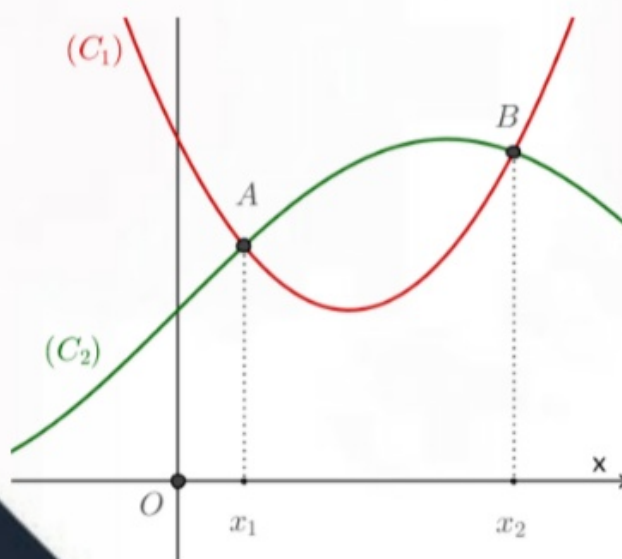


CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG CAO MÔN TOÁN

- ✓ TUYỂN CHỌN CÁC DẠNG HAY - LẠ - KHÓ
- ✓ GIẢI CHI TIẾT TỪNG CÂU
- ✓ ĐẦY ĐỦ CÁC DẠNG HAY XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI



CHUYÊN ĐỀ VẬN DỤNG CAO MÔN TOÁN

LỜI NÓI ĐẦU

Xin chào toàn thể cộng đồng học sinh 2k2!

Đầu tiên, thay mặt toàn thể các Admin group “CHINH PHỤC KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2020” chân thành cảm ơn các em đã đồng hành cùng GROUP trong những ngày tháng vừa qua.

Cuốn sách các em đang cầm trên tay này là công sức của tập thể đội ngũ Admin Group, chính tay các anh chị đã sưu tầm và biên soạn những câu hỏi hay nhất, khó nhất từ các đề thi của các sở, trường chuyên trên cả nước. Thêm vào đó, là những câu hỏi được chính các anh chị thiết kế ý tưởng riêng. Giúp các bạn có thể ôn tập, rèn luyện tư duy để chinh phục 8+ môn Toán trong kì thi sắp tới.

Sách gồm 4 chương của phần Giải tích lớp 12 bao gồm: Hàm số và các bài toán liên quan, Hàm số mũ và Logarit, Nguyên hàm – tích phân và Ứng dụng, Số phức. Đây đủ từng dạng, rất thuận lợi cho các em trong quá trình ôn tập.

Trong quá trình biên soạn, tài liệu không thể tránh được những sai sót, mong bạn đọc và các em 2k2 thông cảm.

Chúc các em học tập thật tốt!

Tập thể ADMIN.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU:.....	3
CHƯƠNG 1: HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN	
CHỦ ĐỀ 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ.....	8
CHỦ ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ.....	16
CHỦ ĐỀ 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.....	33
CHỦ ĐỀ 4: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.....	41
CHỦ ĐỀ 5: ĐỌC ĐỒ THỊ - BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ.....	48
CHỦ ĐỀ 6: TƯƠNG GIAO ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM.....	54
CHỦ ĐỀ 7: BÀI TOÁN TIẾP ĐIỂM – SỰ TIẾP XÚC.....	68
CHỦ ĐỀ 8: CÁC DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI.....	81
CHƯƠNG 2: MŨ VÀ LOGARIT	
CHỦ ĐỀ 1: LŨY THỪA.....	95
CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ LŨ VÀ LOGARIT.....	97
CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ.....	107
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT.....	119
CHỦ ĐỀ 5: CÁC DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI.....	141
CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	
CHỦ ĐỀ 1: MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN.....	150
CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM.....	157
CHỦ ĐỀ 3: TÍCH PHÂN CƠ BẢN.....	164
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN.....	176

CHỦ ĐỀ 5: ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN..... 192

CHỦ ĐỀ 6: CÁC DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI..... 206

CHƯƠNG 4: SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 1: CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC..... 219

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 VỚI HỆ SỐ PHỨC..... 223

CHỦ ĐỀ 3: TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC..... 228

CHỦ ĐỀ 4: MAX – MIN CỦA MODUN SỐ PHỨC..... 237

CHỦ ĐỀ 1: TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0) = \sqrt{3}$ và

$f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)}$, $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $M = 2\sqrt{2}$. B. $m = \frac{5}{2}$, $M = 3$ C. $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $M = \sqrt{3}$. D. $m = \sqrt{3}$, $M = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x) \cdot f'(x) = \cos x \cdot \sqrt{1 + f^2(x)}$

$$\Rightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \cos x \Rightarrow \int \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} dx = \sin x + C$$

Đặt $t = \sqrt{1 + f^2(x)} \Rightarrow t^2 = 1 + f^2(x) \Rightarrow t dt = f(x) \cdot f'(x) dx$.

Thay vào ta được $\int dt = \sin x + C \Rightarrow t = \sin x + C \Rightarrow \sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + C$.

Do $f(0) = \sqrt{3} \Rightarrow C = 2$. Vậy $\sqrt{1 + f^2(x)} = \sin x + 2 \Rightarrow f^2(x) = \sin^2 x + 4 \sin x + 3$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$, xét hàm số $g(t) = t^2 + 4t + 3$ có hoành độ đỉnh $t = -2$ loại.

Suy ra $\max_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g(1) = 8$, $\min_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{4}$.

Suy ra $\max_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $\min_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các hệ số thực và $a \neq 0$. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 \leq 3ac \end{cases}$. B. $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 < 3ac \end{cases}$. C. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 \geq 3ac \end{cases}$. D. $\begin{cases} a > 0 \\ b^2 < 3ac \end{cases}$.

Lời giải

• **Chọn A**

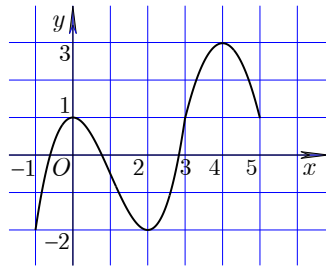
• Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta'_{f'(x)} = b^2 - 3ac$.

• Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3a < 0 \\ \Delta'_{f'(x)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 \leq 3ac \end{cases}.$$

❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình bên.

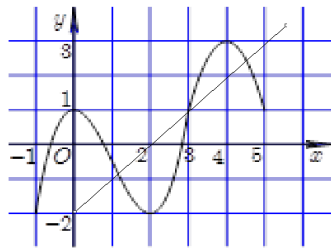
Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng



- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

Lời giải

- **Chọn C**



- Ta có $y = -2f(2-x) + x^2 \Rightarrow y' = -(2-x)' 2f'(2-x) + 2x$
- $y' = 2f'(2-x) + 2x \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) + x < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < (2-x) - 2$.
- Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại hai điểm có hoành độ nguyên liên tiếp là $\begin{cases} 1 < x_1 < 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ và cũng từ đồ thị ta thấy $f'(x) < x - 2$ trên miền $2 < x < 3$ nên $f'(2-x) < (2-x) - 2$ trên miền $2 < 2-x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.
- Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

❖ **VÍ DỤ 4:** Hàm số $y = (x+m)^3 + (x+n)^3 - x^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(m^2 + n^2) - m - n$ bằng

- A. -16. B. 4. C. $-\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3(x+m)^2 + 3(x+n)^2 - 3x^2 = 3[x^2 + 2(m+n)x + m^2 + n^2]$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow mn \leq 0$.

* **Trường hợp 2:** $mn = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$.

Do vai trò của m, n là như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $m = 0$.

$$\Rightarrow P = 4n^2 - n = \left(2n - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16} \quad (1).$$

* **Trường hợp 2:** $mn < 0 \Leftrightarrow m > 0; n < 0$.

Ta có $P = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 4n^2 + (-n) > -\frac{1}{16}(2)$.

Từ (1), (2) ta có $P_{\min} = -\frac{1}{16}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{8}; n = 0$ hoặc $m = 0; n = \frac{1}{8}$.

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
- A. $[-1; +\infty)$ B. $(-\infty; 0]$ C. $[-1; 0]$. D. $[0; 1]$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}$.

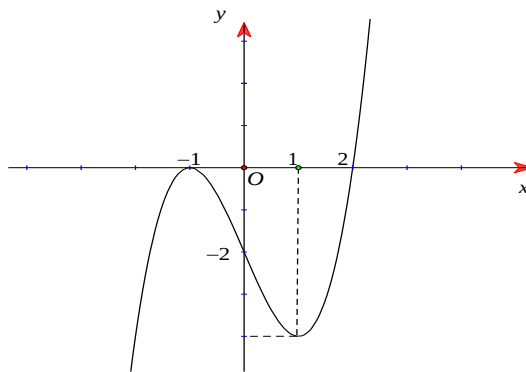
Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗ CD		↘ CT		↗ $+\infty$	

Để hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ thì $(0;1) \subset (m; m+2) \Rightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. xét hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 2$. B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.
 C. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$. D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

CÂU 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

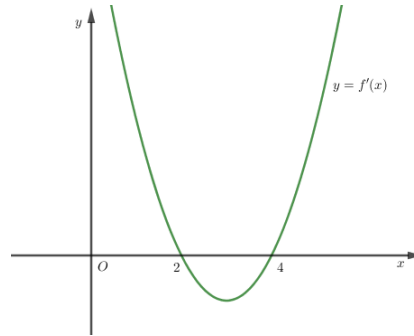
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đối với hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$?

- I. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4; -2)$.
- II. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- III. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm -2 .
- IV. Hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại bằng -3 .

A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

CÂU 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(\sqrt{3}; +\infty)$. B. $(-\sqrt{3}; -1)$. C. $(1; \sqrt{3})$. D. $(0; 1)$.

CÂU 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + mx + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 0$. B. $m \geq -3$. C. $m \geq 0$. D. $m \leq -3$.

CÂU 5: Với tất cả các giá trị thực nào của tham số m thì hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$?

A. $-1 \leq m \leq 0$. B. $-1 < m < 0$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq 0$.

CÂU 6: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m > -1$. B. $m \leq -1$. C. $m \leq 1$. D. $m < 1$.

CÂU 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?

A. 10. B. 8. C. 9. D. 11.

CÂU 8: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2}$ nghịch biến trên $D = [2; +\infty)$.

A. $m \leq -1$. B. $m \geq 0$. C. $m < -1$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

CÂU 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.
- B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

CÂU 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} = \frac{m}{2}$ có nghiệm thực.

A. 3. B. 5. C. 4. D. 2

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

Để thấy $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=2$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$ nên

A. đúng

$f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; 2)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$. B. đúng

$$\text{Ta có } g'(x) = -2x, f'(2-x^2), g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2-x^2=-1 \\ 2-x^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \text{ trong đó } x=\pm\sqrt{3} \text{ là}$$

nghiệm kép, $x=0$ là nghiệm bội bậc 3, do đó, $g'(x)$ chỉ đổi dấu qua $x=0$.

Lại có, $g'(1) = -2, f'(1) = -2, (-4) = 8 > 0$

Ta có BBT

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Từ BBT ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. C. đúng, và D. sai.

CÂU 2: Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}, f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}, f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \text{ và } f(0) = -1, f(2) = -2.$$

Xét hàm số $g(x) = f(2-x) - 2$ ta có $g'(x) = -f'(2-x)$.

$$\text{Giải phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ 2-x=2 \end{cases}.$$

Ta có

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 2-x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow -f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow f'(2-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 0 \\ 2-x > 2 \end{cases} \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}.$$

$$g(0) = f(2-0) - 2 = f(2) - 2 = -4. \quad g(2) = f(2-2) - 2 = f(0) - 2 = -3.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên I sai.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$ nên II sai.

Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2$ nên III sai.

Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=2$ và $g_{CB} = g(0)$ nên IV đúng.

CÂU 3: Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \left[f(1+x^2) \right]' = 2x \cdot f'(1+x^2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x^2=2 \\ 1+x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Mặt khác ta có

$$f'(1+x^2) < 0 \Leftrightarrow 2 < 1+x^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(1+x^2)$	+	0	-	0	+	0	+
y'	-	0	+	0	-	0	+

Vậy hàm số $y = f(1+x^2)$ nghịch biến trên khoảng $(1; \sqrt{3})$.

CÂU 4: Chọn D

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + m.$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x + m \leq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x, \forall x \in (0; +\infty) (*).$$

Xét hàm số $y = g(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0; +\infty)$.

$$g'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó.

$$(*) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in (0; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \leq -3.$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		0	-3	$+\infty$

CÂU 5: Chọn A

Xét hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases} (m < m+2, \forall m).$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		m		$m+2$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$						$+\infty$

Theo Bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [0;1]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

CÂU 6: Chọn B

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m = 3(-x^2 + 2x + m)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ cũng tương đương hàm số nghịch trên $[0; +\infty)$ khi chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = f(x) \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0; +\infty)} f(x) = f(1) = -1$$

CÂU 7: Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đạo hàm: $y' = 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên $[5; +\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 4$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$. Ta có: $f(5) = 8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y	$+\infty$				8		$+\infty$

Do $(x-2)^2 > 0$ với mọi $x \in [5; +\infty)$ nên $y' \geq 0, \forall x \in [5; +\infty)$ khi và chỉ khi $f(x) \geq -m, \forall x \in [5; +\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m \leq 8 \Leftrightarrow m \geq -8$.

Mà m nguyên âm nên ta có: $m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$

CÂU 8: Chọn A

Ta có: $y = mx + (m+1)\sqrt{x-2} \Rightarrow y' = m + \frac{m+1}{2\sqrt{x-2}}, y'$ xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

Nhận xét: khi x nhận giá trị trên $(2; +\infty)$ thì $\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ nhận mọi giá trị trên $(0; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow (m+1)t + m \leq 0, \forall t \in (0; +\infty)$ (đặt $t = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \leq 0 \\ m + (m+1) \cdot 0 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

CÂU 9: Chọn A

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)$.

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 2)$.

$$g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f'(x^2 - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ f'(x^2 - 2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - 2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 2 \text{ hoặc } x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}.$$

Như vậy đáp án B, C đều đúng và đáp án A sai. Tương tự chứng minh được đáp án D đúng.

CÂU 10: Chọn A

Không mất tính tổng quát ta chỉ xét phương trình trên $[-\pi; \pi]$.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 1 + 2\sin x \geq 0 \\ 1 + 2\cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2 + 2(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{1 + 2\cos x}\sqrt{1 + 2\sin x} = \frac{m^2}{4} \quad (*) \quad (m > 0).$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \text{ với } x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right] \text{ thì } \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12} \leq t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right].$$

Mặt khác, ta lại có $t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

$$\text{Do đó } (*) \Rightarrow 2 + 2t + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1} = \frac{m^2}{4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 2t + 2 + 2\sqrt{2t^2 + 2t - 1}, t \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \sqrt{2}\right] \text{ có } f'(t) = 2 + \frac{4t+2}{\sqrt{2t^2 + 2t - 1}} > 0$$

t	$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \sqrt{2}$
$f'(t)$	+
$f(t)$	$4(\sqrt{2}+1)$ $\sqrt{3}+1$ 

Từ bảng biến thiên, ta kết luận rằng phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{3}+1 \leq \frac{m^2}{4} \leq 4(\sqrt{2}+1) \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{\sqrt{3}+1} \leq m \leq 4\sqrt{\sqrt{2}+1}. \text{ Vậy có 3 giá trị của } m.$$

CHỦ ĐỀ 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

❖ **VÍ DỤ 1:** Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có 2 điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2;-14)$. Tính $f(1)$.

- A. $f(1) = -5$. B. $f(1) = 0$. C. $f(1) = -6$. D. $f(1) = 7$.

Lời giải:

Chọn A

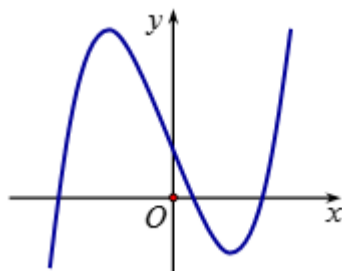
Tập xác định $D = \mathbb{R}$, $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Đồ thị hàm số qua $A(0;2)$, $B(2;-14) \Rightarrow \begin{cases} c = 2 & (1) \\ 16a + 4b + c = -14 & (2) \end{cases}$.

Hàm số đạt cực trị tại $B(2;-14) \Rightarrow 32a + 4b = 0$ (3).

Giải (1);(2);(3), ta được $a = 1$, $b = -8$, $c = 2 \Rightarrow f(x) = x^4 - 8x^2 + 2 \Rightarrow f(1) = -5$.

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

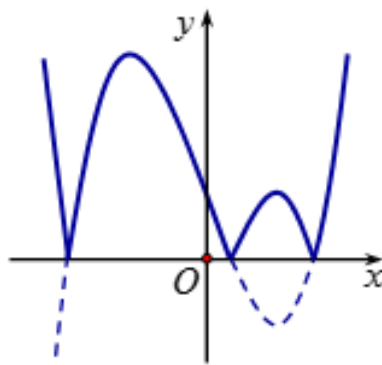


- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị hàm $y = |f(x)|$ như hình vẽ sau:



Từ đồ thị ta thấy ngay đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị.

❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $f(x) = (m^{2018} + 1)x^4 + (-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3)x^2 + m^{2018} + 2018$, với m là tham số. Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2017|$.

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(x) - 2017$.

Ta có $g'(x) = f'(x) = 4(m^{2018} + 1)x^3 + 2(-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3)x$.

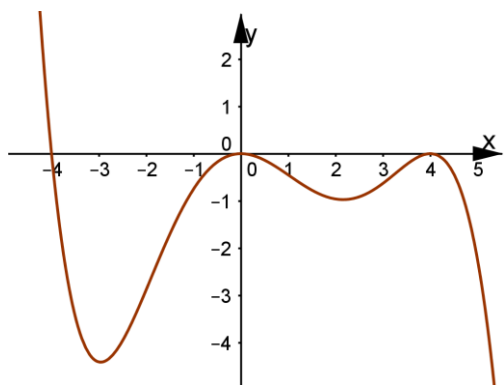
$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} = \frac{2m^{2018} + 2^{2018}m^2 + 3}{4(m^{2018} + 1)} \end{cases}$$

Nhận xét $\frac{2m^{2018} + 2^{2018}m^2 + 3}{4(m^{2018} + 1)} > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = f(x) - 2017$ luôn có 3 cực trị.

Nhận xét $f(1) = (m^{2018} + 1) + (-2m^{2018} - 2^{2018}m^2 - 3) + m^{2018} + 2018$.

Do đó $g(1) = -2^{2018}m^2 - 1 < 0 \quad \forall m$. Suy ra hàm số $g(x)$ luôn có ba cực trị trong đó có hai cực tiểu nằm bên dưới trục Ox nên hàm số $y = |f(x) - 2017|$ có 7 cực trị.

❖ **VÍ DỤ 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ bên. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = 0$ tại 3 điểm $x_1 < x_2 = 0 < x_3$. Mà $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua x_1 nên $y = f(x)$ chỉ có một cực trị.

❖ **VÍ DỤ 5 :** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(0; 2018\pi)$?

A. 2019.

B. 1.

C. 2017.

D. 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$; $F'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cos x - \sin x = 0, (x \neq 0) \quad (1)$

Ta thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $(1) \Leftrightarrow x = \tan x$ (2).

Xét $g(x) = x - \tan x$ trên $(0; 2018\pi) \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}^+$

có $g'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leq 0, \forall (0; 2018\pi) \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}^+.$

+ Xét $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x) < g(0) = 0$ nên phương trình $x = \tan x$ vô nghiệm.

+ Vì hàm số $\tan x$ có chu kỳ tuần hoàn là π nên ta xét $g(x) = x - \tan x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Do đó $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ và $g(\pi) \cdot g\left(\frac{23}{16}\pi\right) < 0$ nên phương trình $x = \tan x$ có duy nhất một nghiệm x_0 .

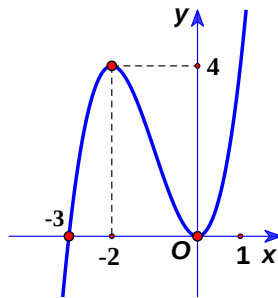
Do đó, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4035}{2}\pi\right)$ có 2017 khoảng rời nhau có độ dài bằng π . Suy ra phương trình $x = \tan x$ có 2017 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{4035}{2}\pi\right)$.

+ Xét $x \in \left(\frac{4035\pi}{2}; 2018\pi\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x) > g(2018\pi) = 2018\pi$ nên phương trình $x = \tan x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $F'(x) = 0$ có 2017 nghiệm trên $(0; 2018\pi)$. Do đó đồ thị hàm số $y = F(x)$ có 2017 điểm cực trị trong khoảng $(0; 2018\pi)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có dạng như hình vẽ:



Hỏi đồ thị hàm số $y = |x^3 + 3x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

CÂU 2: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}, x > 0$.

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 5$.

CÂU 3: Cho 2 số thực không âm x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Giá trị lớn nhất của $S = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$ là :

- A. 0. B. 1. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.

CÂU 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{\sqrt{x^2+1}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.

A. Không có giá trị m .

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -3$.

CÂU 5: Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{mx+5}{x-m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -7 .

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 5$.

CÂU 6: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx}{x^2+1}$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2;2]$?

A. $m > 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m < 0$.

CÂU 7 : Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$.

A. $m > 1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $m > 2$.

D. $0 < m < 1$.

CÂU 8: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ trên $[0;2]$.

A. $m = 3$.

B. $m = -3$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

CÂU 9: Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{m^2x+1}{x-1}$ trên đoạn $[-2;-1]$ bằng 4 ?

A. $m = \pm 3$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $m = \frac{\pm\sqrt{26}}{2}$.

D. $m = \pm 9$.

CÂU 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (k^2 - k + 1)x$ trên đoạn $[-1; 2]$. Khi k thay đổi trên $\mathbb{R}$, giá trị nhỏ nhất của $M - m$ bằng.

A. $\frac{33}{4}$.

B. 12 .

C. $\frac{45}{4}$.

D. $\frac{37}{4}$.

CÂU 11: Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba cực trị là $-2, -1$ và 0 . Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

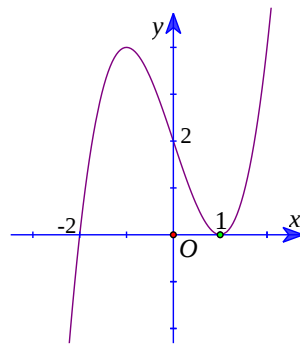
A. 3 .

B. 4 .

C. 5 .

D. 6 .

CÂU 12 : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



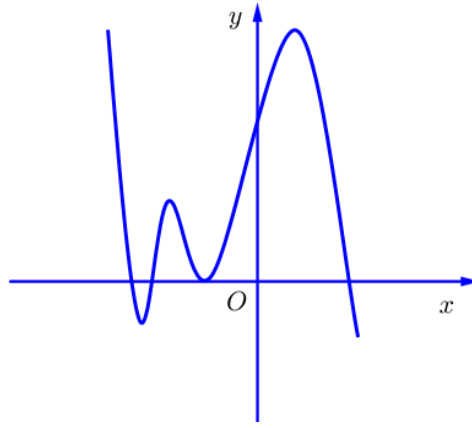
A. 4 .

B. 2 .

C. 5 .

D. 3 .

CÂU 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

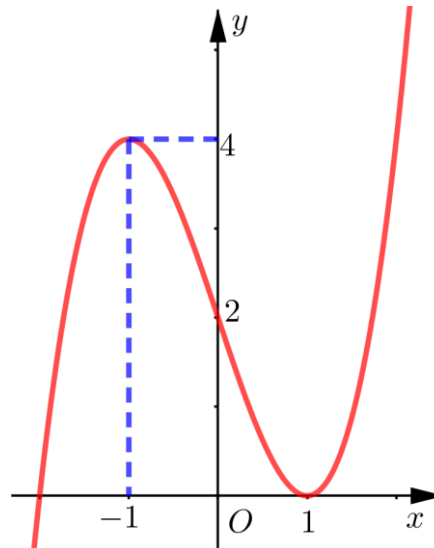
CÂU 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^3(x+1)^2(2-x)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

CÂU 15 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 - 1)(x - \sqrt{3})^2$. Số điểm cực trị của hàm số này là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

CÂU 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

CÂU 17: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị là.

- A. 2016. B. 1952. C. -2016. D. -496.

CÂU 18: Cho hàm số $y = |x|^3 - mx + 5$, ($m > 0$) với m là tham số. Hỏi hàm số trên có thể có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

CÂU 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $|f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

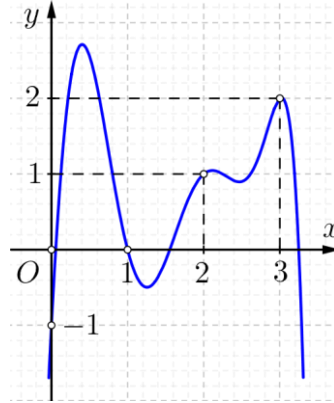
- A. 9. B. 2018. C. 2022. D. 11.

CÂU 20. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a > 0$ và $\begin{cases} d > 2018 \\ a + b + c + d - 2018 < 0 \end{cases}$.

Số cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2018|$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 5.

CÂU 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = |2f(x) - (x-1)^2|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7

CÂU 22: Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với m, n là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases}$.

Tìm số cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$.

- A. 2. B. 9. C. 11. D. 5.

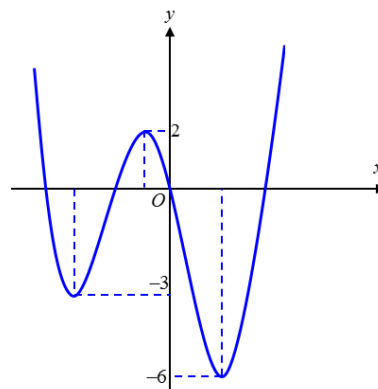
CÂU 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

CÂU 24: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$

có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng:

- A. 7. B. 6. C. 5. D. 9.

CÂU 25: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

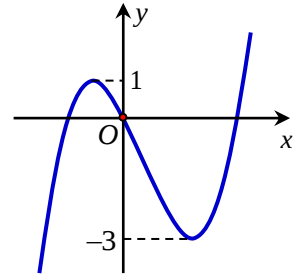
$$y = |f(x) + m| \text{ có ba điểm cực trị là}$$

A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

D. $1 \leq m \leq 3$.



CÂU 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15.

B. 17.

C. 16

D. 18

CÂU 27: Cho hàm số $f(x) = x^3 - mx + 2$, m là tham số. Biết rằng đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là a, b, c . Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(c)}$

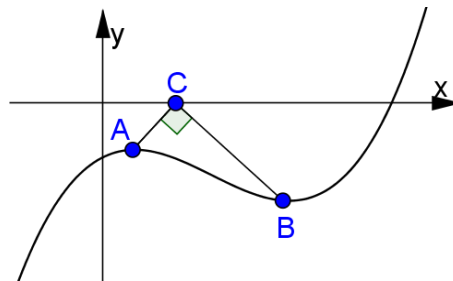
A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $29 - 3m$.

D. $3 - m$.

CÂU 28: Xác định các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx - m$ có các điểm cực đại và cực tiểu A và B sao cho tam giác ABC vuông tại C trong đó tọa độ điểm $C\left(\frac{2}{3}; 0\right)$?



A. $m = \frac{1}{3}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{1}{6}$.

D. $m = \frac{1}{4}$

CÂU 29: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các số m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là:

A. $-\frac{2}{17}$.

B. $\frac{4}{17}$.

C. $\frac{14}{17}$.

D. $\frac{20}{17}$.

CÂU 30: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+3$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành một tam giác và một hình thang biết rằng tỉ số diện tích tam giác nhỏ được chia ra và diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{9}$.

A. $m = \frac{1+\sqrt{15}}{2}$.

B. $m = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

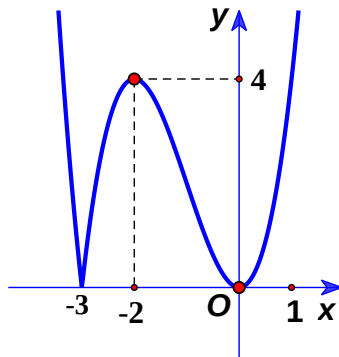
D. $m = \frac{-1+\sqrt{15}}{2}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn A

$$\text{Ta có: } y = |x^3 + 3x^2| = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{khi } x^3 + 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \\ -x^3 - 3x^2 & \text{khi } x^3 + 3x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \end{cases} = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{khi } x \geq -3 \\ -x^3 - 3x^2 & \text{khi } x < -3 \end{cases}.$$

Nên ta lấy phần đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ khi $x < -3$.



Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

CÂU 2: Chọn B

$$y = x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 3, \text{ dấu bằng đạt được khi } x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1.$$

CÂU 3: Chọn B

$$\text{Do } x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x.$$

$$\text{Xét } S_{(x)} = \frac{x}{1-x+1} + \frac{1-x}{x+1} = \frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{x+1} \text{ với } x \in [0;1].$$

$$S' = \frac{-1}{(2-x)^2} + \frac{-2}{(x+1)^2} < 0 \text{ với } x \in [0;1].$$

$$\text{Suyra } \text{Max} S = S(0) = 1.$$

CÂU 4: Chọn B

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R}, y' = \frac{1-mx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Vì hàm số liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên để hàm số đạt GTLN tại $x=1$, điều kiện cần là $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 1-m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Khi đó ta lập bảng biến thiên và hàm số đạt GTLN tại $x=1$.

CÂU 5: Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{m\}.$$

$$f'(x) = \frac{-m^2-5}{(x-m)^2} < 0 \forall x \in D \text{ nên } f(x) \text{ nghịch biến trên } D.$$

$$\text{Do đó } \min_{[0;1]} f(x) = f(1) = -7 \Leftrightarrow \frac{m+5}{1-m} = -7 \Leftrightarrow m = 2.$$

CÂU 6: Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{m(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vì hàm số đã cho liên tục và xác định nên ta có hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại $x=1$ trên đoạn $[-2; 2]$ khi.

$$y(1) > y(-2); y(1) > y(2); y(1) > y(-1) \text{ hay } m > 0.$$

CÂU 7 : Chọn D

Điều kiện: $x \neq -m$. Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$.

Do hệ số x^2 là số dương và theo yêu cầu đề bài ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_0'	$-m$	0	x_0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		$-\infty$	$+\infty$		CT	$+\infty$

Cho $y' = 0$ có nghiệm $-m-1$ và $-m+1$ nên $x_0 = -m+1$.

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Kết hợp điều kiện để hàm số liên tục trên $[0; 2]$ thì $-m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Ta có giá trị m cần tìm là $0 < m < 1$.

CÂU 8: Chọn C

Ta có, $y' = \frac{m^2 + 1}{(x+m)^2} > 0, \forall x \neq -m$. Suy ra, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Để hàm

số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ trên $[0; 2]$ thì.

$$\begin{cases} -m \notin [0; 2] \\ y(2) = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin [0; 2] \\ \frac{2m-1}{m+2} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1..$$

CÂU 9: Chọn A

Ta có : $f'(x) = \frac{-m^2 - 1}{(x-1)^2} < 0 \forall x \neq 1$ hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; -1]$ nên giá trị nhỏ nhất

$$\text{của } f(x) = 4 \Leftrightarrow f(-1) = 4 \Leftrightarrow \frac{-m^2 + 1}{-1-1} = 4 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

CÂU 10: Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 + k^2 - k + 1 = 3x^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Nên hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow \\ M = y(2) = 8 + 2(k^2 - k + 1) \\ m = y(-1) = -1 - (k^2 - k + 1). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M - m = 9 + 3(k^2 - k + 1) = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{4} \geq \frac{45}{4}.$$

CÂU 11: Chọn A

$$\text{Vì hàm số } y = f(x) \text{ có đúng ba cực trị là } -2, -1 \text{ và } 0 \text{ nên } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \\ x = 0 \end{cases}$$

(Cả 3 nghiệm này đều là nghiệm đơn theo nghĩa $f'(x)$ đổi dấu khi qua ba nghiệm này)

Ta có: $y' = \left(f(x^2 - 2x) \right)' = (2x - 2) f'(x^2 - 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 = 0 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

(Cả 3 nghiệm này cũng đều là nghiệm đơn theo nghĩa y' đổi dấu khi qua ba nghiệm này)

Vậy hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 3 cực trị.

Chú ý: Ta có thể chọn $f'(x) = x(x+1)(x+2)$ nhận $-2, -1$ và 0 làm nghiệm đơn.

Khi đó: $y' = \left(f(x^2 - 2x) \right)' = (2x - 2) f'(x^2 - 2x) = (2x - 2)(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 2)$

Rõ ràng từ đây dễ dàng kiểm tra về tính cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$.

CÂU 12 : Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \left[f(x^2 - 3) \right]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Do đó hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

CÂU 13: Chọn D

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu 3 lần.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

CÂU 14: Chọn D

Ta có $f'(x) = x^3(x+1)^2(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

Mặt khác $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua $x=0$ và $x=2$ nên hàm số có 2 điểm cực trị.

CÂU 15 : Chọn B

$$f'(x) = (x^2 - 1)(x - \sqrt{3})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng xét dấu y'

x	-1		1		$\sqrt{3}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Do đó số điểm cực trị của hàm số là 2.

CÂU 16: Chọn D

Ta có: $y' = f'(x) - 5$; $y = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$. Dấu đạo hàm sai y'

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f'(x) = 5$ có nghiệm duy nhất và đó là nghiệm đơn.

Nghĩa là phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi qua nghiệm này.

Vậy hàm số $y = f(x) - 5x$ có một điểm cực trị.

CÂU 17: Chọn A

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{m}{2}$		$\frac{m}{2}-32$		$+\infty$

Do $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ nên

* Nếu $\frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 > 3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	-1	3	x_0	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	
y	$+\infty$		$-\frac{m}{2}$		$-\frac{m}{2}+32$		0	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

* Nếu $\frac{m}{2} - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 64$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 < -1$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	x_0	-1	3	$+\infty$		
y'		$-$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	$\frac{m}{2}$		$\frac{m}{2}-32$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

* Nếu $\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m}{2} - 32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 64$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} = 0$ có ba nghiệm $x_1; x_2; x_3$

với $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

	$-\infty$	x_1	-1	x_2	3	x_3	$+\infty$				
y'		-		+	0	-		+			
y	$+\infty$				$\frac{m}{2}$			$32-\frac{m}{2}$			$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{63(1+63)}{2} = 2016$.

CÂU 18: Chọn A

Ta có: $y = |x|^3 - mx + 5 = \begin{cases} x^3 - mx + 5 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^3 - mx + 5 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Nên $y' = \begin{cases} 3x^2 - m & \text{nếu } x > 0 \\ -3x^2 - m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Bởi thế với $m > 0$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m}{3}}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\sqrt{\frac{m}{3}}$	$+\infty$	
y'		-	-	0	+
y					

Như vậy, hàm số chỉ có một điểm cực trị.

CÂU 19: Chọn A

Ta có $f'(x) = x^3(x-2)(x^2-2) = 0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y = f(x)$ có 4 cực trị. Suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó $y = |f(1-2018x)|$ có tối đa 9 cực trị.

CÂU 20. Chọn D

Ta có hàm số $g(x) = f(x) - 2018$ là hàm số bậc ba liên tục trên $\mathbb{R}$

Do $a > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Đề ý $g(0) = d - 2018 > 0$; $g(1) = a + b + c + d - 2018 < 0$

Nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\mathbb{R}$. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x) - 2018|$ có đúng 5 cực trị.

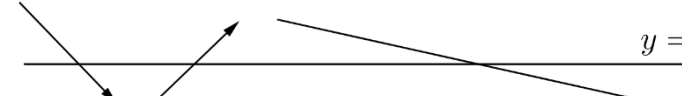
CÂU 21:

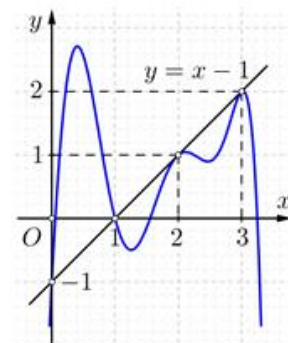
Chọn B

Xét hàm số $h(x) = 2f(x) - (x-1)^2$, ta có $h'(x) = 2f'(x) - 2(x-1)$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$.

Lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	-
$h(x)$	$+\infty$						$-\infty$

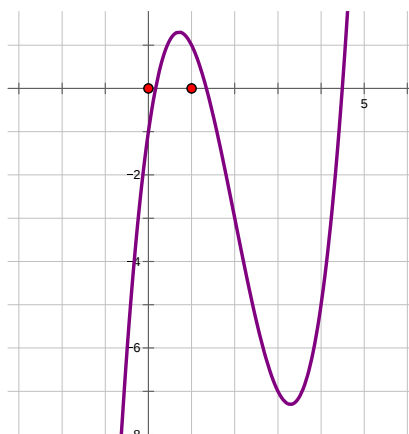


Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm $y = h(x)$ có 2 điểm cực trị. Đồ thị hàm số $g(x) = |h(x)|$ nhận có tối đa 5 điểm cực trị.

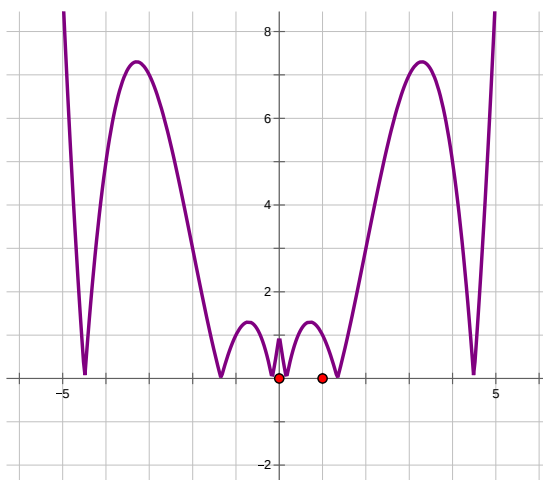
CÂU 22: Chọn C

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = m + n > 0 \\ f(2) = 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases} \quad \cdot \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Khi đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng như sau:



Đồ thị $y = |f(|x|)|$ có dạng như sau.



Vậy số cực trị của hàm số $y = |f(|x|)|$ là 11..

CÂU 23: Chọn B

$$\text{Ta có } y' = (x^2 - 2x)' f'(x^2 - 2x) = (2x - 2) f'(x^2 - 2x)$$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Từ bảng xét dấu ta thấy } f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } f'(x^2 - 2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < -2 \\ x^2 - 2x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \\ x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	3	$+\infty$
$2x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2 - 2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$	0
$(2x - 2)f'(x^2 - 2x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$	0
$y = f(x^2 - 2x)$							

CÂU 24: Chọn A

Ta có: hàm số $y = f(x + 2018)$ có đồ thị là đồ thị hàm số $y = f(x)$ tịnh tiến sang trái 2018 đơn vị;

Hàm số $y = f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2$ có đồ thị là đồ thị hàm số $y = f(x + 2018)$ tịnh tiến lên trên $\frac{1}{3}m^2$ đơn vị.

Hàm số $y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có đồ thị gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2$ phần phía trên Ox .

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2$ phía dưới trục Ox qua Ox .

Đồ thị hàm số $y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow 3 \leq \frac{1}{3}m^2 < 6 \Leftrightarrow 9 \leq m^2 < 18 \Leftrightarrow 3 \leq m < 3\sqrt{2} \text{ (do } m \in \mathbb{Z}^+) \text{ suy ra: } m \in \{3; 4\} \Rightarrow S = \{3; 4\}.$$

Vậy tổng cần tìm bằng 7.

CÂU 25: Chọn A

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ gồm hai phần:

- Phần 1 là phần đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục hoành;

- Phần 2 là phần đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đã cho hình bên ta suy ra dạng đồ thị của hàm số $y = f(x) + m$. Khi đó hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ và trục hoành tại nhiều nhất hai điểm chung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m \leq 0 \\ -3+m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}.$$

CÂU 26: Chọn A

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

CÂU 27: Chọn A

Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - mx + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là a, b, c khi $m > 3$.

Theo định lý vi-et ta có:
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + bc + ca = -m. \\ abc = -2 \end{cases} \quad (1)$$

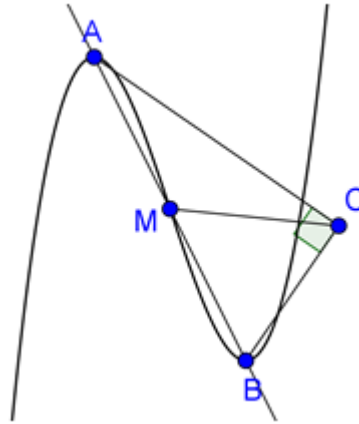
Ta có $f'(x) = 3x^2 - m$, $\Rightarrow \begin{cases} f'(a) = 3a^2 - m \\ f'(b) = 3b^2 - m \\ f'(c) = 3c^2 - m \end{cases}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(c)} = \frac{f'(a)f'(b) + f'(b)f'(c) + f'(c)f'(a)}{f'(a)f'(b)f'(c)} \\ &= \frac{9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 6m(a^2 + b^2 + c^2) + 3m^2}{(3a^2 - m)(3b^2 - m)(3c^2 - m)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Mặt khác ta có:
$$\begin{cases} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \\ a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:
$$P = \frac{9(-m)^2 - 6m(-2m) + 3m^2}{(3a^2 - m)(3b^2 - m)(3c^2 - m)} = 0.$$

CÂU 28: Chọn B



Ta có tam giác ABC vuông tại C nên gọi M là điểm uốn của đồ thị hàm số đồng thời là trung điểm của AB . Khi đó tam giác vuông có đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền do vậy ta có phương trình sau: $MC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\sqrt{(x_2+x_1)^2 - 4x_1x_2}$ (*). Thay số:

- Hệ số góc đường thẳng qua hai cực trị: $p = \frac{2}{3}(m-1)$.
- Ta có: $y' = x^2 - 2x + m \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 = 2 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$.
- Tọa độ điểm uốn $M\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ (Chú ý điểm uốn $x = -\frac{b}{3a}$).
- Vậy ta có: (*) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4}{9}(m-1)^2}\sqrt{4-4m} \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$.

CÂU 29: Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3m^2 - 3 = 3[(x-m)^2 - 1]$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = m-1 \end{cases}$.

Do đó, hàm số luôn có hai cực trị với mọi m .

Giả sử $A(m+1; -4m-2)$; $B(m-1; -4m+2)$. Ta có $AB = 2\sqrt{5}$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, vì ΔIAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \sqrt{5}$ nên từ $\frac{AB}{\sin AIB} = 2R$ suy ra

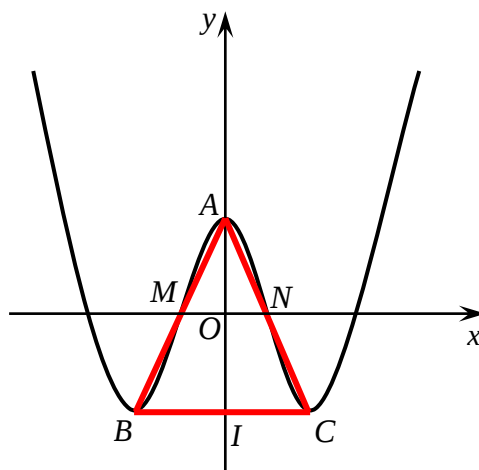
$$\sin AIB = \frac{AB}{2R} = 1 \Rightarrow AIB = 90^\circ \text{ hay } \Delta AIB \text{ vuông tại } I.$$

Gọi M là trung điểm AB , ta có $M(m; -4m)$ và $IM = \frac{1}{2}AB \Leftrightarrow IM^2 = \frac{AB^2}{4} = 5$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 + (-4m+2)^2 = 5 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}.$$

Tổng tất cả các số m bằng $1 + \frac{3}{17} = \frac{20}{17}$.

