		-	|	-	|	-	0	+	

+ Nếu $0 \le a \le \frac{1}{6}$ thì $\begin{cases} f(-2) > f(0) \\ f(-2) > f(1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \max\left\{f(-2), f(0), f(1)\right\} = f(-2)$$

$$\Rightarrow \max f(x) = f(-2) = a^2 - 24a + 16$$

+ Nếu $\frac{1}{6} < a \le \frac{2}{3}$ thì $\begin{cases} f(-2) > f(0) \\ f(-2) > f(1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \max f(x) = f(-2) = a^2 - 24a + 16$$

+ Nếu $\frac{2}{3} < a \le \frac{5}{6}$ thì $\begin{cases} f(0) > f(-2) \\ f(0) > f(1) \end{cases} \Rightarrow \max f(x) = f(0) = a^2$

+ Nếu $a > \frac{5}{6}$ thì $\begin{cases} f(0) > f(-2) \\ f(0) > f(1) \end{cases} \Rightarrow \max f(x) = f(0) = a^2$

Vậy: - Nếu $0 < a \le \frac{2}{3}$ thì $\max f(x) = f(-2) = a^2 - 24 + 16$

- Nếu $a > \frac{2}{3}$ thì $\max f(x) = f(0) = a^2$

• Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $\min f(x) = f\left(\pm\sqrt{3a}\right) = -8a^2$

Kết luận: + Nếu $a \le 0$ thì $\begin{cases} \min f(x) = a^2 \\ \max f(x) = a^2 - 24a + 16 \end{cases}$

+ Nếu $0 < a \le \frac{2}{3}$ thì $\begin{cases} \max f(x) = a^2 - 24a + 16 \\ \min f(x) = -8a^2 \end{cases}$

+ Nếu $a > \dfrac{2}{3}$ thì $\begin{cases} \max f(x) = a^2 \\ \min f(x) = -8a^2 \end{cases}$

Bài 12: Cho ΔABC có ba góc A > B > C. Tìm GTNN của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}} + \sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}} - 1$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x - \sin A}{x - \sin C} \geq 0 \\ \dfrac{x - \sin B}{x - \sin C} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \sin A \\ x < \sin C \end{array}\right.$

$$f'(x) = \frac{\sin A - \sin B}{2\sqrt{\frac{x - \sin A}{x - \sin C}}(x - \sin C)^2} + \frac{\sin B - \sin C}{2\sqrt{\frac{x - \sin B}{x - \sin C}}(x - \sin C)^2} > 0$$

(Do A > B > C nên sinA > sinB > sinC)

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	sinC		sinA	$+\infty$
f'(x)					
f(x)	$\nearrow$	$+\infty$		$\nearrow$	$+\infty$

• Khi $x \to \pm\infty$ thì $f(x) \to \sqrt{\dfrac{\sin A}{\sin C}} + \sqrt{\dfrac{\sin B}{\sin C}} - 1 > \sqrt{\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$

$\Rightarrow \min f(x) = f(\sin A) = \sqrt{\dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A - \sin C}} - 1$ đạt được khi x = sinA

Bài 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^n x + \cos^n x \text{ với } n \in N; N \geq 2 \text{ và } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

Giải

Xét hàm số: $f(x) = \sin^n x + \cos^n x$ với $0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$f'(x) = n\sin^{n-1}\cos x - n\cos^{n-1}x\sin x$$

$$= n\sin x\cos x\left(\sin^{n-2}x - \cos^{n-2}x\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^{n-2}x = \cos^{n-2}x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Bảng biến thiên:

x	-2		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	1	↘		↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$$\min y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{2-n}{2}} \text{ đạt được khi } x = \frac{\pi}{4}$$

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \frac{x^2}{4}$$

Giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + x\sqrt{1-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(1-x^2\right) = 2 - 2\sqrt{1-x^2} \qquad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$; $0 \le t \le 1 \Rightarrow x^2 = 1 - t^2$

Phương trình (1) trở thành:

$$\left(1-t^2\right)t^2 = 2(1-t) \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
y'		+	0	-	
y	$\sqrt{2}+\frac{1}{4}$	↗	2	↘	$\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\max y = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\min y = \sqrt{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy: giá trị lớn nhất của hàm số là 2 khi x = 0

giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$ khi $x = \pm 1$

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x^x \text{ với } x > 0$$

Giải

$y = x^x \Leftrightarrow \ln y = x\ln x$

$\Leftrightarrow \dfrac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y’		-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt[e]{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min y = \dfrac{1}{\sqrt[e]{e}}$ khi $x = \dfrac{1}{e}$

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất.

Bài 16: Cho điểm M(1,2). Đường thẳng d qua M cắt nửa trục dương Ox, Oy tại A và B. Xác định phương trình đường thẳng d sao cho diện tích tam giác OAB có giá trị nhỏ nhất.

Giải

Giả sử phương trình đường thẳng d có dạng:

$y = ax + b \ (a < 0)$

Đường thẳng này qua M(1,2) $\Rightarrow 2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a \Rightarrow b > 2$

Diện tích ΔOAB với A $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ và B(0,b)

$S = \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{b}{a}\right| \cdot b = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b^2}{|a|} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b^2}{b-2}$

$S' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b^2 - 4b}{(b-2)^2}$; $S' = 0 \Rightarrow b = 4$

Bảng biến thiên:

b	2		4		$+\infty$
S’		-	0	+	
S	$+\infty$	$\searrow$	S_{min}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$S_{min} = 4$ đạt được $\Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow a = -2$

Vậy phương trình đường thẳng d cần tìm là: $y = -2x + 4$

• ***Chú ý:***

Có thể làm theo phương trình đoạn chắn:

Phương trình đường thẳng d chắn trên hai trục Ox và Oy là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ với } A(a,0);\ B(0,b) \text{ và } \begin{cases} a>1 \\ b>2 \end{cases}$$

Đường thẳng d qua M: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{a}{a-1}$

Diện tích ΔOAB: $S=\frac{1}{2}ab=a\cdot\frac{a}{a-1}$

$$S'=\frac{a^2-2a}{(a-1)^2};S'=0\Rightarrow a=2$$

Bảng biến thiên:

a	1		2		$+\infty$
S'		-	0	+	
S	$+\infty$	↘	S_{min}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$S_{min}=4$ đạt được $\Leftrightarrow a=2\Rightarrow b=4$

Vậy đường thẳng d cần tìm là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

Bài 17: Cho A(1,4). Viết phương trình đường thẳng D qua A và cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N sao cho: $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất.

