

KĨ THUẬT “ĐÁNH CÁ CỤM” KHI DÙNG CASIO

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

(dành cho bạn đọc muốn thử sức với một số PT vô tỉ phức tạp phải dùng máy tính Casio trợ giúp
và thử sức giải phương trình bậc 3)

Bài viết này xin được giới thiệu các phương trình dùng máy tính cầm tay tìm biểu thức liên hợp có dạng $ax^2 + bx + c - \sqrt{P(x)}$, với a,b,c là các số nguyên

Sau đây là các thí dụ đơn giản của dạng này

(phương pháp tìm biểu thức nêu ở 2 chuyên đề ở phần sau các thí dụ)

Thí dụ 1 Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2 + 10x + 7} + \sqrt{-12x^3 - 2x + 12} = 4x^2 + 3x + 5$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + 3x + 2 - \sqrt{5x^2 + 10x + 7}$ và $2x^2 + 3 - \sqrt{-12x^3 - 2x + 12}$

PT có 2 nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Thí dụ 2 Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 7} + \sqrt{8x^3 - x^2 - 3x + 7} = 4x^2 - 2x + 2$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 - 2x + 1 - \sqrt{3x^2 - 7x + 7}$ và $2x^2 + 1 - \sqrt{8x^3 - x^2 - 2x + 7}$

PT có 2 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Thí dụ 3 Giải phương trình

$$\sqrt{18x^2 + 5x - 5} + \sqrt{64x^2 + 16x - 23} = 6x^2 + 3x + 2$$

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 1 - \sqrt{18x^2 + 5x - 5}$ và $4x^2 + 2x + 1 - \sqrt{64x^2 + 16x - 23}$

PT có 4 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

Thí dụ 4 Giải phương trình

$$\sqrt{14x^2 + 11x + 6} + \sqrt{32x^2 + 32x + 9} = 6x^2 + 3x + 3$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 2 - \sqrt{14x^2 + 11x + 6}$ **và** $4x^2 + 2x + 1 - \sqrt{32x^2 + 32x + 9}$

PT có 4 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; x = -1; x = \frac{-1}{2}$

Thí dụ 5 Giải phương trình

$$\sqrt{8x^2 + 10x + 5} + \sqrt{24x^2 + 36x + 17} = 6x^2 + 3x + 2$$

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 1 - \sqrt{8x^2 + 10x + 5}$ **và** $4x^2 + 2x + 1 - \sqrt{24x^2 + 36x + 17}$

PT có 2 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Thí dụ 6 Giải phương trình

$$\sqrt{8x^2 + 10x + 5} + \sqrt{(x+1)(8x^2 + 21x + 17)} = 6x^2 + 4x + 2$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 1 - \sqrt{8x^2 + 10x + 5}$ **và** $4x^2 + 3x + 1 - \sqrt{(x+1)(8x^2 + 21x + 17)}$

PT có 2 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Thí dụ 7 Giải phương trình

$$\sqrt{8x^2 + 10x + 5} + \sqrt{8x^3 + 37x^2 + 44x + 20} = 6x^2 + 4x + 3$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 1 - \sqrt{8x^2 + 10x + 5}$

và $4x^2 + 3x + 2 - \sqrt{8x^3 + 37x^2 + 44x + 20}$

PT có 2 nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

Thí dụ 8 Giải phương trình

$$\frac{(3x+1)\sqrt{2x-1} + \sqrt{14x^3 - 2x^2 - 6x - 2}}{4x^2 + x + 1} = 1$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 1 - (3x+1)\sqrt{2x-1}$ **và** $2x^2 - \sqrt{14x^3 - 2x^2 - 6x - 2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x = 1$; $x = \frac{5 + \sqrt[3]{359 - 12\sqrt{78}} + \sqrt[3]{359 + 12\sqrt{78}}}{6}$

Thí dụ 9 Giải phương trình

$$\frac{(3x+1)\sqrt{2x-1} + \sqrt{14x^3 - 2x^2 - 6x - 2}}{4x^2 + x + 1} = 1$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 1 - (3x+1)\sqrt{2x-1}$ **và** $2x^2 - \sqrt{14x^3 - 2x^2 - 6x - 2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x = 1$; $x = \frac{5 + \sqrt[3]{359 - 12\sqrt{78}} + \sqrt[3]{359 + 12\sqrt{78}}}{6}$

Thí dụ 10 Giải phương trình

$$\frac{(x+1)\sqrt{3x+1} + \sqrt{x^3 + 4x^2 + x - 2}}{2x^2 + x + 3} = 1$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $x^2 + x + 2 - (x+1)\sqrt{3x+1}$ **và** $x^2 + 1 - \sqrt{x^3 + 4x^2 + x - 2}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x = 1$; $x = \frac{\sqrt[3]{27 - \sqrt{633}} + \sqrt[3]{27 + \sqrt{633}}}{\sqrt[3]{18}}$

Thí dụ 11 Giải phương trình

$$\frac{(x+2)\sqrt{3x+1} + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 10x - 4}}{4x^2 + x + 4} = 1$$

Hướng dẫn.