CÂU 30: Chọn A



Để hàm số có 3 cực trị thì $a.b < 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow y = 2m+3 \\ x = \pm(m+1) & \Rightarrow y = 2-m^2 \end{cases}$$

Do trục hoành cắt tam giác ABC nên $\Rightarrow 2m+3 > 0; 2-m^2 < 0$

Gọi M, N là giao điểm của trục Ox và 2 cạnh AB, AC .

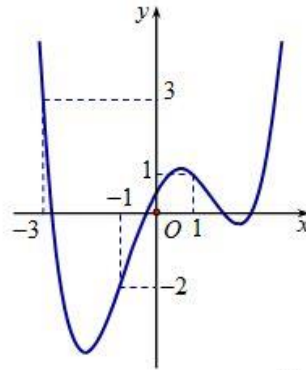
Ta có $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \left(\frac{AO}{AI}\right)^2 = \frac{4}{9}$ với I là trung điểm BC .

$$\text{Suy ra } \frac{AO}{AI} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{(m+1)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$$

Do điều kiện $m > -1$ nên chọn $m = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}$.

CHỦ ĐỀ 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

Căn cứ vào đồ thị $y = f'(x)$, ta có: $\begin{cases} f'(-1) = -2 \\ f'(1) = 1 \\ f'(-3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(-1) = 0 \\ g'(1) = 0 \\ g'(-3) = 0 \end{cases}$

Ngoài ra, vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ bên, ta thấy (P) đi qua các điểm $(-3;3)$, $(-1;-2)$, $(1;1)$ với đỉnh $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{33}{16}\right)$. Rõ ràng

o Trên khoảng $(-1;1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1;1)$

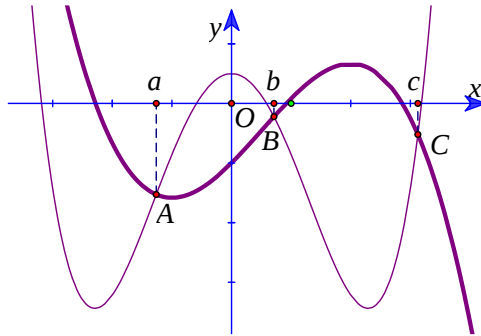
o Trên khoảng $(-3;-1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$, nên $g'(x) < 0 \quad \forall x \in (-3;-1)$

Từ những nhận định trên, ta có bảng biến thiên của hàm $y = g(x)$ trên $[-3;1]$ như sau:

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Vậy $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$?



- A. $\min_{[a;c]} h(x) = h(0)$. B. $\min_{[a;c]} h(x) = h(a)$. C. $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$. D. $\min_{[a;c]} h(x) = h(c)$.

Chọn C

Giải:

$$\text{Ta có } h'(x) = f'(x) - g'(x), h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$$

Trên miền $b < x < c$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $y = g'(x)$ nên $f'(x) - g'(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0, \forall x \in (b; c)$.

Trên miền $a < x < b$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $y = g'(x)$ nên $f'(x) - g'(x) < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.

Bảng biến thiên

x	a	b	c
h'	-	0	+
h	$h(a)$	$h(b)$	$h(c)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$.

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ với a, b là tham số thực. Khi hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4(a^2 + b^2) - (a+b) - ab$.

- A. $\text{Min} A = -2$. B. $\text{Min} A = -\frac{1}{16}$. C. $\text{Min} A = -\frac{1}{4}$. D. $\text{Min} A = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x^3 + 3(a+b)x^2 + 3(a^2 + b^2)x + a^3 + b^3 \Rightarrow y' = 3x^2 + 6(a+b)x + 3(a^2 + b^2)$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow ab \leq 0 \Leftrightarrow -ab \geq 0$

Ta có $A = 4(a^2 + b^2) - (a+b) - ab = \left[2(a+b) - \frac{1}{4}\right]^2 - 9ab - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}$.

$$\text{Vậy } \min A = -\frac{1}{16} \text{ khi } \begin{cases} a, b = 0 \\ a+b = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{8} \\ a = \frac{1}{8} \\ b = 0 \end{cases}.$$

❖ **VÍ DỤ 4:** Gọi M, m lần lượt là giá lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

A. $M = 2, m = \frac{1}{2^{1008}}$. **B.** $M = 1, m = \frac{1}{2^{1009}}$. **C.** $M = 1, m = 0$. **D.** $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = \sin^{2018} x + \cos^{2018} x = (\sin^2 x)^{1009} + (1 - \sin^2 x)^{1009}$.

Đặt $t = \sin^2 x, 0 \leq t \leq 1$ thì hàm số đã cho trở thành $y = t^{1009} + (1-t)^{1009}$.

Xét hàm số $f(t) = t^{1009} + (1-t)^{1009}$ trên đoạn $[0;1]$.

Ta có: $f'(t) = 1009t^{1008} - 1009(1-t)^{1008} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1009t^{1008} - 1009(1-t)^{1008} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1008} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-t}{t} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ Mà } f(1) = f(0) = 1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}.$$

Suy ra $\max_{[0;1]} f(t) = f(0) = f(1) = 1, \min_{[0;1]} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{1008}}$. Vậy $M = 1, m = \frac{1}{2^{1008}}$.

❖ **VÍ DỤ 5:** Cho hàm số $f(x) = |8\cos^4 x + a\cos^2 x + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a+b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a+b = -7$. **B.** $a+b = -9$. **C.** $a+b = 0$. **D.** $a+b = -8$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cos^2 x, t \in [0;1]$, ta có hàm số $g(t) = |8t^2 + at + b|$. Khi đó $M = \max_{[0;1]} g(t)$. Do đó

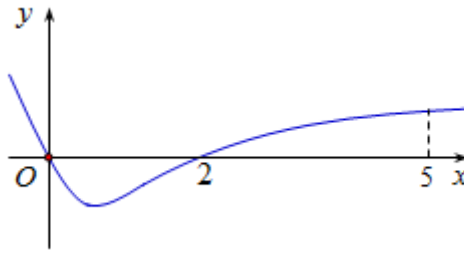
$$M \geq g(0) = |b|; M \geq g(1) = |8+a+b|; M \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|2 + \frac{1}{2}a + b\right| \Rightarrow 2M \geq |4+a+2b|;$$

Từ đó ta có: $4M \geq |b| + |8+a+b| + |-4-a-2b| \geq |b + (8+a+b) + (-4-a-2b)| = 4$. Hay $M \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|b| = |8+a+b| = \frac{|-4-a-2b|}{2} = 1$ và $b, (8+a+b), (-4-a-2b)$ cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$. Khi đó $a+b = -7$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

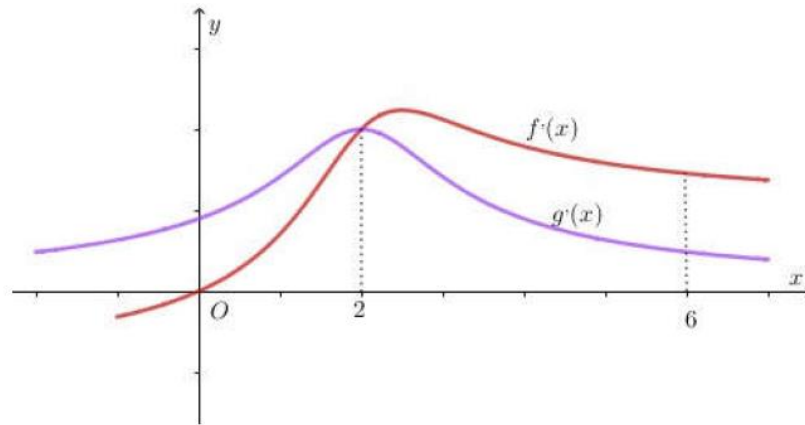
CÂU 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là

- A. $f(0), f(5)$. B. $f(2), f(0)$. C. $f(1), f(5)$. D. $f(2), f(5)$.

CÂU 2: Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là:

- A. $h(6), h(2)$. B. $h(2), h(6)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

CÂU 3: Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(2017 + \sqrt{2019 - x^2})$ trên tập xác định của nó. Tính $M - m$.

- A. $\sqrt{2019} + \sqrt{2017}$. B. $2019\sqrt{2019} + 2017\sqrt{2017}$.
C. 4036. D. $4036\sqrt{2018}$.

CÂU 4: Cho hàm số $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$, trong đó a , b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. $a < 0, b < 0$ B. $a > 0, b > 0$ C. $a < 0, b > 0$ D. $a > 0, b < 0$

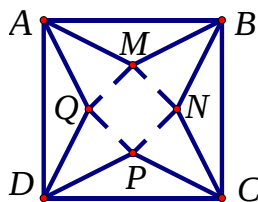
CÂU 5: Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a , b là tham số. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

- A. 3. B. 4. C. -4. D. 2.

CÂU 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx + 4}{x - m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 4]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 4)$.

- A. $m > 2$. B. $0 < m < 2$. C. $-2 < m < 0$. D. $-2 < m < 2$.

CÂU 7: Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $MA^2 = MB^2 + MC^2$, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , $R=3$, CPD và DQA . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều. Hỏi cạnh đáy của khối chóp bằng bao nhiêu để thể tích của nó là lớn nhất?



- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ dm. B. $\left(2 + \frac{3n}{2}\right) \cdot 2^n = 1600$. C. $2\sqrt{2}$ dm. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ dm.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

Từ đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 5]$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Suy ra $\max_{[0; 5]} f(x) = f(2)$.

x	0	2	5
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$			

CT

Từ giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ nên $f(5) + f(2) - f(3) = f(0)$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2; 5]$ nên $f(3) > f(2)$ hay $f(2) - f(3) < 0$, suy ra

$$f(0) = f(5) + f(2) - f(3) < f(5)$$

Vậy $\max_{[0; 5]} f(x) = f(5)$.

CÂU 2: Chọn A

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	0	2	6
$h'(x)$		0	
	-		+
$h(x)$	$h(0)$	$h(2)$	$h(6)$

$$\text{Và } f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6).$$

$$\text{Hay } h(0) < h(6).$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; 6]} h(x) = h(6); \min_{[0; 6]} h(x) = h(2).$$

CÂU 3: TXĐ: $D = [-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= 2017 + \sqrt{2019 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} \\ \Rightarrow y' = 0 &\Leftrightarrow 2017 + \sqrt{2019 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2017\sqrt{2019 - x^2} + 2019 - 2x^2}{\sqrt{2019 - x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Trên D , đặt $t = \sqrt{2019 - x^2}$, $t \geq 0$. Ta được:

$$2t^2 + 2017t - 2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{2019}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2019 - x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2018} \\ x = \sqrt{2018} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } f(-\sqrt{2018}) = -2018\sqrt{2018}; f(\sqrt{2018}) = 2018\sqrt{2018}$$

$$f(-\sqrt{2019}) = -2017\sqrt{2019}; f(\sqrt{2019}) = 2017\sqrt{2019}$$

$$\text{Suy ra } m = \min_D y = -2018\sqrt{2018}, M = \max_D y = 2018\sqrt{2018}$$

$$\text{Vậy } M - m = 4036\sqrt{2018}.$$

CÂU 4: Chọn C

Đặt $t = x^2$ khi đó ta có $g(t) = 8t^2 + at + b$.

Vì $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [0; 1]$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta có: $0 \leq g(t) \leq 1$ với mọi $t \in [0; 1]$ và có dấu bằng xảy ra.

Đồ thị hàm số $g(t)$ là một parabol có bề lõm quay lên trên do đó điều kiện trên dẫn đến hệ điều kiện sau xảy ra :

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-\Delta}{32} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có : $-64 \leq a^2 \leq 64$ do đó $-8 \leq a \leq 8$.

Lấy (3) + 32(2) ta có : $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$

Suy ra : $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$.

Khi đó ta có $a = -8$ và $b = 1$.

Kiểm tra : $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$

Vì $0 \leq t \leq 1$ nên $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$.

Vậy $\max |g(t)| = 1$ khi $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (t/m).

CÂU 5: Chọn C

Ta có $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A+B|}{2}$ (1). Dấu = xảy ra khi $A = B$.

Ta có $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A-B|}{2}$ (2). Dấu = xảy ra khi $A = -B$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 + ax + b$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{2}$.

Trường hợp 1: $\frac{-a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow a \notin [-6; 2]$. Khi đó $M = \max\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có $M \geq |4 + 2a| > 8$.

Trường hợp 2: $\frac{-a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow a \in [-6; 2]$. Khi đó $M = \max\left\{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|, \left|b - \frac{a^2}{4}\right|\right\}$.

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có

$$M \geq \max\left\{|5 + a + b|, \left|b - \frac{a^2}{4}\right|\right\} \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8}|20 + 4a + a^2| \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8}|16 + (a + 2)^2|. \text{ Suy ra } M \geq 2.$$

Vậy M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là $M = 2$ khi $\begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \frac{-a^2}{2} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$.

Do đó $a + 2b = -4$.

CÂU 6: Chọn C

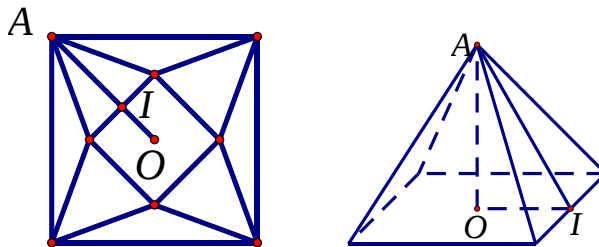
Ta có $y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 4}{(x - m)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2 \\ x = m - 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$m - 2$		m		$m + 2$		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y			$m - 4$				$m + 4$		

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi chỉ khi $\begin{cases} m < 0 \\ 0 < m + 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

CÂU 7: Chọn C



Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Ta có $AI = AO - IO = 25\sqrt{2} - \frac{x}{2}$.

Chiều cao của hình chóp $h = \sqrt{AI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(25\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.

Thể tích của khối chóp bằng $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$.

Điều kiện $1250 - 25\sqrt{2}x > 0 \Rightarrow x < 25\sqrt{2}$.

Xét hàm số $y = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}$ với $0 < x < 25\sqrt{2}$.

Ta có $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{1250x^4 - 25\sqrt{2}x^5}}$.

Có $y' = 0 \Rightarrow 5000x^3 - 125\sqrt{2}x^4 = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{2}$	$25\sqrt{2}$	
y'		+	0	-
y	0	$\frac{4000\sqrt{10}}{3}$	0	

Vậy để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng $20\sqrt{2} \text{ cm} = 2\sqrt{2} \text{ dm}$.

CHỦ ĐỀ 4: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

❖ **VÍ DỤ 1:** Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 3}{4x^2 + bx + 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = c$ và chỉ có một đường tiệm cận đứng. Tính $\frac{a}{bc}$ biết rằng a là số thực dương và $ab = 4$?

A. $\frac{a}{bc} = 1$.

B. $\frac{a}{bc} = \frac{1}{4}$.

C. $\frac{a}{bc} = 4$.

D. $\frac{a}{bc} = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

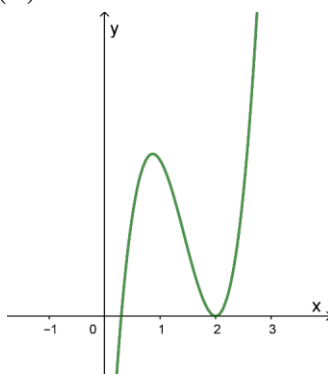
Do đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 3}{4x^2 + bx + 1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y = c$ nên

$c = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a}{bc} = \frac{4}{b}$ và chỉ có một đường tiệm cận đứng nên:

Trường hợp 1: $4x^2 + bx + 1 = 0$ có nghiệm kép $\Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow b = 4 (a > 0, ab = 4)$ thay vào hàm số thỏa mãn nên $\frac{a}{bc} = 1$.

Trường hợp 2: $4x^2 + bx + 1 = 0$ và $ax^2 + x - 3 = 0$ có nghiệm chung. Thay $\frac{a}{bc}$ lần lượt bằng $\frac{1}{4}; 2; 4$ ta thấy không thỏa mãn.

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x + 1}}{(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x_0 \in (0; 1)$, có hệ số $a > 0$ và tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2. Từ đó suy ra $f(x) = a(x - x_0)(x - 2)^2$.

Suy ra $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x+1}}{(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot f(x)} = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{2x+1}}{(x^4 - 5x^2 + 4) \cdot a(x - x_0)(x - 2)^2}$ xác định trên

$$D = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{x_0, 1, 2\} \text{ và } g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{a(x+1)(x+2)(x-2)^2(x-x_0)}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} g(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^{\pm}} g(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ hữu hạn nên hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x = x_0$ và $x = 2$.

❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Hỏi số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 2}$ là bao nhiêu?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } e^{f^2(x)} - 2 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{\ln 2} \\ f(x) = -\sqrt{\ln 2} \end{cases}.$$

Dựa vào bbt ta thấy:

Đường thẳng $y = \sqrt{\ln 2}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y = -\sqrt{\ln 2}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 1 điểm.

Nên phương trình $e^{f^2(x)} - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 2}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

❖ **VÍ DỤ 4:** Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -2; 2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \right) \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right] = \frac{0^2 - 3 \cdot 0 + 2}{0^2 - 4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} y &= \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \left[\frac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x(x^2 - 4)} \right] = \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \left[\frac{(x-1)(x-2)\sin x}{x(x-2)} \cdot \frac{1}{(x+2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^{\pm}} \left[\frac{(x-1)\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(x+2)} \right] \end{aligned}$$

- o Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{(x-1)\sin x}{x} \right] = -\frac{3\sin 2}{2} < 0$ và $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = +\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = -\infty$
- o Vì $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left[\frac{(x-1)\sin x}{x} \right] = -\frac{3\sin 2}{2} < 0$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = +\infty$

Vậy đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)\sin x}{x(x+2)} = \frac{\sin 2}{6}.$$

Vậy ĐTHS có 1 đường tiệm cận đứng.

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}}$

• $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = 1$ suy ra đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = -1$ suy ra đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3}$.

- A. $x=1$ và $x=-3$. B. $x=-3$. C. $x=-1$ và $x=3$. D. $x=3$.

CÂU 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	-2	-1	$+\infty$	0

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 2.

CÂU 3: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x(x-16)}$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

CÂU 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x}}$.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

CÂU 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1}+2017}{\sqrt{x^2-2mx+m+2}}$ có đúng ba đường tiệm cận?

- A. $2 < m < 3$. B. $2 \leq m \leq 3$. C. $m < 2$. D. $m > 2$ hoặc $m < -1$.

CÂU 6 : Đồ thị hàm số $y = \frac{|x|+1}{|x|-1}$ có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

CÂU 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để đồ thị hàm số $y = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{ax^2+2}}$ có tiệm cận ngang.

- A. $a \geq 0$. B. $a \leq 0$. C. $a=1$ hoặc $a=4$. D. $a > 0$.

CÂU 8: Biết các đường thẳng chứa các đường tiệm cận của đường cong $(C): y = \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25.
B. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.
C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4.
D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn B

Ta có $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$.

Xét $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3} = +\infty$ nên $x=-3$ là một tiệm cận đứng.

Xét

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} y &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1-\sqrt{x+3}}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)^2 - (x+3)}{(x-1)(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(9x+2)}{(x-1)(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(9x+2)}{(x+3)(3x-1+\sqrt{x+3})} = \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

Nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

CÂU 2: Chọn D

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ có hai nghiệm phân biệt a và b (với $a < 0$ và $0 < b < 1$).

Nên, tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ là $\mathbb{R} \setminus \{1; a; b\}$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{2f(x)+3} = -\infty; \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{2f(x)+3} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2f(x)+3} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2f(x)+3} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)+3}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

CÂU 3: Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} x \neq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$.

Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x(x-16)} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x(x-16)} = +\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận.

CÂU 4: Chọn B

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x(2-x)} - \sqrt{-x(1-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x} - \sqrt{1-x}} = +\infty. \end{aligned}$$

$\Rightarrow x=0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=2 \text{ không là đường tiệm cận của đồ thị hàm số.}$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{-1} = -2$$

$\Rightarrow y = -2$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{-1} = 2$$

$\Rightarrow y = 2$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

CÂU 5: Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$, đồ thị hàm số luôn có 1 đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Để ĐTHS có ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ ĐTHS có đúng 2 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty) \\ m + 2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3$$

CÂU 6 : Chọn A

Xét hàm số: $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C), TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng là $x = 1$.

Vì hàm số $y = \frac{|x|+1}{|x|-1}$ là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số này được suy ra từ đồ thị (C) bằng cách giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục tung, lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị nằm bên phải trục tung.

Do đó, hàm số $y = \frac{|x|+1}{|x|-1}$ sẽ có 3 đường tiệm cận là $x = 1, x = -1; y = 1$.

CÂU 7: Chọn A

Điều kiện: $ax^2 + 2 > 0$

+ **Trường hợp 1:** $a = 0$. Ta có: $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \sqrt{x^2 + 1})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 0$ nên đồ thị hàm số có TCN: $y = 0$

+ **Trường hợp 2:** $a > 0$. Suy ra: $ax^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó: TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{ax^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{a + \frac{2}{x^2}}} = 0$ nên đồ thị hàm số có TCN: $y = 0$

+ **Trường hợp 3:** $a < 0$. Suy ra: $-\sqrt{-\frac{2}{a}} < x < \sqrt{-\frac{2}{a}}$. Do đó: TXĐ: $D = \left(-\sqrt{-\frac{2}{a}}; \sqrt{-\frac{2}{a}}\right)$ nên đồ

thị hàm số không có TCN.

Vậy $a \geq 0$.

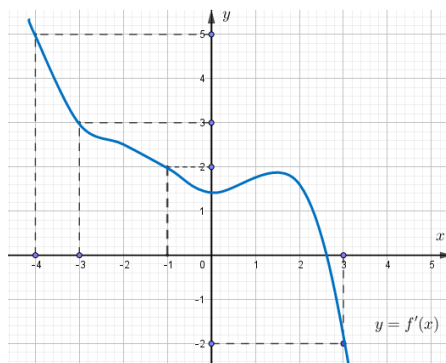
CÂU 8: Chọn D

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{35x^2+12x+3}{(x-5)(6x+1+\sqrt{x^2-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(35 + \frac{12}{x} + \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x}\right) \left(6 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{35 + \frac{12}{x} + \frac{3}{x}}{\left(1 - \frac{5}{x}\right) \left(6 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}\right)} = \frac{35}{7} = 5 \end{aligned}$$

- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{35x^2+12x+3}{(x-5)(6x+1+\sqrt{x^2-2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(35 + \frac{12}{x} + \frac{3}{x} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} \right) \left(6 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{35 + \frac{12}{x} + \frac{3}{x}}{\left(1 - \frac{5}{x} \right) \left(6 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \right)} = 7$$
- Đường cong có hai tiệm cận ngang là: $y = 5$; $y = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5} = -\infty$ nên đường cong có tiệm cận đứng là $x = 5$.
- (H) là một hình chữ nhật có chiều dài là 5 và chiều rộng là 2 nên diện tích bằng 10.

CHỦ ĐỀ 5: ĐỌC ĐỒ THỊ - BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm



A. $x_0 = -4$.

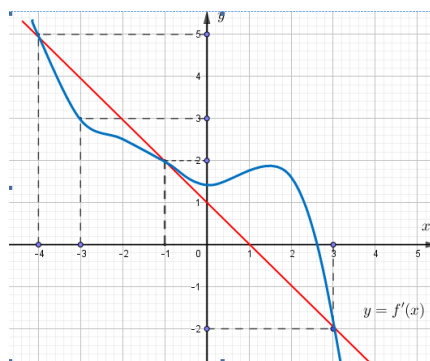
B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = 3$.

D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x.$$

$$\text{Dựa vào hình vẽ ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Và ta có bảng biến thiên

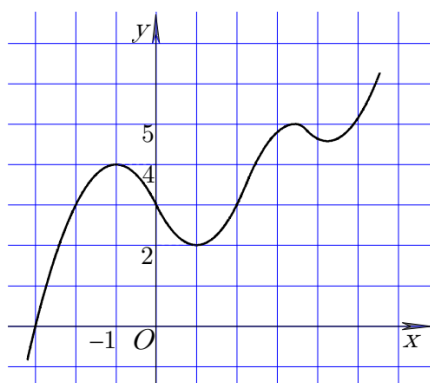
x	-4	-1	3
g'		$-$	$+$
g		$\searrow$	$\nearrow$

Suy ra hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = -1$

Lời giải

Chọn C

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Chọn C

Đặt $t = x^2 - 2x$, $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
t'	$-$	0	$+$
t	$\frac{21}{4}$	-1	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Ta có: $f(x^2 - 2x) = m$ (1) $\Leftrightarrow f(t) = m$ (2).

Ta thấy, với mỗi giá trị $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$ ta tìm được hai giá trị của $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

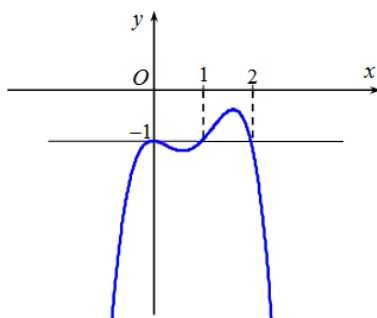
$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc $\left[-1; \frac{21}{4}\right]$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ thuộc $\left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu là $m = 3$ và $m = 5$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$.



A. $x=1$.

B. $x=0$.

C. $x=2$.

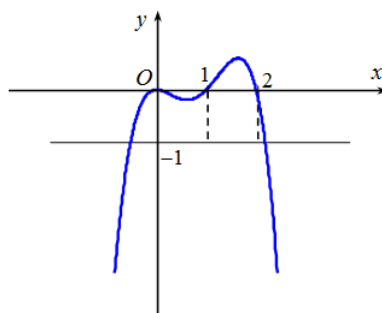
D. Không có điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) = f(x) + x \Rightarrow g'(x) = f'(x) + 1.$$

Khi đó ta tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ lên trên một đơn vị ta được đồ thị hàm số $g'(x)$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị hàm $g'(x)$ ta lập được bảng xét dấu của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ nhận thấy hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

CÂU 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai phương trình $f(x) = m$ và $f(x-1) = m-1$ có cùng số nghiệm với mọi m .

B. Hàm số $y = f(x-2017)$ không có cực trị.

C. Hai phương trình $f(x) = m$ và $f(x-1) = m+1$ có cùng số nghiệm với mọi m .

D. Hai phương trình $f(x) = 2017$ và $f(x-1) = 2017$ có cùng số nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x-1 = a$. Khi đó phương trình $f(x-1) = 2017$ trở thành $f(a) = 2017$.

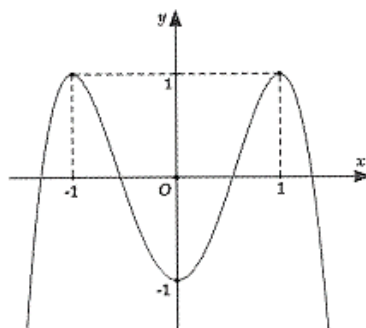
Hay a là nghiệm của phương trình $f(x) = 2017$.

Mà phương trình $x-1 = a$ luôn có nghiệm duy nhất với mọi số thực a .

Đáp án **B** sai vì đồ thị hàm số $y = f(x-2017)$ tạo thành qua phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$. Mà $y = f(x)$ có hai cực trị nên $y = f(x-2017)$ phải có hai cực trị.

Đáp án **C** và **D** sai vì thử bằng máy tính không thỏa mãn.

CÂU 3: Biết đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^4 + 2x^2$. B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. C. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải

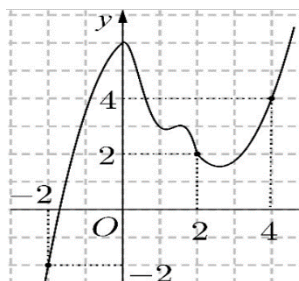
Chọn B

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên $a < 0 \Rightarrow$ loại đáp án $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Vì $f(0) = -1 \Rightarrow$ loại đáp án $y = -x^4 + 2x^2$.

Mặt khác $f(1) = 1 \Rightarrow$ loại đáp án $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

CÂU 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x) = f(x) - x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $h(1) + 1 = h(4) < h(2)$.

- B. $h(0) = h(4) + 2 < h(2)$.

- C. $h(-1) < h(0) < h(2)$.

- D. $h(2) < h(4) < h(0)$.

Lời giải

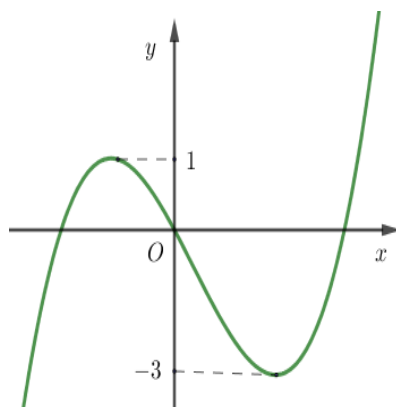
Chọn C

Xét hàm số $h(x) = f(x) - x$ trên đoạn $[-1; 4]$.

Ta có $h'(x) = f'(x) - 1$. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ ta được $h'(x) > 0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[-1; 4]$. Ta chọn C.

CÂU 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị?



A. $1 \leq m \leq 3$.

B. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

D. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ là đồ thị $y = f(x)$ tịnh tiến lên trên một đoạn bằng m khi $m > 0$, tịnh tiến xuống dưới một đoạn bằng $|m|$ khi $m < 0$.

Hơn nữa đồ thị $y = |f(x) + m|$ là:

+) Phần đồ thị của $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục Ox .

+) Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = f(x) + m$ nằm dưới Ox qua Ox và bỏ đi phần đồ thị của $y = f(x) + m$ nằm dưới Ox .

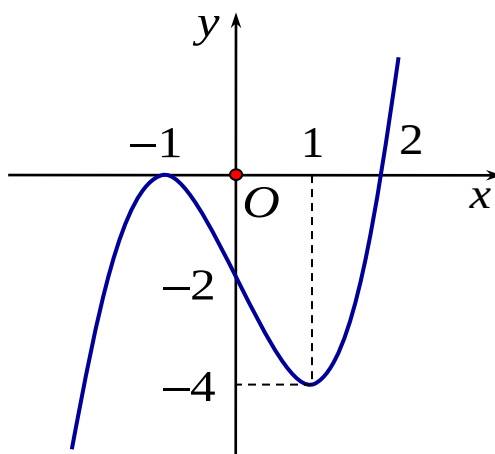
Vậy để đồ thị hàm số $y = |f(x) + m|$ có ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ xảy ra hai trường hợp:

+) Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía trên trục hoành hoặc có điểm cực tiểu thuộc trục Ox và cực đại dương. Khi đó $m \geq 3$.

+) Đồ thị hàm số $y = f(x) + m$ nằm phía dưới trục hoành hoặc có điểm cực đại thuộc trục Ox và cực tiểu dương. Khi đó $m \leq -1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

CÂU 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ($y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$). Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?



- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Xét $g(x) = f(x^2 - 2)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2xf'(t) \text{ với } t = x^2 - 2.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = x^2 - 2 = -1 \\ t = x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

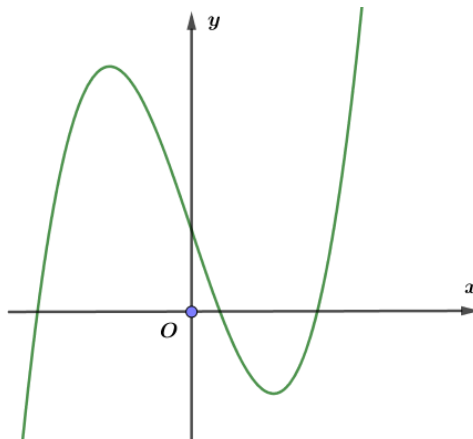
Có $f'(t) > 0 \Leftrightarrow t = x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
y							

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$. Vậy C sai.

CÂU 7: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|) + 2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

CHỦ ĐỀ 6: TƯƠNG GIAO ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ với k là số nguyên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^5(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt ?
- A. 122. B. 120. C. 365. D. 363.

Lời giải

Chọn A

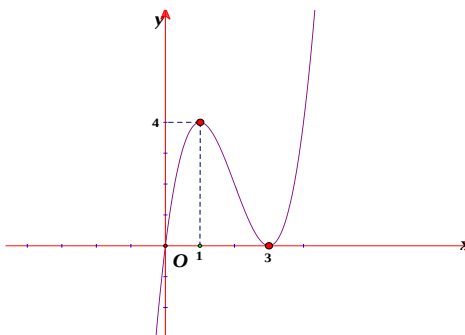
Nhận xét:

+ Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ như sau:

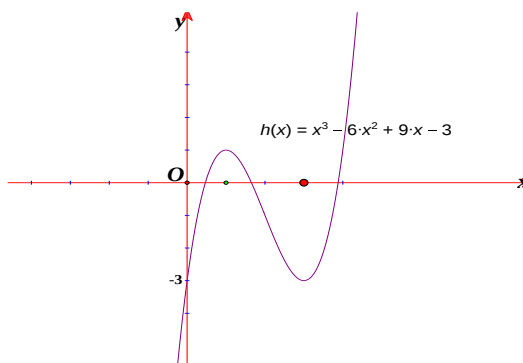
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow f(1)=4 \\ x=3 \Rightarrow f(3)=0 \end{cases} \cdot \text{Lại có } \begin{cases} f(0)=0 \\ f(4)=4 \end{cases}.$$

- Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ luôn đi qua gốc tọa độ.

- Đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ luôn tiếp xúc với trục Ox tại điểm $(3;0)$.



+ Xét hàm số $g(x) = f(x) - 3$ có $g'(x) = f'(x)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(0) = -3$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ xuống dưới 3 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = g(x)$. Suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$.



+ Tổng quát: xét hàm số $h(x) = f(x) - a$, với $0 < a < 4$.

Lập luận tương tự như trên:

- $h(0) = -a < 0$ và $h(1) > 0$; $h(4) < 4$.

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ xuống dưới a đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = h(x)$. Suy ra phương trình $h(x) = 0$ luôn có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0;4)$.

Khi đó,

$$+ \text{Ta có } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$+ f^2(x) = f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{cases}. \text{ Theo trên, phương trình } f(x) = 3 \text{ có ba nghiệm}$$

dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Nên phương trình $f^2(x) = 0$ có $3 + 2$ nghiệm phân biệt.

$$+ f^3(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) = 0 \\ f^2(x) = 3 \end{cases}.$$

$f^2(x) = 0$ có $3 + 2$ nghiệm.

$f^2(x) = f(f(x)) = 3$ có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f(x) = a$, với $a \in (0; 4)$ lại có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^2(x) = 3$ có tất cả 9 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình $f^3(x) = 0$ có $3^2 + 3 + 2$ nghiệm phân biệt.

$$+ f^4(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^3(x) = 0 \\ f^3(x) = 3 \end{cases}.$$

$f^3(x) = 0$ có $9 + 3 + 2$ nghiệm.

$f^3(x) = f(f^2(x)) = 3$ có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f^2(x) = b$, với $b \in (0; 4)$ lại có 9 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^3(x) = 3$ có tất cả $9 \cdot 3$ nghiệm phân biệt.

$$+ f^5(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^4(x) = 0 \\ f^4(x) = 3 \end{cases}.$$

$f^4(x) = 0$ có $3^3 + 9 + 3 + 2$ nghiệm.

$f^4(x) = f(f^3(x)) = 3$ có ba nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Mỗi phương trình $f^3(x) = c$, với $c \in (0; 4)$ lại có 27 nghiệm dương phân biệt thuộc khoảng $(0; 4)$. Do đó phương trình $f^4(x) = 3$ có tất cả $27 \cdot 3$ nghiệm phân biệt.

Vậy $f^5(x)$ có $3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 2 = 122$ nghiệm.

❖ **VÍ DỤ 2:** Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $f(x) = 2(m+1)x^3 + 2mx^2 - 2(m+1)x - 2m$, (m là tham số khác $-\frac{3}{4}$) và $g(x) = -x^4 + x^2$ là.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là.

$$-x^4 + x^2 = 2(m+1)x^3 + 2mx^2 - 2(m+1)x - 2m.$$

$$\Leftrightarrow -x^2(x^2 - 1) = 2m(x^3 + x^2 - x - 1) + 2x^3 - 2x.$$

$$\Leftrightarrow -x^2(x^2-1)=2m(x^2-1)(x+1)+2x(x^2-1) \Leftrightarrow (x^2-1)[(x^2+2(m+1)x+2m)]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0(1) \\ g(x)=x^2+2(m+1)x+2m(2) \end{cases}$$

$$\text{Xét (2) có: } \begin{cases} \Delta = m^2+1 > 0 \forall m \\ g(-1) = -1 \neq 0 \forall m \\ g(1) = 4m+3 \neq 0 \forall m \neq -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{PT (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt } \neq \pm 1.$$

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Cách 2: Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là.

$$-x^4+x^2=2(m+1)x^3+2mx^2-2(m+1)x-2m$$

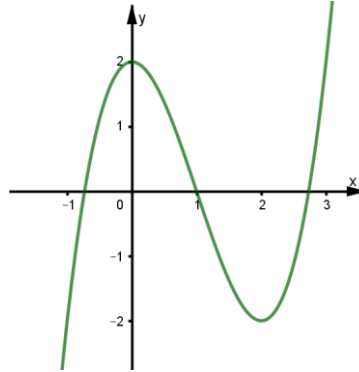
$$\Leftrightarrow x^4+2(m+1)x^3+(2m-1)x^2-2(m+1)x-2m=0 \quad (1)$$

Từ đề bài ta thấy chắc chắn với mọi $m \neq -\frac{3}{4}$ hai đồ thị luôn có cùng số giao điểm, tức là phương trình (1) luôn có cùng số nghiệm $\forall m \neq -\frac{3}{4}$.

$$\text{Thay } m=-1 \text{ vào phương trình (1) ta được: } x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị là 4.

❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m là số nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m=6$.

B. $m=7$.

C. $m=5$.

D. $m=9$.

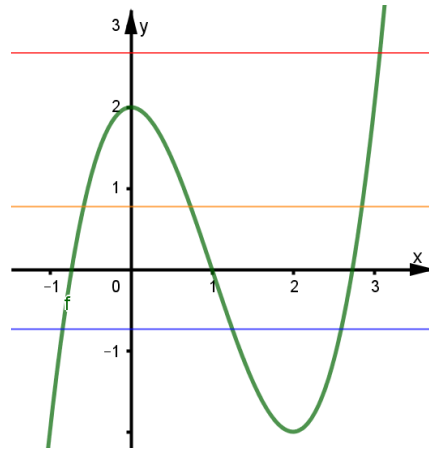
Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=u$ khi đó nghiệm của phương trình $f(f(x))=1$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $f(u)$ với đường thẳng $y=1$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có ba nghiệm } \begin{cases} f(x)=u_1 \\ f(x)=u_2 \\ f(x)=u_3 \end{cases} \text{ với } u_1 \in (-1;0), u_2 \in (0;1), u_3 \in \left(\frac{5}{2};3\right).$$

Tiếp tục xét số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với từng đường thẳng $y=u_1, y=u_2, y=u_3$.



Dựa vào đồ thị ta có được 7 giao điểm. Suy ra phương trình ban đầu $f(f(x)) = 1$ có 7 nghiệm.

❖ **VÍ DỤ 4:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018$.

A. $m \in (2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$.

B. $m \in [2\sqrt{6}; 3\sqrt{3}]$.

C. $m \in \left(3\sqrt{3}; \frac{11}{3}\sqrt{3}\right) \cup \{2\sqrt{6}\}$.

D. $m \in \left(2\sqrt{6}; \frac{11}{3}\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2017^{2x+\sqrt{x+1}} - 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 2018x \leq 2018$

$$\Leftrightarrow 2017^{2x+\sqrt{x+1}} + 1009(2 + \sqrt{x+1}) \leq 2017^{2+\sqrt{x+1}} + 1009(2 + \sqrt{x+1})$$

$$\Leftrightarrow f(2x + \sqrt{x+1}) \leq f(2 + \sqrt{x+1}). \text{ Xét hàm số } f(u) = 2017^u + 1009u$$

Ta có $f'(t) = 2017^t \ln 2017 + 1009 > 0, \forall t \Rightarrow f(u)$ đồng biến.

$$\text{Nên } 2x + \sqrt{x+1} \leq 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$\text{Ta lại có } 5x^2 + 12x + 16 = m(x+2)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow 3(x+2)^2 + 2(x^2+2) = m(x+2)\sqrt{x^2+2}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}\right)^2 + 2 = m \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}. \text{ Xét } t = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \Rightarrow t'(x) = \frac{2-2x}{(\sqrt{x^2+2})^3} \geq 0, \forall x \in [-1; 1]$$

$$\text{Nên } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \sqrt{3}. \text{ Khi đó phương trình trở thành } 3t^2 + 2 = mt \Leftrightarrow 3t + \frac{2}{t} = m.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 3t + \frac{2}{t}, \text{ ta có } f'(t) = 3 - \frac{2}{t^2} = \frac{3t^2 - 2}{t^2}. \text{ Cho } f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{3}$
$f'(t)$	-	+	
$f(t)$	$3\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2\sqrt{6} < m \leq 3\sqrt{3}$.

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Cho hàm số $y = x^2 + m(\sqrt{2018 - x^2} + 1) - 2021$ với m là tham số thực. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt. Tính S .
- A. 960. B. 986. C. 984. D. 990.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\sqrt{2018 - x^2} = t; 0 \leq t \leq \sqrt{2018}$

Khi đó $y = x^2 + m\sqrt{2018 - x^2} + 1 - 2021 = -t^2 + m t + 1 - 3 = -t^2 + m t + m - 3$ * ;

Theo đề bài, để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình * cần có 1 nghiệm dương thỏa mãn $0 \leq t \leq \sqrt{2018}$

TH1: (*) có 1 nghiệm kép. $\Delta = m^2 - 4m + 12 = 0$

TH2: (*) có 2 nghiệm trái dấu. $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 12 > 0 \\ P = \frac{m-3}{-1} < 0 \end{cases} \Rightarrow m > 3 \quad (1)$

(*) có 1 nghiệm dương trên khoảng $0 \leq t \leq \sqrt{2018}$ nên ta xét GTLN của m với $0 \leq t \leq \sqrt{2018}$

$$y = 0 \Leftrightarrow -t^2 + m t + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 + 3}{t + 1} \quad \forall t \in [0; \sqrt{2018}]$$

$$\text{Xét hàm } y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}, \quad \forall x \in [0; \sqrt{2018}], \text{ ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập BBT ta có

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{2018}$
y'	-		-	0	+
y			3		$\frac{2021}{\sqrt{2018} + 1}$

$$\Rightarrow 3 < m < \frac{2021}{\sqrt{2018} + 1} \approx 44,009 \Rightarrow S = \sum_{i=4}^{44} i = 984$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$ có nghiệm là

- A. $(-\infty;0]$. B. $(1;+\infty)$. C. $(0;1]$. D. $(0;1)$.

CÂU 2: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+\frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1}=1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 6 nghiệm. B. 9 nghiệm. C. 4 nghiệm. D. 5 nghiệm.