Giải

Phương trình đường thẳng D cắt Ox, Oy tại M, N có dạng:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ với } M(a,0);\ N(0,b) \text{ và } \begin{cases} a>1 \\ b>4 \end{cases}$$

Đường thẳng D qua A(1,4) nên:

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\Rightarrow\frac{1}{a}=1-\frac{4}{b}$$

Ta có: $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\left(1-\frac{4}{b}\right)^2+\frac{1}{b^2}$

$$=\frac{17}{b^2}-\frac{8}{b}+1=\frac{b^2-8b+17}{b^2}$$

Xét hàm số: $f(b)=\frac{b^2-8b+17}{b^2}$

$$f'(b)=\frac{8b^2-34b}{b^4}\,; f'(b)=0 \Rightarrow b=\frac{34}{8}$$

Bảng biến thiên:

x	4		$\frac{34}{8}$		$+\infty$
f'(b)		-	0	+	
f(b)	$\frac{1}{16}$	$\searrow$	$\frac{1}{17}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên, ta được: $\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow b=\frac{34}{8}=\frac{17}{4} \Rightarrow a=17$$

Vậy phương trình đường thẳng D là:

$$\frac{x}{17}+\frac{8y}{24}=1 \text{ hay } x+4y-17=0$$

Bài 18: Xác định a để giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$y=x^2+(2a+1)x+a^2-a-1$ trên [-1,2] bằng 1.

Giải

Ta có: $y'=2x+2a+1$

$y'=0 \Rightarrow x=-\frac{2a+1}{2}$

Xét các trường hợp:

- Trường hợp 1:

Nếu $-\frac{2a+1}{2}<-1 \Leftrightarrow 2a+1>2 \Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của y:

x	$-\infty$		$-\frac{2a-1}{2}$		-1		2
y'		-	0	+		+	
y						$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min y=y(-1)=a^2-3a-1$

$\min y=1 \Leftrightarrow a^2-3a-1=1 \Leftrightarrow a^2-3a-2=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ (nhận)

- Trường hợp 2:

Nếu $\quad -1 \le \dfrac{-2a-1}{2} < 2$

$\Leftrightarrow \quad -\dfrac{5}{2} < a < \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên của y:

x	1		$-\dfrac{2a-1}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$$\min y = y\left(\frac{-2a-1}{2}\right) = -2a - \frac{5}{4}$$

$$\min y = 1 \Leftrightarrow -2a - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{8} \text{ (nhận)}$$

- Trường hợp 3:

$$\frac{-2a-1}{2} \ge 2 \Leftrightarrow a \le -\frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên của y:

x	-1		2	$-\dfrac{2a-1}{2}$
y'		-		0
y		$\searrow$		

Từ bảng biến thiên ta được:

$$\min y = y(2) = a^2 + 3a + 5 = \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 1$$

Vậy giá trị của a cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{9}{8} \\ a = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Bài 19: Cho phương trình: $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$

Định a để tổng nghịch đảo hai nghiệm của phương trình trên là nhỏ nhất.

Giải

Phương trình: $x^2 - (a+1)x + a^2 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le a \le 1$$

Lúc đó: $A = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{a+1}{a^2}$

Xét hàm số: $f(a) = \dfrac{a+1}{a^2}$ với $-\dfrac{1}{3} \le a \le 1 \; (a \ne 0)$

$$f'(a) = \frac{a^2 - 2a(a+1)}{a^4} = \frac{-a-2}{a^3}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Bảng biến thiên:

a	-2	$-\frac{1}{3}$		0		1
f'(x)	0		+	‖	-	
f(x)		6	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min f(a) = \min A = f(1) = 2$ đạt được khi a = 1

Vậy giá trị của a cần tìm là: a = 1

Dạng 2: ĐẶT ẨN PHỤ SAU ĐÓ DÙNG ĐẠO HÀM

1. **Nguyên nhân đặt ẩn phụ**

   Do hàm f(x) có đạo hàm f'(x) phức tạp nên ta đặt ẩn phụ để đưa về hàm đơn giản hơn.

2. **Các bước giải**

   Bước 1: Tìm miền xác định của hàm số là D_1

   Bước 2: Đặt ẩn phụ t = h(x) với h(x) là một biểu thức nào đó trong hàm số đã cho.

   Bước 3: Tìm miền giá trị của t là D_2

   Bước 4: + Đưa hàm f(x) về hàm g(t)

   + Lập bảng biến thiên của g(t) trên miền D_2

   Bước 5: Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ ming(t) ; maxg(t)

   $\Rightarrow$ minf(x) ; maxf(x)

3.Bài Tập:

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x^6 + \left(1 - x^2\right)^3 \text{ trên } [-1;1]$$

Giải

Đặt $t = x^2$; do $-1 \le x \le 1$ nên $0 \le t \le 1$

Hàm số đã cho trở thành:

$$t = t^3 + (1-t)^3 \; ; \; y' = 3t^2 - 3(1-t)^2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow t^2 = \left(1 - t^2\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'		-	0	+	
y	1	↘	$\frac{1}{4}$	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$\max y = 1$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow x = 0$

$\min y = \frac{1}{4}$ đạt được khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{3 + 2x - x^2} + (x-1)^2 - 3$$

Giải

Điều kiện: $3+2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t=\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{4-(x-1)^2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$

Hàm số đã cho trở thành:

$\Leftrightarrow 1+t-t^2$

$y'=1-2t\,;\, y'=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{2}$		2
y'		+	0	-	
y	1	↗	$\frac{5}{4}$	↘	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$\max y=\dfrac{5}{4}$ đạt được khi $t=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3+2x-x^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3+2x-x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=1+\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\min y=-1$ đạt được khi $t=2 \Rightarrow x=1$

Bài 3: Cho hàm số: $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{\left(x^2+1\right)^2}$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Giải

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2+1\right)x+x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+1}+\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2$

Đặt $t=\dfrac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow tx^2-x+t=1$

Phương trình này có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ \left[\begin{array}{l} t\neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ \begin{cases} t\neq 0 \\ t-4t^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

Hàm số đã cho trở thành: $y=t+t^2$

$$y' = 1 + 2t \ge 0 \, \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
y'		+	
y	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