Biểu thức cần tìm là $2x^2 + x + 3 - (x+2)\sqrt{3x+1}$ **và** $2x^2 + 1 - \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 10x - 4}$

PT đã cho có 2 nghiệm: $x = 1$; $x = \frac{-5 + \sqrt[3]{5(281+18\sqrt{249})} - \sqrt[3]{5(281-18\sqrt{249})}}{12}$

Thí dụ 12 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = xy^2 + 4 \\ (x+2)\sqrt{3x^2+4} + 3\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8} = 9x^2 + y^2 \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $x = 2$ **hoặc** $x = y^2 - 2 \geq -2$

Với $x=2$ **các bạn tự xử lí trường hợp dễ này**

Với $x = y^2 - 2 \geq -2$ **thay vào PT thứ 2 của hệ ta được**

$$(x+2)\sqrt{3x^2+4} + 3\sqrt{4x^3+2x^2+8x+8} = 9x^2 + x + 2(*)$$

Biểu thức cần tìm là $3x^2 + x + 2 - (x+2)\sqrt{3x^2+4}$ **và** $2x^2 - \sqrt{4x^3+2x^2+8x+8}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x = 2$; $x = \frac{-1 + \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{183}-31}{4}} - \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{183}+31}{4}}}{3}$

Đến đây các bạn tự giải tiếp

Thí dụ 13 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2-y^2}{\sqrt{y^4-2y^2+2}} = 0 \\ y^2\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{2x^2+16x+41} = 3x^2 + 3y^2 + 5 \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Sử dụng Hàm đặc trưng có

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương $x = y^2 - 2 \geq -2$

Với $x = y^2 - 2 \geq -2$ thay vào PT thứ 2 của hệ ta được

$$(x+2)\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{2x^2+16x+41} = 3x^2+3x+11(*)$$

Biểu thức cần tìm là $2x^2+3x+6 - (x+2)\sqrt{3x^2+13}$ và $x^2+5 - \sqrt{2x^2+16x+41}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x = 2$; $x = \frac{-2 + 2\sqrt[3]{3\sqrt{57}-1} - 2\sqrt[3]{3\sqrt{57}+1}}{3}$

Đến đây các bạn tự giải tiếp

Thí dụ 14 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy^2 + x - y^2 + 2 = 0 \\ y^2\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{4x^2+10x+67} = 3x^2+3x+15 \end{cases}$$

Hướng dẫn.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $x=1$ hoặc $x = y^2 - 2 \geq -2$

Với $x=1$ các bạn tự xử lý trường hợp dễ này

Với $x = y^2 - 2 \geq -2$ thay vào PT thứ 2 của hệ ta được

$$(x+2)\sqrt{3x^2+13} + \sqrt{4x^2+10x+67} = 3x^2+3x+15(*)$$

Biểu thức cần tìm là $2x^2+3x+7 - (x+2)\sqrt{3x^2+13}$ và $x^2+8 - \sqrt{4x^2+10x+67}$

PT(*) có 2 nghiệm: $x = 1$; $x = \frac{-1 + \sqrt[3]{17+9\sqrt{681}} - \sqrt[3]{17-9\sqrt{681}}}{3}$

Đến đây các bạn tự giải tiếp

Sử dụng lí thuyết của 2 chuyên đề dưới đây có thể tìm ra các biểu thức cần xuất hiện

Chuyên đề 1

PHƯƠNG PHÁP THỂ TRONG THỦ THUẬT SỬ DỤNG MÁY TÍNH ĐỂ TÌM NHÂN TỬ CHUNG HOẶC TÌM BIỂU THỨC TRONG NHÂN LIÊN HỢP KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Một kĩ năng rất hữu ích có thể giúp ta giải được một phương trình vô tỉ là kĩ năng tìm nhân tử chung hoặc tìm biểu thức trong nhân liên hợp. Đôi khi việc tìm ra các biểu thức đó là rất khó khăn nếu ta không có máy tính cầm tay trợ giúp. Bài viết này xin được giới thiệu kĩ thuật dùng máy tính cầm tay tìm nhân tử chung hoặc biểu thức để ta xử lí nhân liên hợp có dạng $ax^2 + bx + c - \sqrt[k]{P(x)}$, với a,b,c là các số nguyên. Sau đây là các thí dụ

