

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẠO HÀM - TÍCH PHÂN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SC = 1$, tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

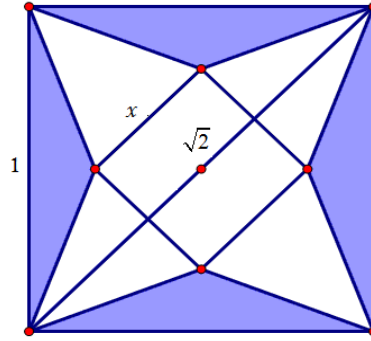
A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{27}$.

Câu 2. Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp (hình vẽ).



Để thể tích khối chóp lớn nhất thì cạnh đáy x của hình chóp bằng:

A. $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

C. $x = 2\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{2}{5}$.

Câu 3. Tìm chiều dài L ngắn nhất của cái thang để có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ có chiều cao $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m và cách tường 0,5 m kể từ gốc của cột đỡ.

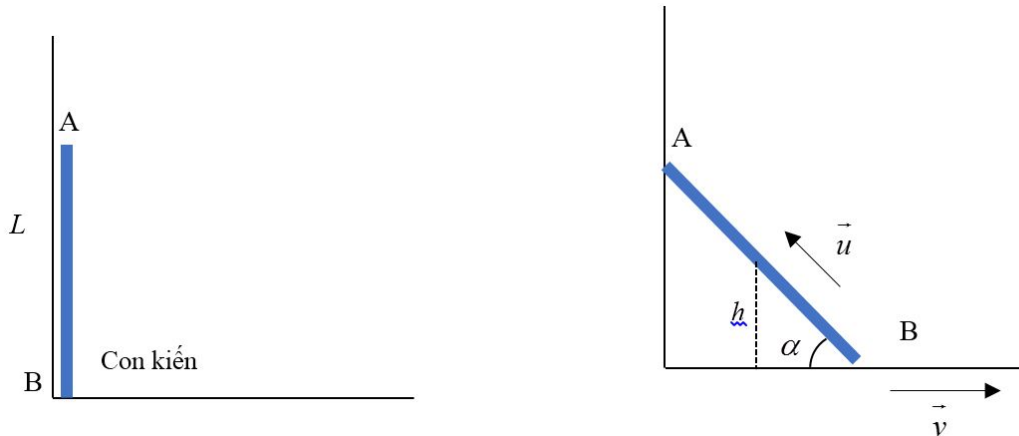
A. 2 m.

B. 4 m.

C. 3 m.

D. 5 m.

Câu 4. Một con kiến đậu ở đầu B của một thanh cứng mảnh AB có chiều dài L đang dựng cạnh một bức tường thẳng đứng (hình vẽ).



Vào thời điểm mà đầu B bắt đầu chuyển động sang phải theo sàn ngang với vận tốc không đổi v thì con kiến bắt đầu bò dọc theo thanh với vận tốc không đổi u đối với thanh. Trong quá trình bò trên thanh, con kiến đạt được độ cao cực đại h_{max} là bao nhiêu đối với sàn? Cho đầu A của thanh luôn tỳ lên tường thẳng đứng.

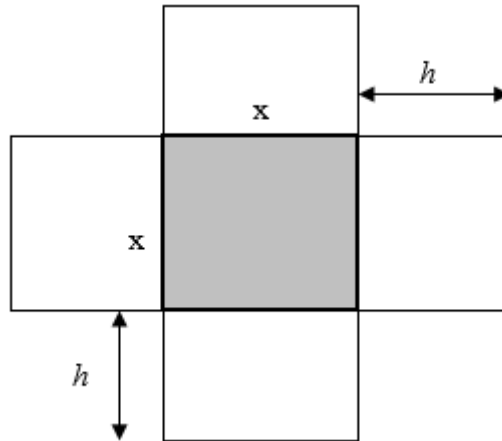
A. $\frac{3L^2}{v}$.

B. $\frac{2L^2}{v}$.

C. $\frac{L^2}{3v}$.

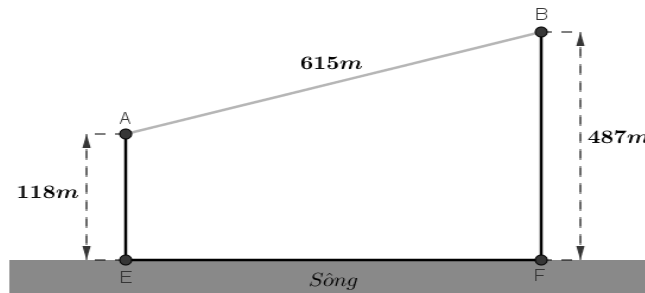
D. $\frac{L^2}{2v}$.

- Câu 5.** Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao $h(\text{cm})$ và có thể tích là $500(\text{cm}^3)$.



Tìm x sao cho diện tích mảnh các tông đó nhỏ nhất?

- A. 5 cm. B. 100 cm. C. 10 cm. D. 20 cm.
- Câu 6.** Một nhà máy cần sản xuất một bể nước bằng tôn có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng không nắp, có thể tích $\frac{4}{3}\text{m}^3$. Hãy tính độ dài chiều rộng của đáy hình hộp sao cho tốn ít vật liệu nhất.
- A. 2 m. B. $\sqrt{3}$ m. C. $\frac{2}{3}$ m. D. 1 m.
- Câu 7.** Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B .



Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là

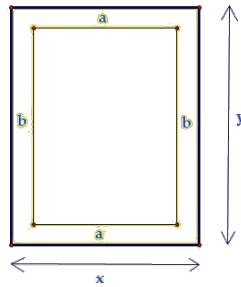
- A. 596,5 m. B. 671,4 m. C. 779,8 m. D. 741,2 m.
- Câu 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là:
- $$\begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$$
- và hai điểm $A(1;-2;-1), B(4;4;5)$. Giả sử $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất, khi đó tích abc là

- A. 0. B. $\frac{2}{9}$. C. 1. D. 2.

Câu 9. Một trang chữ của cuốn sách giáo khoa cần diện tích 384cm^2 . Lề trên và dưới là 3cm , lề trái và phải là 2cm . Kích thước tối ưu của trang giấy là:

- A. Dài 24cm ; rộng 16cm . B. Dài 24cm ; rộng 17cm .
C. Dài 25cm ; rộng $15,36\text{cm}$. D. Dài $25,6\text{cm}$; rộng 15cm .

Câu 10. Có một cơ sở in sách xác định rằng: Diện tích của toàn bộ trang sách là $S_0 (\text{cm}^2)$. Do yêu cầu kỹ thuật nên dòng đầu và dòng cuối đều phải cách mép (trên và dưới) trang sách là $a (\text{cm})$. Lề bên trái và bên phải cũng phải cách mép trái và mép phải của trang sách là $b (\text{cm})$ ($b < a$). Các kích thước của trang sách là bao nhiêu để cho diện tích phần in các chữ có giá trị lớn nhất. Khi đó hãy tính tỉ lệ của chiều rộng và chiều dài trang sách.



- A. $\frac{b-a}{a}$. B. $\frac{2b}{2a-1}$. C. $\frac{b}{a}$. D. $\frac{b+a}{a}$.

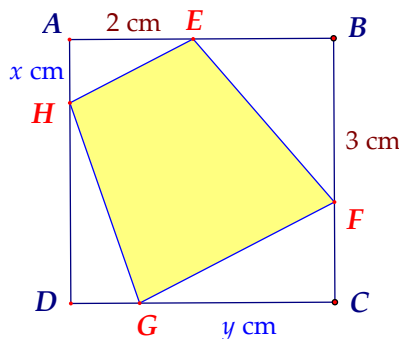
Câu 11. Một anh kỹ sư muốn tạo ra 1 cái lu hình trụ có diện tích bề mặt (không tính hai mặt đáy) là lớn nhất. Bề mặt lu được quấn bởi mảnh tôn hình chữ nhật có chu vi 120cm . Gọi chiều dài của hình chữ nhật là a , chiều rộng của hình chữ nhật là b . Tính $P = a^2 + 3b$.

- A. 990. B. 1660. C. 2530. D. 1108.

Câu 12. Bác nông dân có 200m rào để ngăn đàn gà nuôi dạng hình chữ nhật. Để diện tích nuôi gà là lớn nhất thì chiều dài hình chữ nhật là $a (\text{m})$ và chiều rộng là $b (\text{m})$. Khi đó $a^2 + ab + b^2$ có giá trị bằng

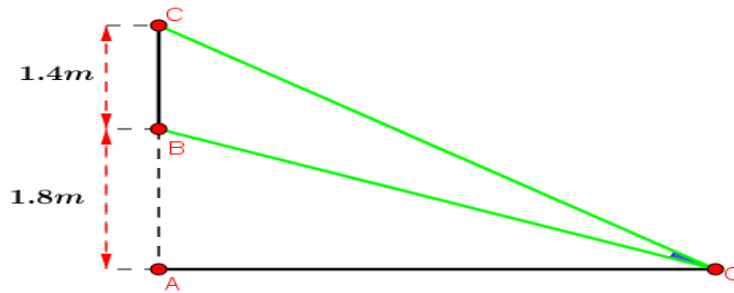
- A. 7525 m. B. 7600 m. C. 7500 m. D. 7900 m.

Câu 13. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm . Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



- A. 7cm . B. 5cm . C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}\text{cm}$. D. $4\sqrt{2}\text{cm}$.

Câu 14. Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4\text{m}$ và đặt ở độ cao $1,8\text{m}$ so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn ảnh? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.

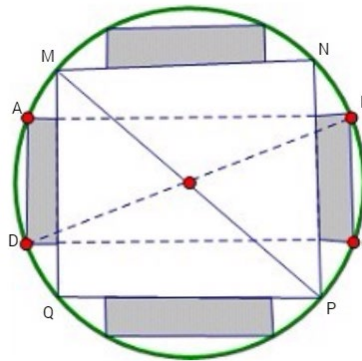


- A. $AO = 2,4 \text{ m}$. B. $AO = 2 \text{ m}$. C. $AO = 2,6 \text{ m}$. D. $AO = 3 \text{ m}$.

Câu 15. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10 cm , biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

- A. 80 cm^2 . B. 100 cm^2 . C. 160 cm^2 D. 200 cm^2 .

Câu 16. Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm , cưa xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

B. $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

C. $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

D. $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

Câu 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc $15 (\text{m/s})$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 15 (\text{m/s})$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- A. $22,5 \text{ m}$. B. 45 m . C. 15 m . D. 90 m .

Câu 18. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 3t^2 + t (\text{m/s}^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là $2 (\text{m/s})$. Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được 2 s .

- A. 8 m/s . B. 12 m/s . C. 16 m/s . D. 10 m/s .

Câu 19. Cho mạch điện xoay chiều RLC mắc nối tiếp có R thay đổi. Biết điện trở cuộn cảm $Z_L = 80 (\Omega)$, điện trở của tụ điện là $Z_C = 200 (\Omega)$ và hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = U_0 \cos 100\pi t (\text{V})$. Để công suất tiêu thụ của mạch cực đại thì giá trị của R bằng

- A. $120(\Omega)$. B. $50(\Omega)$. C. $100(\Omega)$. D. $200(\Omega)$.

Câu 20. Cho mạch điện xoay chiều RLC mắc nối tiếp có R thay đổi. Biết điện trở cuộn cảm $Z_L = 100(\Omega)$, điện trở của tụ điện là $Z_C = 40(\Omega)$ và hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = 120\sqrt{2} \cos 100\pi t (V)$. Điện trở R phải có giá trị là bao nhiêu để công suất tiêu thụ của mạch đạt cực đại và giá trị cực đại của công suất là bao nhiêu?

- A. $R = 60(\Omega)$, $P_{\max} = 120(W)$. B. $R = 120(\Omega)$, $P_{\max} = 60(W)$.
C. $R = 40(\Omega)$, $P_{\max} = 180(W)$. D. $R = 120(\Omega)$, $P_{\max} = 180(W)$.

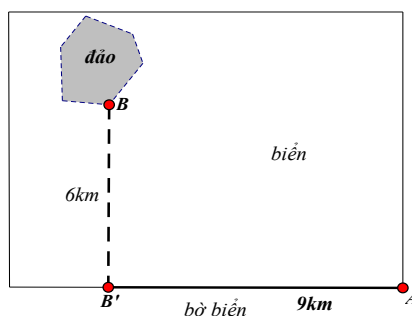
Câu 21: Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa 0°C đến 30°C) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 (\text{cm}^3)$. Nhiệt độ t của nước gần nhất với giá trị nào dưới đây thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất?

- A. 0° . B. -4° . C. 30° . D. 4° .

Câu 22: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

- A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
B. Tốc độ bơm luôn giảm.
C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 23. Công ty XDPL muốn làm một đường ống dẫn khí từ một địa điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm B đến bờ biển là 6km. Giá để xây lắp mỗi km đường ống trên bờ là 50.000 USD, còn xây lắp dưới nước là 130.000 USD. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km.



Hỏi vị trí điểm M trên bờ biển cách A bao xa để chi phí xây lắp đường ống từ A qua M rồi đến B là ít tốn kém nhất?

- A. 9 km. B. 6 km. C. 0 km. D. 6.5 km.