$\max y = \frac{3}{4}$ đạt được khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$

$\min y = -\frac{1}{4}$ đạt được khi $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

Bài 4: Cho hàm số: $y = \dfrac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Giải

Điều kiện: $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = t^2 - 2$

$$t' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow x\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
y'		+	0	-	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Hàm số đã cho trở thành:

$$y = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1}\ ;\ y' = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0 \, \forall t \in \left[\sqrt{2}, 2\right] \quad (1)$$

$\Rightarrow$ hàm số (1) luôn tăng trên $\left[\sqrt{2}\,,2\right]$

Vậy: $\min y = y\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} - 1$ đạt được khi $t = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1$

$\max y = y\,(2) = \dfrac{7}{3}$ đạt được khi $t = 2 \Rightarrow x = 0$

Bài 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f\,(x,y) = 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\ \left(x \neq 0, y \neq 0\right)$$

Giải

Đặt $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right|$

Theo bất đẳng thức Cosy thì $|t| \geq 2$

và $\quad t^2 = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + 2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$

hàm số đã cho trở thành:

$$f\,(t) = 3\left(t^2 - 2\right) - 8t = 3t^2 - 8t - 6$$

$$f'\,(t) = 6t - 8$$

$$f'\,(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2	$\frac{4}{3}$	2		$+\infty$
f'(t)		-		0		+	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	22		20	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\min y = -\,10 \text{ khi } t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow x = y$$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{\sin^2 x + 2\sin x + 3}{\sin^2 x + 3\sin x + 4}$$

Giải

Đặt $t = \sin x;\ -1 \leq t \leq 1$

Xét hàm: $f\,(t) = \dfrac{t^2 + 2t + 3}{t^2 + 3t + 4}$ với $-1 \leq t \leq 1$

$$f'(t)=\frac{t^2+2t-1}{\left(t^2+3t+4\right)^2}$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{2} \\ t=-1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
f'(t)		-	0	+	
f(t)	1	$\searrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}+4}$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

- $\min A=\min f(t)=\frac{4}{\sqrt{2}+4}$ khi $t=\sqrt{2}-1$

  $\Leftrightarrow \sin x=\sqrt{2}-1$

  $\Rightarrow x=\arcsin\left(\sqrt{2}-1\right)+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$
- $\max A=\max f(t)=1$ khi $t=-1$

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2^{\sin^2 x}+2^{1+\cos^2 x}$$

Giải

Đặt $t=2^{\sin^2 x}$; $0\le\sin^2 x\le 1\Rightarrow 1\le 2^{\sin^2 x}\le 2\Rightarrow 1\le t\le 2$

Xét hàm: $f(t)=1+\frac{4}{t}$

$$f'(t)=1-\frac{4}{t^2}=\frac{t^2-4}{t^2}\le 0\ \forall t\in\left[1,2\right]$$

Bảng biến thiên:

t	1		2
f'(t)		-	
f(t)	5	$\searrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

- $\min y=\min f(x)=4$ đạt được khi $t=2\Leftrightarrow\sin^2 x=1$

  $\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

- $\max y = \max f(t) = 5$ đạt được khi $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$B = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}$$

Giải

Điều kiện: $-3 \le x \le 1$

Vì $\left(\sqrt{x+3}^{\,2}\right) + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 4$ nên ta đặt

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \cdot \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \sqrt{1-x} = 2 \cdot \dfrac{1-t^2}{1} + t^2 \end{cases} \quad \text{với } 0 \le t \le 1$$

Khi đó: $B = \dfrac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7}$

$$= \frac{-52t^2 - 8t - 60}{\left(-5t^2 + 16t + 7\right)^2} < 0 \, \forall t \in \left(0,1\right]$$

Bảng biến thiên:

t	0		1
f'(t)		-	
f(t)	$\frac{9}{7}$	↘	$\frac{7}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được:

- $\min B = \min f(t) = f(1) = \dfrac{7}{9}$ đạt được khi $t = 1 \Rightarrow x = 1$
- $\min B = \min f(t) = f(0) = \dfrac{9}{7}$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow x = -3$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x,y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - 2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ \left(x,y \ne 0\right)$$

Giải

Đặt $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

Vì $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{x} = 1$ nên $\dfrac{x}{y}$ và $\dfrac{y}{x}$ cùng dấu

Như vậy: $t = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \Rightarrow |t| = \left|\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right| = \left|\dfrac{x}{y}\right| + \left|\dfrac{y}{x}\right| \geq 2$

$$t^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = \left(t^2 - 2\right)^2 = t^4 - 4t^2 + 2$$

Xét hàm số: $f(t) = t^4 - 4t^2 + 2 - 2\left(t^2 - 2\right) + 2$

$= t^4 - 6t^2 + t + 6$ với $|t| \geq 2$

$f'(t) = 4t^3 - 12t + 1$

$f''(t) = 12t^2 - 12$

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f''(t)		+				+	
f'(t)	$+\infty$	↗ ⊖	-7		9	↗ ⊕	$+\infty$
f(t)	$+\infty$	↘	-4		0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min f(x,y) = \min f(t) = -4$ đạt được khi $t = -2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

Hàm số không đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} - 4$$

Giải

Đặt: $t = \cos x + \dfrac{1}{\cos x}$

Lại đặt: $u = \cos x; -1 \leq u \leq 1; u \neq 0$

Xét hàm: $t(u) = u + \dfrac{1}{u}$; $t'(u) = 1 - \dfrac{1}{u^2} \leq 0 \,\forall\, |u| \leq 1; u \neq 0$

Bảng biến thiên:

u	-1		0		1
t'		-	0	-	0
t	-2 ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	2

Từ bảng biến thiên, suy ra: $|t| \geq 2$

với: $t = \cos x + \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x} = t^2 - 2$

Hàm số đã cho trở thành:

$$y = t^2 + t - 6$$

$$y' = 2t + 1;\ y' = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2	$-\frac{1}{2}$	2		$+\infty$
y'		-		0		+	
y	$+\infty$ ↘		-4		0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min y = -4$ đạt được $\Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow x = \pi + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^8 x + \cos^4 x$$

Giải

Ta có: $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x = \dfrac{2(1 - \cos 2x)^4}{16} + \cos^4 2x$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)^4 + \cos^4 2x$$