Thí dụ 1 Giải phương trình

$$\frac{x^6 - 3x^4 + 3x^3 + 6x - 10}{4x^2 + 1 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 6}} = 2$$

Lời giải

Phương trình(PT) đã cho tương đương với PT:

$$x^6 - 3x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 6x - 12 - 4\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0(1)$$

Ta tìm nghiệm của PT(1) bằng máy tính CASIO fx-570VN PLUS như sau:

Nhập biểu thức vế trái(VT) của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm X=2

Ấn nút sang trái để quay lại PT(1)

Sửa biểu thức thành VT(1):(X-2) rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi Solve for X ta bấm -10 =, máy cho ta nghiệm $X = -2,546818277$

Bấm SHIFT STO A (lưu nghiệm vừa tìm vào A)

Giả sử nhân tử của PT(1) có dạng $ax^2 + bx + c - \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

chứa 2 nghiệm vừa tìm.

Nghiệm X=2 suy ra $4a + 2b + c - 2 = 0 \Rightarrow c = -4a - 2b + 2$

Nhân tử của PT(1) trở thành: $ax^2 + bx - 4a - 2b + 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}$
 $= a(x-2)(x+2) + b(x-2) + 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

Xét $a(x-2)(x+2) + b(x-2) + 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0$

suy ra $b = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 6} - 2}{x - 2} - a(x + 2)$ **(2)**

Vì A là nghiệm của PT(2) nên

ta tìm a,b là số nguyên bằng cách bấm máy tính như sau:

MODE 7 máy hiện f(X)= ,ta nhập $\frac{\sqrt{A^2 - 3A + 6} - 2}{A - 2} - (A + 2)X$ **bấm =**

Máy hiện Start? Ta bấm - 9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Quan sát bảng ta thấy khi X=1=a thì F(X)=0=b là số nguyên

Như vậy a=1,b=0,c= - 2

Nên nhân tử cần tìm là $x^2 - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}$

Suy ra PT xuất hiện $4(x^2 - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6})$

Biểu thức còn lại là $x^6 - 3x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 6x - 4$

Biểu thức này chứa nhân tử cần tìm nên nó chứa nhân tử sau:

$$(x^2 - 2)^2 - (x^2 - 3x + 6) = x^4 - 5x^2 + 3x - 2$$

Thật vậy,sử dụng kĩ năng chia đa thức ta được

$$x^6 - 3x^4 + 3x^3 - 12x^2 + 6x - 4 = (x^4 - 5x^2 + 3x - 2)(x^2 + 2)$$

Do đó

$$PT(1) \Leftrightarrow (x^4 - 5x^2 + 3x - 2)(x^2 + 2) + 4(x^2 - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6})(x^2 - 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 6})(x^2 + 2) + 4(x^2 - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6})(x^4 + (x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 6} = x^2 - 2(3) \\ x^4 + (x^2 + 2)\sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0(4) \end{cases}$$

Dễ thấy PT(4) vô nghiệm

$$PT(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 6 = x^4 - 4x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ (x-2)(x^3 + 2x^2 - x + 1) = 0 \end{cases}$$

Giải tiếp ta được nghiệm $x = 2$ và $x = \frac{-2 - \sqrt[3]{\frac{61+9\sqrt{29}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{61-9\sqrt{29}}{2}}}{3}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm: $x = 2$; $x = \frac{-2 - \sqrt[3]{\frac{61+9\sqrt{29}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{61-9\sqrt{29}}{2}}}{3}$

Thí dụ 2 Giải phương trình

$$\frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x}{3 + (x^2 + 2)\sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3}} = 1$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với PT:

$$2x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x - 3 - (x^2 + 2)\sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3} = 0(1)$$

Nhập biểu thức vế trái của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm $X = 2,25992105$

Bấm SHIFT STO A

Nhập biểu thức VT(1): $(X - A)^4$ rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi Solve for X ta bấm 0 = , chờ gần 6 phút máy hiện Can't Solve

Khi này ta sẽ chuyển sang hướng tìm nghiệm ngoại lai (nếu có) của PT bằng cách đổi dấu trước căn PT đã cho. Dẫn tới tìm nghiệm của PT sau:

$$2x^4 + x^3 + 2x^2 + 6x - 3 + (x^2 + 2)\sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3} = 0(2)$$