Câu 24. Một điểm C trên hòn đảo có khoảng cách ngắn nhất đến bờ biển là 60km, B là điểm trên bờ biển sao cho CB vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A trên bờ biển đến B là 100km. Để tham dự buổi họp nhóm Strong Team Toán VD – VCD ngày 28/6/2019, thầy Quý phải tính toán vị trí diễn ra cuộc họp tại địa điểm G trên đoạn AB để tổng chi phí đi lại của cả hai nhóm các thầy cô là ít nhất. Biết nhóm của thầy Quý đi từ C theo đường biển chi phí đi là 500 nghìn mỗi

km, nhóm cô Thêm đi từ vị trí A đi trên đất liền mỗi km chi phí là 300 nghìn. Hỏi thầy tìm được vị trí điểm G cách B bao xa?

- A. 40 km. B. 60 km. C. 55 km. D. 45 km.

Câu 25. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy $A4$ trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy $A4$ thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

- A. 4 máy. B. 7 máy. C. 6 máy. D. 5 máy.

Câu 26. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nhiên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì nhà thiết kế phải thiết kế hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. B. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. C. $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$. D. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Câu 27. Trong một môi trường dinh dưỡng có 1000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi qui luật $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con vi khuẩn), trong đó t là thời gian (đơn vị giây). Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên lớn nhất là bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. -10. D. 10.

Câu 28. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $Q(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- A. 12. B. 14. C. 10. D. 18.

Câu 29. Đốt cháy các hidrocarbon của dãy đồng đẳng nào dưới đây thì tỉ lệ mol H_2O : mol CO_2 giảm dần khi số cacbon tăng dần?

- A. Ankan. B. Anken. C. Ankin. D. Ankybenzen.

Câu 30. Cho phương trình phản ứng tạo thành Nitơ (IV) Oxit từ Nitơ đioxit và Oxy là $2NO + O_2 \xrightleftharpoons{dk, t^o, xt} 2NO_2$. Biết rằng đây là một phản ứng thuận nghịch. Giả sử x, y lần lượt là nồng độ phần trăm của khí NO và O_2 tham gia phản ứng. Biết rằng tốc độ phản ứng hóa học của phản ứng trên được xác định $v = kx^2y$, với k là hằng số của tốc độ phản ứng. Để tốc độ phản ứng xảy ra nhanh nhất thì tỉ số giữa $\frac{x}{y}$ là?

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. 3.

Câu 31. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

- A. $x = 8$. B. $x = 5$. C. $x = 15$. D. $x = 10$.

Câu 32. Các chuyên gia Y-tế ước tính số người nhiễm virus Zika kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3, (t = 0, 1, 2, \dots, 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

- A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.

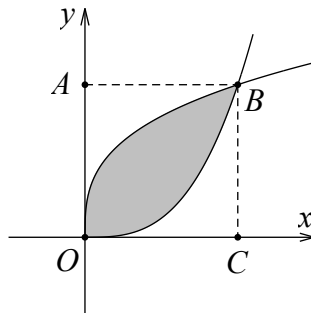
Câu 33. Trong nội dung thi điền kinh, bơi lội và đua xe đạp phối hợp được diễn ra tại một hồ bơi có chiều rộng 70 m và chiều dài 250 m. Một vận động viên cần chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) khi phải thực hiện lộ trình xuất phát từ A đến C và đua xe đạp tới D như hình vẽ. Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường x) thì vận động viên nên nhảy xuống để tiếp tục bơi về đích nhanh nhất? Biết rằng vận tốc của vận động viên khi chạy trên bờ, khi bơi và đua xe lần lượt là 5 m/s; 1,5 m/s và 10 m/s.

- A. 139,52 m. B. 129,52 m. C. 109,52 m. D. 119,52 m.

Câu 34. Trong nội dung thi điền kinh, bơi lội và đua xe đạp phối hợp được diễn ra tại một hồ bơi có chiều rộng 50 m và chiều dài 250 m. Một vận động viên cần chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) khi phải thực hiện lộ trình xuất phát từ A đến C và đua xe đạp tới D như hình vẽ. Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường x) thì vận động viên nên nhảy xuống để tiếp tục bơi về đích nhanh nhất? Biết rằng vận tốc của vận động viên khi chạy trên bờ, khi bơi và đua xe lần lượt là 5 m/s; 1,5 m/s và 10 m/s.

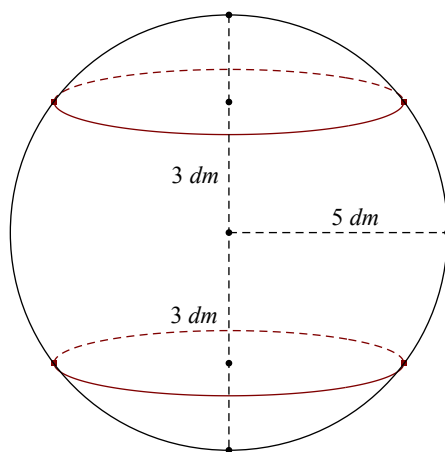
- A. 109,8 m. B. 105,8 m. C. 106,8 m. D. 107,8 m.

Câu 35. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính diện tích của phần không được tô đậm trên viên gạch men.



- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 36. Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu.



- A. $41\pi(\text{dm}^3)$. B. $132\pi(\text{dm}^3)$. C. $43\pi(\text{dm}^3)$. D. $\frac{100}{3}\pi(\text{dm}^3)$.

Câu 37. Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi(\text{cm}^2)$, chiều dài của trống là 1 m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?

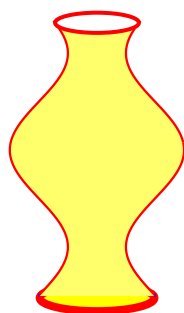
- A. $425,2 \text{ dm}^3$. B. $425,2 \text{ mm}^3$. C. $425,2 \text{ cm}^3$. D. $425,2 \text{ m}^3$.

Câu 38. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- A. 180000 đồng. B. 183000 đồng. C. 185000 đồng. D. 190000 đồng.

Câu 39. Một bình hoa dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sin x + 2$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ bên dưới). Biết đáy bình hoa là hình tròn có bán kính bằng 2 dm, miệng bình hoa là đường tròn bán kính bằng 1.5 dm. Bỏ qua độ dày của bình hoa, Thể tích của bình hoa gần với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

- A. 100 dm^3 . B. 104 dm^3 . C. 102 dm^3 . D. 103 dm^3 .



Câu 40. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc xây dựng như đầu trường La Mã, tòa nhà **Ellipse Tower** Hà Nội, sử dụng trong thiết kế logo quảng cáo, thiết bị nội thất. Xét một Lavabo (bồn rửa) làm bằng sứ đặc hình dạng là một nửa khối elip tròn xoay có thông số kỹ thuật mặt trên của Lavabo là: dài $\times$ rộng: $660 \times 380 \text{ mm}$ (tham khảo hình vẽ bên dưới), Lavabo có độ dày đều là 20 mm. Thể tích chứa nước của Lavabo gần với giá trị nào trong các giá trị sau:



- A. $18,66 \text{ dm}^3$. B. $18,76 \text{ dm}^3$. C. $18,86 \text{ dm}^3$. D. $18,96 \text{ dm}^3$.

Câu 41. Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t \text{ (m/s)}$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

- A. 1028 m . B. 1280 m . C. 1308 m . D. 1380 m .

Câu 42. Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2 \text{ (m/s)}$. Biết tại thời điểm $t = 2 \text{ (s)}$ thì vật đi được quãng đường là 10 (m) . Hỏi tại thời điểm $t = 30 \text{ (s)}$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

- A. 1140 m . B. 300 m . C. 240 m . D. 1410 m .

Câu 43. Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 25 \text{ (m/s)}$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 2t - 6 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất.

- A. $\frac{107}{5} \text{ m}$. B. 144 m . C. 28 m . D. 57 m .

Câu 44. Một mô tô chạy với vận tốc $v_0 \text{ (m/s)}$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần với gia tốc $a = -8t \text{ (m/s}^2\text{)}$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được 12 (m) . Tính v_0 ?

- A. 18 m/s . B. $\sqrt[3]{86} \text{ m/s}$. C. $\sqrt[3]{1269} \text{ m/s}$. D. $\sqrt[3]{1296} \text{ m/s}$.

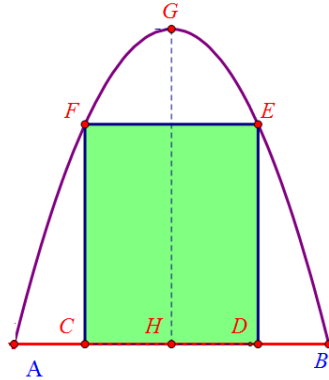
Câu 45. Đầu tháng 5 năm 2019, ông An đầu tư vào chăn nuôi tằm với số tiền vốn ban đầu là 200 (triệu đồng). Biết rằng trong quá trình chăn nuôi gặp thuận lợi nên số tiền đầu tư của ông liên tục tăng theo tốc độ được mô tả bằng công thức $f'(t) = \frac{12000}{(t+5)^2}$, với t là thời gian đầu tư tính bằng tháng (thời điểm $t=0$ ứng với đầu tháng 5 năm 2019). Hỏi số tiền mà ông An thu về tính đến đầu tháng 5 năm 2023 gần với số nào sau đây?

- A. 2737 (triệu đồng). B. 2307 (triệu đồng).
C. 2370 (triệu đồng). D. 2703 (triệu đồng).

Câu 46. Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t) = 126 + t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng).

- A. 5020. B. 1235. C. $\frac{3257}{3}$. D. $\frac{4780}{3}$.

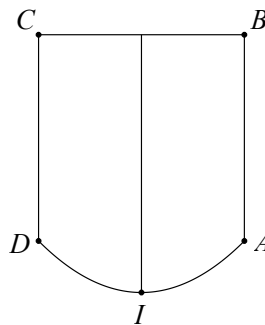
Câu 47: Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH = 4$ m, chiều rộng $AB = 4$ m, $AC = BD = 0,9$ m. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/m², còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/m².



Hỏi tổng chi phí để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

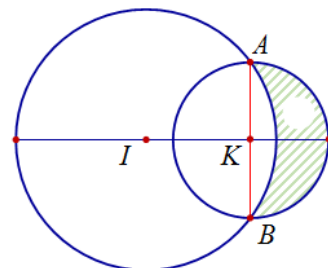
A. 11445000 (đồng). **B.** 7368000 (đồng). **C.** 4077000 (đồng). **D.** 11370000 (đồng)

Câu 48: Để tăng thêm thu nhập, ông Bình chăn nuôi thêm 2 con bò. Do diện tích đất của nhà ông hẹp nên ông xây chuồng bò như hình vẽ bên dưới và chia thành 2 phần bằng nhau để nhốt 2 con bò. Biết $ABCD$ là hình vuông cạnh 4 m và I là đỉnh của một Parabol có trục đối xứng là trung trực của BC và parabol đi qua hai điểm A, D . Tiền xây chuồng bò hết 350000 đồng/1 m². Biết I cách BC một khoảng 5 m, hãy tính số tiền chi phí ông Bình bỏ ra để xây dựng chuồng bò (làm tròn đến hàng nghìn)?



A. 6.333.000 đồng. **B.** 7.533.000 đồng. **C.** 6.533.000 đồng. **D.** 7.333.000 đồng.

Câu 49. Người ta sản xuất một loại đèn trang trí ngoài trời (Trụ sở, quảng trường, công viên, sân vườn...) gồm có hai phần: Phần bóng đèn có dạng mặt cầu bán kính R dm, làm bằng thủy tinh trong suốt; Phần đế bóng đèn làm bằng nhựa để cách điện, có dạng một phần của khối cầu bán kính r dm và thỏa mãn đường kính là một dây cung của hình tròn lớn bóng đèn. Một công viên muốn tạo điểm nhấn ánh sáng, đặt loại bóng có kích thước $R = 5$ dm, $r = 3$ dm. Tính thể tích V phần nhựa để làm đế một bóng đèn theo đơn đặt hàng (Bỏ qua ống luồn dây điện và bulông ốc trong phần đế).



A. $V = 36\pi \text{ dm}^3$. B. $V = \frac{68\pi}{3} \text{ dm}^3$. C. $V = \frac{14\pi}{3} \text{ dm}^3$. D. $V = \frac{40\pi}{3} \text{ dm}^3$.

Câu 50. Một bồn nước **Inox SONHA®** ngang có hai đầu bồn là hình phẳng elip. Thể tích tối đa khi đóng nắp bồn là $V_1 = 3000$ lít. Bồn có chiều dài bằng $l = 2,0$ m và gấp 2 lần chiều cao của bồn. Để nước bơm tự động vào bồn, người ta lắp một phao điện sao cho mực nước trong bồn cao $h = 0,75$ m so với điểm thấp nhất trong đáy bồn thì phao đóng không cho nước chảy vào bồn. Tính thể tích nước trong bồn khi phao đóng (*bỏ qua độ dày của bồn nước và kết quả làm tròn đến phần trăm*).