Đặt $t = \cos 2x;\ -1 \leq t \leq 1$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{1}{8}(1 - t)^4 + t^4$ với $-1 \leq t \leq 1$

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(1 - t)^3 + 4t^3$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(1 - t)^3 + 4t^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^3 = (1 - t)^3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

t	-1		$\frac{1}{3}$		1
f'(t)		-	0	+	
f(t)	3	↘	$\frac{1}{27}$	↗	1

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\max y = \max f(t) = 3$ đạt được khi $t = -1$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

+ $\min y = \min f(t) = \frac{1}{27}$ đạt được khi $t = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + m\pi$

Vậy: $\begin{cases} \max y = 3 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \min y = \frac{1}{27} \text{ khi } x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + m\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$

Bài 12: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2\,(1 + \sin 2x \cdot \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$$

Giải

Ta có: $y = 2\,(1 + \sin 2x \cdot \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$

$= 2 + \sin 6x - \sin 2x + \sin 6x \cdot \sin 2x$

$= 2 + \left(3\sin 2x - 4\sin^3 2x\right) - \sin 2x + \sin 2x\left(3\sin 2x - 4\sin^3 2x\right)$

$= 2 + 2\sin 2x + 3\sin^2 2x - 4\sin^3 2x - 4\sin^4 2x$

Đặt $t = \sin 2x;\ -1 \le t \le 1$

Xét hàm số:

$f(t) = -4t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 2t + 2$ với $-1 \le t \le 1$

$f'(t) = -16t^3 - 12t^2 + 6t + 2 = (t+1)\left(-16t^2 + 4t + 2\right)$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ -8t^2 + 2t + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
f'(t)		-	0	+	0	-	
f(t)	3	↘	$\frac{111}{64}$	↗	3	↘	-1

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\max y = \max f(t) = 3$ đạt được khi $t = -1 \vee t = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + m\pi$$

+ $\min y = -1$ đạt được khi $t = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

Vậy: $\begin{cases} \max y = 3 \text{ khi } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + m\pi \\ \min y = -1 \text{ khi } x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\cos^4 x + 2\cos^2}$$

Giải

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\cos^4 x + 2\cos^2} = \frac{3\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\left(1 - \sin^2 x\right)}$$

Đặt $\sin^2 x = t; 0 \le t \le 1$

Xét hàm số: $y = f(t) = \frac{3(1-t)^2 + 4t}{3t^2 + 2(1-t)} = \frac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 1} = 1 + \frac{2}{3t^2 - 2t + 1}$

Hàm $y = f(t)$ đạt min, max trên [0,1] khi hàm $g(x) = 3t^2 - 2t + 1$ đạt min, max trên [0,1]

Ta có: $g'(t) = 6t - 2;\ g'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

Bảng biến thiên:

t	-1		$\frac{1}{3}$		1
g'(t)		-	0	+	
g(t)	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	2

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\min g(t) = 2 \Rightarrow \min y = \min f(t) = 2$ đạt được khi t = 1

$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \left(m \in \mathbb{Z}\right)$

+ $\max g(t) = \frac{2}{3} \Rightarrow \max y = \max f(t) = 1 + 3 = 4$ đạt được khi $t = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2} + n\pi \left(n \in \mathbb{Z}\right)$

Vậy: $\begin{cases} \min y = 2 \text{ khi } x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \max y = 4 \text{ khi } x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + n\pi \end{cases}$

Bài 14: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{\sin^6 x|\cos x| + \cos^6 x|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$$

Giải

Ta có: $|\sin x| + |\cos x| \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

nên hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y = \frac{\sin^6 x|\cos x| + \cos^6 x|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|} = \frac{|\sin x\cos x|\left[|\sin^5 x| + |\cos^5 x|\right]}{|\sin x| + |\cos x|}$$

$$|\sin^5 x| + |\cos^5 x| = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left[|\sin^3 x| + |\cos^3 x|\right] - \cos^2 x|\sin^3 x| - |\cos^3 x|\sin^2 x$$

$$= \left[|\sin x| + |\cos x|\right]\left[1 - |\sin x| + |\cos x|\right] - \cos^2 x\sin^2 x\left(|\sin x| + |\cos x|\right)$$

Do đó: $y = |\sin x\cos x|\left[1 - |\sin x\cos x| - \cos^2 x \cdot \sin^2 x\right]$

$$= \frac{1}{2}|\sin 2x|\left[1 - \frac{1}{2}|\sin 2x| - \frac{1}{4}\sin^2 2x\right]$$

Đặt $t = |\sin 2x|$ với $0 \leq t \leq 1$

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{2}t\left(1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2\right) = -\frac{1}{8}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t$

$$f'(t) = -\frac{3}{8}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{2}{3} \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{2}{3}$		1
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	↗	$\frac{5}{9}$	↘	$-\frac{3}{8}$

Từ bảng biến thiên, ta được:

+ $\max y = \max f(t) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{9}$ đạt được khi $t = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow |\sin 2x| = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

+ $\min y = -\frac{3}{8}$ đạt được khi $t = 1$

$\Leftrightarrow |\sin 2x| = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 15: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |1 + 2\sin 3x| + |1 + 2\cos 3x|$$

Giải

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Theo đề bài $y \geq 0$ nên y đạt min, max thì y^2 cũng đạt min, max.

Ta có: $y^2 = 6 + 4(\sin 3x + \cos 3x) + 2|(1 + 2\sin 3x)(1 + 2\cos 3x)|$

$\Rightarrow y^2 = 6 + 4(\sin 3x + \cos 3x) + 2|1 + 2(\sin 3x + \cos 3x) + 2\sin 6x|$

Đặt $t = \sin 3x + \cos 3x$; $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin 6x = t^2 - 1$

Lúc đó $y^2 = f(t) = 6 + 4t + 2|1 + 2t + 2\left(t^2 - 1\right)|$

$= 6 + 4t + 2|t^2 + 2t - 1|$

Ta có: $2t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ t_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Cà hai nghiệm này đều $\in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Do đó: $f(t) = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1|$

$$= \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4 & \text{nêu } -\sqrt{2} \leq t \leq \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t \leq \sqrt{2} \\ -4t^2 + 8 & \text{nêu } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Đặt $f_1(t) = 4t^2 + 8t + 4$