Ta tìm nghiệm “đẹp” (nếu có) của PT(2) như sau:

Bấm **MODE 7** máy hiện $f(X)=$

Ta nhập biểu thức vế trái PT(2) bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Khi này xem bảng ta thấy $X = -1$ thì $F(X)=0$

Vậy nghiệm ngoại lai cần tìm là $x = -1$

Giả sử nhân tử của PT(1) có dạng $ax^2 + bx + c - \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3}$

Vì $x = -1$ nghiệm ngoại lai nên nó là nghiệm PT: $ax^2 + bx + c + \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3} = 0$

suy ra $a - b + c + 2 = 0 \Rightarrow c = -a + b - 2$

Nhân tử của PT(*) trở thành: $ax^2 + bx - a + b - 2 - \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3}$

$= a(x-1)(x+1) + b(x+1) - 2 - \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3}$

Xét $a(x-1)(x+1) + b(x+1) - 2 - \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3} = 0$

suy ra $b = \frac{\sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3} + 2}{x+1} - a(x-1) \in \mathbb{Z}$

Ta tìm a, b bằng cách bấm máy tính như sau:

MODE 7 máy hiện $f(X)=$, ta nhập $\frac{\sqrt{8A^3 + 9A^2 + 3} + 2}{A+1} - (A-1)X$ bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Quan sát bảng ta thấy khi $X=1$ thì $F(X)=3$ là số nguyên

Như vậy $a=1, b=3, c=0$. Ta được nhân tử là $x^2 + 3x - \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3}$

$$\text{Mà } (x^2 + 3x)^2 - (8x^3 + 9x^2 + 3) = x^4 - 2x^3 - 3$$

$$\text{PT(1) trở thành: } x^4 - 2x^3 - 3 + (x^2 + 2)(x^2 + 3x - \sqrt{8x^3 + 9x^2 - 6}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - \sqrt{8x^3 + 9x^2 - 6})(2x^2 + 3x + 2 + \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8x^3 + 9x^2 + 3} = x^2 + 3x(3) \\ 2(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{8} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 0(4) \end{cases}$$

Dễ thấy PT(4) vô nghiệm

$$PT(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ (x+1)((x-1)^3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{2}.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt[3]{2}$

Thí dụ 3 Giải phương trình

$$\frac{2\sqrt{5x^2 - 3x + 2} - x}{1 + \sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4}} = 1$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với PT:

$$2\sqrt{5x^2 - 3x + 2} - \sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4} - x - 1 = 0(1)$$

Ta tìm nghiệm “đẹp” (nếu có) của PT(1) như sau:

Bấm MODE 7 máy hiện f(X)=

Ta nhập biểu thức vế trái PT(1) bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Khi này ta thấy X=1 thì F(X)=0

Nhập biểu thức VT(1): (X-1) rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi X=? ta bấm 0 =, máy cho ta nghiệm $X = -0,629960524$

Làm tương tự các thí dụ trên ta được: $b = \frac{\sqrt{5x^2 - 3x + 2} - 2}{x - 1} - a(x + 1)$ và

$$b = \frac{\sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4} - 2}{x - 1} - a(x + 1)$$

Nên $\sqrt{5x^2 - 3x + 2} - (2x^2 - x + 1)$ và $4x^2 - 3x + 1 - \sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4}$

là các biểu thức cần xuất hiện trong phương trình

PT(1) trở thành: $2(\sqrt{5x^2 - 3x + 2} - 2x^2 + x - 1) + (4x^2 - 3x + 1 - \sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4}) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \times \frac{5x^2 - 3x + 2 - (2x^2 - x + 1)^2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 2} + 2x^2 - x + 1} + \frac{(4x^2 - 3x + 1)^2 - 36x^4 + 44x^3 - 17x^2 + x + 4}{4x^2 - 3x + 1 + \sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^4 - 4x^3 + x - 1) \left[\frac{-2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 2} + 2x^2 - x + 1} + \frac{-5}{4x^2 - 3x + 1 + \sqrt{36x^4 - 44x^3 + 17x^2 - x - 4}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

Kiểm tra điều kiện xác định thấy các nghiệm thỏa mãn.