A. $V = 2.41 \text{ m}^3$. B. $V = 2.43 \text{ m}^3$. C. $V = 2.40 \text{ m}^3$. D. $V = 2.44 \text{ m}^3$.

BẢNG ĐÁP ÁN

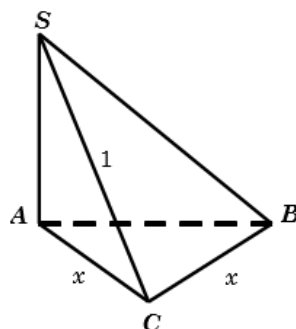
1.D	2.B	3.B	4.D	5.C	6.D	7.C	8.A	9.A	10.C
11.A	12.C	13.C	14.A	15.B	16.C	17.A	18.B	19.A	20.A
21.D	22.A	23.D	24.D	25.D	26.B	27.D	28.A	29.A	30.B
31.D	32.C	33.D	34.D	35.D	36.B	37.A	38.B	39.D	40.B
41.A	42.D	43.D	44.D	45.C	46.D	47.A	48.C	49.D	50.A

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SC = 1$, tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **D. $\frac{\sqrt{3}}{27}$.**

Lời giải

Chọn D



Giả sử $CA = CB = x, (0 < x < 1) \Rightarrow SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{1 - x^2}$.

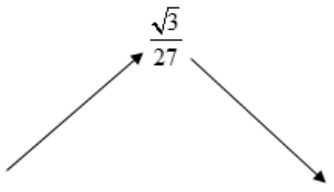
Thể tích khối chóp:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \right) \cdot SA = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{1 - x^2}.$$

Khảo sát hàm $f(x) = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{1 - x^2}$ trên $(0; 1)$

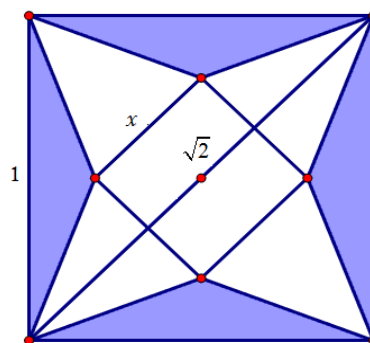
$$f'(x) = \frac{1}{6} \left(2x\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

x	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Ta được $\max_{(0;1)} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{27}$ nên thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{\sqrt{3}}{27}$.

Câu 2. Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp (hình vẽ).



Để thể tích khối chóp lớn nhất thì cạnh đáy x của hình chóp bằng:

A. $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

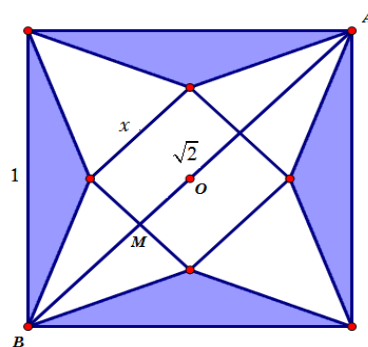
B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

C. $x = 2\sqrt{2}$.

D. $x = \frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BM = \frac{1}{2}AB - MO = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{BM^2 - MO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1-x\sqrt{2}}{2}}$.

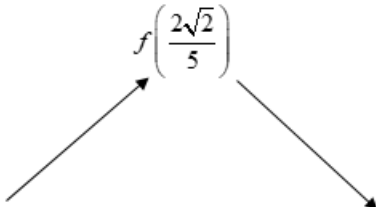
Thể tích của khối chóp $V = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{1-x\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{x^4 - x^5\sqrt{2}}{2}}$.

Thể tích của khối chóp lớn nhất khi và chỉ khi $(x^4 - x^5\sqrt{2})$ max trên $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Khảo sát hàm số $f(x) = x^4 - x^5\sqrt{2}$ trên $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$f'(x) = 4x^3 - 5x^4\sqrt{2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}}{5} \\ x = 0 \end{cases}.$$

x	0	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

Dựa vào bảng biến thiên, ta được GTLN của hàm số đạt tại $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Câu 3. Tìm chiều dài L ngắn nhất của cái thang để có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ có chiều cao $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m và cách tường 0,5 m kể từ gốc của cột đỡ.

A. 2 m.

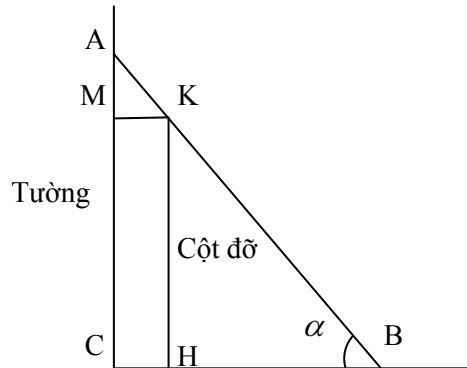
B. 4 m.

C. 3 m.

D. 5 m.

Lời giải

Chọn B



Đặt $\alpha = \widehat{ABC} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Dựa vào hình vẽ, ta có $AB = AK + KB = \frac{MK}{\cos \alpha} + \frac{KH}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha} + \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}$.

Đặt $f(\alpha) = \frac{1}{2 \cos \alpha} + \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin \alpha}$. Bài toán trở thành tìm $\min_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha)$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $f'(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha} + \frac{-3\sqrt{3} \cdot \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha - 3\sqrt{3} \cdot \cos^3 \alpha}{2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}$.

$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin^3 \alpha - 3\sqrt{3} \cdot \cos^3 \alpha = 0 \Leftrightarrow \tan^3 \alpha = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	–	0	+
$f(\alpha)$	↘ 4 ↗		

Vậy $AB_{\min} = \min_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4(\text{m})$.

Câu 4. Một con kiến đậu ở đầu B của một thanh cứng mảnh AB có chiều dài L đang dựng cạnh một bức tường thẳng đứng (hình vẽ).

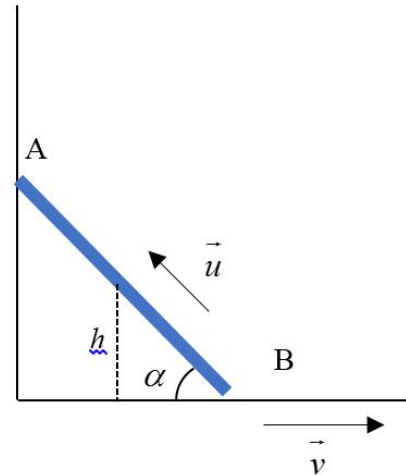
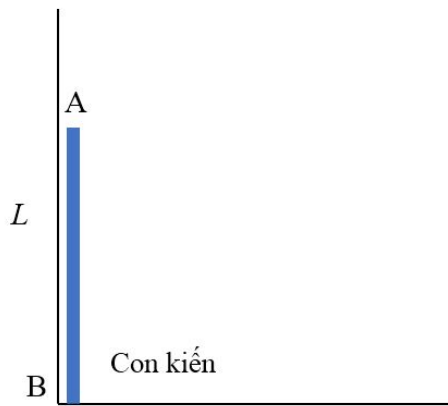
Vào thời điểm mà đầu B bắt đầu chuyển động sang phải theo sàn ngang với vận tốc không đổi v thì con kiến bắt đầu bò dọc theo thanh với vận tốc không đổi u đối với thanh. Trong quá trình bò trên thanh, con kiến đạt được độ cao cực đại h_{max} là bao nhiêu đối với sàn? Cho đầu A của thanh luôn tỳ lên tường thẳng đứng.

A. $\frac{3L^2}{v}$.

B. $\frac{2L^2}{v}$.

C. $\frac{L^2}{3v}$.

D. $\frac{L^2}{2v}$.



Lời giải

Chọn D

Gọi $t \left(0 < t < \frac{L}{u} \right)$ là thời gian con kiến đi được.

Ta có $t = \frac{L}{u}$ với L là chiều dài thanh cứng.

Khi đầu B di chuyển một đoạn $S = vt$ thì con kiến đi được $L = ut$.

Độ cao mà con kiến đạt được khi đó là $h = L \cdot \sin \alpha = ut \cdot \frac{\sqrt{L^2 - S^2}}{L} = u \cdot \frac{\sqrt{L^2 t^2 - v^2 t^4}}{L}$.

Đặt $f(t) = L^2 t^2 - v^2 t^4$. Bài toán trở thành tìm $\max f(t)$.

Ta có $f'(t) = 2L^2 t - 4v^2 t^3$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2L^2 t - 4v^2 t^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{L}{v\sqrt{2}} \end{cases}$.

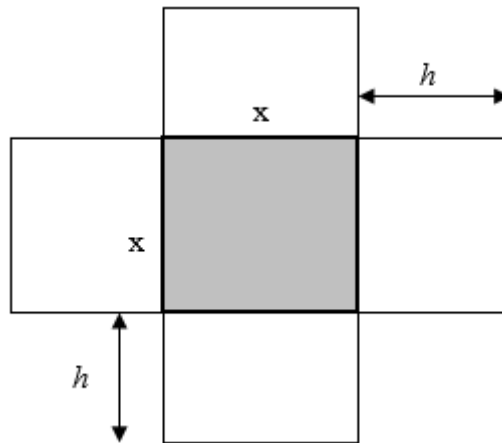
Khi $t = 0$ (không thỏa mãn), ta chọn $t = \frac{L}{v\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{L}{v\sqrt{2}}$	$\frac{L}{2u}$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		$\frac{L^2}{2v}$	

Vậy $\max f(t) = f\left(\frac{L}{v\sqrt{2}}\right) = \frac{L^2}{2v}$.

Câu 5. Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(\text{cm})$, chiều cao $h(\text{cm})$ và có thể tích là $500(\text{cm}^3)$.



Tìm x sao cho diện tích mảnh các tông đó nhỏ nhất?

A. 5 cm.

B. 100 cm.

C. 10 cm.

D. 20 cm.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích của khối hộp là: $V(x) = x^2h = 500(\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{500}{x^2}, x > 0$.

Để chiếc hộp làm ra ít tốn bìa các tông nhất khi và chỉ khi diện tích toàn phần của hộp là nhỏ nhất.

Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp là $S(x) = x^2 + 4hx = x^2 + \frac{2000}{x}, x > 0$.

Bài toán quy về tìm $x \in (0; +\infty)$ sao cho tại đó $S(x)$ đạt GTNN.

Ta có $S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Suy ra bảng biến thiên sau:

x	0	10	$+\infty$	
S'(x)		-	0	+
S(x)	$+\infty$		300	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $S(x)$ đạt GTNN tại $x=10$. Vậy muốn tốn ít nguyên liệu nhất ta lấy độ dài cạnh đáy của hình hộp là $x=10\text{ cm}$.

Câu 6. Một nhà máy cần sản xuất một bể nước bằng tôn có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng không nắp, có thể tích $\frac{4}{3}\text{ m}^3$. Hãy tính độ dài chiều rộng của đáy hình hộp sao cho tốn ít vật liệu nhất.

A. 2 m.

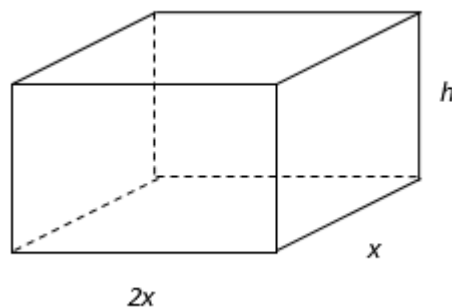
B. $\sqrt{3}$ m.

C. $\frac{2}{3}$ m.

D. 1 m.

Lời giải

Chọn D



Gọi x, h lần lượt là chiều rộng đáy và chiều cao của khối hộp với $x, h \in (0; +\infty)$.

Ta có chiều dài đáy là $2x$. Thể tích $V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{2x^2} = \frac{2}{3x^2}$.

Diện tích vật liệu làm khối hộp là $S(x) = S_d + S_{xq} = 2x \cdot x + 2(x + 2x) \cdot h = 2x^2 + \frac{4}{x}$.

$$S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}.$$

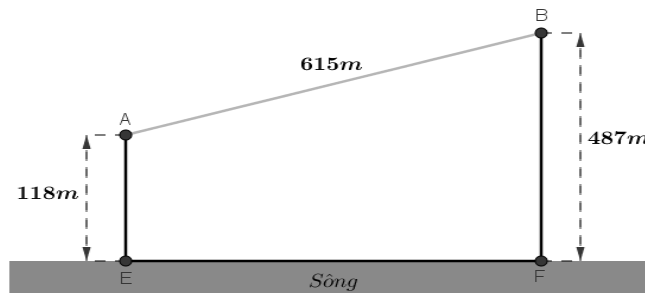
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$	
$S'(x)$		-	0	+
$S(x)$	$+\infty$		6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min S = 6$ khi $x = 1$.

Câu 7. Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m , cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m . Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B .



Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là

A. $596,5\text{ m}$.

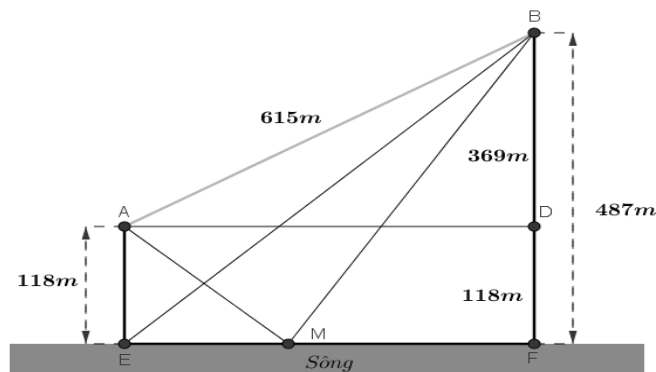
B. $671,4\text{ m}$.