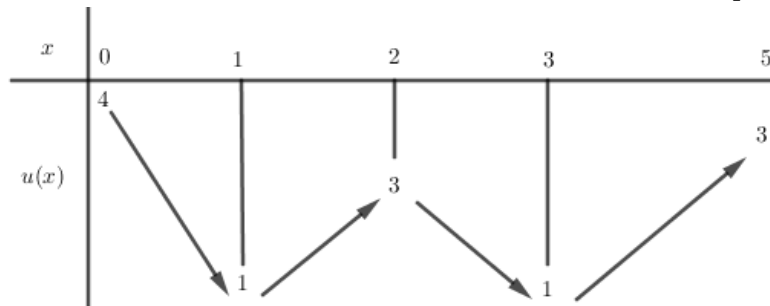
CÂU 3: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2+m\sqrt{4-x^2}+m-7$ có điểm chung với trục hoành là $[a;b]$ (với $a;b\in\mathbb{R}$). Tính giá trị của $S=2a+b$.

- A. $S=\frac{19}{3}$. B. $S=7$. C. $S=5$. D. $S=\frac{23}{3}$.

CÂU 4: Giá trị của m để phương trình: $\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt{6-x}+2\sqrt[4]{6-x}=m$ có hai nghiệm phân biệt là.

- A. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m\leq 2\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}$. B. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\leq m<2\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}$.
C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}<m<2\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}$. D. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}<m\leq 2\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}$.

CÂU 5: Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{10-2x}=m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5]$?



- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

CÂU 6: Tìm m để phương trình $x^6+6x^4-m^3x^3+(15-3m^2)x^2-6mx+10=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

- A. $0<m<\frac{9}{4}$. B. $\frac{11}{5}<m<4$. C. $2<m\leq\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{5}\leq m<3$.

CÂU 7: Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}=m$ có nghiệm khi m thuộc $[a;b]$ với $a, b\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T=(a+2)\sqrt{2}+b$ là?

- A. $T=3\sqrt{2}+2$. B. $T=6$. C. $T=8$. D. $T=0$.

CÂU 8: Biết rằng phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x^2}=m$ có nghiệm khi m thuộc $[a;b]$ với $a, b\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị của $T=(a+2)\sqrt{2}+b$ là?

- A. $T=3\sqrt{2}+2$. B. $T=6$. C. $T=8$. D. $T=0$.

CÂU 9: Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|x^3-3|x|+1|=m-1$ có 6 nghiệm là một khoảng có dạng $(a;b)$. Tính tổng $S=a^2+b^2$.

- A. 1. B. 5. C. 25. D. 10.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại 3 điểm phân biệt A, B, C (B nằm giữa A và C) sao cho $AB = 2BC$. Tính tổng các phần tử thuộc S

- A. -2 . B. -4 . C. 0 . D. $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$.

CÂU 11: Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ bằng 1. Tiếp tuyến tại điểm M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 . Tiếp tuyến tại điểm M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác M_2 . Tiếp tuyến tại điểm M_{n-1} cắt (C) tại điểm M_n khác M_{n-1} ($n \geq 4, n \in \mathbb{N}$)? Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $y_n - 3x_n + 2^{21} = 0$.

- A. $n = 7$. B. $n = 8$. C. $n = 22$. D. $n = 21$.

CÂU 12: Cho hàm số $y = x^3 - 2009x$ có đồ thị là (C) . M_1 là điểm trên (C) có hoành độ $x_1 = 1$. Tiếp tuyến của (C) tại M_1 cắt (C) tại điểm M_2 khác M_1 , tiếp tuyến của (C) tại M_2 cắt (C) tại điểm M_3 khác $M_2, \dots$, tiếp tuyến của (C) tại M_{n-1} cắt (C) tại M_n khác M_{n-1} ($n = 4; 5; \dots$), gọi $(x_n; y_n)$ là tọa độ điểm M_n . Tìm n để: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0$.

- A. $n = 685$. B. $n = 679$. C. $n = 672$. D. $n = 675$.

CÂU 13: Đường thẳng $y = k(x+2)+3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ (1) tại 3 điểm phân biệt, tiếp tuyến với đồ thị (1) tại 3 giao điểm đó lại cắt nhau tại 3 điểm tạo thành một tam giác vuông. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $k \leq -2$. B. $-2 < k \leq 0$. C. $0 < k \leq 3$. D. $k > 3$.

CÂU 14. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Số các giá trị tham số m để đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 - 3y = 4$ là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn C

Đặt $t = \sqrt{x} \geq 0$.

$$\text{Ta có } m = g(t) = \sqrt[4]{t^4 + 1} - t = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{t^4 + 1}\right)^3 + \left(\sqrt[4]{t^4 + 1}\right)^2 t + \left(\sqrt[4]{t^4 + 1}\right)t^2 + t^3}$$

Hàm $g(t)$ giảm và có $g(0) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$. Vậy $0 < m \leq 1$.

CÂU 2: Chọn D

Cách 1:

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{6}}{3} \Rightarrow f(x_1) = \frac{9+8\sqrt{6}}{18} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \Rightarrow f(x_2) = \frac{9-8\sqrt{6}}{18} \end{cases}$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		$f(x_1)$		$f(x_2)$		$+\infty$

Xét phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1} = 1$.

Đặt $t = f(x)$. Khi đó phương trình trở thành.

$$\frac{f(t)}{2t-1} = 1 \Leftrightarrow f(t) = 2t-1 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t + \frac{3}{2} = 2t-1 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + \frac{5}{2} = 0(*).$$

Xét hàm số $g(t) = t^3 - 3t^2 - t + \frac{5}{2}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Ta có $g(3).g(4) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{29}{2} < 0$ nên phương trình (*) có một nghiệm $t = t_1 \in (3; 4)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f(x) = t_1$ với $t_1 > 3 > f(x_1) = \frac{9+8\sqrt{6}}{18}$ có một nghiệm.

+ Ta có $g(1).g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{11}{8} < 0$ nên phương trình (*) có một nghiệm $t = t_2 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f(x) = t_2$ với $f(x_2) = \frac{9-8\sqrt{6}}{18} < \frac{1}{2} < t_2 < 1 < f(x_1) = \frac{9+8\sqrt{6}}{18}$ có ba nghiệm phân biệt.

+ Ta có $g\left(-\frac{4}{5}\right).g(-1) = \frac{217}{250} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ nên phương trình (*) có một nghiệm $t = t_3 \in \left(-1; -\frac{4}{5}\right)$.

Khi đó dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình $f(x) = t_3$ với $t_3 < -\frac{4}{5} < f(x_2) = \frac{9-8\sqrt{6}}{18}$ có một nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực.

Cách 2:

Đặt $t = f(x)$. Khi đó phương trình trở thành.

$$\frac{f(t)}{2t-1} = 1 \Leftrightarrow f(t) = 2t-1 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + t + \frac{3}{2} = 2t-1 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + \frac{5}{2} = 0(*).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \approx 3,05979197 \\ t_2 \approx 0,8745059057 \\ t_3 \approx -0,9342978758 \end{cases}.$$

+ Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2} = t_1 \approx 3,05979197$. Bấm máy tính ta được 1 nghiệm.

+ Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2} = t_2 \approx 0,8745059057$. Bấm máy tính ta được 3 nghiệm.

+ Xét phương trình $x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2} = t_3 \approx -0,9342978758$. Bấm máy tính ta được 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thực.

CÂU 3: Chọn B

Tập xác định của hàm số : $D = [-2; 2]$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7$ và trục hoành là

$$x^2 + m\sqrt{4-x^2} + m - 7 = 0 \Leftrightarrow m(\sqrt{4-x^2} + 1) = 7 - x^2 \Leftrightarrow m = \frac{7-x^2}{\sqrt{4-x^2} + 1} \quad (1).$$

Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$, $t \in [0; 2]$, phương trình (1) trở thành $m = \frac{t^2+3}{t+1} \quad (2)$.

Đồ thị hàm số đã cho có điểm chung với trục hoành khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 2]$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+3}{t+1}$ trên $[0; 2]$.

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[0; 2]$.

Ta có $f'(t) = \frac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \in (0; 2) \\ t=-3 \notin (0; 2) \end{cases}$.

$$f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = \frac{7}{3}.$$

Do đó $\min_{[0;2]} f(t) = 2$ và $\max_{[0;2]} f(t) = 3$.

Bởi vậy, phương trình (2) có nghiệm $t \in [0; 2]$ khi và chỉ khi $\min_{[0;2]} f(t) \leq m \leq \max_{[0;2]} f(t) \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3$.

Từ đó suy ra $a = 2$, $b = 3$, nên $S = 2a + b = 2.2 + 3 = 7$.

CÂU 4: Chọn B

Xét $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{6-x}$ $x \in [0; 6]$.

$$\text{Có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right).$$

$$\text{Có } u(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right); v(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) \text{ thỏa } u(2) = 0; v(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0.$$

$$\text{Và } u(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right); v(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) \text{ cùng âm trên } (3; 6).$$

$$u(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} \right); v(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) \text{ cùng dương trên } (0; 3).$$

Lập bảng biến thiên.

$$\text{Yêu cầu đề bài } \Leftrightarrow \sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 2\sqrt{3} + 4\sqrt[4]{3}.$$

CÂU 5: Chọn C

Theo bảng biến thiên ta có trên $[0; 5]$ thì $1 \leq u(x) \leq 4 \quad (1)$,

Ta có $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên $[0;5]$

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{10-2x}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{10-2x} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 3(10-2x) = 4x \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên

x	0	1	2	3	5
$f'(x)$		+	+	0	-
$f(x)$					

$\sqrt{10}$ 5 $\sqrt{15}$

Do đó ta có trên $[0;5]$ thì $\sqrt{10} \leq f(x) \leq 5$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} \max f(x) = f(3) = 5 \\ \min u(x) = u(3) = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} \min f(x) = f(0) = \sqrt{10} \\ \max u(x) = u(0) = 4 \end{cases}$

Do đó $\frac{\sqrt{10}}{4} \leq \frac{f(x)}{u(x)} \leq 5$ với mọi $x \in [0;5]$.

Để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0;5] \Leftrightarrow$ phương trình $\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = m$ có nghiệm trên đoạn $[0;5] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} \leq m \leq 5$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

CÂU 6: Chọn C

Ta

có

$$x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) = (mx + 1)^3 + 3(mx + 1).$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + 2) = f(mx + 1) (*) \text{ với } f(t) = t^3 + 3t.$$

Do $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $(*) \Leftrightarrow x^2 + 2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ta có $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên.

x	$\frac{1}{2}$	1	2
g'	-	0	+
g	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khi và chỉ khi $2 < m \leq \frac{5}{2}$.

CÂU 7: Chọn B

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}.$$

$$\text{Phương trình đã cho thành } t - \frac{t^2-4}{2} = m.$$

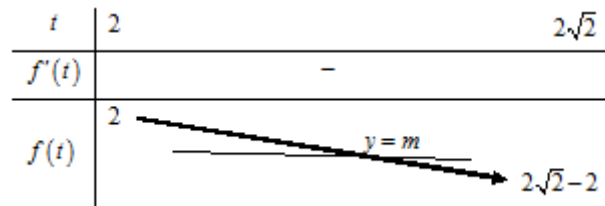
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$, với $x \in [-2; 2]$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2+x}}; \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ 2-x = 2+x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và $f(-2) = 2$; $f(2) = 2$; $f(0) = 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow \min_{[-2; 2]} f(x) = 2$ và $\max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{t^2-4}{2}$, với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$ ta có $f'(t) = 1-t < 0, \forall t \in (2; 2\sqrt{2})$.

Bảng biến thiên:



YCBT $\Leftrightarrow$ trên $[-2; 2]$ đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = 2\sqrt{2} - 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = (a+2)\sqrt{2} + b = 6.$$

CÂU 8: Chọn B

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \geq 0 \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}.$$

$$\text{Phương trình đã cho thành } t - \frac{t^2-4}{2} = m.$$

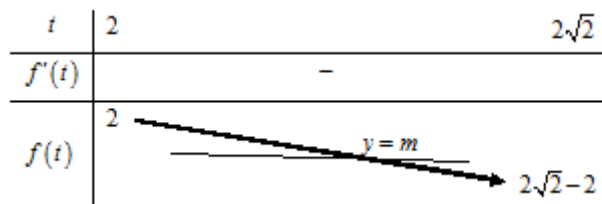
Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$, với $x \in [-2; 2]$ ta có

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2+x}}; \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2; 2) \\ 2-x = 2+x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và $f(-2) = 2$; $f(2) = 2$; $f(0) = 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow \min_{[-2; 2]} f(x) = 2$ và $\max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{t^2-4}{2}$, với $t \in [2; 2\sqrt{2}]$ ta có $f'(t) = 1-t < 0, \forall t \in (2; 2\sqrt{2})$.

Bảng biến thiên:



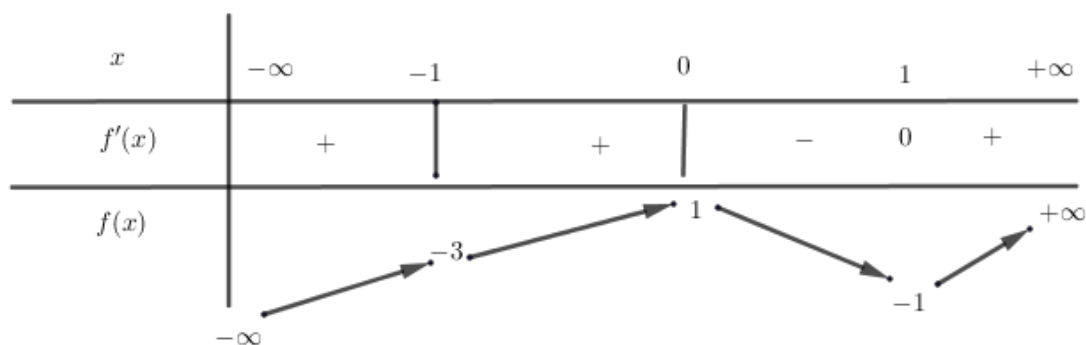
YCBT $\Leftrightarrow$ trên $[-2; 2]$ đồ thị hàm số $y = f(t)$ cắt đường thẳng $y = m \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2$.

Khi đó $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} - 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow T = (a + 2)\sqrt{2} + b = 6$.

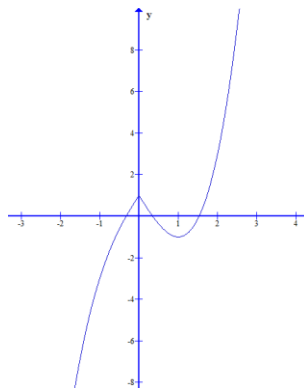
CÂU 9: Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3|x| + 1 = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 + 3x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

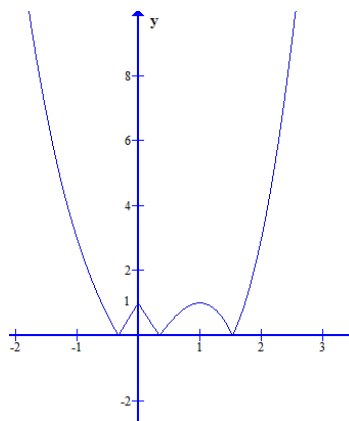
Ta có bảng biến thiên



Do đó ta có đồ thị của hàm số $f(x) = x^3 - 3|x| + 1$.



Suy ra đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = |x^3 - 3|x| + 1|$



Số nghiệm của phương trình $|x^3 - 3|x| + 1| = m - 1$ là số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = m - 1$.

Đề phương trình $|x^3 - 3|x| + 1| = m - 1$ có 6 nghiệm thì d cắt (C) tại 6 điểm

$$0 < m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2. \text{ Vậy } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ suy ra } S = a^2 + b^2 = 5.$$

CÂU 10: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - m = 0 \quad (1).$

Giả sử $x_1; x_2; x_3$ và giả sử $A(x_1; m), B(x_2; m), C(x_3; m).$

$$\text{Áp dụng định lý Vi-et cho phương trình bậc 3 ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 & (2) \\ x_1x_2x_3 = m & (3) \end{cases} \text{ Mặt khác}$$

$$AB = 2BC \Rightarrow x_2 - x_1 = 2(x_3 - x_2) \Leftrightarrow 3x_2 - x_1 - 2x_3 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Từ (4) và (1) ta có } \begin{cases} x_1 = 6 - 5x_2 \\ x_3 = 4x_2 - 3 \end{cases} \text{ thay vào phương trình (2) ta có:}$$

$$(6 - 5x_2)x_2 + x_2(4x_2 - 3) + (4x_2 - 3)(6 - 5x_2) = 0 \Leftrightarrow 7x_2^2 - 14x_2 + 6 = 0 \quad \begin{cases} x_2 = \frac{7 - \sqrt{7}}{7} \\ x_2 = \frac{7 + \sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

Với $x_2 = \frac{7 - \sqrt{7}}{7}$ ta có $x_1 = \frac{7 + 5\sqrt{7}}{7}$ và $x_3 = \frac{7 - 4\sqrt{7}}{7}$ thay vào (3) ta được $m = \frac{-98 + 20\sqrt{7}}{49}$. Thử lại vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Với $x_2 = \frac{7 + \sqrt{7}}{7}$ ta có $x_1 = \frac{7 - 5\sqrt{7}}{7}$ và $x_3 = \frac{7 + 4\sqrt{7}}{7}$ thay vào (3) ta được $m = \frac{-98 - 20\sqrt{7}}{49}$. Thử lại vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

$$\text{Vậy tổng hai giá trị của } m \text{ là } \frac{-98 + 20\sqrt{7}}{49} - \frac{98 + 20\sqrt{7}}{49} = -4.$$

CÂU 11: Chọn B

Phương trình tiếp tuyến Δ_n của (C) tại điểm $M_n(x_n; x_n^3 + 3x_n)$:

$$\Delta_n: y = (3x_n^2 + 3)(x - x_n) + x_n^3 + 3x_n.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến Δ_n :

$$x^3 + 3x = (3x_n^2 + 3)(x - x_n) + x_n^3 + 3x_n \Leftrightarrow (x - x_n)(x^2 + x_n \cdot x - 2x_n^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_n \text{ (n.kép)} \\ x = -2x_n \end{cases}$$

Vậy hoành độ giao điểm còn lại có đặc điểm: bằng hoành độ tiếp tiếp trước nhân với (-2) , thỏa điều kiện cấp số nhân với công bội $q = -2$.

Do đó $x_{n+1} = -2x_n$ và $x_n = (-2)^{n-1} x_1 = (-2)^{n-1}$. Từ giả thiết $y_n - 3x_n + 2^{21} = 0$, với $y_n = x_n^3 + 3x_n$

Suy ra $x_n^3 + 2^{21} = 0$ (trong đó x_n thỏa công thức cấp số nhân nêu trên)

$$\Leftrightarrow (-2)^{3n-3} + 2^{21} = 0 \Rightarrow n = 8.$$

CÂU 12: Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là

$$x^3 - 2009x = (3x_1^2 - 2009)(x - x_1) + x_1^3 - 2009x_1 \quad (1).$$

Phương trình (1) có một nghiệm kép $x_1 = 1$ và một nghiệm x_2 . Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$.

Áp dụng định lý Viét cho phương trình bậc ba, ta có:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = -3 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1 \\ x_1^2 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$$

Vậy hoành độ giao điểm còn lại có đặc điểm: bằng hoành độ tiếp tiếp trước nhân với (-2) , thỏa điều kiện cấp số nhân với công bội $q = -2$.

Suy ra: $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4, \dots, x_n = (-2)^{n-1}$.

Ta có: $2009x_n + y_n + 2^{2013} = 0 \Leftrightarrow 2009x_n + x_n^3 - 2009x_n + 2^{2013} = 0 \Leftrightarrow (-2)^{3n-3} = -2^{2013}$
 $\Leftrightarrow 3n-3 = 2013 \Leftrightarrow n = 672$.

CÂU 13: Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 3x^2 - 1 = k(x+2) + 3$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 + x - 2) = k(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + x - 2 - k = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Đường thẳng $y = k(x+2) + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 + 4(2+k) > 0 \\ (-2)^2 - 2 - 2 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{9}{4} \quad (*) \\ k \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2), theo hệ thức Viét thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -k - 2 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow \begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y'(x_1) = 3x_1^2 + 6x_1 \\ y'(x_2) = 3x_2^2 + 6x_2 \end{cases} \text{ Mà } \begin{cases} y'(-2) \cdot y'(x_1) = -1 \\ y'(-2) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \\ y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \Leftrightarrow 9(k+2)^2 + 18(k+2) - 36(k+2) = -1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}. \text{ Kết hợp với } (*) \text{ ta được } k = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{3} \text{ thỏa mãn.}$$

CÂU 14: Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+1}{x-2} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 2m-1 = 0 (*)$

Theo yêu cầu bài toán: (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 + (m-3)2 - 2m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 13 > 0, \forall m$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ suy ra G là trọng tâm của tam giác OAB :

$$G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{y_1+y_2}{3}\right) = G\left(\frac{x_1+x_2}{3}; \frac{x_1+x_2+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3-m+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}; \frac{3+m}{3}\right)$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán: } \left(\frac{3-m}{3}\right)^2 + \left(\frac{3+m}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{3+m}{3}\right) = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 9m - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{15}{2} \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 7: BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN – SỰ TIẾP XÚC

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách từ giao điểm I của hai tiệm cận của đồ thị (C) đến một tiếp tuyến tùy ý của đồ thị (C) . Khi đó giá trị lớn nhất của d có thể đạt được là

A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I(-1;1)$. $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{x_0+2}{x_0+1}\right)$ là một điểm thuộc (C) , $x_0 \neq -1$. Suy ra: $y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0+1)^2}$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+2}{x_0+1} \Leftrightarrow \frac{x}{(x_0+1)^2} + y - \frac{x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow x + y(x_0+1)^2 - (x_0^2+4x_0+2) = 0 \quad (d).$$

$$\text{Suy ra: } d_{(I;d)} = \frac{|-1 + (x_0+1)^2 - (x_0^2+4x_0+2)|}{\sqrt{1 + (x_0+1)^4}} = \frac{|-2(x_0+1)|}{\sqrt{1 + (x_0+1)^4}} = \frac{2|x_0+1|}{\sqrt{1 + (x_0+1)^4}}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si: $1 + (x_0+1)^4 \geq 2\sqrt{1 \cdot (x_0+1)^4} = 2(x_0+1)^2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $1 = (x_0+1)^4 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Suy ra: $d_{(I;d)} \leq \frac{2|x_0+1|}{\sqrt{2(x_0+1)^2}} = \sqrt{2}$. Vậy $\max d_{(I;d)} = \sqrt{2}$ khi $x_0 = 0; y_0 = 2$.

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3$, với m là tham số; gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực đại của đồ thị (C) luôn nằm trên một đường thẳng d cố định. Xác định hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $k = -\frac{1}{3}$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = -3$. D. $k = 3$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1)$ và $y'' = 6x - 6m$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1) = 0$.

$\Delta' = 9m^2 - 9(m^2 - 1) = 9$ nên hàm số luôn có hai điểm cực trị $x = \frac{3m+3}{3} = m+1$ và

$x = \frac{3m-3}{3} = m-1$. $y''(m-1) = 6(m-1) - 6m = -6 < 0 \Rightarrow x = m-1$ là điểm cực đại của hàm số

$\Rightarrow A(m-1; -3m+2)$ là điểm cực đại của đồ thị (C). Ta có $\begin{cases} x_A = m-1 \\ y_A = -3m+2 \end{cases} \Rightarrow y_A = -3x_A - 1$

$\Rightarrow A$ luôn thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -3x - 1$.

Do đó hệ số góc k của đường thẳng d là -3 .

❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ ($x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2x_0 + y_0 = 0$.

B. $2x_0 + y_0 = 2$.

C. $2x_0 + y_0 = -2$.

D. $2x_0 + y_0 = -4$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng $d: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$.

Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0 + 2}$

Lại có $y' = \frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \frac{4}{(x_0+2)^2}$.

Do đó $d: y = \frac{4}{(x_0+2)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+2}$

$\Rightarrow d: y(x_0+2)^2 = 4x - 4x_0 + 2x_0(x_0+2) \Rightarrow d: 4x - (x_0+2)^2 y + 2x_0^2 = 0$

$\Rightarrow d(I; d) = \frac{|-8 - 2(x_0+2)^2 + 2x_0^2|}{\sqrt{4^2 + (x_0+2)^4}} = \frac{|-16 - 8x_0|}{\sqrt{(x_0+2)^4 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{(x_0+2)^2 + \frac{16}{(x_0+2)^2}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$(x_0+2)^2 + \frac{16}{(x_0+2)^2} \geq 2\sqrt{(x_0+2)^2 \cdot \frac{16}{(x_0+2)^2}} = 8 > 0 \Rightarrow d(I; d) \leq 1$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (x_0+2)^2 = \frac{16}{(x_0+2)^2} \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -4 \end{cases}$

Bài ra $x_0 \neq 0$ nên $x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow 2x_0 + y_0 = -4$.

❖ **VÍ DỤ 4:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Đường thẳng $d: y = x + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A, B, C(0; 2)$. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B . Tính $k_1 \cdot k_2$.

A. 9.

B. -27.

C. -81.

D. 81.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $y = 3x^2 - 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là :

$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt: $A(-2; 2)$, $B(2; 4)$ và $C(0; 2)$.

Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B , ta có:

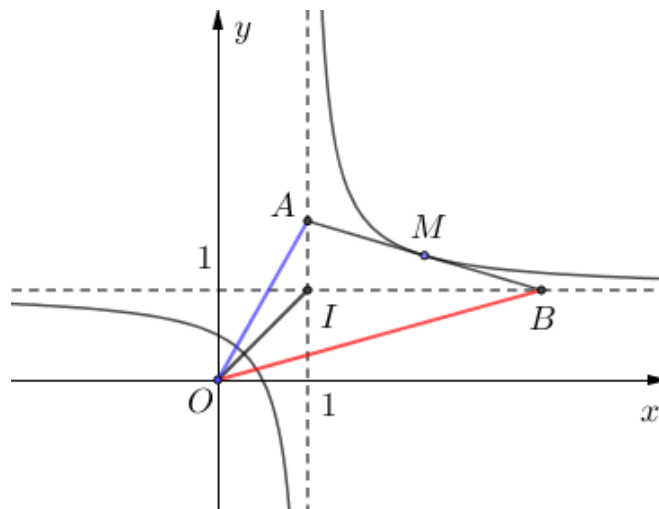
$$k_1 = y'(-2) = 9, \quad k_2 = y'(2) = 9. \text{ Vậy } k_1 k_2 = 81.$$

❖ **VÍ DỤ 5 :** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$.

- A. $S = 8$. B. $S = \frac{17}{4}$. C. $S = \frac{23}{4}$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $y' = \frac{-2}{(2x-2)^2}$, TCĐ: $x = 1$ (d_1), TCN: $y = 1$ (d_2), $I(1; 1)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng $y = \frac{-2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{2x_0-2}$

$$A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A\left(1; \frac{x_0}{x_0-1}\right), \quad B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(2x_0-1; 1). \quad \overline{IB} = (2x_0-2; 0), \quad \overline{IA} = \left(0; \frac{1}{x_0-1}\right).$$

$$S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot IB = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot IA \Leftrightarrow IB = 8IA \Leftrightarrow |2x_0-2| = 8 \left| \frac{1}{x_0-1} \right| \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3$$

$$(\text{do } x_0 > 1) \Rightarrow y_0 = \frac{5}{4} \Rightarrow S = x_0 + 4y_0 = 3 + 4 \cdot \frac{5}{4} = 8.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{-x+1}{x-2}$. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; -1)$ là

A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

CÂU 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$.
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$. D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

CÂU 3: Gọi S là tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ mà qua mỗi điểm thuộc S đều kẻ được hai tiếp tuyến phân biệt tới đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.
Tính tổng hoành độ T của tất cả các điểm thuộc S .

A. $T = 2\sqrt{3}$. B. $T = 3$. C. $T = -1$. D. $T = 2$.

CÂU 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(2; 5)$ cắt hai đường tiệm cận tại E và F . Khi đó độ dài EF bằng.

A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{13}$. D. $2\sqrt{13}$.

CÂU 5: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $d = 1$. C. $d = \sqrt{2}$. D. $d = \sqrt{5}$.

CÂU 6: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị là (C) , điểm M thay đổi thuộc đường thẳng $d: y = 1 - 2x$ sao cho qua M có hai tiếp tuyến của (C) với hai tiếp điểm tương ứng là A, B . Biết rằng đường thẳng AB luôn đi qua điểm cố định là K . Độ dài đoạn thẳng OK là

A. $\sqrt{34}$. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{29}$. D. $\sqrt{58}$.

CÂU 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$, có đồ thị là (C) . Tìm trên đường thẳng $y = 2$ những điểm mà qua đó ta kẻ được 4 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C) .

A. $M(0; 2), M(1; 2)$. B. $M(0; 2), M(3; 2)$. C. $M(5; 2), M(1; 2)$. D. Không tồn tại.

CÂU 8: Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$, gọi đồ thị của hàm số là (C) . Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại M .

A. $y = -9$. B. $y = -64$. C. $y = -12$. D. $y = -8$.

CÂU 9: Cho hàm số $y = \frac{2x^2}{x+2}$ có đồ thị là (C) . Tìm trên đường thẳng $y = x$ những điểm mà từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) , đồng thời 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

A. $m = -5 \pm \sqrt{3}$. B. $m = -5 \pm \sqrt{53}$. C. $m = -6 \pm \sqrt{23}$. D. $m = -5 \pm \sqrt{23}$.

- CÂU 10:** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C) . Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ với $x_0 > -1$ là điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB có trọng tâm G nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$. Hỏi giá trị của $x_0 + 2y_0$ bằng bao nhiêu?
- A. $-\frac{7}{2}$. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.
- CÂU 11:** Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị là (C) , đường thẳng $d: y = x + m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B . Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A, B . Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.
- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 3$. D. $m = -5$.
- CÂU 12:** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Biết khoảng cách từ $I(-1; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất thì tung độ của điểm M nằm ở góc phần tư thứ hai, gần giá trị nào nhất?
- A. $3e$. B. $2e$. C. e . D. $4e$.
- CÂU 13:** Cho hàm số $y = x^3 - 2018x$ có đồ thị là C . $M_1(x_1; y_1) \in C$ có hoành độ bằng 1. Tiếp tuyến của C tại $M_1(x_1; y_1)$ cắt C tại $M_2(x_2; y_2)$ khác M_1 . Tiếp tuyến của C tại $M_2(x_2; y_2)$ cắt C tại $M_3(x_3; y_3)$ khác M_2 ... Tiếp tuyến của C tại M_{n-1} cắt C tại $M_n(x_n; y_n)$ khác M_{n-1} .
 Tính $\frac{y_{2018}}{x_{2018}}$?
- A. $-4^{2017} - 2018$. B. $2^{2017} - 2018$. C. $4^{2017} - 2018$. D. $-2^{2017} - 2018$.
- CÂU 14:** Cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$, có đồ thị là (C) . Gọi (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm M có hoành độ $x = a$. Tìm a để (d) cắt lại (C) tại hai điểm E, F khác M và trung điểm I của đoạn EF nằm trên parabol $(P'): y = -x^2 + 4$.
- A. $a = 0$. B. $a = -1$. C. $a = 2$. D. $a = 1$.
- CÂU 15:** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến với (C) tại A và B lần lượt có hệ số góc là k_1, k_2 thỏa mãn $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + 2(k_1 + k_2) = 2018k_1^{2018}k_2^{2018}$. Tổng các giá trị của tất cả các phân tử của S bằng
- A. 2018 B. 3 C. 0 D. 6
- CÂU 16:** Biết đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^4 - mx^2 + m + 2018$ luôn luôn đi qua hai điểm M và N cố định khi m thay đổi. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là
- A. $I(1; 2018)$. B. $I(0; 1)$. C. $I(0; 2018)$. D. $I(0; 2019)$.
- CÂU 17:** Biết đồ thị hàm số $y = (m-4)x^3 - 6(m-4)x^2 - 12mx + 7m - 18$ (với m là tham số thực) có ba điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cố định đó.
- A. $y = -48x + 10$. B. $y = \sqrt{3}x - 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = 2x - 1$.

CÂU 18: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 2x + 1$, M là điểm di động trên (C) ; Mt, Mz là các đường thẳng đi qua M sao cho Mt song song với trục tung đồng thời tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt, Mz . Khi M di chuyển trên (C) thì Mz luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

- A. $M_0\left(-1; \frac{1}{4}\right)$. B. $M_0\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $M_0(-1; 1)$. D. $M_0(-1; 0)$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x-2)^2}, \forall x \neq 2$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M\left(x_0; \frac{-x_0+1}{x_0-2}\right)$ với $x_0 \neq 2$. Khi đó phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C)

tại điểm M là: $y = \frac{1}{(x_0-2)^2} \cdot (x-x_0) + \frac{-x_0+1}{x_0-2}$.

Tiếp tuyến đi qua điểm $A(2; -1)$ nên ta có phương trình:

$$-1 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \cdot (2-x_0) + \frac{-x_0+1}{x_0-2} \Leftrightarrow -1 = \frac{-1}{x_0-2} + \frac{-x_0+1}{x_0-2} = \frac{-x_0}{x_0-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 2 \\ -x_0 = -x_0 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 2 \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không có tiếp tuyến nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 2: Chọn B

Từ $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$ (*), cho $x=0$ ta có $[f(1)]^2 + [f(1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $4 \cdot f(2x+1) \cdot f'(2x+1) - 3[f(1-x)]^2 \cdot f'(1-x) = 1$.

Cho $x=0$ ta được $4f(1) \cdot f'(1) - 3[f(1)]^2 \cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) \cdot f'(1) \cdot [4 - 3f(1)] = 1$ (**).

Nếu $f(1) = 0$ thì (**) vô lý, do đó $f(1) = -1$, khi đó (**) trở thành

$$-f'(1) \cdot [4+3] = 1 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$$

Phương trình tiếp tuyến $y = -\frac{1}{7}(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$.

CÂU 3: Chọn D

$$y = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Gọi điểm $A(a; 2) \in (d): y = 2$. Đường thẳng đi qua A có dạng $y = k(x-a) + 2$

$$\text{Điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = k(x-a) + 2 \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k \end{cases} \Rightarrow (1-a)^2 k^2 - 4k - 4 = 0$$

Đề 2 tiếp tuyến vuông góc nhau $\Rightarrow \frac{-4}{(1-a)^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$. Vậy tổng hai hoành độ là: 2.

CÂU 4: Chọn B

Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là: $x=1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị (C) là: $y=1$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Tiếp tuyến với (C) tại $M(2;5)$ là:

$$y = y'(2)(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = \frac{-3}{(2-1)^2}(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11.$$

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng suy ra $E(1;8)$.

Gọi F là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang suy ra $F(3;2)$.

$$\text{Vậy } EF = \sqrt{(3-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

CÂU 5. Chọn A

Tọa độ giao điểm $I = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $\left(x_0; \frac{x_0-1}{2x_0+3}\right)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị hàm số tại

điểm $\left(x_0; \frac{x_0-1}{2x_0+3}\right)$ là:

$$y = -\frac{1}{(2x_0-3)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-1}{2x_0-3} \Leftrightarrow x + (2x_0-3)^2 y - 2x_0^2 + 4x_0 - 3 = 0.$$

$$\text{Khi đó: } d(I, \Delta) = \frac{\left|\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2x_0-3)^2 - 2x_0^2 + 4x_0 - 3\right|}{\sqrt{1+(2x_0-3)^4}} = \frac{|-2x_0+3|}{\sqrt{1+(2x_0-3)^4}} \leq \frac{|2x_0-3|}{\sqrt{2(2x_0-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(Theo bất đẳng thức Cô si)

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } (2x_0-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0-3=1 \\ 2x_0-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ x_0=1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max d(I, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

CÂU 6: Chọn D.

Vì $M \in d$ nên $M(m; 1-2m)$.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến Δ . Tiếp tuyến Δ đi qua M có dạng $y = k(x-m) + 1-2m$.

Vì Δ tiếp xúc với (C) nên hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = k(x-m) + 1-2m & (1) \\ \frac{-4}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases} \quad \text{có nghiệm.}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{-4}{(x-1)^2} (x-m)+1-2m \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} = \frac{-4}{(x-1)^2} (x-1+1-m)+1-2m.$$

$$\Leftrightarrow x+3 = -4 + (m-1) \cdot \frac{4}{x-1} + (1-2m)(x-1) \quad (3).$$

Mặt khác $y = \frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} = y-1$, thay vào (3) ta được

$$x+3 = -4 + (m-1)(y-1) + (1-2m)(x-1) \Leftrightarrow 2mx - (m-1)y - m + 7 = 0.$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $2mx - (m-1)y - m + 7 = 0$.

Gọi $K(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB đi qua. Ta có $2mx_0 - (m-1)y_0 - m + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x_0 - y_0 - 1)m + y_0 + 7 = 0.$$

Vì đẳng thức luôn đúng với mọi m nên ta có $\begin{cases} 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \\ y_0 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -7 \end{cases} \Rightarrow K(-3; -7).$

Vậy $OK = \sqrt{58}$.

CÂU 7: Chọn D

Gọi $M(m; 2)$ là điểm thuộc đường thẳng $y = 2$. Phương trình đường thẳng đi qua $M(m; 2)$ có hệ số góc là k và $(d): y = k(x-m) + 2$.

(d) tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ $\begin{cases} x_0^4 - 2x_0^2 + 3 = k(x_0 - m) + 2 \\ 4x_0^3 - 4x_0 = k \end{cases} \quad (2)$ có nghiệm x_0

Suy ra phương trình: $(x_0^2 - 1)(3x_0^2 - 4kx_0 + 1) = 0$ (*) có nghiệm x_0 .

Qua M kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) khi phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 4 giá trị k khác nhau.

Để thấy $x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow k(-1) = k(1)$, do đó không thể tồn tại 4 giá trị k khác nhau để thỏa bài toán. Tóm lại, không có tọa độ M thỏa bài toán.

CÂU 8: Chọn D

$$\begin{cases} M \in (C) \\ d(M, Ox) = 2d(M, Oy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ |y_M| = 2|x_M| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = \pm 2x_M \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = 2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ 2x_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2x_M \\ 3x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_M = \frac{4}{3} \\ y_M = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Vì M không trùng với gốc tọa độ O nên chỉ nhận $M\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 8x - 8$.

$$(*) \begin{cases} y_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \\ y_M = -2x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ -2x_M = \frac{x_M^2}{2-x_M} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2x_M \\ x_M^2 - 4x_M = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = -8 \end{cases} \text{ (do } M \neq O).$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = -8$.

CÂU 9: Chọn D

Đường thẳng (d) đi qua điểm $M(m; m)$ có hệ số góc là k , phương trình có dạng:

$$y = k(x - m) + m.$$

$$(d) \text{ tiếp xúc } (C) \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 \text{ khi hệ: } \begin{cases} \frac{2x_0^2}{x_0 + 2} = k(x_0 - m) + m \\ \frac{2x_0^2 + 8x_0}{(x_0 + 2)^2} = k \end{cases} \quad \text{có nghiệm } x_0, \text{ từ đây}$$

ta tìm được $m = -5 \pm \sqrt{23}$.

CÂU 10: Chọn A

- Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0 - 1}{2(x_0 + 1)}\right) \in (C)$ với $x_0 \neq -1$ là điểm cần tìm.
- Gọi Δ tiếp tuyến của (C) tại M ta có phương trình.
- $\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0 + 1)} = \frac{1}{(x_0 + 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 - 1}{2(x_0 + 1)}.$
- Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2}; 0\right)$ và $B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{2(x_0 + 1)^2}\right).$
- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6}; \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0 + 1)^2}\right).$$

$$\text{Do } G \text{ thuộc đường thẳng } 4x + y = 0 \Rightarrow -4 \cdot \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6} + \frac{x_0^2 - 2x_0 - 1}{6(x_0 + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{(x_0 + 1)^2} \quad (\text{vì } A, B \text{ không trùng } O \text{ nên } x_0^2 - 2x_0 - 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = \frac{1}{2} \\ x_0 + 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } x_0 > -1 \text{ nên chỉ chọn } x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x_0 + 2y_0 = -\frac{7}{2}.$$

CÂU 11: Chọn A

+) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{-x + 1}{2x - 1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ g(x) = 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

+) Theo định lí Viet ta có $x_1 + x_2 = -m$; $x_1 x_2 = \frac{-m - 1}{2}$. Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Ta có $y' = \frac{-1}{(2x-1)^2}$, nên tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$$k_1 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} \text{ và } k_2 = -\frac{1}{(2x_2-1)^2}. \text{ Vậy}$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) + 2}{[4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1]^2} \\ &= -(4m^2 + 8m + 6) = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2 \end{aligned}$$

+ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = -1$.

Vậy $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m = -1$.

CÂU 12: Chọn C

Phương pháp tự luận

* Ta có $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$.

* Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C), (x_0 \neq -1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0+1} \Leftrightarrow 3x - (x_0+1)^2 y + 2x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0.$$

* $d(I, \Delta) = \frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}} = \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2}} \leq \frac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}} = \sqrt{6}.$

* Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2} = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 2 - \sqrt{3} (L) \\ x_0 = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = 2 + \sqrt{3} (N) \end{cases}$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM \perp \Delta \Rightarrow cx_0 + d = \pm \sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_0 + 1 = \pm \sqrt{2+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{3} (L) \\ x_0 = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{3} (N) \end{cases}$$

CÂU 13: Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 2018$.

Phương trình tiếp tuyến Δ_k với (C) tại $M_k(x_k; y_k): y = (3x_k^2 - 2018)(x - x_k) + x_k^3 - 2018x_k$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ_k và (C) là:

$$x^3 - 2018x = (3x_k^2 - 2018)(x - x_k) + x_k^3 - 2018x_k \Leftrightarrow (x - x_k)^2(x + 2x_k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_k \\ x = -2x_k \end{cases}$$

Khi đó, ta có: (x_n) là cấp số nhân với công bội $q = -2$, $x_1 = 1 \Rightarrow x_{2018} = (-2)^{2017}$

Suy ra $\frac{y_{2018}}{x_{2018}} = \frac{x_{2018}^3 - 2018x_{2018}}{x_{2018}} = x_{2018}^2 - 2018 = 4^{2017} - 2018.$

Nhận xét: Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (C).

Tiếp tuyến Δ với (C) tại điểm $M_1(x_1; y_1)$ có phương trình

$$y = y'(x_1)(x - x_1) + ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = y'(x_1)(x - x_1) + ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \Leftrightarrow a(x - x_1)^2(x - x_2) = 0 \quad (1).$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} - 2x_1$.

Vậy tiếp tuyến Δ với (C) tại điểm $M_1(x_1; y_1)$ cắt (C) tại điểm $M_2(x_2; y_2)$ thì $x_2 = -\frac{b}{a} - 2x_1$.