$f_1(t) = 8t + 8; f'(t) = 0 \Rightarrow t = -1$

$f_2(t) = -4t^2 + 8$

$f_2(t) = -8t; \quad f'_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Bảng biến thiên:

a	$-\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		-1		0		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$\sqrt{2}$
f'₁(t)		-			0			+		+	
f'₂(t)				+		+	0	-			
f'(t)		-		+	0	+	0	-		+	
f(t)		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta được:

Ta có: $f\left(-\sqrt{2}\right) = 12 - 8\sqrt{2}$

$f\left(\sqrt{2}\right) = 12 + 8\sqrt{2} = \left(2\sqrt{2} + 2\right)^2$

$f(0) = 8$

$f\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 4 + 2\sqrt{3}$

Từ đó, ta được:

+ $\min y^2 = \min f(t) = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \Rightarrow \min y = \sqrt{3} - 1$

+ $\max y^2 = \max f(t) = \left(2\sqrt{2} + 2\right)^2 \Rightarrow \max y = 2\sqrt{2} + 2$

Bài 16: Tùy theo m, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + m\sin x\cos x$$

Giải

Ta có: $y = \sin^6 x + \cos^6 x + m\sin x\cos x$

$= \left(\sin^2 x\right)^3 + \left(\cos^2 x\right)^3 + m\sin x\cos x$

$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x\right) + m\sin x\cos x$

$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{m}{2}\sin 2x$

Đặt $t = \sin 2x;\ -1 \le t \le 1$

Xét hàm số: $f(t) = -\dfrac{3}{4}t^2 + \dfrac{m}{2}t + 1$ với $-1 \le t \le 1$

$$f'(t) = -\frac{3}{2}t + \frac{m}{2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m}{3}$$

Xét các trường hợp:

- *Trường hợp 1:*

  Nếu $\dfrac{m}{3} \le 1 \Leftrightarrow m \le -3$

  Bảng biến thiên của f(t):

t	$-\infty$	$\frac{m}{3}$	-1		1
f'(t)		0		-	
g(t)				↘	

  Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\max y = \max f(t) = f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$$

$$\min y = \min f(t) = f(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$$

- *Trường hợp 2:*

  Nếu $-1 < \dfrac{m}{3} < 1 \Leftrightarrow -3 < m < 3$

  Bảng biến thiên của f(t):

t	-1		$\frac{m}{3}$		1
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗		↘	

  Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\max y = \max f(t) = f\left(\frac{m}{3}\right) = 1 + \frac{m^2}{12}$$

$$\min y = \min f(t) = \min\left\{f(-1), f(1)\right\} = \min\left\{\frac{1}{4} - \frac{m}{2}, \frac{1}{4} + \frac{m}{2}\right\}$$

  + Nếu $\dfrac{1}{4} - \dfrac{m}{2} \le \dfrac{1}{4} + \dfrac{m}{2} \Rightarrow 0 \le x < 3$ thì $\min y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{m}{2}$

  + Nếu $-3 < m < 0$ thì $\min y = \dfrac{1}{4} + \dfrac{m}{2}$

- *Trường hợp 3:*

Nếu $\frac{m}{3} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3$

Bảng biến thiên của f(t):

t	-1		1	$\frac{m}{3}$
f'(t)		+		0
f(t)		$\nearrow$		

Từ bảng biến thiên, ta được:

$$\max y = \max f(t) = f(1) = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$$

$$\min y = \min f(t) = f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$$

Vậy: + $m \leq -3$ thì $\begin{cases} \max y = \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \\ \min y = \frac{1}{4} + \frac{m}{2} \end{cases}$

+ Nếu $-3 < m < 3$ thì $\max y = 1 + \frac{m^2}{12}$

- Nếu $-3 < m < 0$ thì $\min y = \frac{1}{4} + \frac{m}{2}$
- Nếu $0 \leq m < 3$ thì $\min y = \frac{1}{4} - \frac{m}{2}$

+ Nếu $m \geq 3$ thì $\begin{cases} \max y = \frac{1}{4} + \frac{m}{2} \\ \min y = \frac{1}{4} - \frac{m}{2} \end{cases}$

Dạng 3: DÙNG PHÉP THẾ RỒI ĐẠO HÀM

1. *Phương pháp:*

- Khi hàm đa thức chứa hai ẩn; ba ẩn thì ta tính ẩn này theo ẩn kia rồi thế vào hàm cần tìm Min; Max được hàm một ẩn.
- Sau đó dùng đạo hàm.

2.Bài Tập:

Bài 1: Cho hai số thực x; y thỏa mãn: $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^4+y^4$

Giải

Ta có: $y=2-x \Rightarrow A=x^4+(2-x)^4$

$$A'=4x^3-4(2-x)^3=0 \Leftrightarrow x=1$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
A'		-	0	+	
A	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên, ta được:

$Min\,A=2$ đạt được khi $x=1 \Rightarrow y=1$

Bài 2: Cho hai số dương x;y thỏa mãn: $x+2y=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2y-1}$

Giải

Theo đề: $x+2y=3 \Rightarrow 2y=3-x \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

$\Rightarrow A=\sqrt{1+2x}+2\sqrt{2-x}$

$$A'=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{1}{\sqrt{2-x}}=\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt{2-x}}$$

$$A'=0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{1+2x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		2
A'		+	0	-	
A	$\sqrt{10}$	↗	$\sqrt{15}$	↘	$\sqrt{5}$

Theo bảng biến thiên, ta được:

$Max\,A = \sqrt{15}$ đạt được $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

Bài 3: Cho hai số x;y dương và $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 3^{1+x} + 9^{y}$

Giải

Ta có: $y = 1 - x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$

Khi đó $A = 3.3^x + 9^{1-x} = 3.3^x + \frac{9}{9^x}$

Đặt $t = 3^x$; với $0 < x < 1 \Rightarrow 1 < 3^x = t < 3$

$\Rightarrow A = 3t + \frac{9}{t^2}$; $A' = 3 - \frac{18}{t^3} = 3 \cdot \frac{t^3 - 6}{t^3}$

$A' = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{6}$

Bảng biến thiên:

x	1		$\sqrt[3]{6}$		3
A'		-	0	+	
A		↘	$\frac{27}{\sqrt[3]{36}}$	↗	

Theo bảng biến thiên, ta được:

$Min\,A = \frac{27}{\sqrt[3]{36}}$ đạt được khi $t = \sqrt[3]{6} \Rightarrow 3^x = \sqrt[3]{6}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\log_3 6 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{3}\log_3 6$

Bài 4: Cho hai số x;y thỏa mãn: $x^2 + xy + y^2 = 1$ (1)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 - xy + y^2$

Giải

Ta có: $A = x^2 - xy + y^2 = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

Nếu $y = 0$ thì $x = \pm 1$ và $A = 1$

Nếu $y \neq 0$ thì $A = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} + 1}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} + 1}$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ ta được: $A = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + t + 1}$; $A' = \dfrac{2\left(t^2 - 1\right)}{\left(t^2 + t + 1\right)^2}$; $A' = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
A’		+	0	-	0	+	
A	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Theo bảng biến thiên, ta được:

+ $Max\, A = 3$ đạt được khi $t = -1 \Leftrightarrow y = -x$ thế vào (1) được:

  $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \mp 1$

+ $Min\, A = \dfrac{1}{3}$ đạt được khi $t = 1 \Leftrightarrow y = -x$ thế vào (1) được:

  $3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}} = y$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$A = \frac{2xy + y^2}{2xy + 2x^2 + 1}$$

với x,y không đồng thời bằng và thỏa: $x^2 + y^2 = 1$

Giải

Theo giả thiết: $x^2 + y^2 = 1$ nên:

$$A = \frac{2xy + y^2}{2xy + 2x^2 + x^2 + y^2} = \frac{2xy + y^2}{2xy + 3x^2 + y^2} = \frac{2 \cdot \dfrac{x}{y} + 1}{2 \cdot \dfrac{x}{y} + 3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1}$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{2t + 1}{3t^2 + 2t + 1}$

$$f'(t) = \frac{-6t^2 - 6t}{\left(3t^2 + 2t + 1\right)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -6t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'(t)		-	0	+	0	-	
f(t)	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Theo bảng biến thiên, ta được:

+ $\max A = \max f(t) = 1$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$

+ $\min A = \min f(t) = -\dfrac{1}{2}$ đạt được khi $t = -1 \Rightarrow x = -y$

Kết hợp $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 6: Cho $x^2 + y^2 - xy = 1$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $A = x^4 + y^4 - x^2y^2$

Giải

Ta có: $1 = x^2 + y^2 - xy \geq 2xy - xy = xy \Rightarrow xy \leq 1$

$$1 = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy \geq -3xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{3}$$

Từ đó, ta được: $-\dfrac{1}{3} \leq xy \leq 1$

Biến đổi: $A = x^4 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2$

$$= (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = 1 + 2xy - 2x^2y^2$$

Đặt $t = xy$ thì $-\dfrac{1}{3} \leq t \leq 1$

Xét hàm số: $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ với $-\dfrac{1}{3} \leq t \leq 1$

$$f'(t) = -4t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		1
f'(t)		+	0	-	
f(t)	$\dfrac{1}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	1

Theo bảng biến thiên, ta được:

+ $\min A = \min f(t) = \frac{1}{9}$ đạt được $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -y = \frac{1}{\sqrt{3}}$

+ $\max A = \max f(t) = \frac{3}{2}$ đạt được $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}$

Từ giả thiết: $x^2 + y^2 - xy = 1$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 3xy = \frac{5}{2} \Rightarrow x + y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\Rightarrow$ Giải hệ $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}} \\ y = -\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

(Nhớ là ta chỉ cần đưa vài giá trị hoặc một giá trị của x,y để A max)

Bài 7: (Đề thi khối A – 2006)

Cho hai số $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2 - xy + y^2 = xy(x+y)$ (1)

Tìm giá trị lớn nhất của: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

Giải

Điều kiện $x \neq 0$ và $y \neq 0$

Đặt $y = tx$ ($t \in \mathbb{R}$ và $t \neq 0$)

(1) trở thành: $x^2 - tx^2 + t^2x^2 = tx^2(x + tx)$

$$\Leftrightarrow \quad x^2(1 - t + t^2) = x^3(t + t^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t} \quad (t \neq -1)$$

Mặt khác: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3y^3}$

$$= \frac{(x+y)xy(x+y)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$$

Thế $x = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + t}$ vào A được:

$$A=\left[\frac{x+tx}{x^2+t}\right]^2=\frac{(1+t)^2}{t^2x^2}=\frac{(t+1)^2}{t^2\left(\frac{t^2-t+1}{t^2+t}\right)}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{(t+1)^2}{\left(t^2-t+1\right)^2}\Rightarrow\sqrt{A}=\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}=B\neq 1$$

- Đến đây ta tìm Min của B theo 2 cách:

Cách 1: dùng đạo hàm

Xét $B=\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1}$ với $t\neq 0; t\neq 1$ và $t\in\mathbb{R}$

$$B'=\frac{-3\left(t^2-1\right)}{\left(t^2-t+1\right)^2};\ B'=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=1$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
B’		-	0	+	0	-	
B	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow \max B=4\Rightarrow \max A=16$ đạt được khi t = 1

$$\Leftrightarrow y=x=\frac{1}{2}$$

Cách 2: Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình:

Ta có: $B=\dfrac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\Leftrightarrow (B-1)t^2-(B+2)t+B-1=0$

Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\geq 0$ (vì $B\neq 1$)

$$\Leftrightarrow (B+2)^2-4(B-1)\geq 0\Leftrightarrow 3B^2-12B\leq 0\Leftrightarrow 0\leq B\leq 4$$

$\Rightarrow \max B=4\Rightarrow \max A=16$ đạt được khi $\Delta=0\Leftrightarrow t=1$

$$\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

Dạng 4: DỒN VỀ MỘT BIẾN BẰNG CÁCH CHẶN TRÊN HOẶC CHẶN DƯỚI

1.Các cách chặn:

Cách 1: Dùng điều kiện ràng buộc của ẩn để chặn.

Cách 2: Dùng giá trị của một biểu thức.