C. $779,8\text{ m}$.

D. $741,2\text{ m}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử người đó đi từ A đến M để lấy nước và đi từ M về B .

Dễ dàng tính được $BD = 369$, $EF = 492$. Ta đặt $EM = x$, khi đó ta được:

$$MF = 492 - x, MA = \sqrt{x^2 + 118^2}, MB = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}.$$

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường $MA + MB$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492].$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất và từ đó xác định được vị trí điểm M .

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2) \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (487x)^2 = (58056 - 118x)^2 \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{58056}{605} \\ x = -\frac{58056}{369} \end{cases} \\ 0 \leq x \leq 492 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 492]$. So sánh các giá trị của $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$

ta có giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{58056}{605}\right) \approx 779,8 \text{ m}$.

Khi đó quãng đường đi ngắn nhất là xấp xỉ $779,8 \text{ m}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng Δ có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và hai điểm } A(1; -2; -1), B(4; 4; 5). \text{ Giả sử } M(a; b; c) \text{ thuộc } \Delta \text{ sao cho } MA + MB$$

nhỏ nhất, khi đó tích abc là

- A.** 0. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$M \in \Delta \Rightarrow M(2; -t; 1 + t).$$

$$\text{Ta có: } MA = \sqrt{2t^2 + 9}; MB = \sqrt{2t^2 + 36}.$$

$$\text{Từ đó } MA + MB = \sqrt{2t^2 + 9} + \sqrt{2t^2 + 36}.$$

$$\text{Đặt } f(t) = \sqrt{2t^2 + 9} + \sqrt{2t^2 + 36}.$$

$$f'(t) = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+9}} + \frac{2t}{\sqrt{2t^2+36}}.$$

Giải $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2t}{\sqrt{2t^2+9}} + \frac{2t}{\sqrt{2t^2+36}} = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	9	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\min f(t) = 9$ đạt được tại $t = 0$. Vậy $M(2;0;1)$ thì $MA + MB$ nhỏ nhất.

Câu 9. Một trang chữ của cuốn sách giáo khoa cần diện tích 384cm^2 . Lề trên và dưới là 3cm , lề trái và phải là 2cm . Kích thước tối ưu của trang giấy là:

A. Dài 24cm ; rộng 16cm .

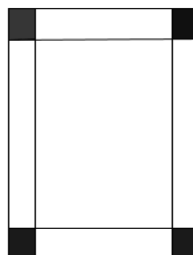
B. Dài 24cm ; rộng 17cm .

C. Dài 25cm ; rộng $15,36\text{cm}$.

D. Dài $25,6\text{cm}$; rộng 15cm .

Lời giải

Chọn A



Trang giấy có diện tích tối ưu khi diện tích trình bày là lớn nhất.

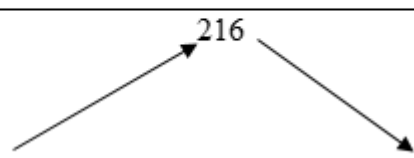
Gọi chiều dài trang giấy là x , ($x \geq 8\sqrt{6}$); suy ra chiều rộng là $\frac{384}{x}$.

Diện tích trình bày nội dung là: $f(x) = (x-6)\left(\frac{384}{x} - 4\right) = -4x - \frac{2304}{x} + 408$.

Để diện tích là lớn nhất ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x) = -4x - \frac{2304}{x} + 408$ với ($x \geq 8\sqrt{6}$).

Ta có: $f'(x) = -4 + \frac{2304}{x^2}$.

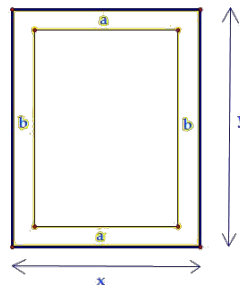
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 24.$$

x	$8\sqrt{6}$	24	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 216 khi $x = 24$.

Vậy chiều dài trang giấy là 24 cm ; suy ra chiều rộng là $\frac{384}{24} = 16$ cm .

Câu 10. Có một cơ sở in sách xác định rằng: Diện tích của toàn bộ trang sách là S_0 (cm²). Do yêu cầu kỹ thuật nên dòng đầu và dòng cuối đều phải cách mép (trên và dưới) trang sách là a (cm). Lề bên trái và bên phải cũng phải cách mép trái và mép phải của trang sách là b (cm) ($b < a$). Các kích thước của trang sách là bao nhiêu để cho diện tích phần in các chữ có giá trị lớn nhất. Khi đó hãy tính tỉ lệ của chiều rộng và chiều dài trang sách.



A. $\frac{b-a}{a}$.

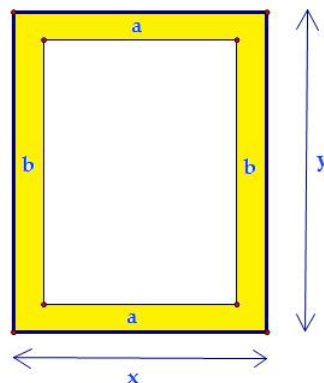
B. $\frac{2b}{2a-1}$.

C. $\frac{b}{a}$.

D. $\frac{b+a}{a}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều dài của trang sách ($0 < x < y$), P là diện tích phần in chữ của trang sách.

Chiều rộng phần in sách là $x - 2b, \left(b < \frac{x}{2}\right)$.

Chiều dài phần in sách là $y - 2a, \left(a < \frac{y}{2}\right)$.

Diện tích phần in sách là: $P = (x - 2b)(y - 2a) = xy - 2by - 2ax + 4ab$.

Mặt khác $S_0 = xy \Rightarrow y = \frac{S_0}{x}$ thay vào phương trình ta được $P = S_0 + 4ab - \left(2ax + \frac{2bS_0}{x}\right)$.

Ta nhận thấy $S_0 + 4ab$ không đổi $P_{\max} \Leftrightarrow \left(2ax + \frac{2bS_0}{x}\right) \min$.

Xét hàm số $f(x) = 2ax + \frac{2bS_0}{x} \Rightarrow f'(x) = 2a - \frac{2bS_0}{x^2}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{bS_0}{a}}$.

Lại có $f''(x) = \frac{4bS_0}{x^3}$. Với x dương $\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \min f(x) = f\left(\sqrt{\frac{bS_0}{a}}\right) = 4\sqrt{abS_0}$.

Khi đó: $x = \sqrt{\frac{bS_0}{a}} \Rightarrow x^2 = \frac{bS_0}{a} \Rightarrow x^2 = \frac{bxy}{a} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b}{a}$.

Câu 11. Một anh kỹ sư muốn tạo ra 1 cái lu hình trụ có diện tích bề mặt (không tính hai mặt đáy) là lớn nhất. Bề mặt lu được quấn bởi mảnh tôn hình chữ nhật có chu vi 120 cm. Gọi chiều dài của hình chữ nhật là a , chiều rộng của hình chữ nhật là b . Tính $P = a^2 + 3b$.

A. 990.

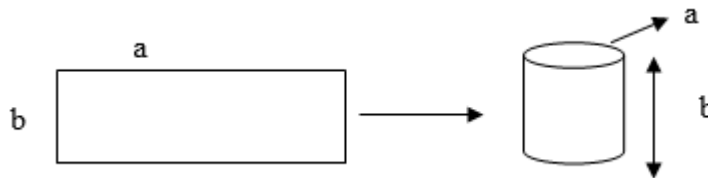
B. 1660.

C. 2530.

D. 1108.

Lời giải

Chọn A



Cách 1: $a + b = 60$ (1).

$$S_{lu} = a.b.$$

Ta có $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 900$ (B.Đ.T Cô Si).

$\Rightarrow (S_{lu})_{\max} = 900$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 30$.

$\Rightarrow a^2 + 3b = 990$.

Cách 2:

Ta có $a + b = 60 \Leftrightarrow b = 60 - a$.

$$S_{lu} = a.b = a(60 - a) = 60a - a^2.$$

Xét $y = f(a) = 60a - a^2$ với $0 < a < 60$.

$$y' = 60 - 2a.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow a = 30.$$

a	0	30	60
y'	-	0	+
y	0	900	0

$$\Rightarrow (S_{lu})_{\max} = 900 \text{ khi } a = 30 \Rightarrow b = 30 \Rightarrow a^2 + 3b = 990.$$

Câu 12. Bác nông dân có 200m rào để ngăn đàn gà nuôi dạng hình chữ nhật. Để diện tích nuôi gà là lớn nhất thì chiều dài hình chữ nhật là a (m) và chiều rộng là b (m). Khi đó $a^2 + ab + b^2$ có giá trị bằng

A. 7525 m.

B. 7600 m.

C. 7500 m.

D. 7900 m.

Lời giải

Chọn C

Cách 1 : Ta có $a + b = 100$.

Diện tích $S_{nuoi} = a.b$.

$$\text{Ta có } ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = 2500 \text{ (B.Đ.T Cô Si).}$$

$$(S_{nuoi})_{\max} = 2500. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a = b = 50.$$

$$\Rightarrow a^2 + a.b + b^2 = 7500.$$

Cách 2:

Ta có $a + b = 100 \Leftrightarrow b = 100 - a$.

$$S_{nuoi} = a.b = a(100 - a) = 100a - a^2.$$

Xét $y = f(a) = 100a - a^2$ với $0 < a < 100$.

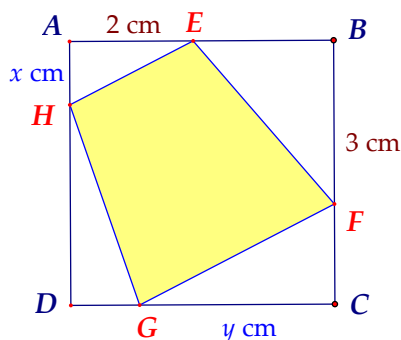
$$y' = 100 - 2a.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow a = 50.$$

a	0	50	100
y'	-	0	+
y	0	2500	0

$$\Rightarrow (S_{lu})_{\max} = 2500 \text{ khi } a = 50 \Rightarrow b = 50 \Rightarrow a^2 + a.b + b^2 = 7500.$$

Câu 13. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. 7 cm.

B. 5 cm.

C. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ cm.

D. $4\sqrt{2}$ cm.

Lời giải

Chọn C

Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất khi và chỉ khi $S = S_{AEH} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

$$\text{Để thấy } 2S = 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36 \quad (1).$$

Theo giả thiết, ta được $\triangle AEH \sim \triangle CGF$ (do có các cạnh tương ứng song song với nhau) nên

$$\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \text{ suy ra } xy = 6 \quad (2).$$

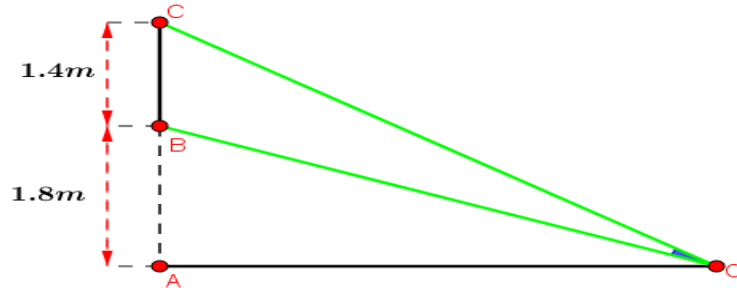
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right) \text{ hay } S = 21 - \left(2x + \frac{9}{x}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cô - si, ta được: $2x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{9}{x}} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$ nên $S \leq 21 - 6\sqrt{2}$. Từ đó

biểu thức S lớn nhất bằng $21 - 6\sqrt{2}$, đạt được khi $\begin{cases} 2x = \frac{9}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm} \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$

Khi đó, ta được $x + y = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.

Câu 14. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 m và đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình như hình vẽ). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Tính khoảng cách từ vị trí đó đến màn ảnh? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ nhọn.



A. $AO = 2,4 \text{ m}$.

B. $AO = 2 \text{ m}$.

C. $AO = 2,6 \text{ m}$.

D. $AO = 3 \text{ m}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt độ dài cạnh $AO = x(\text{m}), (x > 0)$. Ta được $BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$.

Sử dụng định lý cosin trong tam giác OBC

$$\cos \widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB \cdot OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}.$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ nhọn nên $\widehat{BOC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\cos \widehat{BOC}$ nhỏ nhất. Hay bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Đặt } (3,24 + x^2) = t, (t > 3,24). \text{ Suy ra } F(t) = \frac{t + \frac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}.$$

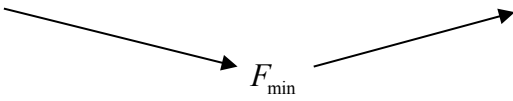
Ta đi tìm t để $F(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} \right)' = \frac{1}{25} \left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63) \left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}} \right)}{t(t+7)} \right)$$

$$= \frac{1}{25} \left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}} \right).$$

$$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$$

Bảng biến thiên

t	3,24	9	$+\infty$
$F'(t)$	-	0	+
$F(t)$			

Thế vào biểu thức của phép đặt ta có: $(3,24 + x^2) = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x = 2,4 \text{ m}$.

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4 \text{ m}$.