CÂU 14: Chọn A

Phương trình tiếp tuyến (d) :

$$y = y'(a)(x - a) + \frac{a^4}{4} - 2a^2 + 4 = (a^3 - 4a)(x - a) + \frac{a^4}{4} - 2a^2 + 4 = (a^3 - 4a)x - \frac{3a^4}{4} + 2a^2 + 4.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4 = (a^3 - 4a)x - \frac{3a^4}{4} + 2a^2 + 4 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 4(a^3 - 4a)x + 3a^4 - 8a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x^2 + 2ax + 3a^2 - 8 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm E, F khác $M \Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = a^2 - 3a^2 + 8 > 0 \\ 6a^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < a < 2 \\ a \neq \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (*)$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn EF :

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = -a \\ y_I = (a^3 - 4a)(-a) - \frac{3a^4}{4} + 2a^2 + 4 \quad (do I \in (d)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -a \\ y_I = -\frac{7a^4}{4} + 6a^2 + 4 \end{cases}$$

$$I \in (P): y = -x^2 + 4 \Leftrightarrow -\frac{7a^4}{4} + 6a^2 + 4 = -a^2 + 4 \Leftrightarrow 7a^2(1 - \frac{a^2}{4}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \pm 2 \end{cases}.$$

So với điều kiện $(*)$ nhận $a = 0$.

CÂU 15: Chọn D

Hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình $\frac{2x+1}{x+1} = x+m$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + (m-1)x + m-1 = 0, x \neq -1 \quad (*)$$

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } -1 \text{ thì: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ thì: $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$

$$x_1 + x_2 = 1 - m$$

$$x_1 x_2 = m - 1$$

$$\text{Ta có: } k_1 = f'(x_1) = \frac{1}{(x_1 + 1)^2}, k_2 = f'(x_2) = \frac{1}{(x_2 + 1)^2}$$

Suy ra:

$$k_1 k_2 = \frac{1}{(x_1+1)^2} \times \frac{1}{(x_2+1)^2} = \frac{1}{(x_1+1)^2 (x_2+1)^2} = \frac{1}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2} = \frac{1}{(m-1-m+1+1)^2} = 1$$

Theo bài ra: $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + 2(k_1 + k_2) = 2018 k_1^{2018} k_2^{2018} \Leftrightarrow (k_1 + k_2) \left(\frac{1}{k_1 k_2} + 2 \right) = 2018 (k_1 k_2)^{2018}$

$$\Leftrightarrow 3(k_1 + k_2) = 2018$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[\frac{1}{(x_1+1)^2} + \frac{1}{(x_2+1)^2} \right] = 2018 \Leftrightarrow 3 \frac{(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2}{(x_1+1)^2 (x_2+1)^2} = 2018$$

$$\Leftrightarrow 3 \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) + 2}{(x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1)^2} = 2018 \Leftrightarrow 3 \left[(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 + 2 \right] = 2018$$

$$\Rightarrow 3(m-1)^2 - 12(m-1) - 2012 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 - \sqrt{24180}}{3} \\ m = \frac{9 + \sqrt{24180}}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện cho ta hai giá trị của m thỏa mãn bài ra: $m = \frac{9 - \sqrt{24180}}{3}, m = \frac{9 + \sqrt{24180}}{3}$

Do đó tổng của các giá trị của tất cả các phân tử của S bằng 6.

CÂU 16: Chọn D

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m) . Khi đó

$$y_0 = x_0^4 - m x_0^2 + m + 2018, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (-x_0^2 + 1)m + x_0^4 - y_0 + 2018 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0^2 + 1 = 0 \\ x_0^4 - y_0 + 2018 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \\ x_0^4 - y_0 + 2018 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(1; 2019) \\ N(-1; 2019) \end{cases}$$

Suy ra tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN có tọa độ là $I(0; 2019)$.

CÂU 17: Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số đã cho.

Khi đó: $y_0 = (m-4)x_0^3 - 6(m-4)x_0^2 - 12mx_0 + 7m - 18$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (x_0^3 - 6x_0^2 - 12x_0 + 7)m = y_0 + 4x_0^3 - 24x_0^2 + 18 \text{ luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 6x_0^2 - 12x_0 + 7 = 0 \\ y_0 + 4x_0^3 - 24x_0^2 + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3 - 6x_0^2 = 12x_0 - 7 \\ y_0 + 4x_0^3 - 24x_0^2 + 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0 + 4(12x_0 - 7) + 18 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -48x_0 + 10.$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua ba điểm cố định là $y = -48x + 10$.

CÂU 18: Chọn A

Gọi tọa độ điểm M là: $M(x_0; (x_0+1)^2)$.

Phương trình đường thẳng M_z có dạng: $y = k(x - x_0) + (x_0 + 1)^2 \Leftrightarrow kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2 = 0$.

Phương trình đường thẳng M_t là: $x = x_0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0$.

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng M_t, M_z là:

$$\frac{x - x_0}{1} - \frac{kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0 \text{ hoặc } \frac{x - x_0}{1} + \frac{kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \left(k + \sqrt{k^2 + 1}\right)x + kx_0 - x_0\sqrt{k^2 + 1} + (x_0 + 1)^2$$

$$\text{hoặc } y = \left(k - \sqrt{k^2 + 1}\right)x + kx_0 + x_0\sqrt{k^2 + 1} + (x_0 + 1)^2.$$

Mặt khác tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng M_t, M_z nên:

$$\begin{cases} y'(x_0) = k + \sqrt{k^2 + 1} \\ y'(x_0) = k - \sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 2 = k + \sqrt{k^2 + 1} \\ 2x_0 + 2 = k - \sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1}) \\ x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1}) \end{cases} (*).$$

Thay (*) vào phương trình đường thẳng M_z ta có:

$$+) \text{ Với } x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1}) \text{ ta có:}$$

$$M_z: kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = kx + k - k(x_0 + 1) + (x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = kx + k - k \cdot \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1}) + \left[\frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1})\right]^2 \Leftrightarrow y = kx + k + \frac{1}{4}.$$

$$+) \text{ Với } x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1}) \text{ ta có:}$$

$$M_z: kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = kx + k - k(x_0 + 1) + (x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = kx + k - k \cdot \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1}) + \left[\frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1})\right]^2 \Leftrightarrow y = kx + k + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Do đó phương trình đường thẳng } M_z: y = kx + k + \frac{1}{4}.$$

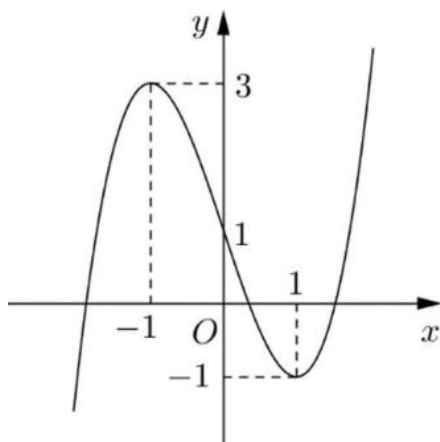
Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định mà M_z luôn đi qua ta có: $y_0 = kx_0 + k + \frac{1}{4} \forall k \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow k(x_0 + 1) + \frac{1}{4} - y_0 = 0 \forall k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ \frac{1}{4} - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow M_0\left(-1; \frac{1}{4}\right).$$

Vậy M_z luôn đi qua điểm cố định $M_0\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

CÁC DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



- A. $(-1; 3)$ B. $(-1; 1)$ C. $(-1; 3)$ D. $(-1; 1)$

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

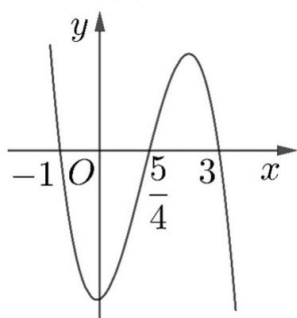
Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$ B. $(-\infty; -1)$ C. $(-1; 0)$ D. $(0; 2)$

CÂU 3. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 \geq 1) + m(x^2 \geq 1) \geq 6(x \geq 1) - 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phân tử thuộc S bằng

- A. $-\frac{3}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

CÂU 4. Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ ($m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phân tử là



- A. 4 B. 3 C. 1 D. 2

CÂU 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	4		3		3
		↓	↑	↓	↑
		1		1	

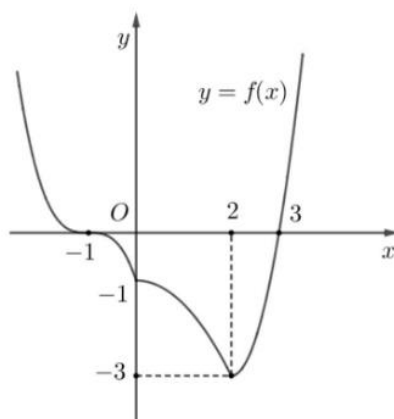
Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

- A. $m \geq f(-2) - 3$ B. $m > f(2) - 3e^4$ C. $m \geq f(2) - 3e^4$ D. $m > f(-2) - 3$

CÂU 6. Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = (m^3 - 3m)x^4 + m^2x^3 - mx^2 + x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

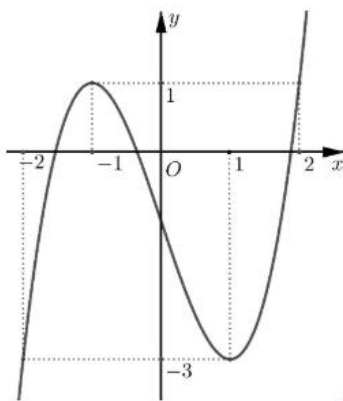
- A. 3 B. 1 C. Vô số D. 2

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $2f(x) + x^3 > 2m + 3x^2$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 3)$ khi và chỉ khi



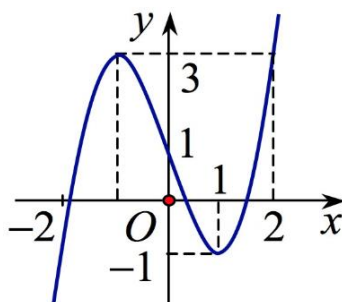
- A. $m < -10$ B. $m < -1$ C. $m < -3$ D. $m < -2$

CÂU 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(f(x) - m) = 0$ có tất cả 9 nghiệm thực phân biệt.



- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f(e^x) = m^2 - 1$ có hai nghiệm thực phân biệt là

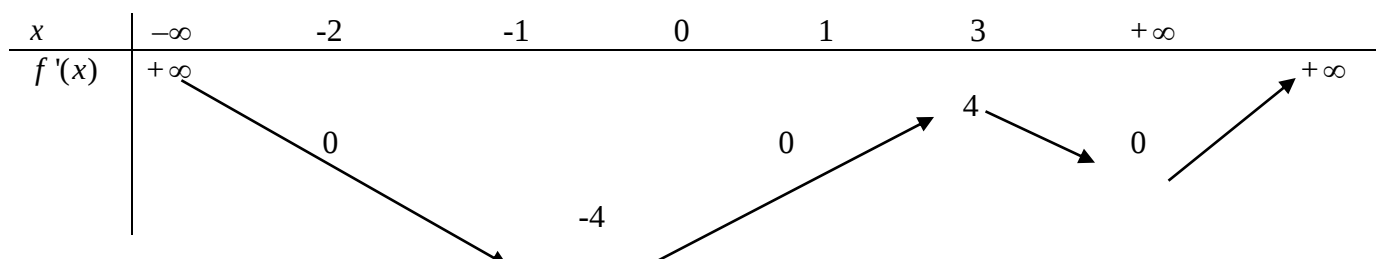
A. 5

B. 4

C. 7.

D. 6.

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = f(3x-1) + x^3 - 3mx$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$?



A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+

Hàm số $y = f(3x+1) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{3}{4}; 1\right)$

B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$

C. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$

CÂU 12. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10;10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

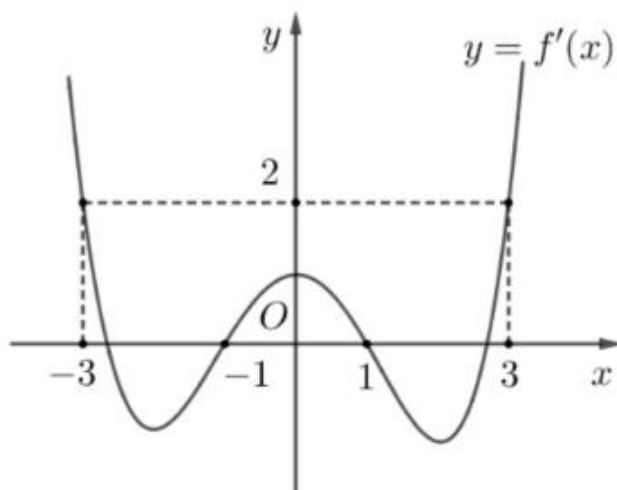
A. 15

B. 7

C. 16

D. 6

CÂU 13. Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, với a, b, c, d, e, f là các số thực; đồ thị của $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

C. $(-1; 0)$

D. $(1; 3)$

CÂU 14. Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m \right|$. Hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

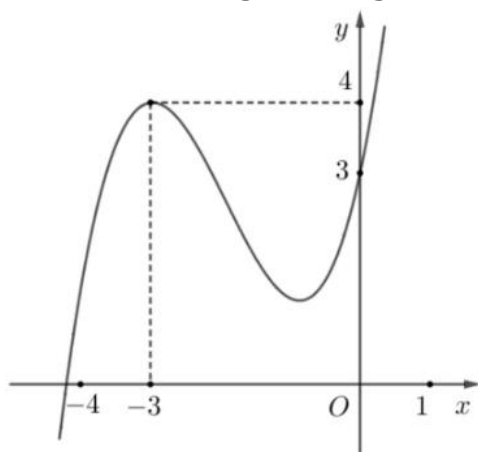
A. 2

B. 3

C. 5

D. 4

CÂU 15. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình $f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0$ có nghiệm.



A. 9.

B. 10.

C. 12.

D. 11.

CÂU 16:. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau:

x	1	2	3
y'	+	0	-
y		-1	
	-6		-3

Tổng tất cả các số nguyên m để phương trình $f(x-1) = \frac{m}{x^2 - 6x + 12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[2; 4]$ bằng

A. -75

B. -72

C. -294

D. -297

CÂU 17. Hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2 + 1} \right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4

B. 2

C. 5

D. 3

CÂU 18. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu đường thẳng d có đúng ba điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

CÂU 19. Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min_{[-1; 3]} f(x) \leq 3$.

A. 4

B. 8

C. 31

D. 39.

CÂU 20:. Cho hàm số $y = |x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 3|$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng 5 điểm cực trị là

A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

B. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$

C. $(1; +\infty) \setminus \{2\}$

D. $\left(1; \frac{3}{2}\right]$

CÂU 21. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{ax^2 + 1}}$ có đồ thị (C). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang và tồn tại tiếp tuyến của (C) song song và cách tiệm cận ngang của (C) một khoảng bằng 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

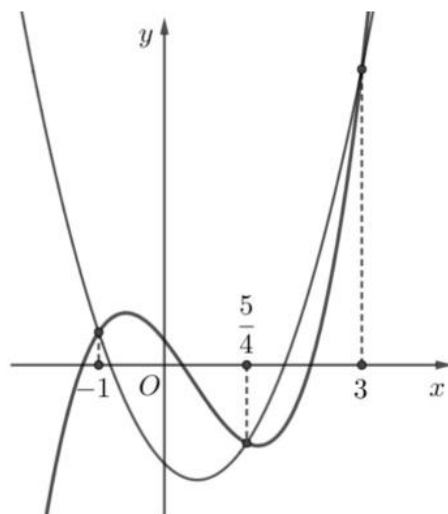
A. $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

B. $a \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$

C. $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

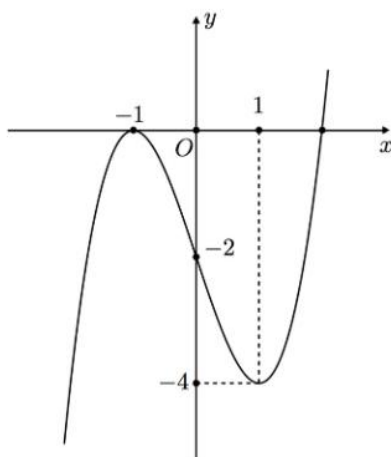
D. $a \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

CÂU 22. Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + 1$ với $a, b, c, d, e, m, n, p, q$ là các số thực. Đồ thị của hai hàm số $y = f'(x); y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Tổng các nghiệm của phương trình $f(x) + q = g(x) + e$ bằng



- A. $\frac{13}{3}$ B. $-\frac{13}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

CÂU 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



- A. $[-4; -2]$. B. $[-4; 0] \setminus \{-2\}$. C. $[-4; -2)$. D. $(-4; -2]$.

CÂU 24: Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. 26. B. 13. C. 14. D. 27.

CÂU 25: Tổng tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{1}{2}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x + 1$ đồng biến trên R bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. -2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

CÂU 26: Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng $y = (m - 6)x - 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt có tung độ y_1, y_2, y_3 thỏa mãn $\frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} + \frac{1}{y_3 + 4} = \frac{2}{3}$.

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1:

- Có $t = \sin x \in (0; 1]$, $\forall x \in (0; \pi)$. Do đó để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0; 1]$.
- Quan sát đồ thị thấy phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0; 1]$ khi $-1 \leq m < 1$. Chọn đáp án D.

CÂU 2:

- Ta có $y' > 0 \Leftrightarrow 3f'(x+2) - 3x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow f'(x+2) > x^2 - 1$.
- Đặt $t = x + 2$, bất phương trình trở thành: $f'(t) > (t-2)^2 - 1$. Không thể giải trực tiếp bất phương trình:

$$\text{Ta sẽ chọn } t \text{ sao cho } \begin{cases} (t-2)^2 - 1 < 0 \\ f'(t) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t-2 < 1 \\ t \in (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 3 \\ t \in (1; 2) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < t < 2 \\ 2 < t < 3 \end{cases}$$

- Khi đó $\begin{cases} 1 < x+2 < 2 \\ 2 < x+2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$.
- Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$; $(0; 1)$. Đối chiếu đáp án chọn C.

CÂU 3:

- Xét hàm số $f(x) = m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1)$. Ta có $f(1) = 0$ do đó để $f(x) \geq 0, \forall x$ thì trước tiên $f(x)$ không đổi dấu đi qua điểm $x = 1$, do đó $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$.
- Thử lại với $m = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 4 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 4) \geq 0, \forall x(t/m)$.
- Với $m = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{4}(x^4 - 1) - \frac{3}{2}(x^2 - 1) - 6(x - 1) = (x-1)^2\left(\frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{21}{4}\right) \geq 0, \forall x(t/m)$.
- Vậy tổng các phân tử cần tìm bằng $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$. Chọn đáp án C.

NOTE: Chú ý bước thử lại các em nên dùng máy CASIO 580 hoặc VINACAL 570 EXPLUS giải bất phương trình bậc bốn để kiểm tra cho nhanh.

CÂU 4:

- Dựa trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $f'(x) = k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3), k < 0$.
- Mặt khác $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$.
- Đồng nhất ta có
- $4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q = k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3), \forall x$
- $\Leftrightarrow 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q = k\left(x^3 - \frac{13}{4}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{15}{4}\right), \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m = k \\ 3n = -\frac{13}{4}k \\ 2p = -\frac{1}{2}k \\ q = \frac{15}{4}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4}k \\ n = -\frac{13}{12}k \\ p = -\frac{1}{4}k \\ q = \frac{15}{4}k \end{cases} \Rightarrow f(x) = k\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x\right) + r.$$

• Vậy $f(x) = r \Leftrightarrow k\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x\right) + r = r \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{3} \\ x = 3 \end{cases}$

Cách 2: Xét hàm số $f(x)$ có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -\frac{5}{4}; x = 3$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$1,25$	3	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y									

$-\infty \nearrow f(-1) \searrow f(1,25) \nearrow f(3) \searrow \infty$

- Ta có $r = f(0) \in (f(-1,25); f(-1))$. Ta đi so sánh $f(0), f(3)$.
- $f'(x) = k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) \Rightarrow f(3) - f(0) = \int_0^3 f'(x)dx = \int_0^3 k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3)dx = 0 \Rightarrow f(0) = f(3)$.
- Kẻ đường thẳng $y = f(0)$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 3 điểm phân biệt. Do đó phương trình $f(x) = r = f(0)$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Chọn đáp án B.**

CÂU 5:

- Bất phương trình tương đương với: $m > g(x) = f(x) - 3e^{x+2}$,
- Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3e^{x+2} < 3 - 3e^{-2+2} = 0, \forall x \in (-2; 2)$.
- Do đó $g(x) > g(2) = f(2) - 3e^4, \forall x \in (-2; 2)$.
- vậy $m > g(x)$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 2) \Leftrightarrow m > g(2) \Leftrightarrow m > f(2) - 3e^4$.

Chọn đáp án B.

CÂU 6:

- Có $ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow g(x) = 4(m^3 - 3m)x^3 + 3m^2x^2 - 2mx + 1 \geq 0, \forall x$.
- Trường hợp 1:** $m^3 - 3m > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ do đó không thể có $g(x) \geq 0, \forall x$.
- Trường hợp 2:** $m^3 - 3m < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ do đó không thể có $g(x) \geq 0, \forall x$.
- Trường hợp 3:** Nếu $m^3 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = \pm\sqrt{3}$.
- +) Với $m = 0 \Rightarrow g(x) = 1 \geq 0, \forall x(t/m)$;
- + Với $m = -\sqrt{3} \Rightarrow g(x) = 9x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 \geq 0, \forall x(t/m)$;
- + Với $m = \sqrt{3} \Rightarrow g(x) = 9x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 \geq 0, \forall x(t/m)$;
- Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $m \in \{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$.
- Chọn đáp án A.**
- Một cách tương tự điều kiện cần để một đa thức bậc lẻ
- $g(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0 \geq 0, \forall x$ là $a_{2n+1} = 0$.

CÂU 7:

- Bất phương trình tương đương với: $ycbt \Leftrightarrow f(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^2}{2} > m, \forall x \in (-1; 3) \Leftrightarrow m < \min_{(-1;3)} g(x)$,

- Trong đó $g(x) = f(x) + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2}$.
- Quan sát đồ thị hàm số có $\min_{(-1;3)} f(x) = f(2) = -3$ và $\min_{(-1;3)} \left(h(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} \right) = h(2) = -2$.
- Vì vậy $\min_{(-1;3)} g(x) = g(2) = -5$. Vậy $m < -5$ là các giá trị cần tìm.

CÂU 8:

- Có đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt $a; b; c$ với $-2 < a < -1 < b < 0 < 1 < c < 2$.
- Vậy $f(f(x) - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - m = a \\ f(x) - m = b \\ f(x) - m = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m + a \\ f(x) = m + b \\ f(x) = m + c \end{cases}$.
- Để phương trình có 9 nghiệm thực phân biệt thì mỗi phương trình cuối phải có ba nghiệm thực phân biệt điều này tương đương với
- $\begin{cases} -3 < m + a < 1 \\ -3 < m + b < 1 \\ -3 < m + c < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 - a \\ m < 1 - c \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1\}$.

Chọn đáp án A.

CÂU 9:

- $ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-2; 1) \Leftrightarrow 3f'(3x-1) + 3x^2 - 3m \geq 0, \forall x \in (-2; 1)$
- $\Leftrightarrow m \leq g(x) = f'(3x-1) + x^2, \forall x \in (-2; 1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-2;1)} g(x)$
- Ta có $\min_{(-2;1)} \{h(x) = x^2\} = h(0) = 0; \min_{(-2;1)} \{k(x) = f'(3x-1)\} = k(0) = f'(-1) = -4$.
- Do đó $\min_{(-2;1)} g(x) = g(0) = h(0) + f'(-1) = 0 - 4 = -4 \Rightarrow m \leq -4 \Rightarrow m \in \{-9, \dots, -4\}$.
- Có tất cả 6 số nguyên thỏa mãn.

Chọn đáp án B.

CÂU 10:

- Đặt $t = x(x-3)^2$ có $t' = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + 2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 3$.
- Bảng biến thiên của t như sau

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$	
t'			+	0	-	0	+
t							

- Nếu $\begin{cases} t < 0 \\ t > 4 \end{cases}$ phương trình $t = x(x-3)^2$ không có nghiệm thuộc đoạn $[0; 4]$;
- Nếu $\begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$ phương trình $t = x(x-3)^2$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 4]$;

- Nếu $0 < t < 4$ phương trình $t = x(x-3)^2$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;4]$.
- Vậy phương trình $f(x(x-3)^2) = m$ có 9 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;4] \Leftrightarrow f(t) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt $t \in (0;4) \Leftrightarrow 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1, 2, 3\}$.

Chọn đáp án A.

CÂU 11:

- Ta có $y' > 0 \Leftrightarrow 3f'(3x+1) - 3x^2 + 3 > 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) > x^2 - 1$. Bất phương trình không thể giải trực tiếp, ta sẽ chọn x thỏa mãn:

$$\bullet \quad \begin{cases} f'(3x+1) > 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 3x+1 < 2 \\ 2 < 3x+1 < 3 \\ 3x+1 > 4 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

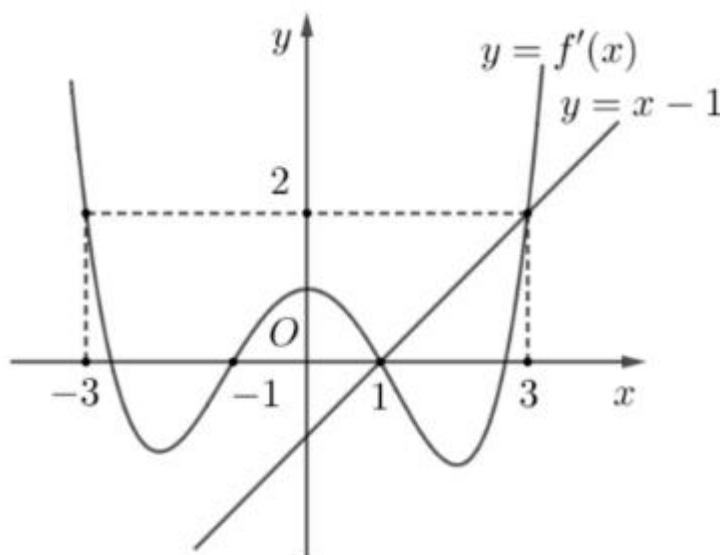
- **Chọn đáp án C.**

CÂU 12:

- Yêu cầu bài toán tương đương với:
- $y' = 4m^2x^3 - 4(4m-1)x \geq 0, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow g(x) = m^2x^2 - (4m-1) \geq 0, \forall x \geq 1$.
- $\Leftrightarrow \min_{[1;+\infty)} g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(1) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - (4m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 + \sqrt{3} \\ m \leq 2 - \sqrt{3} \end{cases}$.
- Vậy $m \in \{-9, \dots, 0, 4, \dots, 9\}$ có tất cả 16 số nguyên thỏa mãn.

CÂU 13:

- Ta có $y' > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) - 4x > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < -2x$. Đặt $t = 1-2x$, bất phương trình trở thành $f'(t) < t-1$. kẻ thêm đường thẳng $y = x-1$ qua hai điểm $(1;0);(3;2)$ trên đồ thị



- Ta có $f'(t) < t-1 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 1-2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Đối chiếu các đáp án chọn C.

CÂU 14:

- Xét $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + m$ có
- $g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$m-1$	$m+\sqrt{3}$	$m+1$

- Suy ra $g(x)$ có 1 điểm cực trị $x = 1$ và phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m+\sqrt{2} > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 1$.
- Vậy hàm số $f(x) = |g(x)|$ có tối đa $1 + 2 = 3$ điểm cực trị.
- Chọn đáp án B.**

CÂU 15:

- Ta có điều kiện của bất phương trình là $-1 \leq x \leq 1$. Khi đó bất phương trình tương đương với:
- $f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} - f(m) \leq 0 \Leftrightarrow f(m) \geq g(x) = f(\sqrt{1-x^2}) + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} (*)$.
- Ta có $h(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3} \Rightarrow \min_{[-1;1]} h(x) = g - 1 = 1; \min_{[-1;1]} f(\sqrt{1-x^2}) = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 3$.
- Do đó $\min_{[-1;1]} g(x) = \min_{[-1;1]} h(x) + \min_{[-1;1]} f(\sqrt{1-x^2}) = 1 + 3 = 4 = g(-1)$.
- Vậy $(*)$ có nghiệm trên đoạn $[-1;1] \Leftrightarrow f(m) \geq \min_{[-1;1]} g(x) \Leftrightarrow f(m) \geq 4$.
- Quan sát đồ thị hàm số suy ra $m \in \{-3, 1, 2, \dots, 10\}$. Có tất cả 11 số nguyên thỏa mãn.

CÂU 16:

- Phương trình tương đương với: $m = g(x) = (x^2 - 6x + 12)f(x-1)$.
- Ta có $g'(x) = (2x-6)f(x-1) + (x^2-6x+12)f'(x-1)$
- Nếu $2 \leq x < 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6 < 0; f(x-1) < 0 \\ x^2-6x+12 > 0; f'(x-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0$
- Nếu $x = 3 \Rightarrow g'(3) = 0, f(2) + 3, f'(2) = 0$
- Nếu $3 < x \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6 > 0; f(x-1) < 0 \\ x^2-6x+12 > 0; f'(x-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$.
- Vậy trên đoạn $[2;4]$ ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- Bảng biến thiên:

x	2	3	4
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-24	-3	-12

- Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn
- $[2;4] \Leftrightarrow -12 \leq m < -3 \Rightarrow m \in \{-12, \dots, -4\}$.
- Tổng các số nguyên cần tìm bằng $\sum_{k=-12}^{-4} k = -72$
- Chọn đáp án B.**

CÂU 17:

- Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx\sqrt{x^2+1}$. Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3m\sqrt{x^2+1} + x^2 = 0(1) \end{cases}$.
- Với $m > 0$ thì (1) vô nghiệm; với $m = 0$ thì (1) có đúng 1 nghiệm $x = 0$; với $m < 0$ khi đó ta có
 $(1) \Leftrightarrow (x^2+1) + 3m\sqrt{x^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{-3m \pm \sqrt{9m^2+4}}{2}$ chỉ nhận nghiệm
 $\sqrt{x^2+1} = \frac{-3m + \sqrt{9m^2+4}}{2}$ vì $\frac{-3m - \sqrt{9m^2+4}}{2} < \frac{-3m - \sqrt{9m^2}}{2} = \frac{-3m - 3|m|}{2} \leq 0, \forall m$.
- Vậy với $m < 0$ thì $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là các nghiệm đơn.
- Tiếp theo ta biện luận số điểm cực trị của $g(x)$: với
 $g'(x) = x^2 + m\left(\sqrt{x^2+1} + x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = x^2 + m \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- Nếu $m \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq x^2 \geq 0, \forall x$ nên $g(x)$ không có điểm cực trị.
- nếu $m < 0$ khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{2x^2+1} (*)$. Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $m < 0$, tức $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi $m < 0$.
- Tóm lại hàm số $f(x) = |g(x)|$ có tối đa $3 + 2 = 5$ điểm cực trị.

CÂU 18:

- Giả sử đường thẳng cần tìm có dạng $y = kx + m$. Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 = kx + m \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - kx - m = 0$. Theo giả thiết đường thẳng d có đúng ba điểm chung với đồ thị (C) và các điểm chung có hoành độ x_1, x_2, x_3 nên
 $x^4 - 2x^2 - kx - m = (x - x_1)^2(x - x_2)(x - x_3)$.
- Do đó d là tiếp tuyến của (C) có hoành độ $x = x_1 \Rightarrow d: y = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$.
- Phương trình hoành độ giao điểm lúc này là:
- $x^4 - 2x^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1) + x_1^4 - 2x_1^2$
- $\Leftrightarrow (x - x_1)^2(x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x^2 + 2x_1x + 3x_1^2 - 2 = 0(1) \end{cases}$
- Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có hai nghiệm phân biệt $x_2, x_3 \neq x_1$ và $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1$.
- $\begin{cases} \Delta' = x_1^2 - (3x_1^2 - 2) > 0 \\ x_1^2 + 2x_1^2 + 3x_1^2 - 2 \neq 0 \\ x_1^3 + (x_2 + x_3)^3 - 3x_2x_3(x_2 + x_3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x_1 < 1 \\ x_1 \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-11 + \sqrt{165}}{22}$
- Vì vậy có duy nhất một đường thẳng thỏa mãn là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{-11 + \sqrt{65}}{22}$.
- Chọn đáp án B.**
- NOTE:** Chú ý dạng toán này thuộc bài học tiếp tuyến cắt đồ thị hàm số.

CÂU 19:

- Xét $u = 2x^3 - 3x^2 + m$ có $u' = 6x^2 - 6x; u' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1$.

- Do đó $\begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min \{m-5, m+27, m, m-1\} = m-5 \\ \max_{[-1;3]} u = \max \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max \{m-5, m+27, m, m-1\} = m+27 \end{cases}$
- Nếu $m-5 \geq 0 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = m-5 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 8 \Rightarrow m \in \{5, 6, 7, 8\}$.
- Nếu $m+27 \leq 0 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = -(m+27) \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -30 \Rightarrow m \in \{-30, -29, -28, -27\}$.
- Vậy $m \in \{-30, \dots, 8\}$ có tất cả 39 số nguyên thỏa mãn.
- Chọn đáp án D.**

CÂU 20:

- Xét $f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 3 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2m + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 2m - 3 \end{cases}$
- TH1: Nếu $2m - 3 \leq 0 \Rightarrow$ Do vậy $f(x)$ có hai điểm đổi dấu $x = -1; x = 1$. Hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow y = f(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -2(m-1) < 0 \Leftrightarrow m > 1$.
- Vậy trường hợp này có $1 < m \leq \frac{3}{2}$.
- TH2: Nếu $0 < 2m - 3 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \neq 2$. Khi đó $f(x)$ có 4 điểm đổi dấu $x = \pm 1; x = \pm \sqrt{2m-3}$ do đó số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng 3 và hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị (loại).
- TH3: Nếu $2m - 3 = 1 \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = (x^2 - 1)^2$ khi đó $y = |f(x)| = (x^2 - 1)^2$ có 3 điểm cực trị (loại).
- Chọn đáp án D.**

CÂU 21:

- Điều kiện để đường cong (C) có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $a > 0 \Rightarrow TCN : y = \frac{1}{\sqrt{a}}; y = -\frac{1}{\sqrt{a}}$
- Ta có $y' = \frac{\sqrt{ax^2+1} - (x+1) \frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}}{ax^2+1} = \frac{1-ax}{\sqrt{(ax^2+1)^3}}$. Để tiếp tuyến của (C) tại điểm M song song với tiệm cận ngang thì $y'(x_M) = 0 \Leftrightarrow 1 - ax_M = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{a} \Rightarrow M\left(\frac{1}{a}; \sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)$.
- Khi đó $d(t_M; TCN) = d(M, TCN) = \begin{cases} \left| \sqrt{1+\frac{1}{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \\ \left| \sqrt{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{9}{16}$.
- Chọn đáp án A.**

CÂU 22:

- Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$ có $h'(x) = k(x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) (k \neq 0); h(0) = f(0) - g(0) = e - q$.
- Do đó $h(x) = (h(x) - h(0)) + h(0) = \int_0^x h'(x) dx - e + q = k \int_0^x (x+1)\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3) dx + e - q$.
- $= \frac{k}{4} \int_0^x (x+1)(4x-5)(x-3) dx + e - q = \frac{k}{4} \int_0^x (4x^3 - 13x^2 - 2x + 15) dx + e - q$.

$$= \frac{k}{4} \left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x \right) + e - q.$$

- Phương trình tương đương với: $h(x) = e - q \Leftrightarrow x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.
- Tổng các nghiệm của phương trình bằng $-\frac{5}{3} + 0 + 3 = \frac{4}{3}$.

• **Chọn đáp án C.**

Đề 15

CÂU 23:

- Đặt $t = \sin x \in (0; 1]$, $\forall x \in (0; \pi)$. Phương trình trở thành: $f(t) = m(1)$.
- Ta cần tìm m để (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1] \Leftrightarrow -4 \leq m < -2$.

CÂU 24:

- Xét $u = x^4 - 38x^2 + 120x + 4m$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có $u' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 76x + 120 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$.
- Vậy $\begin{cases} \max_{[0; 2]} u = \max \{u(0), u(2)\} = \max \{4m, 4m + 104\} = 4m + 104 \\ \min_{[0; 2]} u = \min \{u(0), u(2)\} = \min \{4m, 4m + 104\} = 4m \end{cases}$
- Khi đó $\min_{[0; 2]} \left\{ \min y \right\} = 0 \Leftrightarrow 4m(4m + 104) \leq 0 \Leftrightarrow -26 \leq m \leq 0$. Có 27 số nguyên thỏa mãn.
- **Chọn đáp án D.**

CÂU 25:

- Có $y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow g(x) = m^2x^4 - mx^2 + 20x - m^2 + m + 20 \geq 0, \forall x$.
- ĐK cần: Để ý $g(x) = 0$ có một nghiệm $x = -1$, do vậy $g(x) \geq 0, \forall x$ thì trước tiên $g(x)$ không đổi dấu khi qua điểm $x = -1$, tức $g(x) = 0$ có nghiệm kép
- $x = -1 \Leftrightarrow g'(-1) = 0 \Leftrightarrow (4m^2x^3 - 2mx + 20) \Big|_{x=-1}^{x=0} \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$.
- **Điều kiện đủ: Bước tiếp theo cần thử lại:**
- Với $m = -2 \Rightarrow g(x) = 4x^4 + 2x^2 + 20x + 14 = 2(x+1)^2(2x^2 - 4x + 7) \geq 0, \forall x(t/m)$.
- Với $m = \frac{5}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{25}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 20x + \frac{65}{4} = \frac{5}{4}(x+1)^2(5x^2 - 10x + 13) \geq 0, \forall x(t/m)$.
- Vậy $m = -2; m = \frac{5}{2}$ là các giá trị cần tìm.
- **Chọn đáp án C.**
- **NOTE:** Chú ý bước thử lại các em nên dùng máy CASIO 580 hoặc VINACAL 570 EXPLUS giải bất phương trình bậc bốn để kiểm tra cho nhanh.

CÂU 26:

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + x^2 - 3x - 1 = (m-6)x - 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + (3-m)x + 3 = 0$
- Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm phân biệt của phương trình này ta có
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 3-m \end{cases}$$
- và tung độ các giao điểm là $y_1 = (m-6)x_1 - 4; y_2 = (m-6)x_2 - 4; y_3 = (m-6)x_3 - 4$.
- Vậy điều kiện bài toán: $\frac{1}{y_1+4} + \frac{1}{y_2+4} + \frac{1}{y_3+4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{(m-6)x_1} + \frac{1}{(m-6)x_2} + \frac{1}{(m-6)x_3} = \frac{2}{3}$
- $\Leftrightarrow \frac{1}{m-6} \left(\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} \right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{m-6} \left(\frac{3-m}{-3} \right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow m = 9$.
- Thử lại $m = 9 \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x + 3 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m = 9$ thỏa mãn.
- **Chọn đáp án D.**

- Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

CHỦ ĐỀ 1: LŨY THỪA

❖ **VÍ DỤ 1:** Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao.

Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

- A. $12 - \log 5$ (giờ). B. $\frac{12}{5}$ (giờ). C. $12 - \log 2$ (giờ). D. $12 + \ln 5$ (giờ).

Lời giải

Chọn A

Ta gọi u_i là số lá bèo ở giờ thứ i .

Ta có $u_0 = 1 = 10^0, u_1 = 10, u_2 = 10^2, \dots, u_{12} = 10^{12}$.

Ta có số lá bèo để phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $\frac{1}{5} \cdot 10^{12} \Rightarrow$ thời gian mà số lá bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt hồ là $12 - \log 5$.

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị

$$M = f(2017^{2018}).$$

- A. $2017^{1009} + 1$. B. $2017^{2018} + 1$. C. $-2017^{1009} - 1$. D. 2017^{1009} .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}} - a^{-\frac{1}{8}}\right)} = \frac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1} = -1 - a^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Do đó } M = f(2017^{2018}) = -1 - (2017^{2018})^{\frac{1}{2}} = -1 - 2017^{1009}.$$

❖ **VÍ DỤ 3:** Có tất cả bao nhiêu bộ ba số thực (x, y, z) thỏa mãn đồng thời các điều kiện dưới đây $2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128$ và $(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2$.

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot 4^{\sqrt[3]{y^2}} \cdot 16^{\sqrt[3]{z^2}} = 128 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2}} = 2^7 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} + 4\sqrt[3]{z^2} = 7 \quad (1),$$

$$(xy^2 + z^4)^2 = 4 + (xy^2 - z^4)^2 \Leftrightarrow xy^2 z^4 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{y^2} \sqrt[3]{z^4} = 1 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{x} > 0 \text{ (theo (2))}, b = \sqrt[3]{y}, c = \sqrt[3]{z}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$7 = a^2 + 2b^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + c^2 + c^2 \geq 7\sqrt[7]{a^2 b^4 c^8} = 7.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a^2 = b^2 = c^2$, hay $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2}$. Thay vào (1) ta được $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{z^2} = 1$. Vì $x > 0$ nên có 4 bộ số thỏa mãn là $(x, y, z) = (1; 1; 1); (x, y, z) = (1; -1; 1); (x, y, z) = (1; 1; -1); (x, y, z) = (1; -1; -1)$.

CHỦ ĐỀ 2: HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $y = f(x) = 2018 \ln \left(e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e} \right)$. Tính giá trị biểu thức

$$T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017).$$

A. $T = \frac{2019}{2}$.

B. $T = 1009$.

C. $T = \frac{2017}{2}$.

D. $T = 1008$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(t) = \frac{e^t}{e^t + \sqrt{e}}$ ta có $g(1-t) = \frac{e^{1-t}}{e^{1-t} + \sqrt{e}} = \frac{\frac{e}{e^t}}{\frac{e}{e^t} + \sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + e^t}$.

Khi đó $g(t) + g(1-t) = \frac{e^t}{e^t + \sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} + e^t} = 1$. (*)

Xét hàm số $y = f(x) = 2018 \ln \left(e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e} \right)$ ta có $y' = f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{2018}}}{e^{\frac{x}{2018}} + \sqrt{e}}$.

Do $\frac{1}{2018} + \frac{2017}{2018} = 1$ nên theo (*) ta có $f'(1) + f'(2017) = f'\left(\frac{1}{2018}\right) + f'\left(\frac{2017}{2018}\right) = 1$.

Khi đó ta có $T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2017)$

$$= [f'(1) + f'(2017)] + [f'(2) + f'(2016)] + \dots + [f'(1008) + f'(1010)] + f'(1009)$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{e^{\frac{1009}{2018}}}{e^{\frac{1009}{2018}} + \sqrt{e}} = 1008 + \frac{1}{2} = \frac{2017}{2}$$

❖ **VÍ DỤ 2:** Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3$.

A. $\min P = 13$.

B. $\min P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

C. $\min P = 9$.

D. $\min P = \sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \left(\log_{\frac{b}{a}} a \right)^2 - 3 = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \left(\frac{1}{\log_a \frac{a}{b}} \right)^2 - 3$$

$$= \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \left(\frac{1}{1 - \log_a b} \right)^2 - 3 = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3.$$

Ta có: $\frac{3b-1}{4} \leq b^3 \Leftrightarrow 3b-1 \leq 4b^3 \Leftrightarrow 4b^3 - 3b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (b+1)(4b^2 - 4b + 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (b+1)(2b-1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng với } \frac{1}{3} < b < 1).$$

$$\Rightarrow \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) \geq \log_a b^3 \text{ (vì } a < 1) \Rightarrow \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) \geq 3 \log_a b.$$

$$\text{Do đó } P \geq 3 \log_a b + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} - 3 \Leftrightarrow P \geq 3(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \text{ (*).}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3} < b < a < 1 \text{ nên } \log_a b > 1.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương: } \frac{3}{2}(\log_a b - 1), \frac{3}{2}(\log_a b - 1), \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}$$

$$\frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{3}{2}(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}(\log_a b - 1) \cdot \frac{3}{2}(\log_a b - 1) \cdot \frac{12}{(\log_a b - 1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3(\log_a b - 1) + \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \geq 9 \text{ (**).}$$

Từ (*) và (**) ta có $P \geq 9$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(\log_a b - 1) = \frac{12}{(\log_a b - 1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ (\log_a b - 1)^3 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ \log_a b - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ \log_a b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ b = a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}.$$

Vậy min $P = 9$.