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = 1; x = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

Thí dụ 4 Giải phương trình

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 14 - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}}{x^2 - 5x + 8 + \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11}} = 1$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với PT:

$$\sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3} + \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11} - x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x - 6 = 0(1)$$

Bấm máy tính như các thí dụ trên để tìm nghiệm nguyên ta thấy không có

Tìm và lưu các nghiệm ta được ít nhất 3 nghiệm là

$$A = 2,732050808 ; B = 1,414213562 ; C = -0,732050807$$

Chú ý: Nếu máy hiện Continue:[=] thì ta bấm = ,đợi một lúc ta được nghiệm

Giả sử biểu thức thứ nhất có dạng $ax^2 + bx + c - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}$

Do A,B,C là nghiệm của biểu thức nên ta có

$$aA^2 + bA + c = \sqrt{4A^3 + 7A^2 - 2A - 3}$$

$$aB^2 + bB + c = \sqrt{4B^3 + 7B^2 - 2B - 3}$$

$$aC^2 + bC + c = \sqrt{4C^3 + 7C^2 - 2C - 3}$$

Bấm MODE 5 rồi bấm 2 để giải hệ 3 ẩn a,b,c gồm 3 PT trên.Ta được a=1;b=1;c=1

Như vậy biểu thức thứ nhất cần tìm là $x^2 + x + 1 - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}$

Tương tự biểu thức thứ hai cần tìm là $2x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11}$

$$PT(1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}$$

$$+ 2x^2 + 1 - \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11} + x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4)P(x) = 0(2) \text{ với}$$

$$P(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1 + \sqrt{4x^3 + 7x^2 - 2x - 3}} + \frac{3}{2x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 6x^3 + 16x^2 - 12x - 11}} + 1 > 0$$

$$\text{Suy ra } PT(2) \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Kiểm tra điều kiện xác định thấy các nghiệm thỏa mãn

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{3} ; x = \pm \sqrt{2}$

Chú ý: Do $A + C = 2 ; AC = -2$ nên PT có nhân tử là $x^2 - 2x - 2$

Mở rộng dạng toán: Nếu a,b,c hoặc nghiệm PT là các số hữu tỉ thì ta đưa về tìm các biểu thức dạng $\sqrt[n]{P(x)} - (px^2 + qx + r)$,với p,q,r là số nguyên và n là số nguyên dương ta tìm được hoặc ta thử chọn. Vấn đề nữa đặt ra là liệu có phương trình mà ta phải tìm biểu thức dạng phức tạp hơn chẳng hạn như $\sqrt[n]{P(x)} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$.Hãy làm bài tập dưới đây các bạn sẽ rõ

Bài tập Giải phương trình

$$1) \frac{4x^4 - 13x^2 + 2x}{2 + \sqrt{4x^3 + 16x^2 - x + 2}} = 1$$

$$2) \frac{x^4 - 7x^3 - 3 - 3\sqrt{x^3 + 9x^2 - 6}}{x^2 - 3x + 3} = -3$$

$$3) \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x - 8}{(x^2 - x + 1)\sqrt{4x^2 + 3x + 14}} = 1$$

$$4) \frac{\sqrt{3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 4} + \sqrt{3x^2 + 2x + 4}}{3x^2 + x + 2} = 1$$

$$5) \frac{3\sqrt{16x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 24x - 23} - 2x}{2\sqrt{3x^4 + 7x^2 - 14x + 13} + 1} = 1$$

$$6) \frac{2x + 2 + \sqrt[3]{8x^6 - 12x^5 + 4x^4 + 1}}{1 + \sqrt{12x^4 + 5x^2 + 2x - 3}} = 1$$

$$7) \frac{3 - 2x + \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + 5x - 1}}{2 + \sqrt{4x^4 - x^3 + 3x^2 - 7x + 2}} = 1$$

$$8) \frac{x^4 - 2x^3 + 6 - \sqrt{4x^3 + 27x^2 + 6x + 3}}{20x^2 + x + 1 + \sqrt{2x^3 + 26x^2 + 2x + 3}} = 1$$

$$9) \frac{2x^3 - 4x^2 + 6x + \sqrt{x^4 + 10x^2 - 4x - 3}}{3 + (x^2 + 2)\sqrt[3]{2x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x}} = 1$$

$$10) \frac{18x^2 + 12 - 3\sqrt{20x^3 + 9x^2 + 30x - 20}}{x^2 - \frac{5}{2}x + 4 + \sqrt{7x^3 + 3x^2 + 8x - 5}} = 2$$

$$11) \frac{(x^3 - 2x)\sqrt{5x^5 + 7x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 3x + 7}}{3x^5 + x^4 - x^3 - 8x^2 - 5x + 6} = 1$$

$$12) \frac{7x^3 + 8x + \sqrt{3x^4 + 21x^3 - 15x^2 + 27x - 5}}{2x^4 + 14x^2 + 6 - \sqrt{2x^4 + 11x^3 - 4x^2 + 11x - 2}} = 1$$

$$13) \frac{\sqrt{(28x^2 + 29x + 11)\sqrt{x} - 43x^2 - 4x - 5 - 4x\sqrt{x}}}{4x + 1 - \sqrt{(36x^2 + 25x + 11)\sqrt{x} - 35x^2 - 6x - 6}} = 1$$

$$14) \sqrt{21x^6 + 19x^5 - 13x^4 - 9x^3 + 5x^2 - 4x - 3} = 4x^8 + 4x^7 - 20x^6 - 19x^5 + 19x^4 + 12x^3 - 5x^2 + 4x + 5$$