Câu 15. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10 cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

A. 80 cm^2 .

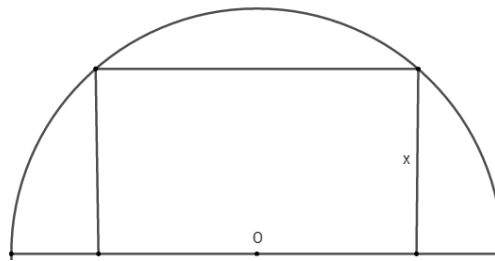
B. 100 cm^2 .

C. 160 cm^2

D. 200 cm^2 .

Lời giải

Chọn B



Gọi $x(\text{cm})$ là độ dài cạnh hình chữ nhật không nằm trên đường kính của đường tròn ($0 < x < 10 \text{ cm}$).

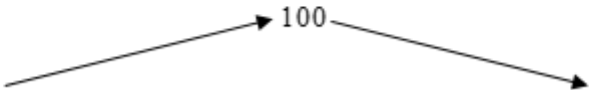
Khi đó, độ dài cạnh hình chữ nhật nằm trên đường kính đường tròn là $2\sqrt{100 - x^2}(\text{cm})$.

Diện tích hình chữ nhật: $S(x) = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}(\text{cm}^2)$.

$$S'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{2} \text{ (Do } 0 < x < 10).$$

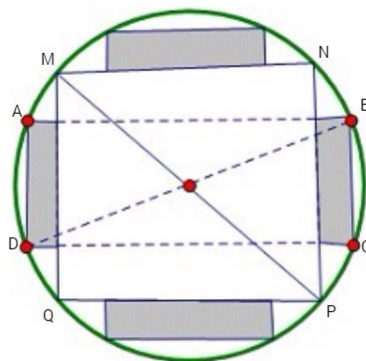
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{10\sqrt{2}}{2}$	10
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 100 khi $x = \frac{10\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là $S = 100 \text{ cm}^2$.

Câu 16. Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cưa xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xám như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



A. $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

B. $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

C. $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

D. $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2} (\text{cm})$

Lời giải

Chọn C

Gọi x , y lần lượt là chiều rộng, chiều dài của miếng phụ.

Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$.

Cạnh hình vuông $MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2} (\text{cm})$.

Suy ra $S = (20\sqrt{2})^2 + 4xy = 800 + 4xy$ (1)

Ta có: $2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2} < BD - 20\sqrt{2} = 40 - 20\sqrt{2}$.

$\Rightarrow 0 < x < 20 - 10\sqrt{2}$.

Lại có $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow (2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 1600$.

$\Rightarrow y = \sqrt{800 - 80\sqrt{2}x - 4x^2}$.

Thế vào (1) thì ta được $S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80\sqrt{2}x - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80\sqrt{2}x^3 - 4x^4}$.

Xét hàm số $f(x) = 800x^2 - 80\sqrt{2}x^3 - 4x^4$ với $x \in (0; 20 - 10\sqrt{2})$.

$f'(x) = 1600x - 240\sqrt{2}x^2 - 16x^3$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (l) \\ x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2} & (n). \\ x = \frac{5\sqrt{34} + 15\sqrt{2}}{-2} & (l) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow f\left(\frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}\right) \searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ hay

diện tích S đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Câu 17. Một ô tô đang chạy với vận tốc 15(m/s) thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 15$ (m/s) trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. 22,5 m.

B. 45 m.

C. 15 m.

D. 90 m.

Lời giải

Chọn A

Khi dừng hẳn thì $v(t) = -5t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Từ lúc hãm phanh đến khi dừng lại, xe di chuyển được:

$$s = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (-5t + 15) dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t\right) \Big|_0^3 = 22,5 \text{ m}.$$

Câu 18. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 3t^2 + t$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 2 (m/s). Hỏi vận tốc của vật là bao nhiêu sau khi chuyển động với gia tốc đó được 2 s.

A. 8 m/s.

B. 12 m/s.

C. 16 m/s.

D. 10 m/s.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vận tốc chuyển động } v(t) = \int a(t) dt = \int (3t^2 + t) dt = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C.$$

$$\text{Chọn gốc thời gian lúc bắt đầu tăng tốc thì } v(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow v(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2.$$

Khi đó tại thời điểm 2 s thì $v(2) = 12$ m/s.

Câu 19. Cho mạch điện xoay chiều RLC mắc nối tiếp có R thay đổi. Biết điện trở cuộn cảm $Z_L = 80$ (Ω), điện trở của tụ điện là $Z_C = 200$ (Ω) và hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = U_0 \cos 100\pi t$ (V). Để công suất tiêu thụ của mạch cực đại thì giá trị của R bằng

A. 120 (Ω).

B. 50 (Ω).

C. 100 (Ω).

D. 200 (Ω).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Công suất tiêu thụ của mạch: } P = RI^2 = R \cdot \frac{U^2}{Z^2} = \frac{RU^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}.$$

$$P'_{(R)} = \frac{U^2 \left[(Z_L - Z_C)^2 - R^2 \right]}{\left[R^2 + (Z_L - Z_C)^2 \right]^2}.$$

$$P'_{(R)} = 0 \Leftrightarrow R = |Z_L - Z_C| = 120 \text{ (Ω)}.$$

Ta có bảng biến thiên:

R	0	120	$+\infty$
P'	+	0	-
P			

Suy ra công suất tiêu thụ của mạch cực đại thì $R = 120 (\Omega)$.

Câu 20. Cho mạch điện xoay chiều RLC mắc nối tiếp có R thay đổi. Biết điện trở cuộn cảm $Z_L = 100 (\Omega)$, điện trở của tụ điện là $Z_C = 40 (\Omega)$ và hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = 120\sqrt{2} \cos 100\pi t (V)$. Điện trở R phải có giá trị là bao nhiêu để công suất tiêu thụ của mạch đạt cực đại và giá trị cực đại của công suất là bao nhiêu?

A. $R = 60 (\Omega), P_{\max} = 120 (W)$.

B. $R = 120 (\Omega), P_{\max} = 60 (W)$.

C. $R = 40 (\Omega), P_{\max} = 180 (W)$.

D. $R = 120 (\Omega), P_{\max} = 180 (W)$.

Lời giải

Chọn A

Công suất tiêu thụ của mạch: $P = RI^2 = R \cdot \frac{U^2}{Z^2} = \frac{RU^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$.

$$P'_{(R)} = \frac{U^2 [(Z_L - Z_C)^2 - R^2]}{[R^2 + (Z_L - Z_C)^2]^2}.$$

$$P'_{(R)} = 0 \Leftrightarrow R = |Z_L - Z_C| = 60 (\Omega).$$

Ta có bảng biến thiên:

R	0	60	$+\infty$
P'	+	0	-
P	120		

Suy ra công suất tiêu thụ của mạch cực đại $P_{\max} = 120 (W)$ tại $R = 60 (\Omega)$.

Câu 21: Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 (cm^3)$. Nhiệt độ t của nước gần nhất với giá trị nào dưới đây thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất?

A. 0° .

B. -4° .

C. 30° .

D. 4° .

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$V'(t) = -0,06426 + 2.0,0085043t - 3.0,0000679t^2.$$

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 79,53138 \notin (0^\circ; 30^\circ) \\ t \approx 3,9665 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	3,9665	30	
$V'(t)$		-	0	+
$V(t)$			$V_{\min}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có khối lượng riêng lớn nhất của vật khi thể tích nhỏ nhất lúc vật có nhiệt độ xấp xỉ gần bằng 4°C .

Nhận xét: Ta đã biết trong môn vật lý lớp 7, khối lượng riêng của nước lớn nhất khi thể tích tương ứng của nước là nhỏ nhất.

Câu 22: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét hàm } V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 \quad (0 \leq t \leq 90).$$

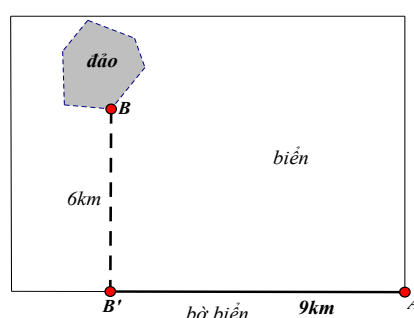
$$V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	60	90
V''	+	0	-
V'			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số V' đồng biến trên $(0; 60)$, nghịch biến trên $(60; 90)$.

Câu 23. Công ty XDPL muốn làm một đường ống dẫn khí từ một địa điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm B đến bờ biển là 6km. Giá để xây lắp mỗi km đường ống trên bờ là 50.000 USD, còn xây lắp dưới nước là 130.000 USD. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km.



Hỏi vị trí điểm M trên bờ biển cách A bao xa để chi phí xây lắp đường ống từ A qua M rồi đến B là ít tốn kém nhất?

A. 9 km.

B. 6 km.

C. 0 km.

D. 6.5 km.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = B'M$ (km). Khi đó $BM = \sqrt{x^2 + 36}$, $AM = 9 - x$.

Chi phí xây dựng đường ống là $S(x) = 130000\sqrt{x^2 + 36} + 50000(9 - x)$ (USD).

Hàm $S(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 9]$ và $S'(x) = 10000 \left(\frac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 \right)$.

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{x^2 + 36} \Leftrightarrow \begin{cases} 169x^2 = 25(x^2 + 36) \\ 0 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

$$S(0) = 1.230.000; S\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000; S(9) \approx 1.406.165.$$

Do đó chi phí thấp nhất khi $x = \frac{5}{2}$. Vậy M cần cách A một khoảng 6,5 km.

Câu 24. Một điểm C trên hòn đảo có khoảng cách ngắn nhất đến bờ biển là 60 km, B là điểm trên bờ biển sao cho CB vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A trên bờ biển đến B là 100 km. Để

tham dự buổi họp nhóm Strong Team Toán VD – VCD ngày 28/6/2019, thầy Quý phải tính toán vị trí diễn ra cuộc họp tại địa điểm G trên đoạn AB để tổng chi phí đi lại của cả hai nhóm các thầy cô là ít nhất. Biết nhóm của thầy Quý đi từ C theo đường biển chi phí đi là 500 nghìn mỗi km, nhóm cô Thêm đi từ vị trí A đi trên đất liền mỗi km chi phí là 300 nghìn. Hỏi thầy tìm được vị trí điểm G cách B bao xa?

A. 40 km.

B. 60 km.

C. 55 km.

D. 45 km.

Lời giải

Đặt $x = BG$ (km), $x \in [0; 100]$.

Khi đó $GC = \sqrt{x^2 + 3600}$, $AG = 100 - x$.

Chi phí đi lại của hai nhóm người để đến vị trí G là

$$S(x) = 500\sqrt{x^2 + 3600} + 300(100 - x) \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Hàm $S(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 100]$ và $S'(x) = \frac{500x}{\sqrt{x^2 + 3600}} - 300$.

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 3600} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 = 9(x^2 + 3600) \\ 0 \leq x \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow x = 45.$$

$$S(0) = 60000; S(45) = 54000; S(100) \approx 58310.$$

Do đó chi phí thấp nhất khi $x = 45$. Vậy G cần cách B một khoảng 45 km.

Câu 25. Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy A4 trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n + 5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

A. 4 máy.

B. 7 máy.

C. 6 máy.

D. 5 máy.

Lời giải

Chọn D

Gọi số giờ cần in là x thì n máy in được $4000.n.x$ bản in trong x giờ.

$$\text{Ta có } 4000.n.x = 50000 \Rightarrow nx = \frac{25}{2}.$$

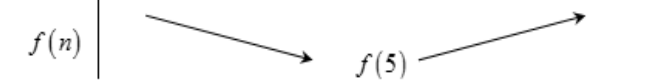
Chi phí của n máy chạy trong x giờ là $20x(3n + 5)$ nghìn đồng.

Chi phí để bảo trì n máy là $50n$ nghìn đồng.

$$\text{Tổng chi phí là } f(n) = 20x(3n + 5) + 50n = 60nx + 100x + 50n = 750 + \frac{1250}{n} + 50n.$$

$$f'(n) = -\frac{1250}{n^2} + 50, \quad f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 5.$$

Ta có bảng biến thiên

n	1	5	8
$f'(n)$	-	0	+
$f(n)$			

Để thu được tiền lãi cao nhất cần chi phí thấp nhất, vậy $n = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nhiên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì nhà thiết kế phải thiết kế hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$.

B. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

C. $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$.

D. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Lời giải

Chọn B

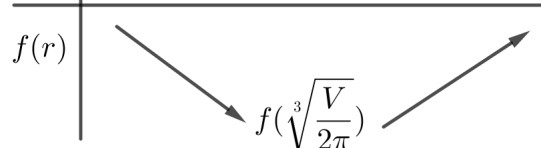
Gọi hình trụ có chiều cao h , độ dài đường sinh l , bán kính đáy r .

Ta có: $S_{tp} = 2S_{day} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rl$ (1). Mặt khác $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow l = \frac{V}{\pi r^2}$.

Thay vào công thức (1) ta được: $S_{tp} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ với $r > 0$. Ta có $f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}; f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

r	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
$f'(r)$	-	0	+
$f(r)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(r)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Hay S_p đạt giá trị nhỏ nhất khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Câu 27. Trong một môi trường dinh dưỡng có 1000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi qui luật $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con vi khuẩn), trong đó t là thời gian (đơn vị giây). Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên lớn nhất là bao nhiêu?