Cách 3: Dùng bất đẳng thức phụ như bất đẳng thức Côsy; Bunhiakopxky

2.Bài Tập:

Bài 1: Cho hai số x;y dương thỏa mãn: $x^3+y^3\le 2$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $A=x^2+y^2$

Giải

Ta có: $x^3+y^3\le 2\Rightarrow y^3\le 2-x^3\Leftrightarrow y\le\sqrt[3]{2-x^3}$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2\le x^2+\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}=f(x)$$

Xét hàm số: $f(x)=x^2+\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}$ với $0<x<\sqrt[3]{2}$

$$f'(x)=2x-\frac{2x^2}{\sqrt[3]{2-x^3}}=2x\frac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)}-x}{\sqrt[3]{2-x^3}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt[3]{2-x^3}=x\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1\ (\text{vì } 0<x<\sqrt[3]{2})$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$\sqrt[3]{2}$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗	2	↘	

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow f(x)\le 2\Rightarrow A\le f(x)\le 2$

$\Rightarrow \max A=2$ đạt được khi $x=1\Rightarrow y=1$

Bài 2: Cho 3 số $x,y,z\in\left[0,1\right]$ và $x+y+z=\dfrac{3}{2}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: $A=\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$

Giải

- Tìm giá trị lớn nhất:

Ta có: $\frac{3}{2} = x + y + z \le \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{3}{4}$; vì $x, y, z \in \left[0, 1\right]$ nên

$\frac{3}{4} \le x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \le \cos\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \max A = \cos\frac{3}{4}$ đạt được $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

- Tìm giá trị nhỏ nhất:

Không mất tính tổng quát, giả sử trong ba số thì:

$$z \ge y \ge x \Rightarrow \frac{1}{2} \le z \le 1$$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = \left(x + y\right)^2 - 2xy + z^2 = \left(\frac{3}{2} - z\right)^2 + z^2 - 2xy$

$$\le \left(\frac{3}{2} - z\right)^2 + z^2 \text{ (do } -2xy \le 0\text{)} = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4}$$

Xét hàm số: $f(z) = 2z^2 - 3z + \frac{9}{4}$ với $\frac{1}{2} \le z \le 1$

$$f'(z) = 4z - 3$$

$$f'(z) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Bảng biến thiên:

z	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1
f'(z)		-	0	+	
f(z)	$\frac{5}{4}$	↘		↗	$\frac{5}{4}$

Từ bảng biến thiên, suy ra: $f(z) \le \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < \frac{5}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \ge \cos\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \min A = \frac{5}{4}$ đạt được khi $\begin{cases} z = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} z=1 \\ x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} z=\dfrac{1}{2} \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} z=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \\ x=1 \end{cases}$

Vậy: $\max A=\cos\dfrac{3}{4}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}=z$

$$\min A=\cos\frac{5}{4} \text{ khi} \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

Bài 3: Cho x, y đều dương và thỏa mãn: $x+y=1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x,y)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+y^2+\dfrac{1}{y^2}$

Giải

Ta có: $f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)$

Theo bất đẳng thức Côsy thì:

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)\geq 2xy\left(1+\frac{1}{x^2y}\right)=2xy+\frac{2}{xy}$$

Từ giả thiết $x+y=1$, theo bất đẳng thức Côsy thì:

$$1\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow 0<xy\leq\frac{1}{4}$$

Đặt $t=xy;\ 0<t\leq\dfrac{1}{4}$

Xét hàm số: $f(t)=2t+\dfrac{2}{t};\ 0<t\leq\dfrac{1}{4}$

$$f'(t)=2-\frac{2}{t^2}=2\frac{t^2-1}{t^2}<0\ \forall t\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$$

Bảng biến thiên:

t	0	$\frac{1}{4}$
f'(t)	-	

f(t)	$+\infty \searrow f_{min}$

Từ bảng biến thiên, ta được: $f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{2}$

$\Rightarrow f(x,y)$ nhỏ nhất $= \frac{17}{2}$ đạt được khi $t = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow xy = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Vậy: $\min f(x,y) = \frac{17}{2}$ đạt tại $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 4: Cho hai số x, y dương đều thỏa mãn:

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$

Giải

Theo bất đẳng thức Buniacopxki, ta có:

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(2-\left(x^2+y^2\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 \leq \left(x^2+y^2\right)\left(2-\left(x^2+y^2\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2-\left(x^2+y^2\right) \Leftrightarrow 0 < x^2+y^2 \leq 1$$

Biến đổi: $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)$

Theo bất đẳng thức Cosy:

$$x^2y^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2y^2} \geq \frac{4}{\left(x^2y^2\right)^2}$$

Do đó: $A \geq \left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{4}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right) = x^2+y^2+\frac{4}{x^2+y^2}$

Đặt $t = x^2 + y^2$ thì $0 < t \leq 1$

Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{4}{t}$ với $0 < t \leq 1$

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} \; \forall t \in \left(0,1\right]$$

Bàng biến thiên:

t	0		1
f'(t)		-	
f(t)	$+\infty$	$\searrow$	f_{min}

Từ bảng biến thiên, ta được:

$\min f(t) = f(1) = 5$ đạt được khi $t = 1$

$\Rightarrow \min A = 1$

Giá trị nhỏ nhất đạt được $\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

đồng thời $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy: $\min A = 5$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 5: Cho hai số $x, y \in (0,\ 1)$ thỏa mãn: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x,y) = x^x + y^y$

Giải

Xét hàm số: $f(t) = \ln t - t + 1$ với 0 < t

$f'(t) = \dfrac{1}{t} - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Theo bảng biến thiên $\Rightarrow f'(x) \le 0\ \forall t \in (0, +\infty)$

Do đó: $\forall x,y > 0$ thì $x \cdot f\left(\dfrac{1}{2x}\right) + y \cdot f\left(\dfrac{1}{2y}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow x\left(\ln\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2x} + 1\right) + y\left(\ln\dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{2y} + 1\right) \le 0$ (vì x, y > 0)

$\Leftrightarrow x\ln\dfrac{1}{2x} + y\ln\dfrac{1}{2y} \le 0$ (sử dụng x + y =1)

$\Leftrightarrow -x\ln 2 - y\ln 2y \le 0 \Leftrightarrow -\ln 2^x \cdot 2^y - \ln x^x \cdot y^y \le 0$

$$\Leftrightarrow \ln x^x \cdot y^y \geq \ln x2^{-(x+y)} = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^x \cdot y^y \geq \frac{1}{2}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsy:

$$x^x + y^y \geq 2\sqrt{x^x \cdot y^y} \geq 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(x,y) \geq \sqrt{2} \Rightarrow \min f(x,y) = \sqrt{2}$$

đạt được $\Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x,y)$ là $\sqrt{2}$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{2}$