Chuyên đề 2

PHƯƠNG PHÁP CỘNG DÙNG TRONG THỦ THUẬT MÁY TÍNH CẦM TAY TRỢ GIÚP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Điều kiện sử dụng phương pháp: Bấm máy tính tìm được ít nhất 2 nghiệm A, B phân biệt

Nếu PT có chứa $\sqrt{P(x)}$ thì giả sử biểu thức cần xuất hiện có dạng: $ax^2 + bx + c - \sqrt{P(x)}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Do A, B là nghiệm của biểu thức nên

$$aA^2 + bA + c - \sqrt{P(A)} = 0(*)$$

$$aB^2 + bB + c - \sqrt{P(B)} = 0$$

Chú ý: Nếu B là nghiệm ngoại lai ta có $aB^2 + bB + c + \sqrt{P(B)} = 0$ (các bạn tự xử lí TH này)

Trừ vế với vế ta được:

$$a(A - B)(A + B) + b(A - B) = \sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}$$

$$\text{Suy ra } b = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)a$$

$$\text{Trường hợp 1: } A + B = 0 \text{ thì } b = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B}$$

Nhập biểu thức $\frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B}$ bấm = máy hiện giá trị của b cần tìm

Từ (*) suy ra $c = \sqrt{P(A)} - aA^2 - bA$

Ta tìm a,c bằng máy tính như sau:

Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập $\sqrt{P(A)} - XA^2 - bA$ bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Quan sát bảng ta chỉ lấy X làm F(X) nhận giá trị nguyên

Suy ra a=X,c=F(X)

Trường hợp 2: $A + B \neq 0$

Do $b = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)a$ nên ta tìm a,b bằng máy tính như sau:

Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập biểu thức $\frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)X$ bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Quan sát bảng ta lấy X làm F(X) nhận giá trị nguyên

Từ đó suy ra a=X,b=F(X)

Từ PT(*) ta tìm $c = \sqrt{P(A)} - aA^2 - bA$

Nhập biểu thức $\sqrt{P(A)} - aA^2 - bA$ bấm = máy hiện giá trị của c cần tìm

Sau đây là các thí dụ.

Thí dụ 1 Giải phương trình

$$\frac{x^6 + \sqrt{x^6 + 6x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 2x - 8}}{3x^4 + 12x^2 - x + 10} = 1$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với PT:

$$\sqrt{P(x)} + x^6 - 3x^4 - 12x^2 + x - 10 = 0(1)$$

Với $\sqrt{P(x)} = \sqrt{x^6 + 6x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 2x - 8}$

Nhập biểu thức về trái(VT) của PT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi Solve for X ta bấm 10 = máy cho ta nghiệm $X = 2,25992105$

Bấm nút mũi tên sang trái để quay lại VT(1) ta bấm = để lưu VT(1)

Bấm ALPHA X SHIFT STO A để lưu nghiệm vào A

Bấm nút mũi tên đi lên để về VT(1) rồi bấm SHIFT SOLVE

Máy hỏi Solve for X ta bấm -10 = máy cho ta nghiệm $X = -2,25992105$

Bấm SHIFT STO B

Bấm máy A+B máy hiện 0 suy ra $b = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B}$

Nhập biểu thức $\frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B}$ bấm = máy hiện -1. Vậy $b = -1$

Do $b = -1$ nên $c = \sqrt{P(A)} - aA^2 - (-1)A = \sqrt{P(A)} - aA^2 + A$

Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập $\sqrt{P(A)} - A^2 X + A$ bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Quan sát bảng ta thấy khi $X=3$ thì $F(X)=1$ nguyên

Suy ra $a=3, c=1$

Biểu thức cần tìm là: $\sqrt{x^6 + 6x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 2x - 8} - (3x^2 - x + 1)$