A. 0.

B. 1.

C. -10.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có tốc độ phát triển của đàn vi khuẩn tại thời điểm t là:

$$N'(t) = \frac{100(100+t^2) - 100t(2t)}{(100+t^2)^2} = \frac{100^2 - 100t^2}{(100+t^2)^2} \quad (\forall t > 0).$$

$$\text{Xét } N'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10 > 0.$$

Lập bảng biến thiên ta được:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$	0	+	0
$N(t)$		1005	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $\max N(t) = N(10) = 1005$.

Câu 28. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $Q(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 12.

B. 14.

C. 10.

D. 18.

Lời giải

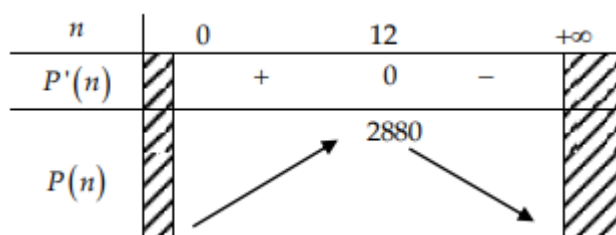
Chọn A

Mỗi con cá cân nặng trung bình sau một vụ là: $Q(n) = 480 - 20n$

Khi đó với n con cá thì cân nặng của chúng là:

$$P(n) = nQ(n) = 480n - 20n^2 \Rightarrow P'(n) = 480 - 40n.$$

Xét $P'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$. Khi đó ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $\max P(n) = P(12) = 2880$ (với $n > 0$).

Câu 29. Đốt cháy các hidrocarbon của dãy đồng đẳng nào dưới đây thì tỉ lệ mol H_2O : mol CO_2 giảm dần khi số carbon tăng dần ?

A. Ankan.

B. Anken.

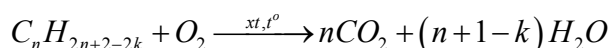
C. Ankin.

D. Ankyllbenzen.

Lời giải

Chọn A

Công thức tổng quát của một hidrocarbon là $C_nH_{2n+2-2k}$ với k là số liên kết π trong phân tử. Phương trình phản ứng cháy là:



Ta có $\frac{n_{H_2O}}{n_{CO_2}} = \frac{n+1-k}{n}$. Xét hàm số $f(n) = \frac{n+1-k}{n}, n \in N^*$.

Ta có $f'(n) = \frac{k-1}{n^2}$. Theo giả thiết ta có $f(n)$ là hàm nghịch biến nên $f'(n) < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{k-1}{n^2} < 0 \Leftrightarrow k-1 < 0 \Leftrightarrow k < 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k = 0 \Rightarrow CTTQ: C_nH_{2n+2} : \text{ankan}.$$

Câu 30. Cho phương trình phản ứng tạo thành Nitơ (IV) Oxit từ Nitơ đioxit và Oxy là $2NO + O_2 \xrightleftharpoons{dk, t^o, xt} 2NO_2$. Biết rằng đây là một phản ứng thuận nghịch. Giả sử x, y lần lượt là nồng độ phần trăm của khí NO và O_2 tham gia phản ứng. Biết rằng tốc độ phản ứng hóa học của phản ứng trên được xác định $v = kx^2y$, với k là hằng số của tốc độ phản ứng. Để tốc độ phản ứng xảy ra nhanh nhất thì tỉ số giữa $\frac{x}{y}$ là ?

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $v = kx^2y = kx^2(100-x)$ (do $x+y=100\%$), $0 < x < 100$.

Xét hàm số $f(x) = kx^2(100-x) = k(100x^2 - x^3)$.

Bài toán trở thành tìm $\max_{x \in (0;100)} f(x) = ?$.

Ta có: $f'(x) = k[200x - 3x^2]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (ktm)} \\ x = \frac{200}{3} \in (0;100) \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên ta có:

x	0	$\frac{200}{3}$	100	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$				

$f\left(\frac{200}{3}\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\max_{x \in (0;100)} f(x) = f\left(\frac{200}{3}\right)$.

Và do đó ta có $y = 100 - x = \frac{100}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$.

Câu 31. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $x = 8$.

B. $x = 5$.

C. $x = 15$.

D. $x = 10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x \in [0;15]$ (vì độ giảm huyết áp không âm).

Bài toán trở thành: Tìm $x \in [0;15]$ để $G(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Theo giả thiết $G(x) = 0,035(15x^2 - x^3) \Rightarrow G'(x) = 0,035(30x - 3x^2)$.

Cho $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$. Khi đó ta có bảng biến thiên như sau

x	0	10	15	
$G'(x)$	0	+	0	−
$G(x)$	0	$\frac{35}{2}$	0	

Vậy liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là $x = 10$ (mg).

Câu 32. Các chuyên gia Y-tế ước tính số người nhiễm virus Zika kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, ($t = 0, 1, 2, \dots, 25$). Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

- A. 20. B. 10. **C. 15.** D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(t) = 45t^2 - t^3 \Rightarrow f'(t) = 90t - 3t^2$.

Đặt $g(t) = 90t - 3t^2$. Bài toán trở thành: Tìm $t \in [0; 25]$ để $g(t)$ đạt giá trị lớn nhất.

$g'(t) = 90 - 6t$. Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Lập bảng biến thiên

t	0	15	25		
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	0	↗	675	↘	375

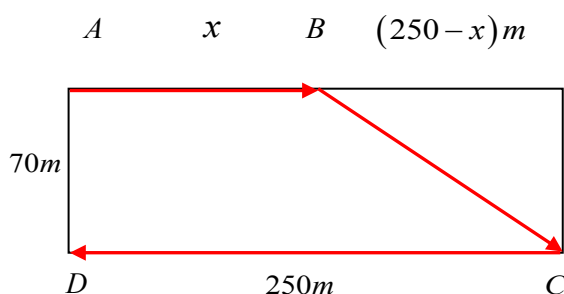
Vậy tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ 15.

Câu 33. Trong nội dung thi điền kinh, bơi lội và đua xe đạp phối hợp được diễn ra tại một hồ bơi có chiều rộng 70 m và chiều dài 250 m. Một vận động viên cần chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) khi phải thực hiện lộ trình xuất phát từ A đến C và đua xe đạp tới D như hình vẽ. Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường x) thì vận động viên nên nhảy xuống để tiếp tục bơi về đích nhanh nhất? Biết rằng vận tốc của vận động viên khi chạy trên bờ, khi bơi và đua xe lần lượt là 5 m/s; 1,5 m/s và 10 m/s.

- A. 139,52 m. B. 129,52 m. C. 109,52 m. **D. 119,52 m.**

Lời giải

Chọn D



Gọi B là vị trí VĐV kết thúc phần chạy điền kinh và $AB = x (0 < x < 250)$

Khi đó ta có $t_1 = \frac{AB}{v_1} = \frac{x}{5}$ là thời gian đi từ A đến B

Đồng thời quãng đường bơi chính là $BC = \sqrt{70^2 + (250 - x)^2}$

Suy ra $t_2 = \frac{BC}{1,5} = \frac{\sqrt{70^2 + (250 - x)^2}}{1,5}$ là thời gian bơi từ B đến C

Thời gian đưa xe đạp là $t_3 = \frac{CD}{10} = \frac{250}{10} = 25s$

Tổng thời gian của VĐV là $T = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{70^2 + (250 - x)^2}}{1,5} + 25$

Xét hàm $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{70^2 + (250 - x)^2}}{1,5} + 25, (0 < x < 250)$.

Bài toán trở thành tìm $\min_{x \in (0, 250)} f(x)$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{2(250 - x)}{3\sqrt{70^2 + (250 - x)^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{70^2 + (250 - x)^2} - 10(250 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{70^2 + (250 - x)^2} = 10(250 - x)$$

$$\Leftrightarrow 91(250 - x)^2 = 9 \cdot 70^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 250 - \frac{210}{\sqrt{91}} (= x_0) \\ x = 250 + \frac{210}{\sqrt{91}} (loại) \end{cases}$$

x	0	x_0	250
y'		-	0
y			+

Dựa vào BBT $\min_{x \in (0, 250)} f(x) = f(x_0) \approx 119,52(m)$

Câu 34. Trong nội dung thi điền kinh, bơi lội và đua xe đạp phối hợp được diễn ra tại một hồ bơi có chiều rộng 50 m và chiều dài 250 m. Một vận động viên cần chạy phối hợp với bơi (bắt buộc cả hai) khi phải thực hiện lộ trình xuất phát từ A đến C và đua xe đạp tới D như hình vẽ. Hỏi rằng sau khi chạy được bao xa (quãng đường x) thì vận động viên nên nhảy xuống để tiếp tục

bơi về đích nhanh nhất ? Biết rằng vận tốc của vận động viên khi chạy trên bờ, khi bơi và đưa xe lần lượt là 5 m/s; 1,5 m/s và 10 m/s.

A. 109,8 m.

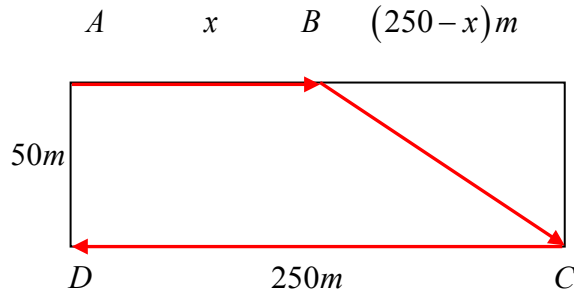
B. 105,8 m.

C. 106,8 m.

D. 107,8 m.

Lời giải

Chọn D



Gọi B là vị trí VĐV kết thúc phần chạy điền kinh và $AB = x$ ($0 < x < 250$)

Khi đó ta có $t_1 = \frac{AB}{v_1} = \frac{x}{5}$ là thời gian đi từ A đến B

Đồng thời quãng đường bơi chính là $BC = \sqrt{50^2 + (250 - x)^2}$

Suy ra $t_2 = \frac{BC}{1,5} = \frac{\sqrt{50^2 + (250 - x)^2}}{1,5}$ là thời gian bơi từ B đến C

Thời gian đưa xe đạp là $t_3 = \frac{CD}{10} = \frac{250}{10} = 25s$

Tổng thời gian của VĐV là $T = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{50^2 + (250 - x)^2}}{1,5} + 25$

Xét hàm $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{50^2 + (250 - x)^2}}{1,5} + 25$, ($0 < x < 250$)

Bài toán trở thành tìm $\min_{x \in (0, 250)} f(x)$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{2(250 - x)}{3\sqrt{50^2 + (250 - x)^2}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{50^2 + (250 - x)^2} - 10(250 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{50^2 + (250 - x)^2} = 10(250 - x)$$

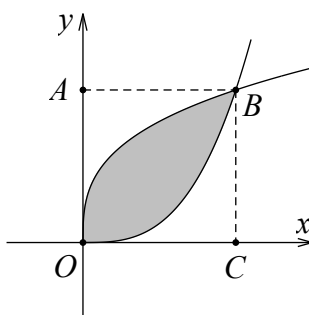
$$\Leftrightarrow 91(250 - x)^2 = 9 \cdot 50^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 250 - \frac{150}{\sqrt{91}} (= x_0) \\ x = 250 + \frac{150}{\sqrt{91}} (\text{loại}) \end{cases}$$

x	0	x_0	250
y'		-	0
y			+
			$f(x_0)$

Dựa vào BBT $\min_{x \in (0, 250)} f(x) = f(x_0) \approx 107,8(m)$

Câu 35. Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$. Tính diện tích của phần không được tô đậm trên viên gạch men.



A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

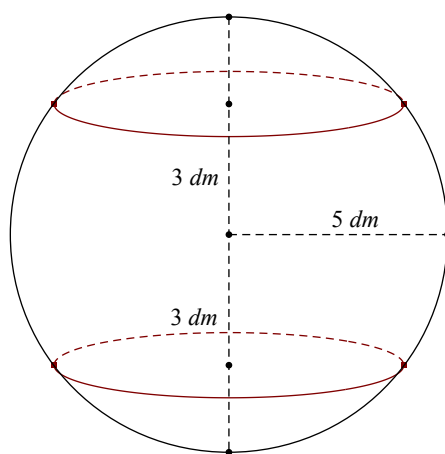
Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S = 1^2 = 1$.

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm.

$$\text{Ta có } S_1 = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^3 \right) dx = \left(\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vậy diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men bằng $S - S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 36. Người ta làm một cái lu đựng nước bằng cách cắt bỏ 2 chỏm của một khối cầu có bán kính 5 dm bằng 2 mặt phẳng vuông góc với đường kính và cách tâm khối cầu 3 dm. Tính thể tích của chiếc lu.



A. $41\pi(\text{dm}^3)$.

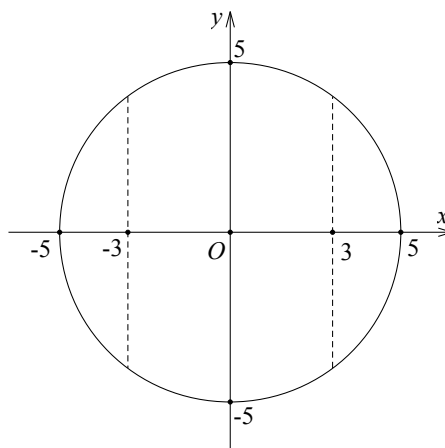
B. $132\pi(\text{dm}^3)$.