Bài 6: Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, và $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x$$

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$y = a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x \leq \sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x\right)}$$

$$= 2\sqrt{1 + 1 - \cos 2x + 1 - \cos^2 2x} = 2\sqrt{3 - \cos 2x - \cos^2 2x}$$

Đặt $t = \cos 2x;\ -1 < t < 1$

Xét hàm số: $f(t) = 3 - t - t^2;\ f'(t) = -1 - 2t;\ f'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	2	↗	$\frac{13}{4}$	↘	1

Theo bảng biến thiên, suy ra:

$$f(t) \leq \frac{13}{4} \Rightarrow y^2 \leq 4\cdot\frac{13}{4} = 13 \Rightarrow -\sqrt{13} \leq y \leq \sqrt{13}$$

$\Rightarrow \max y = \sqrt{13}$ đạt được

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Đồng thời: $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{2}\sin x}{b} = \dfrac{\sin 2x}{c} \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2c}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{\sqrt{6}}{2} a \\ c = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a \end{cases}$$ thế vào: $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

Ta được: $a^2 + \dfrac{3}{2} a^2 + \dfrac{3}{4} a^2 = 4 \Rightarrow a = \dfrac{4}{\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \\ c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$

và giá trị nhỏ nhất của y là:

$\min y = -\sqrt{13}$ đạt được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = -\dfrac{4}{\sqrt{13}}, b = -\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy: + $\max y = \sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = \dfrac{4}{\sqrt{13}}, b = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$

+ $\min y = -\sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ a = -\dfrac{4}{\sqrt{13}}, b = -\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}, c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \end{cases}$

Dạng 5: DÙNG PHÉP LƯỢNG GIÁC HÒA KẾT HỢP VỚI ĐẠO HÀM

1. Phương pháp:

- Khi các ẩn $x; y$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$

  thì đặt $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = a\cos t \end{cases}$

- Khi các ẩn $x; y$ thỏa mãn: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

  thì đặt $\begin{cases} x - a = R\sin t \\ y - b = R\cos t \end{cases}$

- Khi các ẩn $x; y; z$ thỏa mãn: $xy + yz + xz = 1$ thì ta đặt

  $x = \tan\dfrac{A}{2}; y = \tan\dfrac{B}{2}; z = \tan\dfrac{C}{2}$ với $0 < A, B, C < \pi$

- Khi các ẩn $x; y; z$ thỏa mãn: $x + y + z = xyz$

  thì đặt $x = \tan A; y = \tan B; z = \tan C$ với $-\dfrac{\pi}{2} < A, B, C < \dfrac{\pi}{2}$

2.Bài Tập:

Bài 1: Cho hai số x; y dương thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$

Giải

Vì $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x,y > 0 \end{cases}$ nên tồn tại $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho: $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

Khi đó: $A = \dfrac{1}{\sin^3 t} + \dfrac{1}{\cos^3 t}$

$$A' = -\frac{3\cos t}{\sin^4 t} + \frac{3\sin t}{\cos^4 t} = 3 \cdot \frac{\sin^5 t - \cos^5 t}{\sin^4 t \cdot \cos^4 t}$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow \sin^5 t = \cos^5 t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

Bảng biến thiên:

z	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(z)		-	0	+	
f(z)		↘	$4\sqrt{2}$	↗	

Từ bảng biến thiên, suy ra:

$$\min A = 4\sqrt{2} \text{ đạt được khi } t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Bài 2: Cho hai số $x; y$ dương thỏa mãn: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$

Giải

Vì $\begin{cases} x + y = 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Khi đó: $A = \sin^4 t + \cos^4 t + \dfrac{1}{\sin^4 t} + \dfrac{1}{\cos^4 t}$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t}\right)$$

Vì $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin^2 2t \le 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 t \ge \dfrac{1}{2}$ và $1 + \dfrac{16}{\sin^4 2t} \ge 17$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t}\right) \ge \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow A \ge \frac{17}{2} \Rightarrow \min A = \frac{17}{2} \text{ đạt được khi } \sin 2t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 3: Cho hai số $x; y$ dương thỏa: $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1 - y}}$

Giải

Theo giả thiết x, y > 0 và x + y = 1

$\Rightarrow 0 < x < 1$ và $0 < y < 1$

Đặt $\begin{cases} x = \sin^2\alpha \\ y = \cos^2\alpha \end{cases}$ với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Thì $A = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$= \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$

với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 1 < t < \sqrt{2}$

Lúc đó $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Xét hàm số: $A = f(t) = \dfrac{t\left(1 - \dfrac{t^2-1}{2}\right)}{\dfrac{t^2-1}{2}} = \dfrac{3t - t^3}{t^2 - 1}$

Bảng biến thiên:

t	1		$\sqrt{2}$
f'(t)	‖	-	
f(t)	‖	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên, ta được:

minA = minf(t) = $\sqrt{2}$ đạt được khi $t = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của A là:

$\min A = \sqrt{2}$ đạt tại $x = y = \dfrac{1}{2}$

Bài 4: Cho ba số $x; y; z$ đều dương thỏa mãn: $x + y + z = xyz \quad (1)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

Giải

Đặt $x = \tan A; y = \tan B; z = \tan C$; với $0 < A, B, C < \dfrac{\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C\,(1 - \tan A \cdot \tan B)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A+B) = \tan(-C)$

$\Leftrightarrow A + B + C = \pi \quad (2)$

Khi đó: $T = \dfrac{1}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan B} + \dfrac{1}{\tan C} = \cot A + \cot B + \cot C > 0$

Từ (2) ta chứng minh được:

$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

Như vậy: $T^2 = (\cot A + \cot B + \cot C)^2$

$= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2\,(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$

$= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2$

Theo bất đẳng thức Cosy ta co:

$\cot^2 A + \cot^2 B \geq 2\cot A \cdot \cot B$

$\cot^2 B + \cot^2 C \geq 2\cot B \cdot \cot C$

$\cot^2 C + \cot^2 A \geq 2\cot C \cdot \cot A$

Công ba bất đẳng thức ta được:

$$2\left(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C\right) \geq 2\,(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A)$$

$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$

$\Rightarrow T^2 \geq 3 \Rightarrow T \geq \sqrt{3}$

$\Rightarrow \min T = \sqrt{3}$ đạt được $\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C$

$\Leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$