PT(1) trở thành $\sqrt{P(x)} - (3x^2 - x + 1) + x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x) - (3x^2 - x + 1)^2}{\sqrt{P(x)} + 3x^2 - x + 1} + x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 9}{\sqrt{P(x)} + 3x^2 - x + 1} + x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{P(x)} + 3x^2 - x + 1} + 1 \right] (x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 - 3x^4 - 9x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3x)^2 - (3x^2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 3x^2 + 3x + 3)(x^3 - 3x^2 + 3x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((x+1)^3 + 2)((x-1)^3 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = -2 \\ (x-1)^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm(1 + \sqrt[3]{2})$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x = \pm(1 + \sqrt[3]{2})$

Thí dụ 2 Giải phương trình

$$\frac{4x^2 - x + 4 - \sqrt{2x^6 + 4x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x - 1}}{x^2 + \sqrt{2x^6 + x^4 - x^3 + 10x^2 - 12x + 7}} = 1$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với PT:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} = 3x^2 - x + 4 \quad (1)$$

$$\text{Với } \sqrt{P(x)} = \sqrt{2x^6 + x^4 - x^3 + 10x^2 - 12x + 7}$$

$$\sqrt{Q(x)} = \sqrt{2x^6 + 4x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x - 1}$$

Tìm và lưu các nghiệm như thí dụ 1 ta được 2 nghiệm là

$$A = 0,793700526 ; B = -1,25992105$$

Ta có $A + B = -0,4662205239 \neq 0$

$$\text{Có } b = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)a \text{ nên ta tìm a, b như sau:}$$

Bấm MODE 7 máy hiện $f(X) = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)X$ bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm $-9 =$

Máy hiện End? Ta bấm $9 =$

Máy hiện Step? Ta bấm $1 =$

Quan sát bảng ta thấy $F(X) = -2$ khi $X = 1$

Suy ra $a = 1, b = -2$. Khi này $c = \sqrt{P(A)} - A^2 + 2A$

Nhập biểu thức $\sqrt{P(A)} - A^2 + 2A$ bấm = máy hiện số 3

Ta được $c = 3$

Biểu thức cần tìm là $\sqrt{P(x)} - (x^2 - 2x + 3)$

Tương tự biểu thức nữa cần tìm là $\sqrt{Q(x)} - (2x^2 + x + 1)$

PT(1) trở thành $\sqrt{P(x)} - (x^2 - 2x + 3) + \sqrt{Q(x)} - (2x^2 + x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{P(x) - (x^2 - 2x + 3)^2}{\sqrt{P(x)} + x^2 - 2x + 3} + \frac{Q(x) - (2x^2 + x + 1)^2}{\sqrt{Q(x)} + 2x^2 + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^6 + 3x^3 - 2}{\sqrt{P(x)} + x^2 - 2x + 3} + \frac{2x^6 + 3x^3 - 2}{\sqrt{Q(x)} + 2x^2 + x + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 2)(2x^3 - 1) \left[\frac{1}{\sqrt{P(x)} + x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{Q(x)} + 2x^2 + x + 1} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 2)(2x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{2} \\ x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -\sqrt[3]{2}$; $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

Vấn đề đặt ra là liệu với một biểu thức $\sqrt{P(x)}$ có khi nào có nhiều lựa chọn biểu thức

dạng $ax^2 + bx + c - \sqrt{P(x)}$ hay không. Ví dụ sau sẽ làm sáng tỏ điều này

Thí dụ 3 Giải phương trình

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 3}{\sqrt{12x^3 + 24x^2 + 4x + 6} + \sqrt{12x^3 + 51x^2 + 6}} = 1$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với PT:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 3 - \sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = 0(1)$$

Với $\sqrt{P(x)} = \sqrt{12x^3 + 24x^2 + 4x + 6}$ và $\sqrt{Q(x)} = \sqrt{12x^3 + 51x^2 + 6}$

Tìm và lưu các nghiệm ta được 2 nghiệm là

$$A = 3,449489743 ; B = -1,449489743$$

Bấm máy tính có $A + B = 2 \neq 0$; $AB = -5$

(Theo Định lí Vi-ét thì PT sẽ có nhân tử là $x^2 - 2x - 5$)

Có $b = \frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)a$ nên ta tìm a, b như sau:

Bấm MODE 7 máy hiện f(X)= ta nhập biểu thức $\frac{\sqrt{P(A)} - \sqrt{P(B)}}{A - B} - (A + B)X$ bấm =

Máy hiện Start? Ta bấm -9 =

Máy hiện End? Ta bấm 9 =

Máy hiện Step? Ta bấm 1 =

Quan sát bảng ta thấy tất cả các giá trị F(X) đều nguyên. Vì thế ta chọn 1 cặp là