C. $43\pi(\text{dm}^3)$.

D. $\frac{100}{3}\pi(\text{dm}^3)$.

Lời giải

Chọn B



Đặt hệ trục với tâm O là tâm của mặt cầu, đường thẳng đứng là Ox , đường ngang là Oy .

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2 + y^2 = 25$.

Thể tích cái lu là thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình giới hạn bởi các đường cong $y = \sqrt{25 - x^2}$, trục Ox , đường thẳng $x = -3, x = 3$ quay quanh Ox .

$$V = \pi \int_{-3}^3 (25 - x^2) dx = \pi \left(25x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = 132\pi(\text{dm}^3).$$

Câu 37. Một cái trống trường có bán kính các đáy là 30 cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có diện tích là $1600\pi(\text{cm}^2)$, chiều dài của trống là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh của trống là các đường Parabol. Hỏi thể tích của cái trống là bao nhiêu?

A. $425,2 \text{ dm}^3$.

B. $425,2 \text{ mm}^3$.

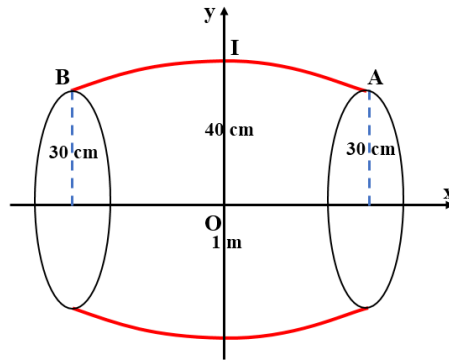
C. $425,2 \text{ cm}^3$.

D. $425,2 \text{ m}^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Thiết diện vuông góc với trục, cách đều hai đáy là hình tròn có bán kính r có diện tích là $1600\pi \text{ (cm}^2\text{)}$, nên $\pi r^2 = 1600\pi \Rightarrow r = 40 \text{ cm}$.

Ta có: Parabol nhận Oy làm trục đối xứng nên phương trình Parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.

Parabol có đỉnh $I(0;40)$ và qua $A(50;30)$.

Thay tọa độ I và A vào phương trình Parabol:
$$\begin{cases} b = 40 \\ 50^2 a + b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{250} \\ b = 40 \end{cases}$$

Nên Parabol có phương trình $y = -\frac{1}{250}x^2 + 40$

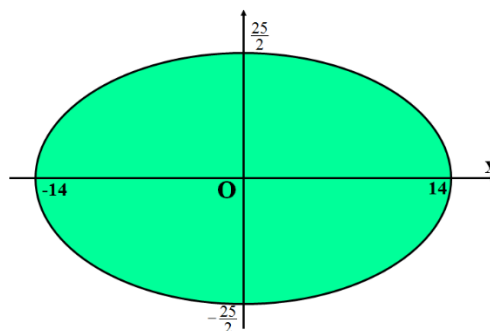
Thể tích của trống là $V = \pi \int_{-50}^{50} \left(-\frac{1}{250}x^2 + 40 \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{406000}{3} \text{ cm}^3 \approx 425,2 \text{ dm}^3$

Câu 38. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28cm , trục nhỏ 25cm . Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 180000 đồng. **B.** 183000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Chọn B



Đường elip có trục lớn 28 cm , trục nhỏ 25 cm có phương trình $\frac{x^2}{14^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} = 1$

$$\Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y = \pm \frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}.$$

Do đó thể tích quả dưa là $V = \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1 - \frac{x^2}{14^2}\right) dx$

$$= \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Big|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} = \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

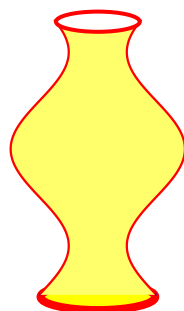
Câu 39. Một bình hoa dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\sin x + 2$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ bên dưới). Biết đáy bình hoa là hình tròn có bán kính bằng 2 dm , miệng bình hoa là đường tròn bán kính bằng 1.5 dm . Bỏ qua độ dày của bình hoa, Thể tích của bình hoa gần với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

A. 100 dm³.

B. 104 dm³.

C. 102 dm³.

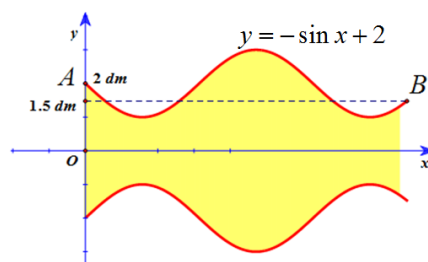
D. 103 dm³.



Lời giải

Chọn D

Giả sử thiết diện qua trục của bình hoa miêu tả như hình vẽ bên dưới. Chọn hệ trục tọa độ Oxy thỏa mãn gốc tọa độ O trùng với tâm đáy bình hoa, trục Ox trùng với trục của bình hoa.



Bán kính hình tròn đáy bình hoa bằng $y_A = 2$ nên $-\sin x_A + 2 = 2 \Rightarrow \sin x_A = 0 \Rightarrow x_A = 0$.

Bán kính đường tròn miệng bình hoa bằng $y_B = 1,5$ ($2\pi < x_B < 3\pi$), tức là:

$$\sin(x_B - \pi) + 2 = 1,5 \Rightarrow \sin(x_B - \pi) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x_B - \pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow x_B = \frac{17\pi}{6}.$$

Khi đó thể tích bình hoa giới hạn bởi các đường $y = -\sin x + 2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{17\pi}{6}$ được xác

$$\text{định theo công thức } V = \pi \int_0^{\frac{17\pi}{6}} (-\sin x + 2)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{17\pi}{6}} (4 - 4\sin x + \sin^2 x) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{17\pi}{6}} \left(4 - 4\sin x + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \pi \int_0^{\frac{17\pi}{6}} \left(\frac{9}{2} - 4\sin x - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{9}{2}x + 4\cos x - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{17\pi}{6}} = \frac{51\pi^2}{4} - \frac{32 + 15\sqrt{3}}{8}\pi \approx 103,07 \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Câu 40. Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc xây dựng như đầu trường La Mã, tòa nhà **Ellipse Tower** Hà Nội, sử dụng trong thiết kế logo quảng cáo, thiết bị nội thất. Xét một Lavabo (bồn rửa) làm bằng sứ đặc hình dạng là một nửa khối elip tròn xoay có thông số kỹ thuật mặt trên của Lavabo là: dài $\times$ rộng: 660×380 mm (tham khảo hình vẽ bên dưới), Lavabo có độ dày đều là 20 mm. Thể tích chứa nước của Lavabo gần với giá trị nào trong các giá trị sau:



A. 18,66 dm³.

B. 18,76 dm³.

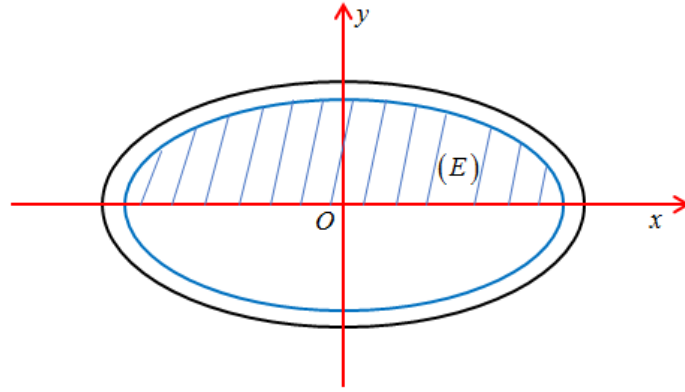
C. 18,86 dm³.

D. 18,96 dm³.

Lời giải

Chọn B

Giả sử mặt trên của Lavabo được biểu diễn như hình vẽ bên dưới. Gọi hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Gọi (E) là elip nhỏ bên trong.



Độ dài trục lớn của (E) là $2a = 660 - 40 = 620 \text{ mm} = \frac{31}{5} \text{ dm} \Rightarrow a = \frac{31}{10} \text{ dm}$.

Độ dài trục bé của (E) là $2b = 380 - 40 = 340 \text{ mm} = \frac{17}{5} \text{ dm} \Rightarrow b = \frac{17}{10} \text{ dm}$.

Vậy phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{\left(\frac{31}{10}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{17}{10}\right)^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{289}{100} \left(1 - \frac{100x^2}{961}\right)$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay miền giới hạn bởi (E) , trục Ox và $x = -\frac{31}{10}$, $x = \frac{31}{10}$ (Phần gạch chéo trong hình) quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_{-\frac{31}{10}}^{\frac{31}{10}} \frac{289}{100} \left(1 - \frac{100x^2}{961}\right) dx = \frac{8959\pi}{750} (\text{dm}^3)$$

Vậy thể tích chứa nước của Lavabo là $\frac{V}{2} \approx 18,76 \text{ dm}^3$.

Câu 41. Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t (\text{m/s})$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0 (\text{s})$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

A. 1028 m.

B. 1280 m.

C. 1308 m.

D. 1380 m.

Lời giải

Chọn A

Gọi t_0 là thời điểm vật dừng lại, khi đó $v(t_0) = 0 \Leftrightarrow 160 - 10t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 16$.

Vậy quãng đường vật chuyển động đến lúc dừng lại là $S = \int_0^{16} (160 - 10t) dt = 1280 (\text{m})$.

Câu 42. Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2(\text{m/s})$. Biết tại thời điểm $t = 2(\text{s})$ thì vật đi được quãng đường là $10(\text{m})$. Hỏi tại thời điểm $t = 30(\text{s})$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

A. 1140 m.

B. 300 m.

C. 240 m.

D. 1410 m.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường của vật theo thời gian là $S(t) = \int (3t + 2)dt = \frac{3}{2}t^2 + 2t + C$.

Vì $S(2) = 10 \Rightarrow C = 0$. Khi đó $S(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$.

Tại thời điểm $t = 30(\text{s})$ thì $S(30) = 1410(\text{m})$.

Câu 43. Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 25(\text{m/s})$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 2t - 6(\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất.

A. $\frac{107}{5}$ m.

B. 144 m.

C. 28 m.

D. 57 m.

Lời giải

Chọn D

Vận tốc của vật khi thay đổi là $v(t) = \int (2t - 6)dt = t^2 - 6t + C$.

Tại thời điểm $t = 0$ (khi vật bắt đầu thay đổi vận tốc) có $v_0 = 25 \Rightarrow C = 25$.

Suy ra $v(t) = t^2 - 6t + 25$.

Ta có $v(t) = (t - 3)^2 + 16 \geq 16$, suy ra vận tốc của vật đạt bé nhất khi $t = 3$.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó là

$$S = \int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (t^2 - 6t + 25)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 25t \right) \Big|_0^3 = 57(\text{m}).$$

Câu 44. Một mô tô chạy với vận tốc $v_0(\text{m/s})$ thì gặp chướng ngại vật nên người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần với gia tốc $a = -8t(\text{m/s}^2)$ trong đó t là thời gian tính bằng giây. Biết từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được $12(\text{m})$. Tính v_0 ?

A. 18 m/s.

B. $\sqrt[3]{86}$ m/s.

C. $\sqrt[3]{1269}$ m/s.

D. $\sqrt[3]{1296}$ m/s.

Lời giải

Chọn D

$$a = -8t \left(m/s^2 \right) \Rightarrow v = \int -8t dt = -4t^2 + C.$$

Tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc của vật là v_0 (m/s) nên ta có $v_0 = C$.

$$\text{Vậy } v = -4t^2 + v_0.$$

Tại thời điểm t_0 vận tốc của vật là 0 nên ta có $0 = -4t_0^2 + v_0 \Leftrightarrow 4t_0^2 = v_0$.

$$\text{Ta có: } \int_0^{t_0} (-4t^2 + v_0) dt = 12 \Leftrightarrow -\frac{4t_0^3}{3} + v_0 t_0 = 12 \Leftrightarrow -\frac{4t_0^3}{3} + 4t_0^3 = 12 \Leftrightarrow t_0 = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}.$$

$$\Rightarrow v_0 = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{36}}{2} \right)^2 = \sqrt[3]{1296} \text{ (m/s)}.$$

Câu 45. Đầu tháng 5 năm 2019, ông An đầu tư vào chăn nuôi tằm với số tiền vốn ban đầu là 200 (triệu đồng). Biết rằng trong quá trình chăn nuôi gặp thuận lợi nên số tiền đầu tư của ông liên tục tăng theo tốc độ được mô tả bằng công thức $f'(t) = \frac{12000}{(t+5)^2}$, với t là thời gian đầu tư tính bằng tháng (thời điểm $t=0$ ứng với đầu tháng 5 năm 2019). Hỏi số tiền mà ông An thu về tính đến đầu tháng 5 năm 2023 gần với số nào sau đây?

