ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2021 - 2022
MÔN TOÁN
Ngày thi : Thứ Bảy 4/12/2021
Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (5 điểm) Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa

$$f(xf(y)+f(x))=f(x)+xy+x+1, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Bài 2. (5 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1=2, u_2=1$ và $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{u_n u_{n-1}}{n}}$ với mọi $n\ge 2$.

Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n := u_1+u_2+...+u_n, \forall n\ge 1$. Chứng minh dãy (v_n) hội tụ.

Bài 3. (5 điểm) Cho p là số nguyên tố, n là số nguyên dương thỏa $2<p<n$. Gọi A là tập hợp các đa thức $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ có tất cả các hệ số thuộc tập $\{1;2;...;n!\}$ và $P(m)$ chia hết cho p với mọi số nguyên dương m.

a) Chứng minh tổng $a_1+a_p+a_{2p-1}+...+a_{1+k(p-1)}$ chia hết cho p với mọi $k=\left[\dfrac{n-1}{p-1}\right]$ (xem $a_n=1$), kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x.
b) Tính số phần tử của A theo n và p.

Bài 4. (5 điểm) Cho tam giác ABC có (I) là đường tròn nội tiếp. Một đường thẳng qua A cắt (I) tại M, N. Gọi T là giao điểm của các tiếp tuyến với (I) tại M, N.

a) Chứng minh rằng nếu AT // BC thì MN đi qua trung điểm K của BC.
b) Gọi D là tiếp điểm của (I) với AB và E là giao điểm của DM với AC. Trên EN lấy điểm F thoả TF vuông góc AI. Chứng minh rằng khi đường thẳng AMN thay đổi, giao điểm P của MF và DN thuộc một đường thẳng cố định.

HẾT

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2021 - 2022
MÔN TOÁN
Ngày thi : Thứ Ba 7/12/2021
Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (5 điểm) Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của chúng là 1. Ta xây dựng

$$y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, y_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Đặt $T = \max_k y_k - \min_k y_k$. Tìm giá trị lớn nhất của T.

Bài 2. (5 điểm) Cho tập X={1; 2; …; 20}. Tập con A của X được gọi là tập "tránh 2" nếu với mọi x, y thuộc A thì $|x-y|$ khác 2. Tìm số các tập con "tránh 2" của X có 5 phần tử.

Bài 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC. Các đường tròn (ABD), (ACD) lần lượt cắt AC, AB tại E, F. Gọi I là tâm đường tròn (AEF).

a) Chứng minh ID vuông góc BC.
b) Gọi H là giao điểm của ID với EF và K là điểm thoả mãn $\angle HBK = \angle HCK = 90°$. Các đường tròn (IBK), (ICK) lần lượt cắt IC, IB tại M, N. Chứng minh tâm J của đường tròn (IMN) thuộc trung trực BC.

Bài 4. (5 điểm) Cho p là số nguyên tố. Với mọi số nguyên a, đặt

$$q := 1 + a + a^2 + ... + a^{p-1}.$$

Chứng minh $(1-a)(1-a^2)...(1-a^{p-1}) - p$ chia hết cho q.

HẾT