$X=2; F(X)=1$. Suy ra $a=2, b=1 \Rightarrow c = \sqrt{P(A)} - 2A^2 - A$

Nhập biểu thức $\sqrt{P(A)} - 2A^2 - A$ bấm = máy hiện số 1. Ta được $c=1$

Suy ra $2x^2 + x + 1 - \sqrt{P(x)}$ là biểu thức cần tìm

Tương tự ta chọn được $3x^2 - x + 1 - \sqrt{Q(x)}$ là biểu thức cần tìm

Phương trình(1) tương đương với PT:

$$2x^2 + x + 1 - \sqrt{P(x)} + 3x^2 - x + 1 - \sqrt{Q(x)} + x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 - \sqrt{P(x)} + 3x^2 - x + 1 - \sqrt{Q(x)} + (x^2 - 2x - 5)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 5) \left(\frac{4x^2 + 1}{2x^2 + x + 1 + \sqrt{P(x)}} + \frac{9x^2 + 1}{3x^2 - x + 1 + \sqrt{Q(x)}} + x^2 + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{6}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{6}$

Chọn cặp biểu thức khác chẳng hạn $x^2 + 3x + 6 - \sqrt{P(x)}$; $3x^2 - x + 1 - \sqrt{Q(x)}$ ta cũng giải được PT theo cách nhân liên hợp

Chú ý:

+Việc chọn biểu thức trong thí dụ 3 là tùy ý hay cần chọn hợp lí để ta dùng được cách nhân liên hợp. Xin dành cho mọi người tìm hiểu điều này.

+ Một số phương trình ta có thể tìm biểu thức phức tạp hơn chẳng hạn

$\sqrt{P(x)} - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ và có thể giải quyết theo cách bài viết đã nêu khi điều kiện về nghiệm của PT ta tìm được nhiều hơn(kể cả nghiệm ngoại lai hay nghiệm bội)

Bài tập Giải phương trình

$$1) \frac{3x^3 + \sqrt{24x^3 + 4x^2 + 9x - 1}}{x^4 + 8x^2 - 9x + 9} = 1$$

$$2) \frac{9x^6 + 9x^3 + 5x^2 - 5}{x^2 + \sqrt{9x^6 + x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 4}} = 3x^3$$

$$3) \frac{4x^3 + 4x + \sqrt{18x^3 + 4x^2 + 12x + 2}}{3x^4 + 10x^2 + 4 - \sqrt{6x^3 - 2x^2 + 6x - 1}} = 1$$

$$4) \frac{4x^4 + 7x^2 - 3 - \sqrt{6x^3 + 16x^2 + 9x + 6}}{x^2 - 5x + 20 + \sqrt{16x^3 + 49x^2 + 26x + 21}} = 1$$

$$5) \frac{4x^2 - x + 5 - \sqrt{x^6 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 5}}{x^2 + 1 + \sqrt{4x^6 + 4x^3 - 11x^2 + 2x - 15}} = 1$$

$$6) \frac{4x^2 - 3x + 3 - \sqrt{x^6 + x^4 + 8x^2 - 8x - 17}}{x^2 + \sqrt{x^6 + 4x^4 + 5x^2 - 2x - 20}} = 1$$

$$7) \frac{2x^6 + 8x^4 - 4x^2 + x - 14}{1 + \sqrt{4x^6 + 7x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x - 8}} = -1$$

$$8) \frac{3x^2 - 3x + 4 - \sqrt{x^6 + x^4 + 8x^2 - 8x + 8}}{1 + \sqrt{x^6 + 4x^4 + 5x^2 - 2x + 5}} = 1$$

$$9) \frac{x^6 - 3x^5 + 24x^4 + 2x^2 - 8x + 2}{5 + \sqrt{x^6 + 33x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 3}} = x^3$$

$$10) \frac{3x^2 + 3x + 6 - \sqrt{x^8 + 4x^5 + x^4 + 12x^2 + 16x}}{1 + \sqrt{x^8 + 4x^5 + 4x^4 + 5x^2 + 2x - 15}} = 1$$

$$11) \frac{x^7 + 2x^5 - 6x^4 + 18x^3 + 4x - 16}{\sqrt{x^7 + 4x^5 - 7x^4 + 18x^3 + 3x^2 + 2x - 15}} = 2x^3$$

$$12) \frac{-6x^7 - 15x^6 - 18x^5 - 9x^4 + 11x^2 + x + 1}{x^8 + \sqrt{x^6 + 6x^5 + 19x^4 + 22x^3 + 14x^2 + 2x - 8}} = 1$$