A. 2737 (triệu đồng).

B. 2307 (triệu đồng).

C. 2370 (triệu đồng).

D. 2703 (triệu đồng).

Lời giải

Chọn C

Tốc độ thay đổi vốn đầu tư của ông An vào tháng thứ t là $f'(t) = \frac{12000}{(t+5)^2}$ nên nguyên hàm của hàm $f'(t)$ là hàm số $f(t)$ mô tả số tiền của ông An có được tính đến tháng thứ t .

$$\text{Ta có } f(t) = \int f'(t) dt = \int \frac{12000}{(t+5)^2} dt = \frac{-12000}{t+5} + C.$$

$$\text{Số tiền của ông An tại thời điểm } t = 0 \text{ là } f(0) = \frac{-12000}{0+5} + C = 200 \Rightarrow C = 2600.$$

Vậy số tiền mà ông An thu về tính đến đầu tháng 5 năm 2023 (ứng với $t = 48$ tháng) là

$$f(48) = \frac{-12000}{48+5} + 2600 = 2373,585 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 46. Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư của một doanh nghiệp phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P'(t) = 126 + t^2$ (triệu đồng/năm). Hỏi sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu (đơn vị triệu đồng).

A. 5020.

B. 1235.

C. $\frac{3257}{3}$.

D. $\frac{4780}{3}$.

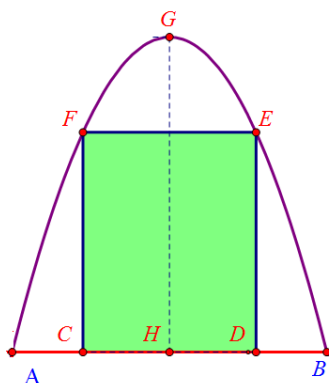
Lời giải

Chọn D

Sau 10 năm đầu tiên thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là

$$T = \int_0^{10} (126 + t^2) dt = \frac{4780}{3} \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 49: Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH = 4$ m, chiều rộng $AB = 4$ m, $AC = BD = 0,9$ m. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/m², còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/m².



Hỏi tổng chi phí để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 11445000 (đồng).

B. 7368000 (đồng).

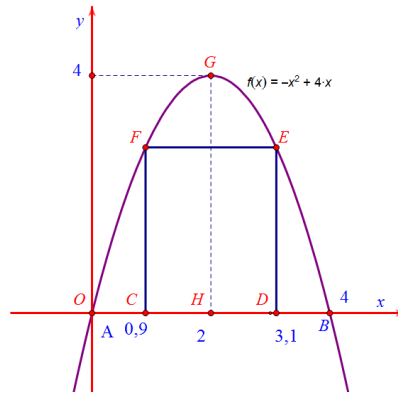
C. 4077000 (đồng).

D. 11370000 (đồng)

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2; 4)$ và đi qua điểm $O(0; 0)$ nên ta có
$$\begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả công là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} (\text{m}^2)$.

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\text{m})$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2(\text{m})$.

Diện tích hai cánh công là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \approx 6,14 (\text{m}^2)$.

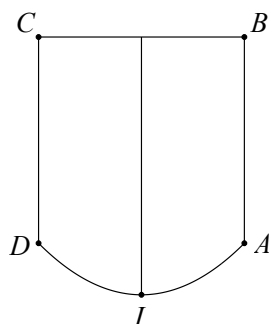
Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \approx 4,53 (\text{m}^2)$.

Số tiền làm hai cánh công là $T_1 = 6,14 \cdot 1200000 = 7368000 (\text{đ})$.

và tiền làm phần xiên hoa là $T_2 = 4,53 \cdot 900000 = 4077000 (\text{đ})$.

Vậy tổng chi phí là 11445000 đồng.

Câu 50: Để tăng thêm thu nhập, ông Bình chẵn nuôi thêm 2 con bò. Do diện tích đất của nhà ông hẹp nên ông xây chuồng bò như hình vẽ bên dưới và chia thành 2 phần bằng nhau để nhốt 2 con bò. Biết $ABCD$ là hình vuông cạnh 4m và I là đỉnh của một Parabol có trục đối xứng là trung trực của BC và parabol đi qua hai điểm A, D . Tiền xây chuồng bò hết 350000 đồng/ m^2 . Biết I cách BC một khoảng 5m, hãy tính số tiền chi phí ông Bình bỏ ra để xây dựng chuồng bò (làm tròn đến hàng nghìn)?

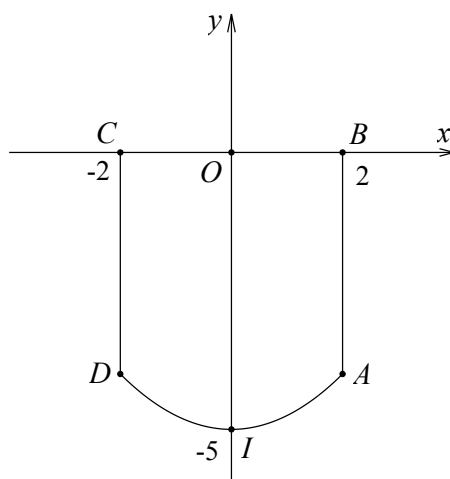


- A. 6.333.000 đồng. B. 7.533.000 đồng. **C. 6.533.000 đồng.** D. 7.333.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ sau

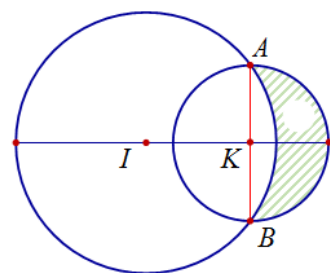


Khi đó parabol có đỉnh $I(0; -5)$ và đi qua hai điểm $A(2; -2)$, $D(-2; -2)$ nên có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2 - 5$.

Diện tích chuồng bò là $S = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 5 \right) dx = \frac{56}{3} (\text{m}^2)$.

Vậy tổng số tiền ông Bình xây chuồng bò là $\frac{56}{3} \cdot 350000 = \frac{19600000}{3} \approx 6533000$ đồng.

Câu 49. Người ta sản xuất một loại đèn trang trí ngoài trời (*Trụ sở, quảng trường, công viên, sân vườn...*) gồm có hai phần: Phần bóng đèn có dạng mặt cầu bán kính R dm, làm bằng thủy tinh trong suốt; Phần đế bóng đèn làm bằng nhựa để cách điện, có dạng một phần của khối cầu bán kính r dm và thỏa mãn đường kính là một dây cung của hình tròn lớn bóng đèn. Một công viên muốn tạo điểm nhấn ánh sáng, đặt loại bóng có kích thước $R = 5$ dm, $r = 3$ dm. Tính thể tích V phần nhựa để làm đế một bóng đèn theo đơn đặt hàng (*Bỏ qua ống luôn dây điện và bulông ốc trong phần đế*).



A. $V = 36\pi \text{ dm}^3$.

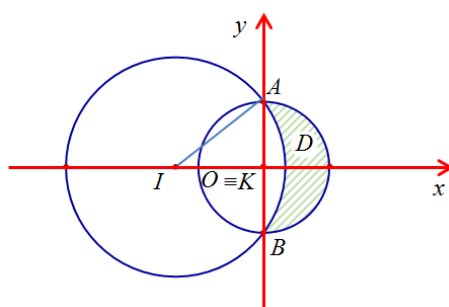
B. $V = \frac{68\pi}{3} \text{ dm}^3$.

C. $V = \frac{14\pi}{3} \text{ dm}^3$.

D. $V = \frac{40\pi}{3} \text{ dm}^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính hình cầu phần bóng đèn và K, r lần lượt là tâm và bán kính của khối cầu để làm đế bóng đèn.

Ta có $R = IA = 5 \text{ dm}$, $r = KA = 3 \text{ dm}$ và đường kính AB vuông góc với đường thẳng nối hai tâm I và K .

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ: Gốc tọa độ $O \equiv K$, trục $Oy \equiv AB$.

Xét tam giác vuông OIA ta có:

$$IK = \sqrt{IA^2 - KA^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow I(-4; 0) \text{ và } KD = R - IK = 5 - 4 = 1.$$

Phương trình đường tròn tâm $K(0; 0)$ bán kính $r = 3$ là $(C_1): x^2 + y^2 = 9$.

Phương trình đường tròn tâm $I(-4; 0)$ bán kính $R = 5$ là $(C_2): (x + 4)^2 + y^2 = 25$.

Gọi V_1 là phần thể tích khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C_1) , trục Ox , $x = 0$ và $x = 3$, ta có:

$$V_1 = \pi \int_0^3 (9 - x^2) dx = \pi \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 18\pi \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Gọi V_2 là phần thể tích khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C_2) , trục Ox , $x = 0$ và $x = 1$, ta có:

$$V_2 = \pi \int_0^1 (25 - (x+4)^2) dx = \pi \left(25x - \frac{(x+4)^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{14\pi}{3} (\text{dm}^3).$$

$$\text{Do đó } V = V_1 - V_2 = 18\pi - \frac{14\pi}{3} = \frac{40\pi}{3} (\text{dm}^3).$$

Câu 50. Một bồn nước **Inox SONHA**[®] ngang có hai đầu bồn là hình phẳng elip. Thể tích tối đa khi đóng nắp bồn là $V_1 = 3000$ lít. Bồn có chiều dài bằng $l = 2,0$ m và gấp 2 lần chiều cao của bồn. Để nước bơm tự động vào bồn, người ta lắp một phao điện sao cho mực nước trong bồn cao $h = 0,75$ m so với điểm thấp nhất trong đáy bồn thì phao đóng không cho nước chảy vào bồn. Tính thể tích nước trong bồn khi phao đóng (*bỏ qua độ dày của bồn nước và kết quả làm tròn đến phần trăm*).



A. $V = 2.41 \text{ m}^3$.

B. $V = 2.43 \text{ m}^3$.

C. $V = 2.40 \text{ m}^3$.

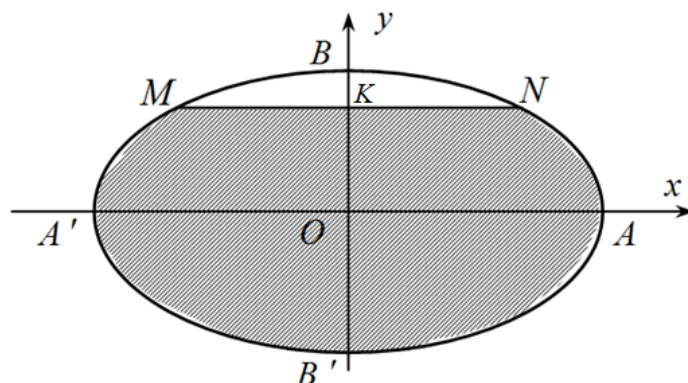
D. $V = 2.44 \text{ m}^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3000 \text{ lít} = 3 \text{ m}^3$.

Xét thiết diện ngang của bồn nước là hình elip (E) có độ dài trục lớn là $2a$, độ dài trục nhỏ là $2b$ và chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Độ dài $BB' = 1$ m là chiều cao của bồn nước, suy ra độ dài trục nhỏ của (E) là

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} (\text{m}).$$

$$\text{Ta có: } V_1 = \pi \cdot a \cdot b \cdot l \Rightarrow a = \frac{V_1}{\pi \cdot b \cdot l} = \frac{3}{\pi \cdot 0,5 \cdot 2} = \frac{3}{\pi} (\text{m}).$$

Vậy phương trình của Elip là:

$$\frac{x^2}{\frac{9}{\pi^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x^2}{\frac{9}{\pi^2}} \right) = \frac{1}{36} (9 - x^2 \pi^2) \Rightarrow y = \pm \frac{1}{6} \sqrt{9 - x^2 \pi^2}.$$

Khi phao điện đóng, mực nước trong bồn là $MN \Rightarrow OK = OB - BK = 0,5 - 0,25 = 0,25 = \frac{1}{4}$.

Vì MN song song với trục Ox nên ta có phương trình MN là $y = \frac{1}{4}$.

Hoành độ điểm M, N thỏa mãn phương trình :

$$\left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{36} (9 - x^2 \pi^2) \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{4\pi^2} \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \Rightarrow x_M = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}; x_N = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Phần diện tích S_2 giới hạn bởi (E) đi qua điểm B và đường thẳng MN là:

$$S_2 = \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \left(\frac{1}{6} \sqrt{9 - x^2 \pi^2} - \frac{1}{4} \right) dx = \frac{\pi}{6} \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \sqrt{\left(\frac{3}{\pi} \right)^2 - x^2} dx - \frac{1}{4} x \Big|_{-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} = \frac{\pi}{6} I - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

$$\text{Xét: } I = \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} \sqrt{\left(\frac{3}{\pi} \right)^2 - x^2} dx. \text{ Đặt } x = \frac{3}{\pi} \sin t \Rightarrow dx = \frac{3}{\pi} \cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \text{ thì } \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3};$$

$$\text{Khi } x = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \text{ thì } \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\pi} \cdot \frac{3}{\pi} \cos^2 t dt = \frac{9}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{9}{2\pi^2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{9}{2\pi^2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{9}{2\pi^2} \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3}{\pi} + \frac{9\sqrt{3}}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_2 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{3}{\pi} + \frac{9\sqrt{3}}{4\pi^2} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}.$$

Thể tích phần không gian **không** chứa nước khi phao đóng là: $V_2 = S_2 \cdot l = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Vậy thể tích nước cần tìm là: $V = V_1 - V_2 = 3 - \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right) \approx 2.41 \text{ (m}^3\text{)}.$