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Gọi S là tập các cặp số thực (x, y) sao cho $x \in [-1; 1]$ và $\ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$. Biết rằng giá trị lớn nhất của biểu thức $P = e^{2018x}(y+1) - 2018x^2$ với $(x, y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
- A. $x_0 \in (-1; 0)$. B. $x_0 = -1$. C. $x_0 = 1$. D. $x_0 \in [0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x - y > 0$

$$\text{Ta có } \ln(x-y)^x - 2017x = \ln(x-y)^y - 2017y + e^{2018}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\ln(x-y) - 2017(x-y) = e^{2018} \Leftrightarrow \ln(x-y) - 2017 - \frac{e^{2018}}{x-y} = 0 \text{ (*)}$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \ln t - 2017 - \frac{e^{2018}}{t}, \text{ có } f'(t) = \frac{1}{t} + \frac{e^{2018}}{t^2} > 0 \text{ với } \forall t > 0$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$,

$$\text{suy ra (*)} \Leftrightarrow f(x-y) = 0 = f(e^{2018}) \Leftrightarrow x-y = e^{2018} \Leftrightarrow y = x - e^{2018}$$

$$\text{Khi đó } P = e^{2018x}(1+x-e^{2018}) - 2018x^2 = g(x)$$

$$g'(x) = e^{2018x}(2019 + 2018x - 2018e^{2018}) - 4036x$$

$$g''(x) = e^{2018x}(2018 \cdot 2020 + 2018^2 x - 2018^2 e^{2018}) - 4036$$

$$\leq e^{2018x}(2018.2020 + 2018^2 - 2018^2 e^{2018}) - 4036 < 0 \text{ với } \forall x \in [-1;1]$$

Nên $g'(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$,

mà $g'(-1) = e^{-2018} + 2018 > 0$, $g'(0) = 2019 - 2018e^{2018} < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (-1;0)$ sao cho $g(x_0) = 0$ và khi đó $\max_{[-1;1]} g(x) = g(x_0)$

Vậy P lớn nhất tại $x_0 \in (-1;0)$.

❖ **VÍ DỤ 4:** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $2^a + 4^b + 8^c = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + 2b + 3c$. Giá trị của biểu thức $4^M + \log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$.

B. $\frac{281}{50}$.

C. $\frac{4096}{729}$.

D. $\frac{14}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $a = \log_2 x$, $2b = \log_2 y$, $3c = \log_2 z$. Ta có $S = \log_2(xyz)$.

$$\bullet \quad 4 = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow S \leq 3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Max} S = M = 3\log_2\left(\frac{4}{3}\right), \text{ khi } x = y = z = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \quad \text{Gọi } z = \min(x, y, z) \Rightarrow 1 \leq z \leq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do } (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy \geq x + y + 1 = 3 - z \Rightarrow xyz \geq z(3 - z) \geq 2 \text{ (vì } z \in \left[1; \frac{4}{3}\right])$$

Suy ra $S \geq 1$, do đó $m = \min S = 1$ khi $x = z = 1, y = 2$

$$4^M + \log_M m = 4^{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)} + \log_{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)} 1 = \frac{4096}{729}.$$

❖ **VÍ DỤ 5:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-10;10]$ để hàm số

$$y = 8^{\cot x} + (m-3).2^{\cot x} + 3m - 2 \text{ đồng biến trên } \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]. \text{ Số phần tử của } S \text{ là:}$$

A. 2

B. 8.

C. 1.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = 2^{\cot x}. \text{ Vì } x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right] \text{ nên } t \in (0; 2].$$

Vì hàm số $t = 2^{\cot x}$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ nên yêu cầu bài toán tương đương hàm số

$$f(t) = t^3 + (m-3)t + 3m - 2 \text{ nghịch biến trên } (0; 2]. \text{ Ta có } f'(t) = 3t^2 + m - 3.$$

$$f'(t) \leq 0 \text{ với } \forall t \in (0; 2]; f'(t) \leq 0 \Leftrightarrow 3t^2 + m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - m \geq 3t^2.$$

$$\text{Do } 0 < 3t^2 \leq 12 \text{ nên } f'(t) \leq 0 \text{ với } \forall t \in (0; 2] \Leftrightarrow 3 - m \geq 12 \Leftrightarrow m \leq -9.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên $m \in [-10;10]$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$.

- A. $S = \frac{2018}{2019}$. B. $S = 1$. C. $S = \ln 2018$. D. $S = 2018$.

CÂU 2: Giá trị nhỏ nhất của $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn

$$\sqrt{b} > a > 1 \text{ là}$$

- A. 30. B. 40. C. 50. D. 60.

CÂU 3: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

CÂU 4: giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ biết rằng $4^{\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}{2}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$ với $x \neq 0$ và $-1 \leq y \leq \frac{13}{2}$.

- A. $P = 4$. B. $P = 2$. C. $P = 1$. D. $P = 3$.

CÂU 5: Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

- A. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. D. $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

CÂU 6: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị

$$P_{\max} \text{ của biểu thức } P = \frac{5x+4y+4}{x+y+3}.$$

- A. $P_{\max} = 0$ B. $P_{\max} = 1$ C. $P_{\max} = 2$ D. $P_{\max} = 3$

CÂU 7: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị

$$\text{lớn nhất } P_{\max} \text{ của biểu thức } P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}.$$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

CÂU 8: Cho 2 số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 [(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là

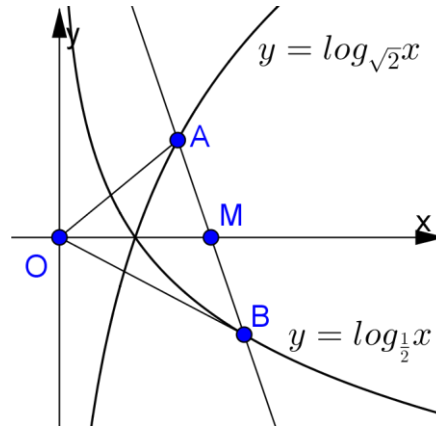
- A. $P_{\min} = \frac{11}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{27}{5}$. C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$. D. $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$.

CÂU 9: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{(x+y)} (x^2 + y^2) \leq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = 48(x+y)^3 - 156(x+y)^2 + 133(x+y) + 4 \text{ là:}$$

- A. 29. B. $\frac{1369}{36}$. C. 30. D. $\frac{505}{36}$.

CÂU 10: Gọi A và B là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ sao cho điểm $M(2,0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB . Diện tích tam giác OAB là bao nhiêu biết rằng O là gốc tọa độ?



- A. $S = 8\log_2 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$.
 B. $S = 4\log_2 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$.
 C. $S = 8\log_2 \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2} \right)$.
 D. $S = 4\log_2 \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2} \right)$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(\frac{2018x}{x+1} \right)' \cdot \frac{x+1}{2018x} = \frac{2018}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{2018x} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$\text{Khi đó: } f'(1) = \frac{1}{1 \cdot 2}; f'(2) = \frac{1}{2 \cdot 3}; \dots; f'(2018) = \frac{1}{2018 \cdot 2019}.$$

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} = 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}.$$

CÂU 2: Chọn D

$$\text{Ta có } P = (2\log_a b)^2 + 6 \left(\log_{\frac{b}{a^2}} \frac{b}{a} \right)^2.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{b}{a^2} > \frac{a^2}{a^2} = 1. \text{ Vậy } b = a^2 x \text{ và}$$

$$\begin{aligned} P &= [2\log_a (a^2 x)]^2 + 6 \left(\log_x \frac{a^2 x}{a} \right)^2 = 4(\log_a a^2 + \log_a x)^2 + 6[\log_x (xa)]^2 \\ &= 4(2 + \log_a x)^2 + 6(\log_x x + \log_x a)^2 = 4(2 + \log_a x)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{\log_a x} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \log_a x > \log_a 1 = 0 \Rightarrow P = 4(t+2)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 4(t+2)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2, \text{ với } t \in (0; +\infty) \text{ có}$$

$$f'(t) = 8(t+2) + 12 \left(1 + \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{-1}{t^2} = 8(t+2) - \frac{12(t+1)}{t^3}.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ f'(t) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 2t^3(t+2) = 3(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 2t^4 + 4t^3 - 3t - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 2t^3(t-1) + 6t^2(t-1) + 6t(t-1) + 3(t-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ (t-1)(2t^3 + 6t^2 + 6t + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(t) \geq f(1) = 60$, nên $P \geq 60$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \log_a x = 1$ nên $x = a$ hay $\frac{b}{a^2} = a \Leftrightarrow b = a^3$.

CÂU 3: Chọn D

Xét $x \in [0; \ln 4]$. Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in [1; 4]$. Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1; 4]$.

Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Ta có: $g(1) = m - 3$; $g(2) = m - 4$; $g(4) = m$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ sẽ thuộc $A = \{|m - 3|; |m - 4|; |m|\}$.

$$\text{➤ Xét } |m - 4| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \Rightarrow A = \{7; 6; 10\} \\ m = -2 \Rightarrow A = \{5; 6; 2\} \end{cases}.$$

Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$.

$$\text{➤ Xét } |m - 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \Rightarrow A = \{5; 6; 9\} \\ m = -3 \Rightarrow A = \{7; 6; 3\} \end{cases}.$$

$$\text{➤ Xét } |m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \Rightarrow A = \{2; 3; 6\} \\ m = -6 \Rightarrow A = \{10; 9; 6\} \end{cases}.$$

Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 4: Chọn B

$$\text{Xét } 4^{\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}{x^2}} = \log_2 [14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}].$$

Ta có $4^{\frac{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1}{x^2}} \geq 4^{2\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} = 4$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm 1$, (1).

$$\text{Mặt khác } 14 - (y - 2)\sqrt{y + 1} = 14 + 3\sqrt{y + 1} - (\sqrt{y + 1})^3.$$

Đặt $t = \sqrt{y + 1}$ ta có $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{30}}{2}$. Xét hàm số $f(t) = -t^3 + 3t + 14$. Ta tìm GTLN - GTNN của

$$\text{hàm số trên đoạn } \left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right] \text{ được } \min_{\left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right]} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right) = \frac{56 - 9\sqrt{30}}{4}; \max_{\left[0; \frac{\sqrt{30}}{2}\right]} f(t) = f(1) = 16.$$

$$\text{Suy ra } \log_2 [14 - (y - 2)\sqrt{y + 1}] \leq \log_2 16 = 4, (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra ta có } \begin{cases} x = \pm 1 \\ t = \sqrt{y + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Thay vào } P = 2.$$

CÂU 5: Chọn A

Theo đề bài suy ra: $1 - ab > 0$.

Ta có:

$$\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3 \Leftrightarrow \log_2 (1-ab) - \log_2 (a+b) = 2(ab-1) + a + b - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (1-ab) + 1 + 2(1-ab) = -\log_2 (a+b) + a + b$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2-2ab) + 2 - 2ab = \log_2 (a+b) + a + b \quad (1).$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$, ($t > 0$). Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$, với mọi $t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow f(2-2ab) = f(a+b) \Leftrightarrow 2-2ab = a+b \Leftrightarrow a = \frac{2-b}{1+2b}.$$

Theo đề bài ta có: $a, b > 0$, suy ra $b < 2$.

$$\text{Ta có: } P = a + 2b = \frac{2-b}{1+2b} + 2b = g(b), \text{ với } b \in (0; 2).$$

$$\text{Đạo hàm: } g'(b) = \frac{-5}{(1+2b)^2} + 2; \quad g'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{10}-2}{4} \in (0; 2).$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2; \quad g\left(\frac{\sqrt{10}-2}{4}\right) = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 4.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}.$$

CÂU 6: Chọn B

Ta có:

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} \frac{3(x+y)}{x^2+y^2+xy+2} - \log_{\sqrt{3}} 3 = x^2+y^2+xy-3(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 3(x+y) + \log_{\sqrt{3}} [3(x+y)] = (x^2+y^2+xy+2) + \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_{\sqrt{3}} t$, $t > 0$.

Có: $f'(t) = 1 + \frac{1}{\ln 3 \cdot t} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2.$$

Mặt khác, ta xét

$$S = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x+y)^2 - 2(x+y)^2 + 6(x+y) - 4 = 5 - (x+y-3)^2 \leq 5.$$

Khi đó, ta có:

$$P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6} \Leftrightarrow (P-3)x + (P-2)y = 1-6P$$

$$\Rightarrow (1-6P)^2 = [(P-3)x + (P-2)y]^2 \leq (x^2+y^2)[(P-3)^2 + (P-2)^2] \leq 5(2P^2 - 10P + 13)$$

$$\Leftrightarrow 26P^2 + 38P - 64 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } \text{Max} P = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

CÂU 7: Chọn C

- Ta có: $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

- $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} 3(x+y) + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + x^2+y^2+xy+2.$

- Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$. Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Do đó: $f(3(x+y)) = f(x^2 + y^2 + xy + 2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2 + y^2 + xy + 2$ (1)
- Cách 1:** Từ (1) $\Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$.
- Ta có $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$
- Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.
- Do đó từ (1), suy ra: $x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.
- Đặt $t = x+y$, $t > 0$.
- Suy ra: $P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.
- Ta có: $f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận)
- Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$		0	
		+	-
$f(t)$			

- Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Cách 2: (Trắc nghiệm)

- Ta có: $P = 2 + \frac{x-11}{x+y+6}$.
- Trong (1) coi y là ẩn, x là tham số. Ta có $y^2 + (x-3)y + x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm khi
- $\Delta = (x-3)^2 - 4(x^2 - 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{3+2\sqrt{3}}{3} < 3$ nên $x-11 < 0$
- Vậy $P < 2$ nên trong 4 phương án thì $P_{\max} = 1$ khi đó $x = 2, y = 1$.
- Cách 3: (Trắc nghiệm)**
- Ta có: $P = 3 - \frac{y+17}{x+y+6} < 3$ với $x, y > 0$.
- Nếu $P = 2$ thì $\frac{3x+2y+1}{x+y+6} = 2 \Leftrightarrow x = 11$. Thay vào (1) ta được: $y^2 + 3y + 90 = 0$ (vô lý).
- Nếu $P = 1$ thì $\frac{3x+2y+1}{x+y+6} = 1 \Leftrightarrow 2x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 2x$. Thay vào (1), ta được:
- $3(x+5-2x) = x^2 + (5-2x)^2 + x(5-2x) + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$. Vậy $P_{\max} = 1$.

CÂU 8: Chọn D

Ta có $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$

$$\Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1)] + (x-1)(y+1) = 9.$$

$$\Leftrightarrow (y+1)[\log_3(x+1) + \log_3(y+1) + x-1] = 9$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x-1 = \frac{9}{y+1} - \log_3(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x+1-2 = \frac{9}{y+1} - 2 + \log_3 \frac{9}{y+1} (*).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t - 2$ với $t > 0$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ với mọi $t > 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến và liên tục trên $(0; +\infty)$.

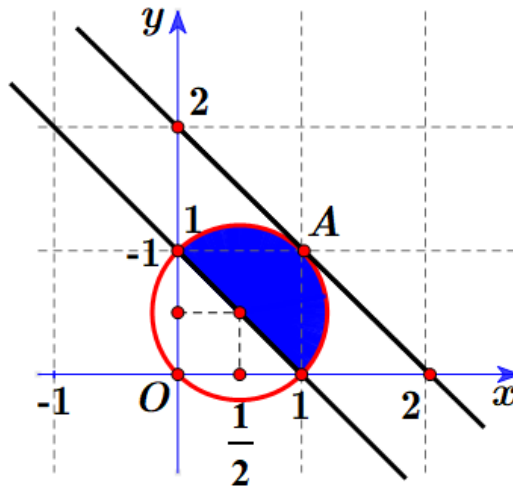
Từ (*) suy ra $x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 = \frac{8-y}{y+1}$, do $x > 0$ nên $y \in (0; 8)$.

Vậy $P = x + 2y = \frac{8-y}{y+1} + 2y = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = 2(y+1) + \frac{9}{y+1} - 3 \geq -3 + 6\sqrt{2}$.

Vậy $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$ khi $2(y+1) = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1$.

CÂU 9: Chọn C

- **TH1:** $\log_{(x+y)}(x^2 + y^2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 1 \\ x^2 + y^2 \leq x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y > 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} (*) \end{cases} (1).$
- Tập nghiệm của BPT (*) là tất cả các điểm thuộc hình tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Miền nghiệm của hệ (1) là phần tô màu như hình vẽ.



- Đặt $t = x + y \Rightarrow 1 < t \leq 2$. Khi đó $f(t) = 48t^3 - 156t^2 + 133t + 4$
- $f'(t) = 144t^2 - 312t + 133$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{19}{12} \\ t = \frac{7}{12} \end{cases}$
- Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{19}{12}$	2	$+\infty$
$f'(t)$		0		0		
			$-$	$+$		
$f(t)$			29		30	

- Do đó, $\max_{1 < t \leq 2} f(t) = 30 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x + y = 2$.

- TH2: $\log_{(x+y)}(x^2 + y^2) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y < 1 \\ x^2 + y^2 \geq x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y < 1 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2).$

- (2) không thỏa điều kiện $x > 0, y > 0$.

CÂU 10: Chọn B

Gọi tọa độ các điểm $A(a, 2\log_2 a), B(b, -\log_2 b)$. Vì $M(2, 0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB nên:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2\log_2 a = \log_2 b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ b = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^2 + a - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}}$$

Vì $\begin{cases} a + b = 4 \\ 2\log_2 a = \log_2 b \end{cases}$

nên $\begin{cases} \overline{OA}(a, 2\log_2 a) \\ \overline{OB}(4 - a, -2\log_2 a) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{|(4 - a)(2\log_2 a) - a(-2\log_2 a)|}{2} = 4\log_2 \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017; 2017]$.
A. 1284. **B.** 4034. **C.** 1285. **D.** 4035.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$

Đặt $\sin^2 x = t$ với $t \in [0; 1]$, ta có phương trình

$$2^t + \frac{3}{3^t} = 4 \cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t = 4. \text{ Vì hàm số } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^t \text{ nghịch biến với } t \in [0; 1]$$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 0$. Do đó $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in [-2017; 2017]$ nên ta có $-2017 \leq k\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017}{\pi} \leq k \leq \frac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = u_{n-1} + 6, \forall n \geq 2$ và $\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11$.
 Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$.
A. 2587. **B.** 2590. **C.** 2593. **D.** 2584.

Lời giải

Chọn C

Ta có dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d = 6$.

$$\log_2 u_5 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{u_9 + 8} = 11 \Leftrightarrow \log_2 u_5 (u_9 + 8) = 11 \quad (*) \text{ với } u_5 > 0.$$

Mặt khác $u_5 = u_1 + 4d = u_1 + 24$ và $u_9 = u_1 + 8d = u_1 + 48$.

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta được } \begin{cases} u_1 = 8 \Rightarrow u_5 = 32 \\ u_1 = -88 \Rightarrow u_5 = -64 \end{cases}. \text{ Suy ra } u_1 = 8.$$

$$S_n \geq 20172018 \Leftrightarrow \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] \geq 20172018 \Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 20172018 \geq 0.$$

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n \geq 20172018$ là $n = 2593$.

- ❖ **VÍ DỤ 3 :** Biết phương trình $\log_3 (3^x - 1) \cdot [1 + \log_3 (3^x - 1)] = 6$ có hai nghiệm là $x_1 < x_2$ và tỉ số $\frac{x_1}{x_2} = \log \frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}^*$ và a, b có ước chung lớn nhất bằng 1. Tính $a + b$.
A. $a + b = 38$. **B.** $a + b = 37$. **C.** $a + b = 56$. **D.** $a + b = 55$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_3 (3^x - 1) \cdot [1 + \log_3 (3^x - 1)] = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 (3^x - 1) = -3 \\ \log_3 (3^x - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \log_3 \frac{28}{27} \\ x_2 = \log_3 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \log \frac{28}{27} \Rightarrow a = 28, b = 27 \Rightarrow a + b = 55.$$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Phương trình $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a; b)$ đặt $T = b^2 - a^2$ thì:
A. $T = 36$. **B.** $T = 48$. **C.** $T = 64$. **D.** $T = 72$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x-2+\sqrt[3]{m-3x}} + (x^3 - 6x^2 + 9x + m)2^{x-2} = 2^{x+1} + 1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-2)^3 + 8 + m - 3x = 2^3 + 2^{2-x}$
 $\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m-3x}} + m - 3x = 2^{2-x} + (2-x)^3$.

Xét hàm $f(t) = 2^t + t^3$ trên $\mathbb{R}$.

có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) suy ra $m - 3x = (2-x)^3 \Leftrightarrow m = 8 - 9x + 6x^2 - x^3$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 8$ trên $\mathbb{R}$.

có $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						

Dựa vào bảng biến thiên ta có, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $4 < m < 8$.

Suy ra $a = 4; b = 8 \Rightarrow T = b^2 - a^2 = 48$.

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Xét các số thực x, y ($x \geq 0$) thỏa mãn

$2018^{x+3y} + 2018^{xy+1} + x + 1 = 2018^{-xy-1} + \frac{1}{2018^{x+3y}} - y(x+3)$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x + 2y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $m \in (0; 1)$. **B.** $m \in (1; 2)$. **C.** $m \in (2; 3)$. **D.** $m \in (-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2018^{x+3y} + 2018^{xy+1} + x + 1 = 2018^{-xy-1} + \frac{1}{2018^{x+3y}} - y(x+3)$

$\Leftrightarrow 2018^{x+3y} - 2018^{-x-3y} + x + 3y = 2018^{-xy-1} - 2018^{xy+1} - xy - 1$

$\Leftrightarrow f(x+3y) = f(-xy-1) \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = 2018^t - 2018^{-t} + t$, với $t \in \mathbb{R}$ ta có

$f'(t) = 2018^t \ln 2018 + 2018^{-t} \ln 2018 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) $\Leftrightarrow x + 3y = -xy - 1$

$$\Leftrightarrow y(x+3) = -x-1 \Rightarrow y = -\frac{x+1}{x+3} \Rightarrow T = x - \frac{2(x+1)}{x+3}.$$

Xét hàm số $f(x) = x - \frac{2(x+1)}{x+3}$, với $x \in [0; +\infty)$ có

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 5}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty) \Rightarrow f(x) \geq f(0) = -\frac{2}{3}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=0 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Nếu $\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8$, $\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243$, x, y là các số thực thì tích xy bằng?

- A. $\frac{12}{5}$. B. 6. C. 12. D. 4.

CÂU 2: Tính tổng các nghiệm của phương trình $2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_3 \sqrt{x}-1}$

- A. 6. B. 3. C. 9. D. 8.

CÂU 3: Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

CÂU 4: Để phương trình: $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm, thì các giá trị cần tìm của tham số m là:

- A. $1 \leq m \leq \sqrt{2}$. B. $\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$. D. $3 \leq m \leq 4$.

CÂU 5: Gọi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} - \sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} = 1$ là S . Tính tổng tất cả các phân tử của S .

- A. $4 + \log_2 6$ B. $2 + \log_3 6$ C. $1 + \frac{1}{2} \log_7 5$ D. $\log_7 \frac{1}{3} - 3$

CÂU 6: Số nghiệm của phương trình $x^2 - 5x - 2 = (x^2 - 8x + 3) \cdot 8^{3x-5} + (3x-5) \cdot 8^{x^2-8x+3}$ là

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

CÂU 7: Phương trình $4^x - 2(m+1) \cdot 2^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi $m \in (a; b)$. Giá trị của $P = b - a$ là

- A. $P = \frac{8}{3}$. B. $P = \frac{19}{3}$. C. $P = \frac{15}{3}$. D. $P = \frac{35}{3}$.

CÂU 8: Cho phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + 8 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+1)(x_2+1) = 6$. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

- A. Không có m . B. $1 < m < 3$. C. $m > 3$. D. $m < 2$.

CÂU 9: Cho phương trình $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thực?

- A. 1. B. 2018. C. 0. D. 2.

CÂU 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình sau có nghiệm thực?

$$2^{\sin x - 2 + \sqrt[3]{m - 3\sin x}} + (\sin^3 x + 6\cos^2 x + 9\cos x + m - 6)2^{\sin x - 2} = 2^{\sin x + 1} + 1.$$

- A. 22. B. 20. C. 24. D. 21.

CÂU 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm trên $[0;1]$?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

CÂU 12: Tìm m để bất phương trình $m.9^x - (2m+1).6^x + m.4^x \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0,1]$.

- A. $m \geq -6$. B. $-6 \leq m \leq -4$. C. $m \leq 6$. D. $m \geq -4$.

CÂU 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m.7^{\cos^2 x}$ có nghiệm.

- A. $m \geq \frac{6}{7}$. B. $m < \frac{6}{7}$. C. $m \geq -\frac{6}{7}$. D. $m < -\frac{6}{7}$.

CÂU 14: Tập các giá trị m để phương trình $4.(\sqrt{2}+1)^x + (\sqrt{2}-1)^x - m + 1 = 0$ có đúng hai nghiệm âm phân biệt là:

- A. $(5;7)$. B. $(4;5)$. C. $(5;6)$. D. $(7;8)$.

CÂU 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $m < \frac{3}{2}$. B. Không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.
C. $m \neq 2$. D. $m \leq -\frac{3}{2}$.

CÂU 16: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x - 2(m+1).3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. m tùy ý. B. $m \neq -\frac{4}{3}$. C. $m < -\frac{3}{2}$. D. $m \leq -\frac{3}{2}$.

CÂU 17: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m.7^{\cos^2 x}$ có nghiệm là $m \in \left[\frac{a}{b}; +\infty\right)$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tổng $S = a + b$ là:

- A. $S = 13$. B. $S = 15$. C. $S = 9$. D. $S = 11$.

CÂU 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.

CÂU 19: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$ là

- A. 5 B. 4 C. 2 D. vô số

CÂU 20: Cho bất phương trình $m.3^{x+1} + (3m+2).(4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; 0]$.

- A. $m > \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. B. $m > \frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. C. $m \geq \frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. D. $m \geq -\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 21: Giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $4^x - 2018m \cdot 2^{x-1} + 3 - 1009m \leq 0$ có nghiệm là

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 3$

D. $m = 4$

CÂU 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m-2x}} < 3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 6

B. 4

C. 9

D. 1

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

$$\frac{4^x}{2^{x+y}} = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{x+y+3} \Leftrightarrow x - y = 3 \quad (1).$$

$$\frac{9^{x+y}}{3^{5y}} = 243 \Leftrightarrow 3^{2(x+y)} = 3^{5y+5} \Leftrightarrow 2x - 3y = 5 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được $x = 4; y = 1 \Rightarrow xy = 4$.

CÂU 2: Chọn A

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}. \text{ Ta có phương trình:}$$

$$2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_8 \sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2\log_8 x^{\frac{1}{2}-1}} \Leftrightarrow 2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}-1} \Leftrightarrow 2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 2^0 \Leftrightarrow \log_8(x^2-6x+9) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0.$$

$\Leftrightarrow x = 4$ và $x = 2$ (đều thỏa). Do đó tổng các nghiệm là $4 + 2 = 6$.

Lưu ý: Khi sử dụng Viet cho $x^2 - 6x + 8 = 0$ sẽ ra kết quả nhanh hơn, nhưng phải cẩn thận đối chiếu điều kiện để tránh nhận nhầm nghiệm.

CÂU 3: Chọn D

Đặt $t = 2^x \geq 1$ (do $x \geq 0$) bất phương trình trở thành: $\sqrt{30t+1} \geq |t-1| + 2t$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq 3t-1 \Leftrightarrow 30t+1 \geq 9t^2-6t+1 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2$. Suy ra có 3 nghiệm nguyên không âm của BPT.

CÂU 4: Chọn C.

$$\text{Phương trình tương đương } 2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = m$$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, $t \in [1; 2]$ do $0 \leq \sin^2 x \leq 1$.

$$\text{Xét hàm } f(t) = t + \frac{2}{t}, t \in [1; 2] \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên

t	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	$2\sqrt{2}$	3

Vậy phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq m \leq 3$.

CÂU 5: Chọn B

$$\sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} - \sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} = 1 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} \quad (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} \Rightarrow \sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} = \frac{t^2 - 5}{2}.$$

$$\text{Ta được phương trình } t - \frac{t^2 - 5}{2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Do $t \geq 0$ nên $t = 3$.

$$\text{Do đó } 3 = \sqrt{3^x - 5} + \sqrt{10 - 3^x} \Rightarrow 9 = 5 + 2\sqrt{15 \cdot 3^x - 50 - 9^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_3 6 \end{cases}.$$

CÂU 6: Chọn B

Đặt $u = x^2 - 8x + 3$, $v = 3x - 5$, phương trình đã cho viết lại là

$$u + v = u \cdot 8^v + v \cdot 8^u \Leftrightarrow u(1 - 8^v) = v(8^u - 1) \quad (*)$$

Ta thấy $u = 0$ hoặc $v = 0$ thỏa mãn phương trình $(*)$.

$$\text{Với } u \neq 0 \text{ và } v \neq 0 \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow \frac{1 - 8^v}{v} = \frac{8^u - 1}{u} \quad (**)$$

Ta thấy:

$$* \text{ Nếu } u > 0 \text{ thì } \frac{8^u - 1}{u} > 0 \text{ và nếu } u < 0 \text{ thì } \frac{8^u - 1}{u} > 0. \text{ Do đó } VP(**) > 0, \forall u \neq 0.$$

$$* \text{ Nếu } v > 0 \text{ thì } \frac{1 - 8^v}{v} < 0 \text{ và nếu } v < 0 \text{ thì } \frac{1 - 8^v}{v} < 0. \text{ Do đó } VT(**) < 0, \forall v \neq 0.$$

Từ đó suy ra $(**)$ vô nghiệm.

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 3 = 0 \\ 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{13} \\ x = 4 - \sqrt{13} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy, phương trình đã cho có 3 nghiệm.

CÂU 7: Chọn B

$$\text{Đặt } t = 2^x, \text{ ta có phương trình } t^2 - 2(m+1)t + 3m - 8 = 0 \quad (1).$$

Với $x_1 < 0 < x_2$ thì $0 < 2^{x_1} < 1 < 2^{x_2}$, nên phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = m(2t - 3) \quad (2).$$

$$\text{Vì } t = \frac{3}{2} \text{ không là nghiệm phương trình (2) nên: } (2) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 2t - 8}{2t - 3} = m \quad (3).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 - 2t - 8}{2t - 3}, \text{ với } 0 < t \neq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2t^2 - 6t + 22}{(2t - 3)^2} > 0 \text{ với } 0 < t \neq \frac{3}{2}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$		+		+
$f(t)$	$\frac{8}{3}$		$+\infty$	$+\infty$

Phương trình (1) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm $0 < t_1 < 1 < t_2$. Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị cần tìm của m là $\frac{8}{3} < m < 9$.

Như vậy $a = \frac{8}{3}$, $b = 9$. Do đó $P = b - a = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$.

CÂU 8: Chọn B

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 8 = 0$ (1).

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 7 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 - 2\sqrt{2} \\ m > -1 + 2\sqrt{2} \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 + 2\sqrt{2}.$$

Khi đó $t_1 = m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2^{x_1}$, $t_2 = m+1 - \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2^{x_2}$

Ta có $t_1 t_2 = 2^{x_1 + x_2} = 8 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \cdot \log_2(m+1 - \sqrt{m^2 + 2m - 7}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \log_2 \frac{8}{m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \left[3 - \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7}) \right] = 2 \quad (1)$$

Đặt $u = \log_2(m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7})$ thì (1) trở thành $3u - u^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases}$.

+ $u = 1 \Rightarrow m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 1 - m$: ptvn do $m > -1 + 2\sqrt{2}$.

+ $u = 2 \Rightarrow m+1 + \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 7} = 3 - m \Leftrightarrow m = 2$ (nhận).

Vậy $m = 2$ thỏa ycbt.

CÂU 9: Chọn A

Ta có $3^x = \sqrt{a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9} \Leftrightarrow 9^x = a \cdot 3^x \cos(\pi x) - 9$ (vì $3^x > 0$) $\Leftrightarrow 3^x + 3^{2-x} = a \cdot \cos(\pi x)$ (*)

Điều kiện cần: Nếu phương trình (*) có nghiệm duy nhất x_0 thì ta thấy rằng $2 - x_0$ cũng là nghiệm của (*) do đó $x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Thay vào (*) ta được $a = -6$.

Điều kiện đủ: Ngược lại nếu $a = -6$ thì phương trình (*) trở thành $3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $3^x + 3^{2-x} \geq 2 \cdot \sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 6$ mà $-6 \cdot \cos(\pi x) \leq 6$ do đó

$$3^x + 3^{2-x} = -6 \cdot \cos(\pi x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6 \\ -6 \cos(\pi x) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{2-x} \\ \cos(\pi x) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy có duy nhất $a = -6$ thỏa yêu cầu bài toán.

CÂU 10: Chọn D

$$2^{\sin x - 2 + \sqrt[3]{m - 3 \sin x}} + (\sin^3 x + 6 \cos^2 x + 9 \cos x + m - 6) 2^{\sin x - 2} = 2^{\sin x + 1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sin x - 2 + \sqrt[3]{m - 3 \sin x}} + ((\sin x - 2)^3 + (m - 3 \sin x) + 8) 2^{\sin x - 2} = 2^{\sin x + 1} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sin x - 2 + \sqrt[3]{m - 3 \sin x}} + ((\sin x - 2)^3 + (m - 3 \sin x)) 2^{\sin x - 2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{m - 3 \sin x}} + (m - 3 \sin x) = 2^{2 - \sin x} + (2 - \sin x)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{m - 3 \sin x} = 2 - \sin x \quad (*)$$

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$. Khi đó $(*)$ trở thành: $m = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8, \forall t \in [-1; 1]$.

Xét hàm $f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 8, \forall t \in [-1; 1]$

$$\text{Ta có: } f'(t) = -3t^2 + 12t - 9, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \notin [-1; 1] \\ x = 1 \in [-1; 1] \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f(-1) = 24 \text{ và } f(1) = 4.$$

Vậy $m \in [4; 24]$, có 21 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

CÂU 11: Chọn A

Ta có:

$$4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = (m+1)(2^x - 2^{-x}) + 4 - 2m(*).$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - 2^{-x} \Rightarrow t^2 + 2 = 4^x + 4^{-x}, \text{ vì } x \in [0; 1] \text{ nên } t \in \left[0; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{Khi đó: } (*) \Rightarrow t^2 - (m+1)t - 2 + 2m = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t-m) = 0.$$

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = m \end{cases} \Leftrightarrow t = m \text{ suy ra } m \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \text{ nên } m = 0 \text{ hoặc } m = 1.$$

CÂU 12: Chọn C

$$m \cdot 9^x - (2m+1) \cdot 6^x + m \cdot 4^x \leq 0 \forall x \in [0; 1] \Leftrightarrow m \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - (2m+1) \left(\frac{3}{2}\right)^x + m \leq 0 \forall x \in [0; 1] (*).$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x; x \in [0; 1] \Rightarrow t \in \left[1; \frac{3}{2}\right]. (*) \Rightarrow mt^2 - (2m+1)t + m \leq 0 \forall t \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

$$\Leftrightarrow m(t-1)^2 \leq t \forall t \in \left[1; \frac{3}{2}\right]. t = 1 \text{ (đúng)} \Rightarrow m \leq \frac{t}{(t-1)^2} \forall t \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{Khảo sát } f(t) = \frac{t}{(t-1)^2} \forall t \in \left[1; \frac{3}{2}\right] f'(t) = \frac{-t^2 + 1}{(t-1)^2} < 0 \forall t \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

$$\Rightarrow m \leq f\left(\frac{3}{2}\right) = 6.$$

CÂU 13: Chọn A

Ta có $4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m$.

Đặt $t = \cos^2 x, t \in [0;1]$ thì BPT trở thành: $4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^t + \left(\frac{5}{7}\right)^t \leq m$.

Xét $f(t) = 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^t + \left(\frac{5}{7}\right)^t$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$.

Suy ra: $f(1) \leq f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{6}{7} \leq f(t) \leq 5$.

Từ đó BPT có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7}$.

CÂU 14: Chọn C

NX: $(\sqrt{2}+1)^x \cdot (\sqrt{2}-1)^x = 1 \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}$

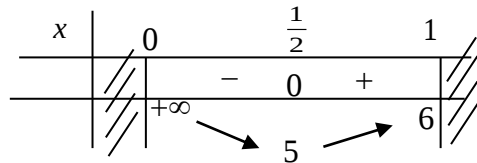
Đặt $t = (\sqrt{2}+1)^x, (t > 0)$

Do $x < 0$ nên $0 < t < 1$

Phương trình đã cho trở thành $m = 4t + \frac{1}{t} + 1 (*)$, $t \in (0;1)$.

Ứng với mỗi $0 < t < 1$ cho ta một giá trị $x < 0$, do đó để phương trình ban đầu có đúng hai nghiệm âm thì $pt(*)$ phải có hai nghiệm $t \in (0;1)$ phân biệt

Xét hàm số $f(t) = 4t + \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow f'(t) = 4 - \frac{1}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$



Nhìn bbt suy ra các giá trị m cần tìm là $5 < m < 6$

CÂU 15: Chọn D

$9^x - 2(m+1) \cdot 3^x - 3 - 2m > 0$

Đặt $t = 3^x > 0$ Yêu cầu bài toán trở thành: $t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0, \forall t > 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 > 2m(t+1), \forall t > 0$

$\Leftrightarrow m < \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t+1)} (Do t+1 > 0, \forall t > 0) \Leftrightarrow m < \frac{t-3}{2}, \forall t > 0 (*)$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t-3}{2}$ trên $(0; +\infty)$

$g'(t) = \frac{1}{2} > 0$. Suy ra hàm số $g(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$; $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = -\frac{3}{2}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}$.

CÂU 16: Chọn D

Đặt $t = 3^x, t > 0$

ycbt

$$\Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \frac{t^2 - 2t - 3}{2t + 2}, \forall t > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}(t+3), \forall t > 0$$

$$f(t) = \frac{1}{2}(t+3), f'(t) = \frac{1}{2} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow \text{hàm số đồng biến trên } (0, +\infty)$$

$$\text{Vậy } y_{cbt} \Leftrightarrow m < f(t), \forall t > 0 \Leftrightarrow m \leq f(0) = -\frac{3}{2}.$$

CÂU 17: Chọn A

$$\text{Ta có: } 4^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x} \leq m \cdot 7^{\cos^2 x} \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \leq m.$$

$$\text{Xét } f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} + \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \text{ với } x \in \mathbb{R}. \text{ Do } \begin{cases} \left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{1}{28} \\ \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x} \geq \frac{5}{7} \end{cases} \text{ nên } f(x) \geq \frac{4}{28} + \frac{5}{7} \text{ hay}$$

$$f(x) \geq \frac{6}{7}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{6}{7}. \text{ Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi } m \geq \min_{\mathbb{R}} f(x) \Leftrightarrow m \geq \frac{6}{7} \text{ hay}$$

$$m \in \left[\frac{6}{7}; +\infty\right) \Rightarrow S = 13.$$

CÂU 18: Chọn B

$$\text{Ta có: } 2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = m \cdot 3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + 3^{1-\sin^2 x} = m \cdot 3^{\sin^2 x}.$$

$$\text{Đặt } t = \sin^2 x, t \in [0; 1]. \text{ Phương trình đã cho trở thành: } 2^t + 3^{1-t} = m \cdot 3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3^{1-2t} = m.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3^{1-2t}, \text{ với } t \in [0; 1]. \text{ Ta có } f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \cdot \ln \frac{2}{3} - 2 \cdot 3^{1-2t} \cdot \ln 3$$

$$f''(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \cdot \left(\ln \frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot 3^{1-2t} \cdot (\ln 3)^2 > 0 \quad \forall t \in [0; 1].$$

$$\Rightarrow f'(t) \text{ liên tục và đồng biến trên } [0; 1] \text{ nên } f'(t) \leq f'(1) = \frac{2}{3} \ln \frac{2}{9} < 0 \quad \forall t \in [0; 1].$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ liên tục và nghịch biến trên } [0; 1] \text{ nên } f(1) \leq f(t) \leq f(0) \quad \forall t \in [0; 1]$$

$$\text{Suy ra } 1 \leq m \leq 4.$$

CÂU 19: Chọn C

$$\text{Ta có } 4^{1+x} + 4^{1-x} = (m+1)(2^{2+x} - 2^{2-x}) + 16 - 8m \Leftrightarrow 4^x + \frac{1}{4^x} = (m+1)\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) + 4 - 2m.$$

$$\text{Đặt } t = 2^x - \frac{1}{2^x}, t \in \left[0; \frac{3}{2}\right], t^2 = 4^x + \frac{1}{4^x} - 2.$$

Phương trình viết lại:

$$t^2 + 2 = (m+1)t + 4 - 2m \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = mt - 2m \Leftrightarrow (t-2)(t+1-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin \left[0; \frac{3}{2}\right] \\ t = m-1 \end{cases}.$$

Do đó để phương trình có nghiệm $x \in [0; 1]$ thì $m-1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow m \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$, có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

CÂU 20: Chọn A

Ta có $m \cdot 3^{x+1} + (3m+2) \cdot (4-\sqrt{7})^x + (4+\sqrt{7})^x > 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x + (3m+2) \left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + 3m > 0. \text{ Đặt } t = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x, \text{ do } x \leq 0 \text{ nên } 0 < t \leq 1.$$

Tìm tham số m sao cho $t^2 + 3mt + 3m + 2 > 0$, đúng với mọi $0 < t \leq 1$.

$$m > \frac{-t^2 - 2}{3t + 3} \Leftrightarrow m > \max_{(0;1]} \frac{-t^2 - 2}{3t + 3}. \text{ Ta tìm GTLN của hàm số } f(t) = -\frac{t^2 + 2}{3t + 2} \text{ trên } 0 < t \leq 1.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^2 + 2t - 2}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \sqrt{3} \\ t = -1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên ta được

t	0	$-1 + \sqrt{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
f	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{1}{2}$

$$\text{Vậy } \max_{(0;1]} \frac{-t^2 - 2}{3t + 3} = f(-1 + \sqrt{3}) = \frac{2-2\sqrt{3}}{3}.$$

CÂU 21: Chọn A

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2 - 1009mt + 3 - 1009m \leq 0$

$$\Leftrightarrow 1009m \geq \frac{t^2 + 3}{t + 1} \text{ (do } t > 0).$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t^2 + 3}{t + 1}, \text{ ta có } f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases} \xrightarrow{t > 0} t = 1$$

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	3	2	$+\infty$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow 1009m \geq \min_{t > 0} f(t) = 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{1009}.$$

Vậy $m = 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa yêu cầu bài toán.

CÂU 22: Chọn D

Điều kiện $x^2 - 3x + m \geq 0$

$$\begin{aligned}
 & 9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2(\sqrt{x^2-3x+m-x})} + \frac{2}{9} \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m-x}} - \frac{1}{27} < 0 \\
 & \Leftrightarrow 0 < 3^{\sqrt{x^2-3x+m-x}} < 3^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m-x} < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x-2. \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ x^2-3x+m < x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m \geq 0 \\ x > 2 \\ x < 4-m \end{cases} \Rightarrow 4-m > 2 \Leftrightarrow m < 2.
 \end{aligned}$$

Do m nguyên dương nên $m=1$ thỏa mãn.

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

❖ **VÍ DỤ 1:** Trong tất cả các cặp $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+6) \geq 1$. Tìm m để tồn tại duy nhất một cặp $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$.

A. $\sqrt{13} - 3$ và $\sqrt{13} - 3$

B. $\sqrt{13} - 3$

C. $(\sqrt{13} - 3)^2$

D. $(\sqrt{13} - 3)^2$ và $(\sqrt{13} + 3)^2$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $2x - 4y + 6 > 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(2x-4y+6) \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \leq 2x - 4y + 6 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$.

Tập hợp các cặp số $(x; y)$ là hình tròn (C_1) có tâm $I_1(1; -2)$, bán kính $R_1 = 3$.

Mặt khác ta lại có $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m$.

Khi $m < 0$ thì không tồn tại cặp số $(x; y)$.

Khi $m = 0$ thì $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$. Do cặp số $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$ nên $c > 0$ không thỏa mãn.

Khi $m > 0$ thì $(x+1)^2 + (y-1)^2 = m$ là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1; 1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

Ta có $I_1I_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{13}$.

Để tồn tại duy nhất một cặp $(x; y)$ thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) phải tiếp xúc với

nhau $\begin{cases} I_1I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1I_2 = |R_1 - R_2| \end{cases}$.

Khi $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{13} = 3 + \sqrt{m} \Leftrightarrow \sqrt{m} = \sqrt{13} - 3 \Leftrightarrow m = (\sqrt{13} - 3)^2$.

Khi $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{13} = |\sqrt{m} - 3| \Leftrightarrow m - 6\sqrt{m} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{m} = 3 + \sqrt{13} \Leftrightarrow m = (3 + \sqrt{13})^2$.

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2)$ và $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n > 5050$ bằng.

A. 100.

B. 99.

C. 101.

D. 102.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\ln(u_1^2 + u_2^2 + 10) = \ln(2u_1 + 6u_2) \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 + 10 = 2u_1 + 6u_2$

$$\Leftrightarrow (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \end{cases}.$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ với $n \geq 1 \Rightarrow v_1 = u_2 - u_1 = 2$.

Theo giả thiết: $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + 1, \forall n \geq 1$.

Suy ra (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = 1 \Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d = n - 3$.

Ta có: $u_{n+1} = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{v_n} + \underbrace{u_n - u_{n-1}}_{v_{n-1}} + \dots + \underbrace{u_3 - u_2}_{v_2} + \underbrace{u_2 - u_1}_{v_1} + u_1 = S_n + u_1$.

Với $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \frac{n}{2}(v_1 + v_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Suy ra: $u_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + 1 \Rightarrow u_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$.

Ta có: $u_n > 5050 \Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 > 5050 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 10096 > 0 \Leftrightarrow n > 101,99$.

Vậy số n nhỏ nhất thỏa yêu cầu là 102.

❖ **VÍ DỤ 3:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_3(x^2 - 5x + m) > \log_3(x - 2)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(2; +\infty)$. Tìm khẳng định đúng.

A. $S = (7; +\infty)$. B. $S = [6; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 4)$. D. $S = (-\infty; 5]$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_3(x^2 - 5x + m) > \log_3(x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x^2 - 5x + m > x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ m > -x^2 + 6x - 2 \end{cases}.$$

Bất phương trình $\log_3(x^2 - 5x + m) > \log_3(x - 2)$ có tập nghiệm chứa khoảng $(2; +\infty)$

$\Leftrightarrow m > -x^2 + 6x - 2$ có nghiệm với mọi $x \in (2; +\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ trên $(2; +\infty)$

Ta có $f'(x) = -2x + 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Bảng biến thiên

x	2	3	$+\infty$
f'	+	0	-
$f(x)$	6	7	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$m > -x^2 + 6x - 2$ có nghiệm với mọi $x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m > 7$.

❖ **VÍ DỤ 4:** Gọi a là giá trị nhỏ nhất của $f(n) = \frac{(\log_3 2)(\log_3 3)(\log_3 4) \dots (\log_3 n)}{9^n}$, với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Có bao nhiêu số n để $f(n) = a$?

A. 2. B. vô số. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(n+1) = f(n) \cdot \frac{\log_3(n+1)}{9}$, $f(n) = f(n-1) \cdot \frac{\log_3 n}{9}$

Do a là giá trị nhỏ nhất của $f(n)$ nên $f(n) = a \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) \leq f(n+1) \\ f(n) \leq f(n-1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(n) \leq f(n) \cdot \frac{\log_3(n+1)}{9} \\ f(n-1) \cdot \frac{\log_3 n}{9} \leq f(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(n+1) \geq 9 \\ \log_3 n \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 3^9 - 1 \leq n \leq 3^9.$$

Vậy có 2 giá trị của n thỏa yêu cầu bài toán.

❖ **VÍ DỤ 5:** Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1; 2018)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3?

A. 20.

B. 19.

C. 18.

D. 17.

Lời giải

Chọn C

- Nhận thấy: với $x > 3$ thì $\sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$ và $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$.

Ta có: $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\Leftrightarrow \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a 2 \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a 2 \quad (1) \quad (\text{vì } \log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) > 0, \forall x > 3).$$

- Xét hàm số $f(x) = \log_{2017}(x + \sqrt{x^2 - 1})$ trên khoảng $(3; +\infty)$.

$$\text{Có: } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln 2017} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 3.$$

BBT:

x	3	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$f(3)$	$+\infty$

- Từ BBT ta thấy: phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 3 $\Leftrightarrow \log_2 a > f(3)$

$$\Leftrightarrow \log_2 a > \log_{2017}(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow \log_2 a < \log_{3+2\sqrt{2}} 2017 \quad (\text{do } a > 1)$$

$$\Leftrightarrow a < 2^{\log_{3+2\sqrt{2}} 2017} \approx 19,9. \text{ Lại do } a \text{ nguyên thuộc khoảng } (1; 2018) \text{ nên } a \in \{2; 3; \dots; 19\}.$$

Vậy có 18 giá trị của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; 2\pi\right)$?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} \cot x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$. Kết hợp giả thiết $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; 2\pi\right) \Rightarrow x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Đặt $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x) = t$, ta có hệ $\begin{cases} \cot^2 x = 3^t \\ \cos x = 2^t \end{cases}$.

Áp dụng công thức: $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, ta có phương trình: $1 + 3^t = \frac{1}{4^t} \Leftrightarrow 4^t + 12^t - 1 = 0$. (*)

Xét hàm số $f(t) = 4^t + 12^t - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(t) = 4^t \ln 4 + 12^t \ln 12 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f(t) = 4^t + 12^t - 1$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm.

Lại có $f(-1) \cdot f(0) = -\frac{2}{3} < 0$, suy ra phương trình (*) có nghiệm t duy nhất trong khoảng

$$(-1; 0) \Rightarrow 2^t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Khi đó hệ phương trình $\begin{cases} \cot^2 x = 3^t \\ \cos x = 2^t \end{cases}$ có nghiệm duy nhất trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$ chỉ có đúng một nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{6}; 2\pi\right)$.

CÂU 2: Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 1$ và $a_n = 10a_{n-1} - 1, \forall n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$.

A. 100

B. 101

C. 102

D. 103

Lời giải

Chọn C

$$a_n = 10a_{n-1} - 1 \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{9} = 10\left(a_{n-1} - \frac{1}{9}\right) \quad (1).$$

$$\text{Đặt } b_n = a_n - \frac{1}{9} \Rightarrow b_1 = a_1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \text{ Từ (1)} \Rightarrow b_n = 10b_{n-1}, \forall n \geq 2$$

Dãy (b_n) là cấp số nhân với công bội là $q = 10$. Nên $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{8}{9} \cdot 10^{n-1}$.

$$\text{Do đó } a_n = b_n + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}10^{n-1} + \frac{1}{9}, \forall n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Ta có } \log a_n > 100 \Leftrightarrow a^n > 10^{100} \Leftrightarrow \frac{8}{9}10^{n-1} + \frac{1}{9} > 10^{100}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n để $\log a_n > 100$ là $n = 102$.

CÂU 3: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x, y) = |x| - |y|$ bằng.

A. 1.

B. $\sqrt{3}$.

C. 0.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 2y$.

Ta có $\log_4(x+2y) + \log_4(x-2y) = 1 \Leftrightarrow \log_4[(x+2y)(x-2y)] = \log_4 4$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4 \Leftrightarrow 4y^2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2 - 4}{4}.$$

Ta có $f(x, y) = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2} - \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4}} = g(x)$.

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x^2} - \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4}}$ trên $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$g(2) = 2; g(-2) = 2; g\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} = g\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x, y)$ là $\sqrt{3}$.

CÂU 4: Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) (24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016) \leq 0$$

A. 12,3.

B. 12.

C. 12,1.

D. 12,2.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có $24x^6 - 2x^5 + 27x^4 - 2x^3 + 1997x^2 + 2016$

$$= (x^3 - x^2)^2 + (x^3 - 1)^2 + 22x^6 + 26x^4 + 1997x^2 + 2015 > 0, \quad \forall x.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2\log_x^2 \frac{22}{3} - 2\log_x \frac{22}{3} + 5} - \sqrt{13} + \sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}} x} - \frac{4}{\log_{\frac{22}{3}} x} + 4} \right) \leq 0.$$

Đặt $t = \log_x \frac{22}{3}$, ta có bất phương trình

$$\sqrt{2t^2 - 2t + 5} + \sqrt{2t^2 - 4t + 4} \leq \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{(1-t)^2 + 1^2} \leq \sqrt{\frac{13}{2}}.$$

Đặt $\vec{u} = \left(t - \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\vec{v} = (1-t; 1)$. Ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{\frac{13}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{t - \frac{1}{2}}{1-t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t - 1 = 3 - 3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}} = 12,06$.

Nghiệm trên thỏa điều kiện nên ta **Chọn C**

CÂU 5: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8), \forall n \in \mathbb{N}^*$ Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Tìm số nguyên dương lớn nhất n thỏa mãn $\frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} < \frac{148}{75}$.

A. 18

B. 17

C. 16

D. 19

Lời giải

Chọn A

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*, \log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2u_5 - 63) = \log_2(u_n - 8n + 8)$.

Đặt

$$t = \log_3(2u_5 - 63)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_n - 8n + 8 = 2^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_5 - 63 = 3^t \\ u_5 - 32 = 2^t \end{cases} \Rightarrow 1 = 3^t - 2 \cdot 2^t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow u_n = 8n - 4$$

$$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 4n^2.$$

$$\text{Do đó } \frac{u_n \cdot S_{2n}}{u_{2n} \cdot S_n} = \frac{(8n - 4) \cdot 16n^2}{(16n - 4) \cdot 4n^2} < \frac{148}{75} \Rightarrow n < 19.$$

CÂU 6: Cho phương trình $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$. Biết phương trình có một

nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x = \frac{1}{2}(a^{\log_b c} + a^{-\log_b c})$ (với a, c là các số nguyên tố và

$a > c$). Khi đó giá trị của $a^2 - 2b + 3c$ bằng:

A. 0.

B. 3.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})} = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) [\log_3 6 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_6(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0 & (1) \\ \log_3 6 \cdot \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3 6 = -1 \Leftrightarrow \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 3$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 2^{\log_6 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2^{\log_6 3} \\ x^2 - 1 = (2^{\log_6 3} - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(2^{\log_6 3} + 2^{-\log_6 3}).$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2} \right). \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Như vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=1$, $x = \frac{1}{2} \left(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2} \right)$.

Khi đó $a=3$, $b=6$, $c=2$. Vậy $a^2 - 2b + 3c = 3$.

CÂU 7: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$. Tìm giá trị

lớn nhất của $P = \frac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 2

B. 1

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{\sqrt{3}} \frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} (x+y) + 3(x+y) + 2 = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} (x+y) + 3(x+y) + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}} [3(x+y)] + 3(x+y) = \log_{\sqrt{3}} (x^2+y^2+xy+2) + (x^2+y^2+xy+2) \text{ (*)}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_{\sqrt{3}} t + t$, với $t > 0$. có $f'(t) = \frac{1}{t \ln \sqrt{3}} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó: $f(3(x+y)) = f(x^2+y^2+xy+2) \Leftrightarrow 3(x+y) = x^2+y^2+xy+2 \text{ (1)}$.

Từ (1) $\Leftrightarrow xy = (x+y)^2 - 3(x+y) + 2$. Ta có $x = x + xy - xy = x(y+1) - xy \leq \left(\frac{x+y+1}{2} \right)^2 - xy$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y+1$.

Do đó từ (1), suy ra: $x \leq \frac{(x+y+1)^2}{4} - (x+y)^2 + 3(x+y) - 2$.

Đặt $t = x+y, t > 0 \Rightarrow P = \frac{2(x+y)+1+x}{x+y+6} \leq \frac{2t+1+\frac{(t+1)^2}{4}-t^2+3t-2}{t+6} = \frac{-3t^2+22t-3}{4(t+6)} = f(t)$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-3t^2-36t+135}{4(t+6)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (nhận)}$.

Bảng biến thiên

t	0	3	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x+y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

CÂU 8: Cho phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.

B. $m > -\frac{1}{2}$.

C. $m < \frac{3}{2}$.

D. $m < -\frac{3}{2}$ hoặc $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|} \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{-x^2+2x} \log_2(2|x-m|+2) \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2 - 2x + 3)}{2^{3-(x^2-2x+3)}} = \frac{\log_2(2|x-m|+2)}{2^{3-(2+2|x-m|)}}.$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{\log_2 u}{2^{3-u}} = \frac{2^u \log_2 u}{8}$ với $u \geq 2$. Ta có $f'(u) = \frac{1}{8} \left(2^u \cdot \log_2 u \cdot \ln 2 + \frac{2^u}{u \cdot \ln 2} \right) > 0$,

$\forall u \geq 2$. Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$ nên

$$f(x^2 - 2x + 3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (1) \\ x^2 + 1 - 2m = 0 & (2) \end{cases} \text{ Phương trình}$$

đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

TH1: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm, suy ra

$$\begin{cases} 3-2m > 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } m < \frac{1}{2} \text{ thỏa (1*)}.$$

TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (1) vô nghiệm, suy ra

$$\begin{cases} 3-2m < 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}. \text{ Suy ra } m > \frac{3}{2} \text{ thỏa (2*)}.$$

TH3: Phương trình (1) có nghiệm kép suy ra $m = \frac{3}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình (1) là

$x = 2$, nghiệm của phương trình (2) là $x = \pm\sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra $m = \frac{3}{2}$ không thỏa (3*).

TH4: Phương trình (2) có nghiệm kép suy ra $m = \frac{1}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình (2) là

$x = 0$, nghiệm của phương trình (1) là $x = 2 \pm \sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra $m = \frac{1}{2}$ không thỏa (4*).

TH5: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt nhưng hai phương trình này có nghiệm giống nhau.

Khi đó $\begin{cases} 3-2m > 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}.$

Gọi a, b ($b \neq a$) là hai nghiệm của phương trình (1), theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} a+b=4 \\ a.b=2m+1 \end{cases} \quad (3).$

Vì a, b cũng là nghiệm của phương trình (2) nên $\begin{cases} a+b=0 \\ a.b=-2m+1 \end{cases} \quad (4),$ từ (3) và (4) ta suy ra

$m \in \emptyset$ (5*).

Từ (1*), (2*), (3*), (4*) và (5*) suy ra $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{3}{2}$ thỏa.

CÂU 9: Cho phương trình $4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình trên có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.

B. $m > -\frac{1}{2}$.

C. $m < \frac{3}{2}$.

D. $m < -\frac{3}{2}$ hoặc $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|} \log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{-x^2+2x} \log_2(2|x-m|+2) \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2 - 2x + 3)}{2^{3-(x^2-2x+3)}} = \frac{\log_2(2|x-m|+2)}{2^{3-(2+2|x-m|)}}.$$

Xét hàm số $f(u) = \frac{\log_2 u}{2^{3-u}} = \frac{2^u \log_2 u}{8}$ với $u \geq 2$. Ta có $f'(u) = \frac{1}{8} \left(2^u \cdot \log_2 u \cdot \ln 2 + \frac{2^u}{u \cdot \ln 2} \right) > 0$,

$\forall u \geq 2$. Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$ nên

$$f(x^2 - 2x + 3) = f(2|x-m|+2) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (1) \\ x^2 + 1 - 2m = 0 & (2) \end{cases} \text{ Phương trình}$$

đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

TH1: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) vô nghiệm, suy ra

$$\begin{cases} 3-2m > 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } m < \frac{1}{2} \text{ thỏa (1*)}.$$

TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (1) vô nghiệm, suy ra

$$\begin{cases} 3-2m < 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}. \text{ Suy ra } m > \frac{3}{2} \text{ thỏa (2*)}.$$

TH3: Phương trình (1) có nghiệm kép suy ra $m = \frac{3}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình (1) là

$x = 2$, nghiệm của phương trình (2) là $x = \pm\sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy ra

$m = \frac{3}{2}$ không thỏa (3*).

TH4: Phương trình (2) có nghiệm kép suy ra $m = \frac{1}{2}$, khi đó nghiệm của phương trình (2) là

$x = 0$, nghiệm của phương trình (1) là $x = 2 \pm \sqrt{2}$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm. Suy

ra $m = \frac{1}{2}$ không thỏa (4*).

TH5: Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt nhưng hai phương trình này có nghiệm giống nhau.

Khi đó $\begin{cases} 3-2m > 0 \\ 2m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}.$

Gọi a, b ($b \neq a$) là hai nghiệm của phương trình (1), theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} a+b=4 \\ a.b=2m+1 \end{cases}$ (3).

Vì a, b cũng là nghiệm của phương trình (2) nên $\begin{cases} a+b=0 \\ a.b=-2m+1 \end{cases}$ (4), từ (3) và (4) ta suy ra $m \in \emptyset$ (5*).

Từ (1*), (2*), (3*), (4*) và (5*) suy ra $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{3}{2}$ thỏa mãn.

CÂU 10 : Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(\sqrt{x^2-x+4}+1)+2\log_5(x^2-x+5)<3$ là $(a;b)$.

Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = \log_3(\sqrt{x^2-x+4}+1) + 2\log_5(x^2-x+5)$.

$$\Rightarrow f'(x) = (2x-1) \left(\frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+4}+1)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3} + \frac{2}{(x^2-x+5)\ln 5} \right)$$

$$\text{Để đánh giá } g(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+4}+1)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3} + \frac{2}{(x^2-x+5)\ln 5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		0	
		-	+
y	2		5

Có $f(0) = f(1) = 3$ và dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in (0;1)$

Vậy $a = 0; b = 1$; suy ra $a+2b = 2$

CÂU 11: Cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x+1} + 4m-4 = 0$ (1). Hỏi có bao nhiêu giá

trị m nguyên âm để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$?

A. 6.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - 4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 4m-4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) - (m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x+1) + m-1 = 0$$

Đặt $t = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$, với $x \in \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ thì $-1 \leq t \leq 1$. Ta có phương trình:

$$(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) = t^2 - 5t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ với $-1 \leq t \leq 1$. Ta có $f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$.

$$f(-1) = \frac{7}{3}, \quad f(1) = -3. \text{ Do đó } \min_{[-1;1]} f(t) = -3 \text{ và } \max_{[-1;1]} f(t) = \frac{7}{3}.$$

Phương trình đã cho có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có

$$\text{nghiệm } t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \min_{[-1;1]} f(t) \leq m \leq \max_{[-1;1]} f(t) \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}.$$

Như vậy, các giá trị nguyên âm m để phương trình (1) có nghiệm thực trong đoạn $\left[-\frac{2}{3}; 2\right]$ là $\{-3; -2; -1\}$.

CÂU 12: Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$ và

$$x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b}) \text{ với } a, b \text{ là hai số nguyên dương. Tính } a + b.$$

A. $a + b = 16$.

B. $a + b = 11$.

C. $a + b = 14$.

D. $a + b = 13$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow \log_7 \left(\frac{(2x-1)^2}{2x} \right) + 4x^2 - 4x + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_7 (2x-1)^2 + (2x-1)^2 = \log_7 2x + 2x(1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \log_7 t + t \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 7} + 1 > 0 \text{ với } t > 0$$

Vậy hàm số đồng biến

$$\text{Phương trình (1) trở thành } f((2x-1)^2) = f(2x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_1 + 2x_2 = \begin{cases} \frac{9-\sqrt{5}}{4} & (l) \\ \frac{9+\sqrt{5}}{4} & (tm) \end{cases} \Rightarrow a = 9; b = 5 \Rightarrow a + b = 9 + 5 = 14.$$

CÂU 13: Cho phương trình $(\log_3 x)^2 + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên m mà phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 > \frac{10}{3}$. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6

B. 1

C. 0

D. 10

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{PT: } (\log_3 x)^2 + 3m \log_3(3x) + 2m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + 3m \log_3 x + 2m^2 + m - 1 = 0. (1)$$

$$\text{Đặt } t = \log_3 x, \text{ ta được: } t^2 + 3mt + 2m^2 + m - 1 = 0. (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 + x_2 > \frac{10}{3}$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa $3^{t_1} + 3^{t_2} > \frac{10}{3}$.

$$+ (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt: } \Delta = 9m^2 - 4(2m^2 + m - 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \neq 2.$$

$$+ \text{ Khi đó } (2) \text{ có hai nghiệm phân biệt } t_1 = -m - 1 \text{ và } t_2 = -2m + 1.$$

$$\text{Ta có: } 3^{t_1} + 3^{t_2} > \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3^{-m-1} + 3^{-2m+1} > \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3 \cdot 3^m} + \frac{3}{3^{2m}} > \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^m < -\frac{10}{9} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Mà $m \in \mathbb{N}$ nên không tồn tại m .

CÂU 14: Cho a, x là các số thực dương, $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a x = \log(a^x)$. Tìm giá trị lớn nhất của a .

A. 1

B. $\log(2^e - 1)$

C. $e^{\sqrt{\frac{\ln 10}{e}}}$

D. $10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_a x = \log(a^x) \Leftrightarrow \log_a x = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{\log a} = x \log a \Leftrightarrow \frac{\log x}{x} = (\log a)^2.$$

Giá trị của a lớn nhất khi và chỉ khi $\log a$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\log x}{x}$ với $x > 0$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 \ln 10}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\frac{\log e}{e}$	

Từ bảng biến thiên suy ra $(\log a)^2$ lớn nhất là bằng $\frac{\log e}{e}$. Khi đó

$$(\log a)^2 = \frac{\log e}{e} \Rightarrow \log a = \sqrt{\frac{\log e}{e}} \Rightarrow a = 10^{\sqrt{\frac{\log e}{e}}}.$$

CÂU 15: Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

- A. $S = -2$. B. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2, t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{2 \ln 2 t^2 - 2 \ln 2 t + 1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3 &= \log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+2}+(\sqrt{x+2}-1)^2 &= \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2 \\ \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) &= f\left(2+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2+\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

CÂU 16: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2-5x+2-m$$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

- A. 3. B. Vô số. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2+3x+m+1 > 0$.

- Ta có:

$$\begin{aligned} \log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} &= x^2-5x+2-m \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}\right)-1 = x^2-5x+1-m \\ \Leftrightarrow \log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{4x^2-2x+2} &= x^2-5x+1-m \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) - \log_2(4x^2 - 2x + 2) = (4x^2 - 2x + 2) - (3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x^2 + 3x + m + 1) + (3x^2 + 3x + m + 1) = \log_2(4x^2 - 2x + 2) + (4x^2 - 2x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t$ trên $D = (0; +\infty)$, có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in D$,

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên D

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow f(4x^2 - 2x + 2) = f(3x^2 + 3x + m + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 2 = 3x^2 + 3x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x = m - 1 \quad (2).$$

- Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x$ trên $\mathbb{R}$, có $g'(x) = 2x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y							

- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-\frac{25}{4} < m - 1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$, do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4\}$, hay có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 17: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

A. $\left\{\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2}\right\}$. B. $\left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$. C. $\left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \quad (1)$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} \cdot \log_2[(x-1)^2 + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2(t + 2), t \geq 0$.

Vì $f'(t) > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow f[(x-1)^2] = f(2|x-m|) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-m|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 & (3) \\ x^2 = 2m - 1 & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) có đúng ba nghiệm phân biệt nếu xảy ra các trường hợp sau:

+) PT (3) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT (4)

$$\Rightarrow m = \frac{3}{2}, \text{ thay vào PT (4) thỏa mãn}$$

+) PT (4) có nghiệm kép khác hai nghiệm phân biệt của PT (3)

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$, thay vào PT (3) thỏa mãn

+) PT (4) có hai nghiệm phân biệt và PT (3) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm của hai PT trùng nhau

(4) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2m-1}$, với $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2}$. Thay vào PT (3) tìm được $m = 1$.

KL: $m \in \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right\}$.

Ý kiến riêng của Ad (Duy Hiếu)

Bước 1: Đưa phương trình về dạng $f(u) = f(v)$ với u, v là hai hàm theo x .

Bước 2: Xét hàm số $f(t), t \in D$.

Bước 3: Dùng đạo hàm chứng minh hàm số $f(t), t \in D$ tăng hoặc giảm nghiêm ngặt trên D .

Bước 4: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

CÂU 18: $S = (a; b)$ là tập các giá trị của m để phương trình $\log_2(mx - 6x^3) + \log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có

ba nghiệm phân biệt. Khi đó hiệu $H = b - a$ bằng:

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(mx - 6x^3) + \log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{14} < x < 2 \\ m = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x} \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x}$, với $\frac{1}{14} < x < 2$

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left(\frac{1}{14}; 2\right)$ và $f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2} = \frac{12x^3 - 14x^2 + 2}{x^2}$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \notin \left(\frac{1}{14}; 2\right) \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{2}$	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{98}$	$\frac{39}{2}$	19	24	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân

biệt khi $19 < m < \frac{39}{2}$. Suy ra $\begin{cases} a = 19 \\ b = \frac{39}{2} \end{cases} \Rightarrow H = b - a = \frac{1}{2}$.

CÂU 19: Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $a \in (2; 3]$. B. $a \in (8; +\infty)$. C. $a \in (6; 7]$. D. $a \in (-6; -5]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ suy ra $t \geq \frac{3}{4}$

Bất phương trình $x^2 - x + 2 + a \ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t + a \ln t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \ln t \geq -t - 1$

Trường hợp 1: $t = 1$ khi đó $a \ln t \geq -t - 1$ luôn đúng với mọi a .

Trường hợp 2: $\frac{3}{4} \leq t < 1$

Ta có $a \ln t \geq -t - 1, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\ln^2 t} \geq 0, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right)$ do đó

$a \leq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4}; 1\right) \Leftrightarrow a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}}$

Trường hợp 3: $t > 1$

Ta có $a \ln t \geq -t - 1, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{\ln t - 1 - \frac{1}{t}}{\ln^2 t}, \forall t \in (1; +\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \ln t - 1 - \frac{1}{t} \Leftrightarrow g'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} > 0$

Vậy $g(t) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1) = -2; \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ vậy $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1; +\infty)$

Do đó $f'(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm là t_0 . Khi đó $\ln t_0 = \frac{t_0 + 1}{t_0}$ suy ra $f(t_0) = -t_0$

Bảng biến thiên

t	1		t_0	$+\infty$
f'		+	0	-
f		$-\infty$	$-t_0$	$-\infty$

Vậy $a \geq \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1; +\infty) \Leftrightarrow a \geq -t_0$.

Vậy $-t_0 \leq a \leq \frac{-7}{4 \ln \frac{3}{4}}$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a \in (6; 7]$.

CÂU 20: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số m để phương trình $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

A. 2020.

B. 2017.

C. 2019.

D. 2018.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x) = t \Rightarrow \begin{cases} 2018x+m=6^t \\ 1009x=4^t \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 4^t + m = 6^t \Leftrightarrow m = -2 \cdot 4^t + 6^t$.

Đặt $f(t) = -2 \cdot 4^t + 6^t$. Ta có: $f'(t) = 6^t \ln 6 - 2 \cdot 4^t \ln 4$.

Xét $f'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{2 \ln 4}{\ln 6} = \log_6 16 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$+\infty$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$+\infty$

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Mà $\begin{cases} m < 2018 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên ta có: $\begin{cases} -2 \leq m \leq 2017 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\log_2\left(\frac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 2x^2+mx+1 > 0 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } \log_2 \left(\frac{\sqrt{2x^2 + mx + 1}}{x + 2} \right) + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + mx + 1} + \sqrt{2x^2 + mx + 1} = \log_2 (x + 2) + x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{2x^2 + mx + 1}) = f(x + 2) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + mx + 1} = x + 2$.

$$\text{Từ đó } \begin{cases} x > -2 \\ 2x^2 + mx + 1 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2 + (m - 4)x - 3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

YCBT $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 + 12 > 0 \\ (x_1 + 2) + (x_2 + 2) > 0 \\ (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ x_1 + x_2 + 4 > 0 \\ x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ 4 - m + 4 > 0 \\ -3 + 2(4 - m) + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 8 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{9}{2} \text{ mà } m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

CÂU 22: Có bao nhiêu giá trị dương của tham số thực m để bất phương trình

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \text{ có nghiệm duy nhất thuộc } [32; +\infty)?$$

A. 2

B. 1

C. 3

D. 0

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq 8 \end{cases} \text{ . Hàm số xác định trên } [32; +\infty).$$

$$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 (\log_4 x^2 - 3) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2 \log_2 x - 3} \geq m^2 (\log_2 x - 3).$$

Đặt $t = \log_2 x$. Do $x \geq 32 \Rightarrow t \geq 5$. Bất phương trình có dạng:

$$\sqrt{t^2 - 2t - 3} \geq m^2 (t - 3) \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3} \Leftrightarrow m^2 \leq \sqrt{\frac{t + 1}{t - 3}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t + 1}{t - 3}$ trên $[5; +\infty)$. $f'(t) = \frac{-4}{(t - 3)^2}$ nên hàm số nghịch biến trên $[5; +\infty)$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 1$ nên ta có $1 < f(t) \leq 2$.

Do với mỗi t có duy nhất một giá trị x nên để bất phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $[32; +\infty)$ thì bất phương trình $m^2 \leq \sqrt{f(t)}$ có nghiệm duy nhất trên $[5; +\infty)$.

Khi đó: $m^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{2}$. Do đó không có số nguyên dương m thỏa mãn.

CÂU 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2000; 2000)$ để

$$2a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} > m \sqrt{\log_a b} + 1 \text{ với mọi } a, b \in (1; +\infty)$$

A. 2000.

B. 1999.

C. 2199.

D. 2001.

Lời giải

Chọn A

Vì $a > 1, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$ Đặt $t = \sqrt{\log_a b} (t > 0) \Leftrightarrow t^2 = \log_a b \Leftrightarrow b = a^{t^2}$

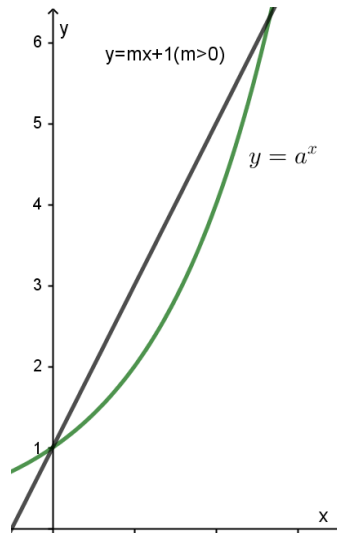
Bất phương trình tương đương:

$$2a^t - (a^{t^2})^{\frac{1}{t}} > mt + 1 \Leftrightarrow a^t > mt + 1 \Leftrightarrow f(t) > g(t) \quad (1)$$

Ta có: $f(t) = a^t$ với $a > 1$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Xét $m = 0$, $(1) \Leftrightarrow a^t > 1, \forall a > 1, t > 0$ (luôn đúng). Vậy nhận $m = 0$.

Xét $m > 0$, hàm số $y = mt + 1$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy không thỏa. Loại $m > 0$



Xét $m < 0$, hàm số $y = mt + 1$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy luôn thỏa (1). Vậy ta nhận $m < 0$.

Vậy ta kết hợp điều kiện ta được $m \in (-2000; 0], m \in \mathbb{Z}$.

Vậy $m \in \{-1999, \dots, 1, 0\}$. Ta có 2000 số nguyên m thỏa ycbt.

CÁCH 2: Giải đến $2a^t - (a^{t^2})^{\frac{1}{t}} > mt + 1 \Leftrightarrow m < \frac{a^t - 1}{t}, \forall t > 0$

Ta nhận xét: $\min_{[0; +\infty)} \frac{a^t - 1}{t} = 0$

Vậy $m \leq 0$ là giá trị cần tìm.

CÁCH 3 (CASIO – chỉ áp dụng cho bạn nào hiểu rõ bản chất thôi nha):

Cho $a = b = 1,01$. Khi đó $\sqrt{\log_a b} = 1$ ta được:

$$2,1,01 - 1,01 > m + 1 \Leftrightarrow m < 0,01$$

Vậy $m \in \{-1999, \dots, 1, 0\}$. Ta có 2000 số nguyên m thỏa ycbt.

CÂU 24: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S là

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

Lời giải

Chọn C

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m & (1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Leftrightarrow \frac{7x^2 - 4x + 7}{x^2 + 1} \geq m$. Xét hàm số $f(x) = \frac{7x^2 - 4x + 7}{x^2 + 1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \frac{4x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	9	5	$+\infty$	

ycbt $\Leftrightarrow m \leq 5$ (3)

Từ (2) $\Leftrightarrow \frac{-4x}{x^2 + 1} < m$. Xét hàm số $g(x) = \frac{-4x}{x^2 + 1}$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = \frac{4x^2 - 4}{(x^2 + 1)^2}$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

ycbt $\Leftrightarrow m > 2$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow 2 < m \leq 5$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{3; 4; 5\}$. Vậy $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

CÂU 25: Cho bất phương trình: $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$ (1). Tìm tất cả các giá trị của m để (1) được nghiệm đúng với mọi số thực x :

- A. $2 \leq m \leq 3$. B. $2 < m \leq 3$. C. $-3 \leq m \leq 7$. D. $m \leq 3; m \geq 7$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $mx^2 + 4x + m > 0$.

Ta có $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \log_5 5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$

$\Leftrightarrow 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \Leftrightarrow (5 - m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0$.

Để (1) được nghiệm đúng với mọi số thực x khi $f(0) = 1$.

$$\begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \\ 5 - m > 0 \\ 4 - (5 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3. \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R}.$$

CÂU 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình $3 \log x \leq 2 \log(m\sqrt{x - x^2} - (1 - x)\sqrt{1 - x})$ có nghiệm thực?

- A. 6. B. 7. C. 10. D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{(1-x)}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log x^3 \leq \log \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right)^2 \Leftrightarrow x^3 \leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \leq \left(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right) \Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} \right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}.$$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

CÂU 27: Cho cấp số cộng (a_n) , cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $a_2 > a_1 \geq 0$ và $b_2 > b_1 \geq 1$; và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(a_2) + 2 = f(a_1)$ và $f(\log_2 b_2) + 2 = f(\log_2 b_1)$. Số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $b_n > 2018a_n$ là:

A. 16. B. 15. C. 17. D. 18.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		2		-2	$+\infty$

Theo giả thiết

$$\begin{cases} f(a_2) + 2 = f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) < f(a_1) \\ a_2 > a_1 \geq 0 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1 \\ 0 \leq a_1 \leq 1 < a_2 \end{cases}$, hơn nữa $f(x) + 2 \geq 0 \forall x \geq 0$. Ta xét các trường hợp:

$$\text{* Nếu } 0 \leq a_1 < a_2 \leq 1 \text{ thì } \begin{cases} f(a_2) + 2 \geq 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a_2) = -2 \\ f(a_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{* Nếu } 0 \leq a_1 \leq 1 < a_2 \text{ thì } \begin{cases} f(a_2) + 2 > 0 \\ f(a_1) \leq 0 \end{cases} \text{ điều này là không thể.}$$

Do đó chỉ xảy ra trường hợp $a_1 = 0; a_2 = 1$. Từ đó suy ra $a_n = n-1 (n \geq 1)$.

$$\text{Tương tự vì } b_2 > b_1 \geq 1 \text{ nên } \log_2 b_2 > \log_2 b_1 \geq 0, \text{ suy ra } \begin{cases} \log_2 b_2 = 1 \\ \log_2 a_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} (n \geq 1).$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x - 2018x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, ta có bảng biến thiên

x	0	$\log_2 \frac{2018}{\ln 2}$	$+\infty$
g'	-	0	+
g	1	$g(\log_2 \frac{2018}{\ln 2})$	$+\infty$

Ta có $\begin{cases} g\left(\log_2 \frac{2018}{\ln 2}\right) < 0 \\ \log_2 \frac{2018}{\ln 2} > 11 \\ g(12) = -20120 \\ g(13) = -18042 \\ g(14) = -11868 \\ g(15) = 2498 > 0 \end{cases}$ nên số nguyên dương nhỏ nhất n thỏa $g(n-1) > 0$

là $n-1=15 \Leftrightarrow n=16$.

CÂU 28: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn hệ thức: $2\log_2 a - \log_2 b \leq \log_2(a+6b)$. Tìm giá trị lớn

nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = \frac{ab-b^2}{a^2-2ab+2b^2}$.

A. $P_{\max} = \frac{2}{3}$.

B. $P_{\max} = 0$.

C. $P_{\max} = \frac{1}{2}$.

D. $P_{\max} = \frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $2\log_2 a - \log_2 b \leq \log_2(a+6b) \Leftrightarrow \log_2 a^2 \leq \log_2(ab+6b^2) \Leftrightarrow a^2 \leq ab+6b^2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \frac{a}{b} \leq 2. \text{ Do } a, b \text{ dương nên } 0 < \frac{a}{b} \leq 2.$$

Đặt $t = \frac{a}{b}, 0 < t \leq 2$. Khi đó: $P = \frac{ab-b^2}{a^2-2ab+2b^2} = \frac{t-1}{t^2-2t+2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t-1}{t^2-2t+2}$ với $0 < t \leq 2$.

Ta có: $f'(t) = \frac{-t^2+2t}{(t^2-2t+2)^2} \geq 0, \forall t \in (0; 2]$. Suy ra $f(t) \leq f(2) = \frac{1}{2}$. Vậy $\max_{(0; 2]} f(t) = \frac{1}{2}$ khi

$t=2$. Do đó $P_{\max} = \frac{1}{2}$.

DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI

CÂU 1: Giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(3; 9)$ B. $(9; +\infty)$ C. $\left(\frac{1}{4}; 3\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

CÂU 2: Cho hàm số $y = e^{ax^2+bx+c}$ đạt cực trị tại $x=1$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng e . Tính giá trị của hàm số tại $x=2$?

- A. $y(2) = e^2$ B. $y(2) = \frac{1}{e^2}$ C. $y(2) = 1$ D. $y(2) = e$

CÂU 3: Cho cấp số cộng (u_n) có tất cả các số hạng đều dương và thỏa mãn điều kiện sau

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009}).$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14}$ bằng

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

CÂU 4: Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $(\sin x - 1)[2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m] = 0$ có đúng bốn nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

CÂU 5: Cho phương trình $e^{m \cdot \cos x - \sin x} - e^{2(1-\sin x)} = 2 - \sin x - m \cdot \cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính $T = 10a + 20b$.

- A. $T = 10\sqrt{3}$ B. $T = 0$ C. $T = 3\sqrt{10}$ D. $T = 1$

CÂU 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 2}$ là bao nhiêu?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+		0	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$-\infty \nearrow 1 \searrow 2 \nearrow +\infty$

- A. 0 B. 3 C. 1 D. 2

CÂU 7: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3[(x+1)(y+1)]^{y+1} = 9 - (x-1)(y+1)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ là:

- A. $P_{\min} = \frac{11}{2}$ B. $P_{\min} = \frac{27}{5}$ C. $P_{\min} = -5 + 6\sqrt{3}$ D. $P_{\min} = -3 + 6\sqrt{2}$

CÂU 8: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{2}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}$ ($n \geq 1$). Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} u_n > 12,3$.

- A. $n = 50$ B. $n = 60$ C. $n = 51$ D. $n = 61$

CÂU 9: Cho phương trình $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x - m - \frac{2}{9} = 0$, m là tham số. Biết phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 < m < 2$ B. $3 < m < 4$ C. $0 < m < \frac{3}{2}$ D. $2 < m < 3$

CÂU 10: Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $a > b > 1$ và $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{2018}$.

Giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

- A. $P = \sqrt{2014}$. B. $P = \sqrt{2016}$. C. $P = \sqrt{2018}$. D. $P = \sqrt{2020}$.

CÂU 11: Có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm thực: $3 \log x \leq 2 \log \left[m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} \right]$?

- A. 6. B. 7. C. 10. D. 11.

CÂU 12:: Bất phương trình $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [2; 4)$ khi và chỉ khi

- A. $m \in [0; 1)$. B. $m \in [-2; 0)$. C. $m \in (0; 1]$. D. $m \in (-2; 0]$

CÂU 13. Bất phương trình $(1+\sqrt{2})^x + (1-2a)(\sqrt{2}-1)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ B. $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ C. $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$ D. $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

CÂU 14: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + 1 = 2|2^x - m|$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 4

CÂU 15: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $|2^{x+1} - 8| = \frac{1}{2}x^2 + m$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

- A. 8 B. 9. C. 6. D. 7.

CÂU 16. Có bao nhiêu m nguyên để phương trình $m \cdot 2^{x+1} + m^2 = 16^x - 6 \cdot 8^x + 2 \cdot 4^{x+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

CÂU 17: Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-200; 200)$ để phương trình $e^x + e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(x+a+1)$ có nghiệm thực duy nhất.

- A. 399 B. 199 C. 200 D. 398

CÂU 18. Có bao nhiêu số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2} (4x+4y+m^2-m-5) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. 2. B. 6. C. 4. D. 0.

CÂU 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $e^{3m} + e^m = 2 \left(x + \sqrt{1-x^2} \right) \left(1 + x\sqrt{1-x^2} \right)$ có nghiệm.

- A. $\left[\frac{1}{2} \ln 2; +\infty \right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2} \ln 2 \right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2} \ln 2 \right]$. D. $\left(0; \frac{1}{e} \right)$.

CÂU 20: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

- A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$. B. $P_{\min} = 8$. C. $P_{\min} = 9$. D. $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

CÂU 21: Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2} (4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A. $S = \{-5; 5\}$.

B. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$.

C. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$.

D. $S = \{-1; 1\}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn C.

- Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$) khi đó: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$ (*)
- Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi (*) có 2 nghiệm dương phân biệt
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 3(4m-1) = 4m^2 - 8m + 4 = (2m-2)^2 > 0 \\ S = 2(2m+1) > 0 \\ P = 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$
- Khi đó ta có: $\begin{cases} t_1 = 4m-1 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_2(4m-1) \\ x_2 = 1 \end{cases}$
- Lại có: $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow x_1 + 1 = \frac{12}{x_2 + 2} = 4 \Rightarrow x_1 = 3$
- Suy ra $\log_2(4m-1) = 3 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

CÂU 2: Chọn D.

- Ta có: $y' = e^{ax^2+bx+c} (2ax+b)$
- Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=1 \Rightarrow y'(1) = e^{a+b+c} (2a+b) = 0 \Leftrightarrow 2a+b=0$
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $x=0; y=e \Rightarrow e = e^c \Rightarrow c=1$
- Ta có: $y(2) = e^{4a+2b+c} = e^{2(2a+b)+1} = e$.

CÂU 3: Chọn C.

- Ta có: $u_1 + u_2 + \dots + u_{2018} = 4(u_1 + u_2 + \dots + u_{1009}) \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{2018}}{2} \cdot 2018 = 4 \cdot \frac{u_1 + u_{1009}}{2} \cdot 1009$
- $u_1 + u_{2018} = 2u_1 + 2u_{1009} \Leftrightarrow u_{2018} \Leftrightarrow u_1 + 2u_{1009} \Leftrightarrow 2017d = 2(u_1 + 1008d) \Leftrightarrow 2u_1 = d$
- Ta có: $P = \log_3^2 u_2 + \log_3^2 u_5 + \log_3^2 u_{14} = \log_3^2(u_1 + d) + \log_3^2(u_1 + d) + \log_3^2(u_1 + 13d)$
- $\Rightarrow P = \log_3^2(3u_1) + \log_3^2(9u_1) + \log_3^2(27u_1) = (1 + \log_3 u_1)^2 + (2 + \log_3 u_1)^2 + (3 + \log_3 u_1)^2$
- Đặt $t = \log_3 u_1 \Rightarrow P = (1+t)^2 + (2+t)^2 + (3+t)^2 = 3t^2 + 12t + 14 = 3(t+2)^2 + 2 \geq 2$
- Do đó $P_{\min} = 2$.

CÂU 4: Chọn C.

- Ta có: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, phương trình này có 1 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là $x = \frac{\pi}{2}$
- Lại có: $2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0$
- $\Leftrightarrow (\cos x - m)(2\cos x - 1) = 0$
- Xét PT: $2\cos x = 1$ có 2 nghiệm $x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$ trên đoạn $[0; 2\pi]$
- Đề PT có đúng 4 nghiệm phân biệt khi:
- +) $\cos x = m$ có duy nhất 1 nghiệm khác $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$ khi đó $m = -1$.

- +) $\cos x = m$ có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm trùng với 1 trong 3 nghiệm $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$.
- Suy ra $m = 0$. Kết hợp 2 trường hợp suy ra có 2 giá trị của m .

CÂU 5:

- $e^{m \cos x - \sin x} - e^{2(1 - \sin x)} = 2 - \sin x - m \cos x \Leftrightarrow e^{m \cos x - \sin x} + m \cos x - \sin x = e^{2(1 - \sin x)} + 2(1 - \sin x)$
- Xét hàm số $PT \Leftrightarrow f(t) = e^t + t$ ($t \in \mathbb{R}$) ta có: $f'(t) = e^t + 1 > 0$ ($\forall t \in \mathbb{R}$)
- Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, ta có: $f(m \cos x - \sin x) = f(2(1 - \sin x))$
- $\Leftrightarrow m \cos x - \sin x = 2(1 - \sin x) \Leftrightarrow m \cos x + \sin x = 2$
- Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m^2 \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \sqrt{3} \\ m \leq -\sqrt{3} \end{cases}$
- Khi đó $S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty) \Rightarrow a = \sqrt{3}; b = \sqrt{3} \Rightarrow T = 10\sqrt{3}$.

CÂU 6: Chọn D.

- Ta có $e^{f^2(x)} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{f^2(x)} = 2 \Leftrightarrow f^2(x) = \ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{\ln 2} & (1) \\ f(x) = -\sqrt{\ln 2} & (2) \end{cases}$
- Dựa vào hình vẽ, ta thấy (1) có nghiệm duy nhất, (2) có nghiệm duy nhất.
- Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{e^{f^2(x)} - 2}$ có 2 đường tiệm cận đứng là nghiệm của (1), (2).

CÂU 7: Chọn D.

- Giả thiết $\Leftrightarrow (y+1) \cdot \log_3(x+1)(y+1) = 9 - (x-1)(y+1) \Leftrightarrow \log_3(x+1)(y+1) = \frac{9}{y+1} - x + 1$
- $\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x - 1 = -\log_3(y+1) + \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow \log_3(x+1) + x + 1 = \log_3 \frac{9}{y+1} + \frac{9}{y+1}$
- Ta có $f(t) = \log_3 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ mà $f(x+1) = f\left(\frac{9}{y+1}\right)$.
- Suy ra $x+1 = \frac{9}{y+1} \Leftrightarrow x = \frac{9}{y+1} - 1 \longrightarrow P = 2y - 1 + \frac{9}{y+1} = g(y)$.
- Xét hàm số $g(y) = 2y - 1 + \frac{9}{y+1}$ trên $(0; 8)$, suy ra $\min_{(0; 8)} f(y) = -3 + 6\sqrt{2}$.

CÂU 8: Chọn C.

- Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 4n + 2 = \left[\frac{1}{u_{n-1}} + 4(n-1) + 2 \right] + 4n + 2$
- $\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_1} + (4 \cdot 1 + 2) + (4 \cdot 2 + 2) + \dots + (4n + 2) = \frac{3}{2} + 2n^2 + 4n = \frac{4n^2 + 8n + 3}{2}$.
- Suy ra $u_{n+1} = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{4(n+1)^2 - 1} \Rightarrow u_n = \frac{2}{4n^2 - 1}$
- Do đó $\log_{\frac{1}{2}} u_n = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{4n^2 - 1} > 12,3 \Leftrightarrow \frac{2}{4n^2 - 1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{12,3} \longrightarrow n_{\min} = 51$.

CÂU 9: Chọn C.

- Ta có $4\log_9^2 x + m\log_{\frac{1}{3}} x + \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x - m - \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 - \left(m + \frac{1}{3}\right) \cdot \log_3 x - m - \frac{2}{9} = 0$.
- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \left(m + \frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(m + \frac{2}{9}\right) > 0 \\ t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 (x_1 x_2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

CÂU 10: Chọn A.

- Ta có $\frac{1}{\log_a b} - \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{2018} \Leftrightarrow \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \sqrt{2018} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \sqrt{2018}$.
- $P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a} = \log_b ab - \log_a ab = \log_b a - \log_a b = \frac{1}{\log_a b} - \log_a b = \frac{1}{t} - t$.
- Mà $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(\frac{1}{t} - t\right)^2 = 4$ suy ra $P = \frac{1}{t} - t = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 4} = \sqrt{2018 - 4} = \sqrt{2014}$.

CÂU 11: Chọn B.

- Điều kiện: $x \in (0; 1)$. Bất phương trình $\Leftrightarrow x\sqrt{x} \leq m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x}$ (*).
- Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{1-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab = \sqrt{x-x^2} \end{cases}$, khi đó (*) $\Leftrightarrow m \geq \frac{a^3 + b^3}{ab} = \frac{(a+b)(1-ab)}{ab}$
- Ta có $\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ ab = \sqrt{x-x^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$
- suy ra $\frac{(a+b)(1-ab)}{ab} \geq 2 \cdot \frac{1-ab}{\sqrt{ab}} \geq 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$.
- Do đó, phương trình (1) có nghiệm thực $\Leftrightarrow m \geq \min \left\{ \frac{a^3 + b^3}{ab} \right\} = \sqrt{2}$.

CÂU 12: Chọn B

- Có yêu cầu bài toán tương đương với:
- $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0, \forall x \in [2; 4] \Leftrightarrow m+1 < \log_2 x < m+4, \forall x \in [2; 4]$
- $\begin{cases} m < \log_2 x - 1 \forall x \in [2; 4] \\ m > \log_2 x - 4 \forall x \in [2; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \log_2 2 - 1 = 0 \\ m \geq \log_2 4 - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; 0)$.
- NOTE:** Chú ý bấm máy phương trình bậc hai
- $t^2 - (2m+5)t + m^2 + 5m + 4 = 0 (m=100)$ có hai nghiệm
- $t_1 = 1001 = m+1; t_2 = 1004 = m+4$.

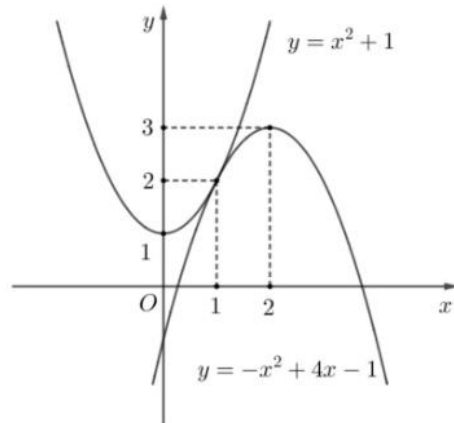
CÂU 13: Chọn B

- Đặt $t = (1 + \sqrt{2})^x (t > 0) \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)^x = \frac{1}{t}$ và phương trình trở thành:
- $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0(1)$. Ta cần tìm a để (1) có hai nghiệm dương t_1, t_2 khi đó
- $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} t_1 - \log_{1+\sqrt{2}} t_2 = \log_{1+\sqrt{2}} \frac{t_1}{t_2} = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

- Kết hợp vi – ét ta có
$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ 1 - 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}.$$

CÂU 14: Chọn A

- Đặt $t = 2^x (t > 0)$ phương trình trở thành:
- $t^2 - 2t + 1 = 2|t - m| \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 2(t - m) \\ t^2 - 2t + 1 = -2(t - m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -t^2 + 4t - 1 \\ 2m = t^2 + 1 \end{cases}.$
- Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ hai parabol $(P_1): y = x^2 + 1; (P_2): y = -x^2 + 4x - 1$.



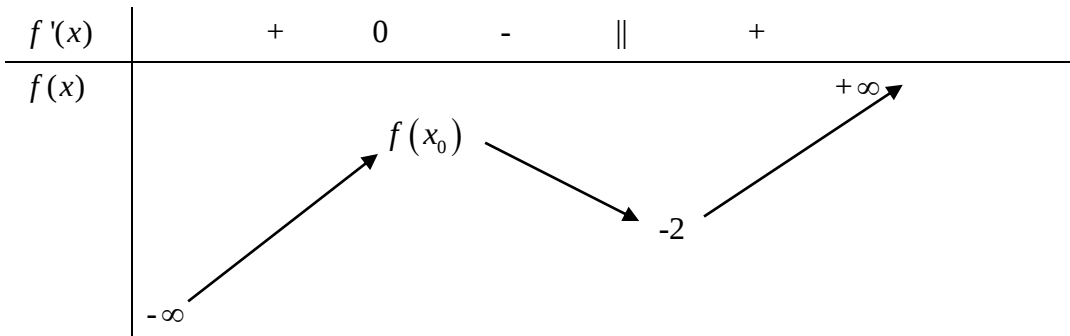
- Với mỗi $t > 0$ cho ta một nghiệm $x = \log_2 t$. Do đó phương trình có đúng 2 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi hệ phương trình cuối có đúng 2 nghiệm dương phân biệt. Điều này tương đương với đường thẳng $y = 2m$ cắt đồng thời $(P_1), (P_2)$ tại đúng 2 điểm có hoành độ dương. Quan sát đồ thị suy ra các giá trị cần tìm của tham số là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 2 \\ -1 < 2m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ -\frac{1}{2} < m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1\}.$$

CÂU 15: Chọn A

- Phương trình tương đương với: $m = f(x) = |2^{x+1} - 8| - \frac{1}{2}x^2 (*)$.
- $$f(x) = |2^{x+1} - 8| - \frac{1}{2}x^2 = \begin{cases} 2^{x+1} - 8 - \frac{1}{2}x^2 (x \geq 2) \\ 8 - 2^{x+1} - \frac{1}{2}x^2 (x < 2) \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = \begin{cases} g(x) = 2^{x+1} \ln 2 - x (x > 2) \\ h(x) = -2^{x+1} \ln 2 - x (x < 2) \end{cases}.$$
- Chú ý hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 2$.
- $g'(x) = 2^{x+1} \ln^2 2 - 1 > 2^{2+1} \ln^2 2 - 1 > 0, \forall x > 2 \Rightarrow g(x) > g(2) = 2^3 \ln 2 > 0, \forall x > 2$
- Và $h'(x) = -2^{x+1} \ln^2 2 - 1 < 0, \forall x < 2$ và
- $h(-1) = -\ln 2 + 1 > 0; h(0) = -2 \ln 2 < 0 \Rightarrow h(0).h(-1) < 0$ do đó $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (-1; 0)$. Dùng máy tính tìm được $x_0 \approx -0,797563$ lưu nghiệm này vào biến nhớ A, ta có $f(x_0) = f(A) \approx 6,53131$.
- Vậy ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \in (-1; 0)$. Bảng biến thiên:

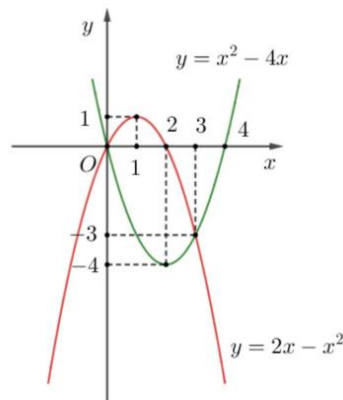
x	$-\infty$	x_0	2	$+\infty$
-----	-----------	-------	---	-----------



- Quan sát bảng biến thiên suy ra phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-2 < m < f(x_0) \approx 6,53131 \Rightarrow m \in \{-1, \dots, 6\}$. Có tất cả 8 số nguyên thỏa mãn.

CÂU 16: Chọn A

- Đặt $t = 2^x (t > 0)$ phương trình trở thành:
- $2mt + m^2 = t^4 - 6t^3 + 8t^2 \Leftrightarrow m^2 + 2mt + t^2 = t^4 - 6t^3 + 9t^2$
- $\Leftrightarrow (t+m)^2(t^2-3t)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t+m=t^2-3t \\ t+m=-t^2+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=t^2-4t \\ m=2t-t^2 \end{cases}$
- Với mỗi $t > 0$ phương trình có một nghiệm $x = \log_2 t$. Do đó phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ phương trình cuối có đúng 2 nghiệm phân biệt $t > 0$.



- Vẽ hai parabol $(P_1): y = x^2 - 4x; (P_2): y = 2x - x^2$ trên cùng hệ trục tọa độ. Yêu cầu bài toán tương đương với đường thẳng $y = m$ cắt hai đường thẳng $(P_1), (P_2)$ tại đúng 2 điểm có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \\ m = -3 \\ m = -4 \end{cases}. \text{ Vậy có 4 số nguyên thỏa mãn.}$$

Câu 17:

- Do $e^x + e^{x+a} > 0, \forall x$ do đó trước tiên phải có
- $\ln(1+x) > \ln(1+x+a) \Leftrightarrow 1+x > 1+x+a \Leftrightarrow a < 0$.
- Vậy điều kiện của phương trình là $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+x+a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1-a, \forall a < 0$.
- Phương trình tương đương với: $e^x + e^{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1) = 0$.
- Xét hàm số $f(x) = e^x + e^{x+a} - \ln(x+1) + \ln(x+a+1)$.
- $f'(x) = e^x + e^{x+a} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+a+1} = e^x + e^{x+a} - \frac{a}{(x+1)(x+a+1)} > 0, \forall a < 0, \forall x > -a-1$.
- Bảng biến thiên: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -(a+1)^+} f(x) = -\infty \Rightarrow f(x) = 0$ luôn có một nghiệm thực duy nhất với mọi $a < 0$.

CÂU 18: Chọn A

- Có điều kiện giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ \log_{x^2+y^2+2} (4x+4y+m^2-m-5) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ 4x+4y+m^2-m-5 \geq x^2 + y^2 + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4(1) \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq m^2 - m + 1(2) \end{cases}$$

- Ta có (1) là đường tròn (C_1) tâm $I_1(-1;2)$, $R_1 = 2$; (2) là hình tròn (C_2) tâm $I_2(2;2)$, $R_2 = \sqrt{m^2 - m + 1}$.
- Để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x;y)$ khi và chỉ khi hệ có nghiệm duy nhất tương đương với $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài
- $\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow 3 = \sqrt{m^2 - m + 1} + 2 \Leftrightarrow m = 0; m = 1$.
- NOTE:** ý tiếp xúc trong thì đường tròn và hình tròn có vô số điểm chung. Bạn đọc cần cẩn thận cho trường hợp này.

CÂU 19:

ĐKXĐ: $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x + \sqrt{1 - x^2} = t$ ta có $t^2 = x^2 + 1 - x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2} = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x\sqrt{1 - x^2} = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Ta có: $t(x) = x + \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1;1] \Rightarrow t'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

BBT:

x	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$t'(x)$	+	0	-
$t(x)$	-1	$\sqrt{2}$	1

Từ BBT ta có: $t \in [-1; \sqrt{2}]$.

Khi đó phương trình trở thành: $e^m + e^{3m} = 2t \left(1 + \frac{t^2 - 1}{2} \right) = t(t^2 + 1) = t^3 + t (*)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(-1; \sqrt{2})$.

Từ $(*) \Rightarrow f(e^m) = f(t) \Leftrightarrow e^m = t \Leftrightarrow m = \ln t \Rightarrow m \in (0; \ln \sqrt{2}) = \left(0; \frac{1}{2} \ln 2 \right)$

CÂU 20:

- Theo bài ra ta có:
- $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \leq \log_{\frac{1}{2}} (x + y^2) \Leftrightarrow xy \geq x + y^2$

- $\Leftrightarrow x(y-1) \geq y^2 > 0$. Mà $x > 0 \Rightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$.
- $x \geq \frac{y^2}{y-1}$. Khi đó ta có $P = x + 3y \geq \frac{y^2}{y-1} + 3y$ với $y > 1$. Xét hs $f(y) = \frac{y^2}{y-1} + 3y$ với $y > 1$ ta có:
- $f'(y) = \frac{2y(y-1) - y^2}{(y-1)^2} + 3 = \frac{y^2 - 2y + 3y^2 - 6y + 3}{(y-1)^2} = \frac{4y^2 - 8y + 3}{(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$
- BBT:

y	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$	+	0	-		-	0	+
$f(y)$	$-\infty$			1		9	$+\infty$

- Từ BBT ta thấy $\min_{y>1} f(y) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 9$. Vậy $P \geq 9$ hay $P_{\min} = 9$.

CÂU 21: Chọn D.

- $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 = \log_{x^2+y^2+2}(x^2+y^2+2)$
- $\Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2$ (Do $x^2+y^2+2 > 1$) $\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y-m^2+8 \leq 0$ (1)
- Ta có $a^2+b^2-c = 4+4+m^2-8 = m^2$ (2)
- Trường hợp 1: $m=0 \Rightarrow (1): x^2+y^2-4x-4y+8=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$
- Cặp số $(x;y) = (2;2)$ không thỏa mãn điều kiện (2).
- TH2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0 \Rightarrow$ Tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn (1) là hình tròn (C_1) (kể cả biên) tâm $I_1(2;2)$ bán kính $R_1 = m$.
- Tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I_2(-1;2)$ bán kính $R_2 = \sqrt{1+4-1} = 2$.
- Để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn 2 điều kiện (1) và (2) $\Rightarrow$ Xảy ra 2 trường hợp sau:
- **Trường hợp 1:** $(C_1); (C_2)$ tiếp xúc ngoài $\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1-2)^2 + (2-2)^2} = m + 2$
 $\Leftrightarrow 3 = m + 2 \Leftrightarrow m = 1$ (tm).
- **Trường hợp 2:** $(C_1); (C_2)$ tiếp xúc trong

$$\text{và } R_1 < R_2 \Leftrightarrow \begin{cases} I_1I_2 = |R_1 - R_2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m - 2| \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (tm)} \\ m < 2 \end{cases} \text{ . Vậy } S = \{\pm 1\}.$$

CHỦ ĐỀ 1: MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

A. $S = 1$ B. $S = 1 + \ln^2 2$ C. $S = 2\ln 2$ D. $S = \ln^2 2$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Lại có } f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017.$$

$$f(2) = 2018 \Rightarrow \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018.$$

$$\text{Do đó } S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2.$$

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho $\int \left(\frac{ax+b+ce^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = 9\sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 5e^x + C$. Tính giá trị biểu thức $M = a+b+c$.

A. 6 B. 20 C. 16 D. 10

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \left[9\sqrt{x^2+1} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+1}) + 5e^x \right]' = \frac{9x}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} + 5e^x = \frac{9x+2+5e^x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\text{Do đó } a=9, b=2, c=5. \text{ Suy ra } M = a+b+c = 16.$$

❖ **VÍ DỤ 3:** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x).g(x)$, biết $F(2) = 5$, $\int f(x)dx = x+C$ và $\int g(x)dx = \frac{x^2}{4} + C$.

A. $F(x) = \frac{x^2}{4} + 4$. B. $F(x) = \frac{x^2}{4} + 5$. C. $F(x) = \frac{x^3}{4} + 5$. D. $F(x) = \frac{x^3}{4} + 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x)g(x)dx.$$

$$\text{Mà } \int f(x)dx = x+C \Rightarrow f(x)=1; \int g(x)dx = \frac{x^2}{4} + C \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} + C \text{ mà } F(2) = 5 \text{ suy ra } C = 4.$$

$$\text{Hay } F(x) = \frac{x^2}{4} + 4.$$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết rằng $f(-3) + f(3) = 0$. Tính $T = f(2) + f(0) + f(-4)$.
- A. $T = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3$. B. $T = \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 + 2$. C. $T = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3 + 1$. D. $T = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Do đó:

$$f(-3) + f(3) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \ln 2 + C \right) + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + C \right) = 0 \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Như vậy: } f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|. \quad f(2) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-1}{2+1} \right| = -\frac{1}{2} \ln 3; \quad f(0) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{0-1}{0+1} \right| = 0;$$

$$f(-4) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-4-1}{-4+1} \right| = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3).$$

$$\text{Từ đó: } T = f(2) + f(0) + f(-4) = -\frac{1}{2} \ln 3 + 0 + \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 5 - \ln 3.$$

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng
- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$. B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$. C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$. D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \tan^{n-2} x \cdot (\tan x)' dx - I_{n-2} \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C.$$

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10} &= (I_{10} + I_8) + (I_9 + I_7) + \dots + (I_3 + I_1) + (I_2 + I_0) \\ &= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^8 x}{8} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \tan x + C = \sum_{r=1}^9 \frac{\tan^r x}{r} + C. \end{aligned}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Xác định a, b, c để hàm số $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$.

- D.** $a = -1$, $b = -5$, $c = -7$.

CÂU 2: Biết $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Tính $T = a + b + c$.

- #### D. $T = 7$.

CÂU 3: Biết hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$ và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -5 . Hàm số $f(x)$ là

- A.** $x^3 + x^2 - 3x - 5$, **B.** $x^3 + 2x^2 - 5x - 5$, **C.** $2x^3 + x^2 - 7x - 5$, **D.** $x^3 + x^2 + 4x - 5$.

CÂU 4: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1$ thỏa mãn $F(0) = 0$ và $F(3) = 7$.

Khi đó, giá trị của tham số m bằng

- ## D. 2.

CÂU 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F(5) = 2$ và $F(0) = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $F(-1) = 2 - \ln 2$. **B.** $F(2) = 2 - 2\ln 2$. **C.** $F(3) = 1 + \ln 2$. **D.** $F(-3) = 2$.

CÂU 6: Gọi $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$.
 Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

- D.244.**

CÂU 7: Biết hàm số $F(x) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a-b+c)x + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$. Tổng $a+b+c$ là:

- D.5.**

CÂU 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để bất phương trình $\int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 2(a+1) \right) dt \geq -1$ nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x .

- A.** $a \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$. **B.** $a \in [0; 1]$. **C.** $a \in [-2; -1]$. **D.** $a \leq 0$.

CÂU 9: Biết rằng $\int \frac{x-3}{x^2-2x+1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- D.** $a = 2b$.

CÂU 10: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C$, với a, b là các số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5. B. 4. C. 2. D. 3.

CÂU 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2}$, $f(0) = 5$ và $f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0$.
Giá trị của biểu thức $S = f(-\ln 16) + f(\ln 4)$ bằng

A. $S = \frac{31}{2}$. B. $S = \frac{9}{2}$. C. $S = \frac{5}{2}$. D. $S = -\frac{7}{2}$.

CÂU 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^5}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$.
Tính $f(-1) + f(2)$.

A. $f(-1) + f(2) = a + b$. B. $f(-1) + f(2) = -a - b$.
C. $f(-1) + f(2) = a - b$. D. $f(-1) + f(2) = b - a$.

CÂU 13: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1) \cdot f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613 < f^2(8) < 2614$. B. $2614 < f^2(8) < 2615$.
C. $2618 < f^2(8) < 2619$. D. $2616 < f^2(8) < 2617$.

CÂU 14: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2 < f(5) < 3$. B. $1 < f(5) < 2$. C. $4 < f(5) < 5$. D. $3 < f(5) < 4$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn C

Ta có: $F'(x) = (2ax + b) \cdot e^{-x} - (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c] \cdot e^{-x}$

$$\text{Có } F'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = -3 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$.

CÂU 2: Chọn D

Ta có $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Tính } F'(x) &= (2ax + b) \sqrt{2x-3} + (ax^2 + bx + c) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-3}} \\ &= \frac{(2ax + b)(2x-3) + ax^2 + bx + c}{\sqrt{2x-3}} = \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c}{\sqrt{2x-3}} &= \frac{20x^2 - 30x + 11}{\sqrt{2x-3}} \\ \Rightarrow 5ax^2 + (3b-6a)x - 3b + c &= 20x^2 - 30x + 11 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a = 20 \\ 3b - 6a = -30 \\ -3b + c = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 7.$$

CÂU 3: Chọn A

Ta có $f(x) = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1-m)x + C$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-m) + C + 12 = 1 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ C = -5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 5.$

CÂU 4: Chọn B

Ta có $F(x) = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + m - 1 \right) dx = \sqrt{x+1} + (m-1)x + C$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} F(0) = 0 \\ F(3) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + 1 = 0 \\ C + 3m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -1 \\ m = 3 \end{cases}.$

Vậy $F(x) = \sqrt{x+1} + 2x - 1$.

CÂU 5: Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$

$F(5) = 2 \Leftrightarrow \ln 4 + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2 - \ln 4 = 2 - 2\ln 2.$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1.$

Do đó: $F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \begin{cases} \ln(x-1) + 2 - 2\ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$

$F(-1) = \ln 2 + 1. F(2) = 2 - 2\ln 2. F(3) = 2 - \ln 2. F(-3) = 2\ln 2 + 1.$

CÂU 6: Chọn B

Ta có $(2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x = f(x) = F'(x) = [ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c + d]e^x.$

$\Rightarrow a = 2; b = 3; c = -8; d = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 246.$

CÂU 7: Chọn D

$F'(x) = 3ax^2 + 2(a+b)x + (2a-b+c).$

Ta có: $F'(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ 2(a+b) = 6 \\ 2a-b+c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 5.$

CÂU 8: Chọn A

$\int_0^x \left(\frac{1}{2}t + 2(a+1) \right) dt \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + 2(a+1)x \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + 2(a+1)x + 1 \geq 0 \quad (1).$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x khi và chỉ khi

$(a+1)^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a+1 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$

CÂU 9: Chọn B.

$$\text{Ta có } \int \frac{x-3}{x^2-2x+1} dx = \int \frac{x-3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2} dx = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{x-3}{x^2-2x+1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C \Leftrightarrow a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + C.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = 2.$$

CÂU 10: Chọn A

Ta có

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \int (1 - 2\sin 2x \cos 2x) dx = \int (1 - \sin 4x) dx = x + \frac{1}{4} \cos 4x + C.$$

$$\text{Mà } \int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b} \cos 4x + C \text{ nên } \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b=5.$$

CÂU 11: Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = \sqrt{e^x + e^{-x} - 2} = \frac{|e^x - 1|}{\sqrt{e^x}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x \geq 0 \\ e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}} + 2e^{-\frac{x}{2}} + C_1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -2e^{-\frac{x}{2}} - 2e^{\frac{x}{2}} + C_2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } f(0) = 5 \text{ nên } 2e^0 + 2e^0 + C_1 = 5 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

$$\Rightarrow f(\ln 4) = 2e^{\frac{\ln 4}{2}} + 2e^{-\frac{\ln 4}{2}} + 1 = 6$$

$$\text{Tương tự } f\left(\ln \frac{1}{4}\right) = 0 \text{ nên } -2e^{-\frac{\ln(1/4)}{2}} - 2e^{\frac{\ln(1/4)}{2}} + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 5.$$

$$\Rightarrow f(-\ln 16) = -2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}} - 2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}} + 5 = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{Vậy } S = f(-\ln 16) + f(\ln 4) = \frac{5}{2}.$$

CÂU 12: Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^5} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C_1 & (x > 0) \\ \frac{-1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f(1) = a \Rightarrow C_1 = a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2, \quad f(-2) = b \Rightarrow C_2 = b + \frac{1}{8} + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5$$

$$\text{Ta có: } f(-1) + f(2) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 + C_2 - \frac{1}{8} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 5 + C_1 = a + b.$$

CÂU 13: Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Mặt khác $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ nên

$$\left[f'(x) \right]^2 = (x+1)f(x) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)}, \quad \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1}, \quad \forall x \in (0; +\infty);$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C;$$

$$\text{Từ } f(3) = \frac{3}{2} \text{ suy ra } C = \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3}$$

$$\text{Như vậy } f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2$$

Bởi thế:

$$f(8) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{(8+1)^3} + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2 = \left(9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^2 \Rightarrow f^2(8) = \left(9 + \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{8}{3} \right)^4 \approx 2613,26.$$

CÂU 14: Chọn D

$$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C}$$

$$\text{Mà } f(1) = 1 \text{ nên } e^{\frac{4}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}. \text{ Suy ra } f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,794.$$

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn hệ thức:

$\int f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x + \int \pi^x \cos x dx$. Hỏi $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = -\frac{\pi^x}{\ln \pi}$.

B. $f(x) = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$.

C. $f(x) = \pi^x \cdot \ln \pi$.

D. $f(x) = -\pi^x \cdot \ln \pi$.

Lời giải

Chọn B

Chọn $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

$$\int f(x) \sin x dx = -f(x) \cos x + \int f'(x) \cos x dx \Rightarrow f'(x) = \pi^x \Rightarrow f(x) = \frac{\pi^x}{\ln \pi}.$$

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot [f(x)]^{2018} = x \cdot e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hỏi phương trình $f(x) = -\frac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x) \cdot [f(x)]^{2018} dx = \int x \cdot e^x dx \Leftrightarrow \int [f(x)]^{2018} df(x) = (x-1) \cdot e^x + C$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2019} \cdot [f(x)]^{2019} = (x-1) \cdot e^x + C \Leftrightarrow [f(x)]^{2019} = 2019(x-1) \cdot e^x + 2019C.$$

Do $f(1) = 1$ nên $2019C = 1$ hay $[f(x)]^{2019} = 2019(x-1) \cdot e^x + 1$.

Ta có: $f(x) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow [f(x)]^{2019} = -\frac{1}{e^{2019}} \Leftrightarrow 2019(x-1) \cdot e^x + 1 + \frac{1}{e^{2019}} = 0$.

Xét hàm số $g(x) = 2019(x-1) \cdot e^x + 1 + \frac{1}{e^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2019x \cdot e^x, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad g(0) = -2019 + 1 + \frac{1}{e^{2019}} < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 + \frac{1}{e^{2019}} > 0.$$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$1 + e^{-2019}$	$g(0)$	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x) = -\frac{1}{e}$ có đúng 2 nghiệm

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty) \setminus \{e\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6$ và $f(e^2) = 3$. Giá trị của biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3)$ bằng
- A. $3\ln 2 + 1$. B. $2\ln 2$. C. $3(\ln 2 + 1)$. D. $\ln 2 + 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(\ln x - 1)} dx = \int \frac{1}{\ln x - 1} d(\ln x) = \ln |\ln x - 1| + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(1 - \ln x) + C_1 & \text{khi } 0 < x < e \\ \ln(\ln x - 1) + C_2 & \text{khi } x > e \end{cases}.$$

$$\text{Do } f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln 6 \Rightarrow \ln\left(1 - \ln \frac{1}{e^2}\right) + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow \ln 3 + C_1 = \ln 6 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$$

$$\text{Đồng thời } f(e^2) = 3 \Rightarrow \ln(\ln e^2 - 1) + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_2 = 3$$

$$\text{Khi đó: } f\left(\frac{1}{e}\right) + f(e^3) = \ln\left|\ln \frac{1}{e} - 1\right| + \ln 2 + \ln|\ln e^3 - 1| + 3 = 3(\ln 2 + 1).$$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- A. $m > e$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 < m < e$. D. $1 < m < e$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx.$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = Ae^{2x - x^2}. \text{ Mà } f(0) = 1 \text{ suy ra } f(x) = e^{2x - x^2}.$$

Ta có $2x - x^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$. Suy ra $0 < e^{2x - x^2} \leq e$ và ứng với một giá trị thực $t < 1$ thì phương trình $2x - x^2 = t$ sẽ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy để phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm phân biệt khi $0 < m < e^1 = e$.

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ và $F(2018) = e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$. B. $a \in \left[0; \frac{1}{2018}\right]$. C. $a \in [1; 2018)$. D. $a \in [2018; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \int e^x \left(\ln(ax) + \frac{1}{x} \right) dx = \int e^x \ln(ax) dx + \int \frac{e^x}{x} dx \quad (1)$$

• Tính $\int e^x \ln(ax) dx$:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x \ln(ax) dx = e^x \ln(ax) - \int \frac{e^x}{x} dx$$

• Thay vào (1), ta được: $F(x) = e^x \ln(ax) + C$.

$$\text{Với } \begin{cases} F\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \\ F(2018) = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{1}{a}} \cdot \ln 1 + C = 0 \\ e^{2018} \ln(a \cdot 2018) + C = e^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ \ln(a \cdot 2018) = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{e}{2018}.$$

• Vậy $a \in \left(\frac{1}{2018}; 1\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Biết $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = 3$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$ bằng:

- A. 3. B. 8. C. 4. D. 6.

CÂU 2: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. C. $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

CÂU 3: Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

- A. 4 B. 3 C. 5 D. 6

CÂU 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{(f(x))^2 + 1}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ lần lượt là

- A. $M = 20; m = 2$. B. $M = 4\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$.
C. $M = 20; m = \sqrt{2}$. D. $M = 3\sqrt{11}; m = \sqrt{3}$.

CÂU 5: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x}$ và $F(1) = \frac{1}{3}$. Tính $[F(e)]^2$.

- A. $[F(e)]^2 = \frac{8}{3}$. B. $[F(e)]^2 = \frac{8}{9}$. C. $[F(e)]^2 = \frac{1}{3}$. D. $[F(e)]^2 = \frac{1}{9}$.

CÂU 6: Với mỗi số thực dương x , kí hiệu $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \ln t dt$. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

- A. $f'(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. B. $f'(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. C. $f'(x) = \ln \sqrt{x}$. D. $f'(x) = \frac{\ln x}{2x}$.

CÂU 7: Biết $\int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} \ln \frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số

tối giản. Giá trị của biểu thức $M = ac - bd$ là:

A. 17. B. 20. C. 145. D. 11.

CÂU 8: Biết $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = a(1+\ln 3) - b \ln 2$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng:

A. $a^2 + b^2 = \frac{7}{16}$. B. $a^2 + b^2 = \frac{16}{9}$. C. $a^2 + b^2 = \frac{25}{16}$. D. $a^2 + b^2 = \frac{3}{4}$.

CÂU 9: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ và $F(0) = 2$. Hãy tính $F(-1)$.

A. $6 - \frac{15}{e}$. B. $4 - \frac{10}{e}$. C. $\frac{15}{e} - 4$. D. $\frac{10}{e}$.

CÂU 10: Biết $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\int \sqrt[3]{2x+1} dx = a(2x+1)^b + C \left(x > -\frac{1}{2} \right)$. Khi đó:

A. $ab = -\frac{16}{9}$. B. $ab = \frac{1}{2}$. C. $ab = \frac{16}{9}$. D. $ab = \frac{9}{16}$.

CÂU 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và

$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

A. $\ln \frac{6}{5} + 1$. B. $\ln \frac{6}{5} - 1$. C. $\ln \frac{4}{5} + 1$. D. $\ln \frac{4}{5} - 1$.

CÂU 12: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\sqrt{x} \cdot f'(x) = -f(x)$, $\forall x \geq 1$ và $f(e) = -\frac{1}{2}$. Tính $f(e^2)$.

A. $f(e^2) = \frac{1}{3}$. B. $f(e^2) = -\frac{1}{4}$. C. $f(e^2) = \frac{1}{4}$. D. $f(e^2) = -\frac{1}{3}$.

CÂU 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[-2; 2]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f(x) \cdot f'(x) = e^{2x}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $h(x) = xf(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.

A. $\min_{[-2; 2]} h(x) = 1; \max_{[-2; 2]} h(x) = 2e^2$. B. $\min_{[-2; 2]} h(x) = -e^{-1}; \max_{[-2; 2]} h(x) = 1$.
C. $\min_{[-2; 2]} h(x) = -e^{-1}; \max_{[-2; 2]} h(x) = 2e^2$. D. $\min_{[-2; 2]} h(x) = -2e^{-2}; \max_{[-2; 2]} h(x) = 2e^2$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx$.

Đặt $\cos x = t \Rightarrow \sin x dx = -dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = 1$.

Khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $t = 0$.

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f(\cos x) dx = -2 \int_1^0 t \cdot f(t) dt$

$= 2 \int_0^1 t \cdot f(t) dt = 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = 2 \cdot 3 = 6$.

CÂU 2: Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra}$$

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (x^2+1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$. Vậy

$$m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

CÂU 3: Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$$

Khi

đó

$$\begin{aligned} \int \frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt = t^5 + 5t^3 + 7t + C \\ &= \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C \\ &= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}. \text{ Suy ra } S = a + b + c = 3.$$

CÂU 4: Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) \cdot f'(x) = 2x\sqrt{(f(x))^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2 + 1}} = 2x.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{(f(x))^2 + 1} = x^2 + C$, do $f(0) = 0$ nên $C = 1$.

$$\text{Vậy } f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2} = x\sqrt{x^2 + 2} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0 \text{ với mọi } x \in [1; 3] \text{ nên } f(x) \text{ đồng biến trên } [1; 3].$$

$$\text{Vậy } M = f(3) = 3\sqrt{11}; m = f(1) = \sqrt{3}.$$

CÂU 5. Chọn B

$$\text{Xét } \int f(x) \cdot dx = \int \sqrt{\ln^2 x + 1} \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot dx.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\ln^2 x + 1} = t \Rightarrow \ln^2 x = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \cdot dx = t \cdot dt$$

$$\text{Vì vậy } F(x) = \frac{\sqrt{(\ln^2 x + 1)^3}}{3} + C.$$

$$\text{Do } F(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0. \text{ Vậy } [F(e)]^2 = \frac{8}{9}.$$

CÂU 6: Chọn A

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $\ln t$. Khi đó $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \ln t dt = F(\sqrt{x}) - F(1)$. Như vậy

$$f'(x) = (\sqrt{x})' F'(\sqrt{x}) - (F(1))' = \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

* Tính trực tiếp :

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \text{ khi đó } du = \frac{1}{t} dt \text{ và } v = t$$

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \ln t dt = t \ln t \Big|_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} dt = \sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \sqrt{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

CÂU 7: Chọn A

$$\text{Tính } I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó : } I = \frac{-(3 + \ln x)}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln 3 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln 3 + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln 3 + \ln \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\ln 3 - 4 \ln \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{27}{16}.$$

$$\text{Do đó : } a = 3, b = 4, c = 27, d = 16.$$

$$\text{Vậy } M = ac - bd = 3 \cdot 27 - 4 \cdot 16 = 17.$$

CÂU 8. Chọn C

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = -\frac{3 + \ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{3 - \ln 3}{4} + (\ln |x| - \ln |x+1|) \Big|_1^3$$

$$= \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \frac{3}{4} (1 + \ln 3) - \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{16}.$$

CÂU 9: Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int f(x) dx = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt \text{ khi đó } I = \int e^{\sqrt[3]{x}} dx = 3 \int e^t t^2 dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} t^2 = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t dt = du \\ e^t = v \end{cases} \Rightarrow I = 3(e^t t^2 - 2 \int e^t t dt) = 3e^t t^2 - 6 \int e^t t dt.$$

$$\text{Tính } \int e^t dt. \text{ Đặt } \begin{cases} t = u \\ e^t dt = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = du \\ e^t = v \end{cases} \Rightarrow \int e^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t.$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow I = 3e^t t^2 - 6(e^t t - e^t) + C \Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) + C.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } F(0) = 2 \Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow F(x) = 3e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^2} - 6(e^{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}) - 4 \Rightarrow F(-1) = \frac{15}{e} - 4.$$

CÂU 10: Chọn B

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^3 \Rightarrow dx = \frac{3}{2} t^2 dt.$$

$$\text{Khi đó } \int \sqrt[3]{2x+1} dx = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \frac{3}{8} t^4 + C = \frac{3}{8} (\sqrt[3]{2x+1})^4 + C = \frac{3}{8} (2x+1)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{8}; b = \frac{4}{3}. \text{ Vậy } ab = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đề có bổ sung thêm điều kiện } \left(x > -\frac{1}{2}\right) \text{ để có kết quả hợp lí.}$$

CÂU 11: Chọn A

Ta có

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{khi } x < -1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1. \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} f(-2) + f(2) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + C_1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = \ln \frac{6}{5} + 1.$$

CÂU 12: Chọn D

$$\text{- Ta có: } \sqrt{x \cdot f'(x)} = -f(x), \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ x \cdot f'(x) = f^2(x) \end{cases}, \forall x \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = \ln x + C, \forall x \geq 1.$$

$$\text{Lại do: } f(e) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{1 + \ln x} \text{ (thỏa mãn điều kiện } f(x) \leq 0, \forall x \geq 1)$$

$$\text{Vậy } f(e^2) = -\frac{1}{3}.$$

CHỦ ĐỀ 3: TÍCH PHÂN CƠ BẢN

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn

điều kiện: $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong

khoảng nào?

A. (6; 7)

B. (5; 6)

C. (12; 13)

D. (11; 12)

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x \Rightarrow \frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{1}{x} \cos x \right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} \cos x + c \Rightarrow f(x) = \cos x + cx$$

Khi đó:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4 \Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x + cx) \sin x dx = -4$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \sin x dx + c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x dx = -4 \Leftrightarrow 0 + c(-2) = -4 \Leftrightarrow c = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \cos x + 2x \Rightarrow f(\pi) = 2\pi - 1 \in (5; 6).$$

❖ **VÍ DỤ 2:** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có phương trình $\sin x - \cos x = 0$ có một nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $x = \frac{\pi}{4}$.

Bảng xét dấu

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x - \cos x$		0	+

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - (\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$$

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho các số thực a, b khác không. Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$ với mọi x khác -1 . Biết $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x)dx = 5$. Tính $a+b$?
- A. 19. B. 7. C. 8. D. 10.

Lời giải

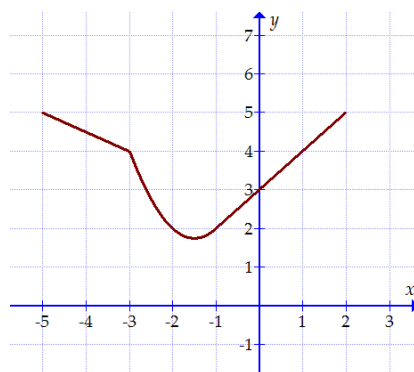
Chọn D

Ta có $f'(x) = \frac{-3a}{(x+1)^4} + be^x + bxe^x$ nên $f'(0) = -3a + b = -22$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Xét } 5 &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x \right] dx = a \int_0^1 (x+1)^{-3} d(x+1) + b \int_0^1 x d(e^x) \\ &= -\frac{a}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 + b \left[xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right] = -\frac{a}{2} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) + b \left[e - e^x \Big|_0^1 \right] = \frac{3a}{8} + b \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \begin{cases} -3a + b = -22 \\ \frac{3a}{8} + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 10.$$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới. Biết $F'(x) = f(x), \forall x \in [-5; 2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = \frac{14}{3}$. Tính $F(2) - F(-5)$.



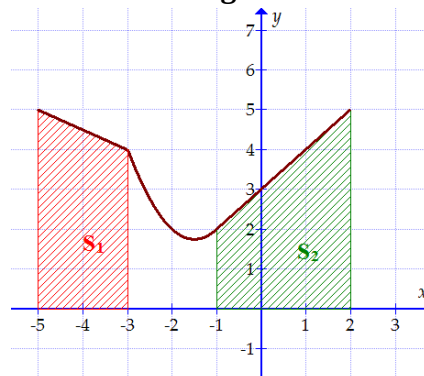
A. $-\frac{145}{6}$.

B. $-\frac{89}{6}$.

C. $\frac{145}{6}$.

D. $\frac{89}{6}$.

Lời giải



Chọn C

Ta có $F'(x) = f(x), \forall x \in [-5; 2]$ nên $\int_{-5}^2 f(x) dx = F(x) \Big|_{-5}^2 = F(2) - F(-5)$.

Ta lại có $\int_{-5}^2 f(x) dx = \underbrace{\int_{-5}^{-3} f(x) dx}_{S_1} + \underbrace{\int_{-3}^{-1} f(x) dx}_{S_2} + \underbrace{\int_{-1}^2 f(x) dx}_{S_2} = 9 + \frac{14}{3} + \frac{21}{2} = \frac{145}{6}$.

❖ **VÍ DỤ 5:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1; f(1) = -2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng
A. $2 + \ln 15$. **B.** $3 - \ln 15$. **C.** $\ln 15 - 1$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \int \frac{2 \cdot \frac{1}{2} d(2x-1)}{2x-1} = \ln|2x-1| + c = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(1) = -2 \Leftrightarrow C_1 = -2 \Rightarrow f(x) = \ln(2x-1) - 2$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1 \Rightarrow f(x) = \ln|2x-1| + 1.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \ln 3 + 1 \\ f(3) = \ln 5 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(-1) + f(3) = \ln 15 - 1.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=2$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=0$.

CÂU 2: Biết $\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{2}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx$.

A. $I = 2e^8$. **B.** $I = 4e^8 - 2$. **C.** $I = 4e^8$. **D.** $I = 2e^8 - 4$.

CÂU 3: Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và

$\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

A. $P = -\frac{3}{4}$. **B.** $P = -\frac{4}{3}$. **C.** $P = \frac{4}{3}$. **D.** $P = \frac{3}{4}$.

CÂU 4: Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x) = M \cdot \sin \pi x + N \cdot \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

A. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 5: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7. B. 8. C. Vô số. D. 6.

CÂU 6: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, $(a, b \in \mathbb{N}^*)$. Tính $a+2b$.

A. $a+2b=7$. B. $a+2b=8$. C. $a+2b=-1$. D. $a+2b=5$.

CÂU 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(x) = 4xf(x^2) + 2x + 1$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$?

A. $I = 2$. B. $I = 6$. C. $I = -2$. D. $I = -6$.

CÂU 8: Phương trình $\ln(x+1) = t$ có nghiệm dương duy nhất $x = f(t)$, $\forall t > 0$ thì $\int_0^{\ln 3} f^2(t) dt$ bằng:

A. $8 + \ln 3$. B. $\ln 3$. C. $2 - \ln 3$. D. $-\ln 3$.

CÂU 9: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.

CÂU 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$.

CÂU 11: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

A. $I = \frac{4581}{5000}$. B. $I = \log \frac{5}{2}$. C. $I = \ln \frac{5}{2}$. D. $I = -\frac{21}{100}$.

CÂU 12: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1+\sin 2x) dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) + 1$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $a+2b$.

A. 10. B. 14. C. 12. D. 8.

CÂU 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = -2$; $\int_0^2 f(x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^4 f'(\sqrt{x}) dx$.

A. $I = -10$. B. $I = -5$. C. $I = 0$. D. $I = -18$.

CÂU 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x) = f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x) dx = 5$. Tính $I = \int_1^3 f(x) dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{9}{2}$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

CÂU 15: Biết rằng $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $T = a + b + c$.

A. 31

B. 29

C. 33

D. 27

CÂU 16: Biết $\int_0^1 \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỉ, tính giá trị của $S = 2a + b^2 + c^2$.

A. $S = 515$.

B. $S = 164$.

C. $S = 436$.

D. $S = -9$.

CÂU 17: Biết $\int_2^3 \frac{5x + 12}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

A. 3.

B. -14.

C. -2.

D. -11.

CÂU 18: Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

A. 5.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

CÂU 19: Nếu $\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2 - 3x + 1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $P = 2a - b$ là

A. $P = 1$.

B. $P = 7$.

C. $P = -\frac{15}{2}$.

D. $P = \frac{15}{2}$.

CÂU 20: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1$. Giá trị của

$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x + 1} dx$ bằng

A. 1.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

CÂU 21: Biết $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx = \ln |(x-1)^m (x-2)^n (x-3)^p| + C$. Tính $4(m+n+p)$.

A. 5.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

CÂU 22: Biết $I = \int_2^4 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = 2a + 3b + 4c$.

A. $P = -3$.

B. $P = 3$.

C. $P = 9$.

D. $P = 1$.

CÂU 23: Tìm tất cả các số thực dương m để $\int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m > 3$.

D. $m = 3$.

CÂU 24: Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x} e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

A. $T = -3$.

B. $T = 3$.

C. $T = -4$.

D. $T = -5$.

CÂU 25: Biết $\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+2} dx = \frac{1}{a} + b \ln \frac{3}{2}$ ($a, b > 0$) tìm các giá trị của k để $\int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2 + 1)x + 2017}{x + 2018}$.

A. $k < 0$.

B. $k \neq 0$.

C. $k > 0$.

D. $k \in \mathbb{R}$.

CÂU 26: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; $f(0) = \frac{1}{3}$ và $f(-3) - f(3) = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = f(-4) + f(-1) - f(4)$.

- A. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$ B. $\ln 80 + 1$ C. $\frac{1}{3} \ln \left(\frac{4}{5} \right) + \ln 2 + 1$ D. $\frac{1}{3} \ln \left(\frac{8}{5} \right) + 1$

CÂU 27: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$, $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x+1|) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 5$. C. $I = 6$. D. $I = 4$.

CÂU 28: Tính tích phân $I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx$.

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{17}{4}$. C. $\frac{19}{4}$. D. $\frac{11}{4}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

Ta có: $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2$ và $\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$

Do đó $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2, b = -1$.

Vậy $a + 2b = 0$.

CÂU 2: Chọn A.

$I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx = 4 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^4 + 2 \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_{-1}^4 f(x) dx \Leftrightarrow I = 2(e^8 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2e^8$.

CÂU 3: Chọn A

Ta có $\int_0^d f(x) dx = \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^d = \frac{a}{3} d^3 + \frac{b}{2} d^2 + cd$.

Do đó: $\begin{cases} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -\frac{7}{2} \\ \int_0^2 f(x) dx = -2 \Leftrightarrow \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ \int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}$. Vậy $P = a + b + c = -\frac{4}{3}$

CÂU 4: Chọn A

Ta có $f(1) = 3 \Leftrightarrow M \cdot \sin \pi + N \cdot \cos \pi = 3 \Leftrightarrow N = -3$.

Mặt khác $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} (M \cdot \sin \pi x - 3 \cdot \cos \pi x) dx = -\frac{1}{\pi}$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{M}{\pi} \cos \pi x - \frac{3}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi} + \frac{M}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow M = 2$.

Vậy $f(x) = 2\sin \pi x - 3\cos \pi x$ nên $f'(x) = 2\pi \cos \pi x + 3\pi \sin \pi x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$.

CÂU 5: Chọn A

Ta có: $\int_1^2 e^{kx} dx = \left(\frac{1}{k} e^{kx} \right) \Big|_1^2 = \frac{e^{2k} - e^k}{k}$.

$$\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k} \Leftrightarrow \frac{e^{2k} - e^k}{k} < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^k(e^k - 1) < 2018(e^k - 1) \text{ (do } k \text{ nguyên dương).}$$

$$\Leftrightarrow (e^k - 1)(e^k - 2018) < 0 \Leftrightarrow 1 < e^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018 \approx 7.6.$$

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k \in S$ (với $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

CÂU 6: Chọn B

Ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) dx = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}.$$
 Do đó

$$a = 2, b = 3, a + 2b = 8.$$

CÂU 7. Chọn C

Ta có: $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x^2) dx^2 = 2 \int_0^1 xf(x^2) dx \Rightarrow 2I = \int_0^1 4xf(x^2) dx.$

Vậy: $I - 2I = \int_0^1 [f(x) - 4xf(x^2)] dx \Leftrightarrow I = - \int_0^1 (2x+1) dx \Rightarrow I = -2.$

CÂU 8: Chọn B

Ta có: $\ln(x+1) = t \Leftrightarrow x = f(t) = e^t - 1.$

$$\int_0^{\ln 3} f^2(t) dt = \int_0^{\ln 3} (e^t - 1)^2 dt = \int_0^{\ln 3} (e^{2t} - 2e^t + 1) dt = \left(\frac{1}{2} e^{2t} - 2e^t + t \right) \Big|_0^{\ln 3} = \ln 3.$$

CÂU 9: Chọn C

Ta có: $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}.$

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CÂU 10: Chọn D.

Ta có: $\int_1^k (2x-1) dx = \frac{1}{2} \int_1^k (2x-1) d(2x-1) = \frac{(2x-1)^2}{4} \Big|_1^k = \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$

Mà $4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$

$$\text{Khi đó: } \int_1^k (2x-1)dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=-1 \end{cases}.$$

CÂU 11: Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^3 = \ln \frac{5}{2}.$$

CÂU 12: Chọn C

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1+\sin 2x)dx &= \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1 = \pi \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \right) + 1. \text{ Vậy } a=8, b=2 \Rightarrow a+2b=12. \end{aligned}$$

CÂU 13: Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có: $t^2 = x$ và $2t dt = dx$. Khi $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=4 \Rightarrow t=2$.

$$I = \int_0^4 f'(\sqrt{x})dx = \int_0^2 2tf'(t)dt.$$

Đặt $u = 2t$; $dv = f'(t)dt$ ta được: $du = 2dt$; $v = f(t)$.

$$\text{Khi đó: } I = \left(2tf(t) \right) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 f(t)dt = 4f(2) - 2 \cdot 1 = 4 \cdot (-2) - 2 = -10.$$

CÂU 14: Chọn A

Đặt $t = 4-x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 xf(x)dx &= \int_1^3 xf(4-x)dx = \int_1^3 (4-t)f(t)dt = 4 \int_1^3 f(t)dt - \int_1^3 t \cdot f(t)dt \\ \Rightarrow 5 &= 4 \int_1^3 f(t)dt - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

CÂU 15: Chọn C

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}}dx &= \int_2^3 \frac{(x-\sqrt{x-1})(x^2-x+1)}{x^2-x+1}dx = \int_2^3 (x-\sqrt{x-1})dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{19-4\sqrt{8}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a=19 \\ b=8 \\ c=6 \end{cases} \text{ .. Vậy } T = a+b+c = 33. \end{aligned}$$

CÂU 16: Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+3x+2}dx &= \int_0^1 \left(x-3 + \frac{10x+6}{x^2+3x+2} \right)dx = \int_0^1 \left(x-3 + \frac{10x+6}{x^2+3x+2} \right)dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{14}{x+2} - \frac{4}{x+1} \right)dx = -\frac{5}{2} + (14\ln|x+2| - 4\ln|x+1|) \Big|_0^1 = -\frac{5}{2} + 14\ln 3 - 18\ln 2. \\ \Rightarrow a &= -\frac{5}{2}, b = -18; c = 14. \text{ Vậy } S = 2a + b^2 + c^2 = 515. \end{aligned}$$

CÂU 17: Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}.$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3A+2B=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx &= \int_2^3 \frac{2}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{3}{x+3} dx = 2\ln|x+2|_2^3 + 3\ln|x+3|_2^3 \\ &= 3\ln 6 - \ln 5 - 2\ln 4 = -4\ln 2 - \ln 5 + 3\ln 6. \text{ Vậy } S = 3a + 2b + c = -11. \end{aligned}$$

CÂU 18. Chọn D

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x+2| - \ln|x+4|)_0^3 = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7 + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Khi đó: $2a + 3b - c = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$

CÂU 19 : Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1} dx &= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} dx + \frac{11}{4} \int_2^3 \frac{1}{2x^2-3x+1} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{1}{2x^2-3x+1} d(2x^2-3x+1) + \frac{11}{4} \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(2x-1)} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|2x^2-3x+1|_2^3 + \frac{11}{4} \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-1} \right) dx = \frac{1}{4} \ln|2x^2-3x+1|_2^3 + \frac{11}{4} \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right|_2^3 \\ &= \frac{1}{4} (\ln 10 - \ln 3) + \frac{11}{4} \left(\ln \frac{2}{5} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{10}{3} + \frac{11}{4} \ln \frac{6}{5} \\ &= \frac{1}{4} (\ln 5 + \ln 2 - \ln 3) + \frac{11}{4} (\ln 2 + \ln 3 - \ln 5) = -\frac{5}{2} \ln 5 + \frac{5}{2} \ln 3 + 3 \ln 2. \end{aligned}$$

Do đó $a = -\frac{5}{2}, b = \frac{5}{2}, P = -\frac{15}{2}.$

CÂU 20: Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Do } \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ và } \int_1^2 f(x) dx = 2 \\ \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx &= \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx \text{ và } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, liên tục trên } \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(-x) &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx. \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dx = -dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = -\int_2^0 \frac{f(-t)}{3^{-t}+1} dt = \int_0^2 \frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1} dt = \int_0^2 \frac{3^t f(t)}{3^t+1} dt = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx &= \int_{-2}^0 \frac{f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 \frac{3^x f(x)}{3^x+1} dx + \int_0^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx = \int_0^2 \frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1} dx = \\ &= \int_0^2 f(x) dx = 3. \end{aligned}$$

CÂU 21: Chọn D

Ta có: $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ -5A-4B-3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-5 \\ C=5 \end{cases}$$

Suy ra $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - 5 \int \frac{1}{x-2} dx + 5 \int \frac{1}{x-3} dx$

$$= \ln |(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5| + C.$$

Vậy $4(m+n+p) = 4$.

CÂU 22: Chọn B

Ta có: $I = \int_2^4 \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int_2^4 \frac{x+(x+1)}{x(x+1)} dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} \right) dx = (\ln|x+1| + \ln|x|) \Big|_2^4$

$$= \ln 5 + 2 \ln 2 - (\ln 3 + \ln 2) = \ln 2 - \ln 3 + \ln 5.$$

Từ đây ta có $a=1, b=-1, c=1$ nên $P=2a+3b+4c=3$.

CÂU 23: Chọn B

Ta có $I = \int_0^m \frac{x^2 dx}{x+1} = \int_0^m \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - m + \ln(m+1).$

Theo giả thiết $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{m^2}{2} - m + \ln(m+1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{2} - m = -\frac{1}{2} \\ m+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

CÂU 24 : Chọn C

Ta có $\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e^x} \right)^2$ nên

$$\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e^x} \right) dx = (\sqrt{x} - e^{-x}) \Big|_1^4 = 1 + e^{-1} - e^{-4}.$$

Vậy $a=1, b=-1, c=-4$. Suy ra $T=-4$.

CÂU 25: Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^1 \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 + 3 \ln|x+2| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3 \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab} dx = \int_8^9 dx = 1$$

$$\text{Mà } \int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x + 2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x + 2017}{x+2018}$$

$$\text{Mặt khác ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x + 2017}{x+2018} = k^2 + 1.$$

$$\text{Vậy để } \int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x + 2017}{x+2018} \text{ thì } 1 < k^2 + 1 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k \neq 0.$$

CÂU 26: Chọn A

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right).$$

$$I = f(-3) - f(-4) = \int_{-4}^{-3} f'(x) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Big|_{-4}^{-3} = \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}.$$

$$J = f(0) - f(-1) = \int_{-1}^0 f'(x) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{3} \ln 2.$$

$$K = f(4) - f(3) = \int_3^4 f'(x) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}.$$

$$-I - J - K = f(-4) - f(-3) + f(-1) - f(0) + f(3) - f(4)$$

$$= [f(-4) + f(-1) - f(4)] - f(0) - [f(-3) - f(3)].$$

$$f(-4) + f(-1) - f(4) = -I - J - K + f(0) + [f(-3) - f(3)].$$

$$T = f(-4) + f(-1) - f(4) = -\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$$

CÂU 27: Chọn B

Đặt $u = 2x+1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$. Khi $x = -1$ thì $u = -1$. Khi $x = 1$ thì $u = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Nên } I &= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 f(|u|) du = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(|u|) du + \int_0^3 f(|u|) du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right). \end{aligned}$$

Xét $\int_0^1 f(x) dx = 4$. Đặt $x = -u \Rightarrow dx = -du$. Khi $x = 0$ thì $u = 0$. Khi $x = 1$ thì $u = -1$.

$$\text{Nên } 4 = \int_0^1 f(x) dx = -\int_0^{-1} f(-u) du = \int_{-1}^0 f(-u) du. \text{ Ta có } \int_0^3 f(x) dx = 6 \Rightarrow \int_0^3 f(u) du = 6.$$

$$\text{Nên } I = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 f(-u) du + \int_0^3 f(u) du \right) = \frac{1}{2}(4+6) = 5.$$

CÂU 28: Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - x$ ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có.

$$\forall x \in [0;1], f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq x \Rightarrow \max\{x^3, x\} = x.$$

$$\forall x \in [1;2], f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq x \Rightarrow \max\{x^3, x\} = x^3.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx = \int_0^1 \max\{x^3, x\} dx + \int_1^2 \max\{x^3, x\} dx.$$

$$\text{Nên } I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{17}{4}.$$

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$3.f(2x) + 2.f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{14x}{3}, \int_3^6 f(x) dx = k. \text{ Tính } I = \int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ theo } k$$

A. $I = \frac{21-k}{2}$. B. $I = \frac{42-3k}{4}$. C. $I = \frac{42-k}{4}$. D. $I = \frac{21-k}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3.f(2x) + 2.f\left(\frac{3}{x}\right) = \frac{14x}{3}$

$$\Rightarrow \int_3^6 3f(2x) dx + \int_3^6 2f\left(\frac{3}{x}\right) dx = \int_3^6 \frac{14x}{3} dx \Leftrightarrow A + B = 63$$

Đặt $A = \int_3^6 3f(2x) dx, t = 2x \Rightarrow A = \frac{3}{2} \int_6^{12} f(t) dt = \frac{3}{2} k$.

$$B = \int_3^6 2f\left(\frac{3}{x}\right) dx, t = \frac{x}{3} \Rightarrow B = 6 \int_1^2 f\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\text{Vì } A + B = 63 \Leftrightarrow \frac{3}{2} k + 6 \int_1^2 f\left(\frac{1}{t}\right) dt = 63 \Rightarrow \int_1^2 f\left(\frac{1}{t}\right) dt = \frac{63 - \frac{3}{2} k}{6} = \frac{42 - k}{4}.$$

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x) dx = 2$. Khi đó tích phân

$$\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx$. Đặt $t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t=2018$. Vậy $I = \int_0^{2018} f(t) dt = \int_0^{2018} f(x) dx = 2$.

❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 0$.

Biết $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}$ và $\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. B. $\frac{4}{\pi}$. C. $\frac{6}{\pi}$. D. $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} d(f(x)) = \cos \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) dx = \frac{3}{2} \text{ Mặt khác } \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos \pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f^2(x) dx - 2 \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} f(x) dx + \int_0^1 \left[3 \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0.$$

$$\text{hay } \int_0^1 \left[f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0 \text{ suy ra } f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -\frac{6}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}.$$

❖ **VÍ DỤ 4:** Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

A. $I = 3$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 8$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Xét } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx \text{ Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx; \text{ Đổi cận: } x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}; x = 0 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^0 f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-t) dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx.$$

Theo giả thiết ta có:

$$f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2 \cos 2x} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) + f(-x)) dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2 \cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx = 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{3\pi}{2}}^0 f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = 6.$$

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$, $f(1)=1$ và $\int_0^1 \frac{[f'(x)]^2}{e^x} dx = \frac{1}{e-1}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- A. $\frac{e-2}{e-1}$. B. 1. C. $\frac{1}{(e-1)(e-2)}$. D. $\frac{e-1}{e-2}$.

Lời giải

Chọn A

Sử dụng bất đẳng thức Holder :

$$\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \geq \left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \text{ dấu "=" xảy ra khi: } f(x) = kg(x).$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \text{ nên } \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder đối với hàm số : $\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}}$ và $\sqrt{e^x}$ trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{Ta có: } \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} \right)^2 dx \cdot \int_0^1 (\sqrt{e^x})^2 dx \geq \left(\int_0^1 f'(x) dx \right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} \cdot \int_0^1 e^x dx \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e-1} \cdot (e-1) \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \frac{f'(x)}{\sqrt{e^x}} = k \cdot \sqrt{e^x} \text{ hay } f'(x) = k \cdot e^x.$$

$$\text{Mặt khác theo giả thiết ta có: } \int_0^1 f'(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 k \cdot e^x dx = 1 \Leftrightarrow k \cdot (e-1) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{e-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e-1} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{e-1} + C.$$

$$\text{Mà } f(0)=0 \text{ nên } C = \frac{-1}{e-1} \text{ hay } f(x) = \frac{e^x - 1}{e-1}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e-1} dx = \frac{1}{e-1} (e^x - x) \Big|_0^1 = \frac{e-2}{e-1}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^1 f(x) dx = 9$. Tính tích phân

$$\int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx.$$

- A. 27. B. 21. C. 15. D. 75.

CÂU 2: Cho tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$. Đặt $t = \sqrt{2x+3}$, ta được $I = \int_2^3 \frac{m}{t^2+n} dt$ (với $m, n \in \mathbb{Z}$). Tính

$$T = 3m + n.$$

- A. $T = 7$. B. $T = 2$. C. $T = 4$. D. $T = 5$.

CÂU 3: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tính $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng:

- A. $I = \frac{e^2 - 3}{2e^2}$. B. $I = \frac{2 - e^2}{e^2}$. C. $I = \frac{e^2 - 2}{e^2}$. D. $I = \frac{3 - e^2}{2e^2}$.

CÂU 4: Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

CÂU 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$.

- A. $I = 12$. B. $I = 7$. C. $I = 13$. D. $I = 20$.

CÂU 6: Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100) dx$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 100. D. một giá trị khác.

CÂU 7: Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0; 6\pi)$ thỏa mãn $\int_0^m \frac{\sin x}{5 + 4 \cos x} dx = \frac{1}{2}$?

- A. 6. B. 12. C. 8. D. 4.

CÂU 8: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \ln \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Tính giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$.

- A. $P = 3$. B. $P = \frac{5}{4}$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = 2$.

CÂU 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$, tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. 2 B. 6 C. 3 D. 1

CÂU 10: Cho hàm số f liên tục, $f(x) > -1$, $f(0) = 0$ và thỏa $f'(x) \sqrt{x^2 + 1} = 2x \sqrt{f(x) + 1}$. Tính $f(\sqrt{3})$.

- A. 0. B. 3. C. 7. D. 9.

CÂU 11: Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(a - x) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^a \frac{1}{1 + f(x)} dx$?

- A. $I = \frac{2a}{3}$. B. $I = \frac{a}{2}$. C. $I = \frac{a}{3}$. D. $I = a$.

CÂU 12: Tính tổng $T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\frac{1}{4121202989}$. B. $\frac{1}{4121202990}$. C. $\frac{1}{4121202992}$. D. $\frac{1}{4121202991}$.

CÂU 13: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x}$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{25}$. B. $I = -\frac{4}{15}$. C. $I = -\frac{1}{15}$. D. $I = \frac{4}{75}$.

CÂU 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Tính

tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 1$.

CÂU 15 : Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3 < f(5) < 4$. B. $1 < f(5) < 2$. C. $4 < f(5) < 5$. D. $2 < f(5) < 3$.

CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;1)$. Biết rằng

$f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0;1)$.

Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx$ theo a và b .

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$. B. $I = \frac{3b+a}{4ab}$. C. $I = \frac{3b-a}{4ab}$. D. $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

CÂU 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$3 \int_0^1 \left[f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$:

A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{7}{6}$.

CÂU 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4, \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Giá trị của tích

phân $\int_0^1 f(x) dx$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$ B. $(3;6)$ C. $(\sqrt{2};5)$ D. $(1;4)$

CÂU 19: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$ và $f(2) = 4$. Tính

$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx$.

A. $J = 1 + \ln 4$. B. $J = 4 - \ln 2$. C. $J = \ln 2 - \frac{1}{2}$. D. $J = \frac{1}{2} + \ln 4$.

CÂU 20: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$ và

$$f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}, \text{ với mọi } x \in [0; 2]. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx.$$

- A. $I = -\frac{16}{3}$. B. $I = -\frac{16}{5}$. C. $I = -\frac{14}{3}$. D. $I = -\frac{32}{5}$.

CÂU 21: Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx$.

- A. $I = 2^{2017}$. B. $I = 2^{2019}$. C. $I = 2^{2018}$. D. $I = 2^{2020}$.

CÂU 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = 4xf(x^2) + 2x + 1. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx?$$

- A. $I = 2$. B. $I = 6$. C. $I = -2$. D. $I = -6$

CÂU 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Giá trị $f(2) = a + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{13}{4}$.

CÂU 24: Tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx$ có giá trị là:

- A. 0. B. $\frac{2^{2018}}{2017}$. C. $\frac{2^{2017}}{2017}$. D. $\frac{2^{2018}}{2018}$.

CÂU 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa $f(1) = 0$, $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$

$$\text{và } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{1}{\pi}$. D. $\frac{2}{\pi}$.

CÂU 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$$

- A. $I = 1$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 2$. D. $I = \frac{1}{4}$.

CÂU 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính } \int_0^1 f(x) dx$$

- A. $\frac{e-1}{2}$. B. $\frac{e^2}{4}$. C. $e-2$. D. $\frac{e}{2}$.

CÂU 28: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x) \cdot f(a-x) = 1 \\ f(x) > 0, \forall x \in [0; a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. (11; 22). B. (0; 9). C. (7; 21). D. (2017; 2020).

CÂU 29: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \sin x$ với mọi x và $f(0) = 1$. Tính $e^\pi \cdot f(\pi)$.

- A. $\frac{e^\pi - 1}{2}$. B. $\frac{e^\pi - 1}{2}$. C. $\frac{e^\pi + 3}{2}$. D. $\frac{\pi + 1}{2}$.

CÂU 30: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx = c \ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$. B. $T = -11$. C. $T = 5$. D. $T = 7$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn B

Đặt $t = 1 - 3x \Rightarrow dt = -3dx$.

Với $x = 0 \rightarrow t = 1$ và $x = 2 \rightarrow t = -5$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^2 [f(1-3x) + 9] dx &= \int_0^2 f(1-3x) dx + \int_0^2 9 dx = \int_1^{-5} [f(t)] \frac{dt}{-3} + 9x \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3} \int_{-5}^1 [f(x)] dx + 18 = \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 = 21. \end{aligned}$$

CÂU 2: Chọn D

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+3}, \text{ ta được } t^2 = 2x+3 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = 2dx \\ x = \frac{t^2-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = tdt \\ x+1 = \frac{t^2-1}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}} = \int_2^3 \frac{tdt}{\frac{t^2-1}{2} \cdot t} = \int_2^3 \frac{2dt}{t^2-1}. \text{ Vậy: } m=2, n=-1, T=3m+n=3 \cdot 2 - 1 = 5.$$

CÂU 3: Chọn A

Do $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{2x^2} \right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$$\text{Tính } I = \int_1^e f'(x) \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} \ln x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} dx = du \\ f(x) = v \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = f(x) \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{f'(x)}{x} dx = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln(x) \Big|_1^e - \frac{1}{2x^2} \Big|_1^e = \frac{e^2 - 3}{2e^2}.$$

CÂU 4: Chọn A

$$\text{Xét } I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = x(1-x^2)^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}.$$

$$I_n = \left. \frac{-x(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n+1} dx \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \left[\int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} dx \right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} [2(n+1)I_n - I_{n+1}] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

CÂU 5: Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{f(2x)}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \left. \frac{x \cdot f(2x)}{2} \right|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = \frac{f(2)}{2} - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = \frac{16}{2} - \frac{1}{4} \cdot 4 = 7.$$

CÂU 6: Chọn A

$$\text{Tính } I = \int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 100 - x \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = 0 \text{ thì } t = 100; \text{ khi } x = 100 \text{ thì } t = 0.$$

$$\text{Do } x(x-1)\dots(x-100) = (100-t)(99-t)\dots(1-t)(-t) = -t(t-1)\dots(t-99)(t-100) \text{ nên}$$

$$I = \int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100) dx = - \int_0^{100} t(t-1)\dots(t-100) dt = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$$

CÂU 7:

$$\text{Ta có } \frac{1}{2} = \int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x} dx = - \int_0^m \frac{1}{5+4\cos x} d(\cos x)$$

$$= - \frac{1}{4} \int_0^m \frac{1}{5+4\cos x} d(5+4\cos x) = - \frac{1}{4} \ln |5+4\cos x| \Big|_0^m.$$

$$\text{Mà } 5+4\cos x \geq 5-4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = - \frac{1}{4} \ln(5+4\cos x) \Big|_0^m = - \frac{1}{4} \ln \frac{5+4\cos m}{9}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{5+4\cos m}{9} = -2 \Leftrightarrow \frac{5+4\cos m}{9} = e^{-2} \Leftrightarrow \cos m = \frac{9e^{-2}-5}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \arccos \frac{9e^{-2}-5}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Theo đề bài } m \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{9e^{-2}-5}{4} + k2\pi \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \\ -\arccos \frac{9e^{-2}-5}{4} + k2\pi \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{cases} \end{cases}.$$

Với mỗi giá trị k trong hai trường hợp trên ta được một giá trị m thỏa mãn.
Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

CÂU 8: Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + \ln |x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1 + \ln \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} + 1 - \ln \frac{2}{\pi} \\ &\Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = 1, c = 2. P = ac^3 + b = \frac{1}{8} \cdot 8 + 1 = 2. \end{aligned}$$

CÂU 9: Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{1 + \tan^2 x} (1 + \tan^2 x) dx.$$

Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = (1 + \tan^2 x) dx$. Khi $x = 0$ thì $u = 0$; khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $u = 1$.

$$\text{Nên } I = \int_0^1 \frac{f(u)}{1 + u^2} du = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2} dx. \text{ Suy ra } \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2} dx = 4.$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{[(x^2 + 1) - 1] f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{1 + x^2} dx.$$

$$\text{Do đó } 2 = \int_0^1 f(x) dx - 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6.$$

CÂU 10: Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) \sqrt{x^2 + 1} &= 2x \sqrt{f(x) + 1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x) + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{3}} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x) + 1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \Leftrightarrow \sqrt{f(x) + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x) + 1} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3}) + 1} - \sqrt{f(0) + 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{f(\sqrt{3}) + 1} = 2 \Leftrightarrow f(\sqrt{3}) = 3. \end{aligned}$$

CÂU 11: Chọn B

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$.

$$\text{Thay vào ta được } I = \int_0^a \frac{1}{1 + f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1 + f(a - t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1 + f(a - x)} dx.$$

Suy ra $0 = \int_0^a \left[\frac{f(a-x) - f(x)}{(1+f(x))(1+f(a-x))} \right] dx$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$. Suy ra $f(a-x) = f(x)$, trên đoạn $[0; a]$.
 Mà $f(x) \cdot f(a-x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$. Vậy $I = \int_0^a \frac{1}{2} dx = \frac{a}{2}$.

CÂU 12: Chọn B

Xét khai triển $(1-x)^{2018} = C_{2018}^0 - C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2018}$

$$\Rightarrow x^2 (1-x)^{2018} = C_{2018}^0 x^2 - C_{2018}^1 x^3 + C_{2018}^2 x^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2020} \quad (1)$$

Ta tính $I = \int_0^1 x^2 (1-x)^{2018} dx$, đặt $t = 1-x$, $dt = -dx$, đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=0$

$$I = \int_0^1 (1-t)^2 t^{2018} dt = \int_0^1 (t^{2018} - 2t^{2019} + t^{2020}) dt = \left(\frac{t^{2019}}{2019} - 2 \frac{t^{2020}}{2020} + \frac{t^{2021}}{2021} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2019} - \frac{1}{1010} + \frac{1}{2021} = \frac{1}{4121202990}.$$

Lấy tích phân hai vế của (1) ta được

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{2018} dx = \int_0^1 (C_{2018}^0 x^2 - C_{2018}^1 x^3 + C_{2018}^2 x^4 + \dots + C_{2018}^{2018} x^{2020}) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} = \left(C_{2018}^0 \frac{x^3}{3} - C_{2018}^1 \frac{x^4}{4} + C_{2018}^2 \frac{x^5}{5} + \dots + C_{2018}^{2018} \frac{x^{2021}}{2021} \right) \Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990} = C_{2018}^0 \frac{1}{3} - C_{2018}^1 \frac{1}{4} + C_{2018}^2 \frac{1}{5} + \dots + C_{2018}^{2018} \frac{1}{2021}.$$

$$\text{Vậy } T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021} = \frac{1}{4121202990}.$$

CÂU 13: Chọn B

$$\text{Do } 2f(x) - 3f(1-x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 2f(x) dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 3f(1-x) dx}_{I_2} = \underbrace{\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx}_{I_2} \quad (1).$$

$$+ \text{Xét } I_1 = 3 \int_0^1 f(1-x) dx:$$

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

$$\text{Khi đó } I_1 = 3 \int_1^0 f(t) (-dt) = 3I.$$

$$+ \text{Xét } I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1-t^2 \Rightarrow dx = -2tdt.$$

Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=0$.

$$\text{Khi đó } I_2 = \int_1^0 (1-t^2)t(-2tdt) = \left(\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right) \Bigg|_1^0 = \frac{4}{15}.$$

$$\text{Thay vào (1): } 2I - 3I = \frac{4}{15} \Leftrightarrow I = -\frac{4}{15}.$$

CÂU 14: Chọn A

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=1$

$$\text{Do đó: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t) dt}{1+t^2} = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+x^2} = 4$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x^2 f(x) dx}{1+x^2} = 4+2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 6$$

CÂU 15: Chọn A

$$\text{Từ } f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1} \text{ ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}.$$

$$\text{Suy ra: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C.$$

$$\text{Ta có } \ln f(1) = \frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 1 + 1} + C \Leftrightarrow \ln 1 = \frac{4}{3} + C \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Nên } \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}}.$$

$$\text{Vậy } f(5) = e^{\frac{2}{3} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} - \frac{4}{3}} = e^{\frac{4}{3}} \in (3; 4).$$

CÂU 16. Chọn D

$\forall x \in (0; 1)$ ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x) \Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)} \right)'$$

$$\text{Tính } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 4 \sin x \cdot \cos x}{f^2(\sin x)} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx, \text{ đổi cận } x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 + 4t}{f^2(t)} dt = \frac{t^2}{f(t)} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}.$$

CÂU 17: Chọn D

Từ giả thiết suy ra:

$$\int_0^1 \left[\left(3\sqrt{f'(x)} f(x) \right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{f'(x)} f(x) + 1 \right] dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[3\sqrt{f'(x)} f(x) - 1 \right]^2 dx \leq 0.$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{f'(x)} f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)} f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x) \cdot f^2(x) = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Vì } [f^3(x)]' = 3 \cdot f^2(x) f'(x) \text{ nên suy ra } [f^3(x)]' = \frac{1}{3} \Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + C.$$

Vì $f(0) = 1$ nên $f^3(0) = 1 \Rightarrow C = 1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

Suy ra $\int_0^1 [f(x)]^3 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x + 1\right) dx = \frac{7}{6}$.

CÂU 18: Chọn A

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt = (1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Khi đó $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t \cdot f(\tan t)}{\tan^2 t + 1} (\tan^2 t + 1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \cdot f(\tan t) dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) \cdot f(\tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan t) dt$.

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt = 6$. Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. Đổi cận $t = 0 \Rightarrow x = 0$; $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 1$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan t)}{\cos^2 t} dt = \int_0^1 f(x) dx$. Vậy $\int_0^1 f(x) dx = 6$.

CÂU 19: Chọn D

Ta có $J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x^2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$J = \int_1^2 \left(\frac{f'(x) + 2}{x} - \frac{f(x) + 1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} \cdot f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$
 $= \frac{1}{2} f(2) - f(1) + \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 4$.

CÂU 20. Chọn B

Theo giả thiết, ta có $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$ và $f(x)$ nhận giá trị dương nên

$\ln[f(x) \cdot f(2-x)] = \ln e^{2x^2-4x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x$.

Mặt khác, với $x = 0$, ta có $f(0) \cdot f(2) = 1$ và $f(0) = 1$ nên $f(2) = 1$.

Xét $I = \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx$, ta có $I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (3x^2 - 6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \left[(x^3 - 3x^2) \ln f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(x) dx \quad (1).$$

Đến đây, đổi biến $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x = 0 \rightarrow t = 2$ và $x = 2 \rightarrow t = 0$.

$$\text{Ta có } I = - \int_2^0 (3t^2 - 6t) \cdot \ln f(2-t) (-dt) = - \int_0^2 (3t^2 - 6t) \cdot \ln f(2-t) dt$$

$$\text{Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên } I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot \ln f(2-x) dx \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta cộng vế theo vế, ta được } 2I = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot [\ln f(x) + \ln f(2-x)] dx$$

$$\text{Hay } I = - \frac{1}{2} \int_0^2 (3x^2 - 6x) \cdot (2x^2 - 4x) dx = - \frac{16}{5}.$$

CÂU 21: Chọn B

$$I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx = 2019 \int_1^2 x^{2018} \log_2 x dx + \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 x^{2018} dx = 2019 I_1 + \frac{1}{\ln 2} I_2.$$

$$\text{Trong đó } I_2 = \int_1^2 x^{2018} dx = \frac{x^{2019}}{2019} \Big|_1^2 = \frac{2^{2019} - 1}{2019}.$$

$$\text{và } I_1 = \int_1^2 x^{2018} \log_2 x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \log_2 x \\ dv = x^{2018} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x \ln 2} dx \\ v = \frac{x^{2019}}{2019} \end{cases}.$$

Khi đó

$$I_1 = \left(\frac{x^{2019}}{2019} \cdot \log_2 x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2019 \ln 2} I_2 = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{1}{2019 \ln 2} \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2019} = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{2^{2019} - 1}{2019^2 \ln 2}$$

$$\text{Vậy } I = 2^{2019}.$$

CÂU 22: Chọn C

$$\text{Thay } x \text{ bởi } x^2 \text{ trong tích phân ta có: } I = \int_0^1 f(x^2) dx^2 = 2 \int_0^1 x f(x^2) dx \Rightarrow \boxed{2I = \int_0^1 4x f(x^2) dx}.$$

$$\text{Vậy: } I - 2I = \int_0^1 [f(x) - 4x f(x^2)] dx \Leftrightarrow I = - \int_0^1 [2x + 1] dx \Rightarrow \boxed{I = -2}.$$

CÂU 23: Chọn B

$$\text{Từ giả thiết, ta có } x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \frac{x}{x+1} dx \text{ hay } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| + C.$$

Mặt khác, ta có $f(1) = -2\ln 2$ nên $C = -1$. Do đó $\frac{x}{x+1} \cdot f(x) = x - \ln|x+1| - 1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3} \cdot f(2) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3$. Suy ra $a = \frac{3}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{9}{2}$.

CÂU 24: Chọn C

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: Với $x=2 \Rightarrow t=-2$; $x=-2 \Rightarrow t=2$

Khi đó: $I = \int_2^{-2} \frac{-t^{2016}}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016} e^x dx}{1 + e^x}$, suy ra $2I = \int_{-2}^2 x^{2016} dx = \frac{x^{2017}}{2017} \Big|_{-2}^2 = \frac{2^{2018}}{2017} \Rightarrow I = \frac{2^{2017}}{2017}$.

CÂU 25: Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos \frac{\pi x}{2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \end{cases}$

Do đó $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}$.

Lại có: $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} \cdot f'(x)\right)^2 dx - 2\left(-\frac{2}{\pi}\right) \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \geq 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Suy ra $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ mà $f(1) = 0$ do đó $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi}$.

CÂU 26: Chọn D

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases} \sin 2x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$, khi đó

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = \sin 2x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0 \cdot f(0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$

$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$.

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot \cos 2x + \cos^2 2x] dx = \left(\frac{\pi}{8} - 2 \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$ nên

$f(x) = \cos 2x$. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

CÂU 27: Chọn C

- Tính : $I = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \int_0^1 xe^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f(x) dx = J + K$.

Tính $K = \int_0^1 e^x f(x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = e^x f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = [e^x f(x) + e^x f'(x)] dx \\ v = x \end{cases}$

$\Rightarrow K = (xe^x f(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 [xe^x f(x) + xe^x f'(x)] dx = -\int_0^1 xe^x f(x) dx - \int_0^1 xe^x f'(x) dx$ (do $f(1) = 0$)

$\Rightarrow K = -J - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow I = J + K = -\int_0^1 xe^x f'(x) dx$.

- Kết hợp giả thiết ta được :

$$\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \\ -\int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \quad (1) \\ 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx = -\frac{e^2 - 1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

- Mặt khác, ta tính được : $\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{4} \quad (3)$.

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1 ([f'(x)]^2 + 2xe^x f'(x) + x^2 e^{2x}) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + xe^x$, trục Ox , các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0 $\Rightarrow f'(x) + xe^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x$

$\Rightarrow f(x) = -\int xe^x dx = (1-x)e^x + C$.

- Lại do $f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = ((1-x)e^x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e^x \Big|_0^1 = e - 2$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = e - 2$.

CÂU 28: Chọn B.

Cách 1. Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Lúc đó } I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} = \int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)} = \int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)} = \int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$$

$$\text{Suy ra } 2I = I + I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_0^a 1dx = a$$

$$\text{Do đó } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

Cách 2. Chọn $f(x) = 1$ là một hàm thỏa các giả thiết.

$$\text{Dễ dàng tính được } I = \frac{1}{2}a \Rightarrow b = 1; c = 2 \Rightarrow b + c = 3.$$

CÂU 29: Chọn C

Ta có $f(x) + f'(x) = \sin x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \sin x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow [e^x f(x)]' = e^x \sin x \text{ hay } \int_0^\pi [e^x f(x)]' dx = \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow [e^x f(x)]_0^\pi = \frac{1}{2} [e^x (\sin x - \cos x)]_0^\pi \Leftrightarrow e^\pi f(\pi) - f(0) = \frac{1}{2}(e^\pi + 1) \Leftrightarrow e^\pi f(\pi) = \frac{e^\pi + 3}{2}.$$

CÂU 30: Chọn A

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos x + 2 \sin x)(2 \cos x - \sin x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \cos x + 2 \sin x \Rightarrow dt = (-\sin x + 2 \cos x) dx.$$

$$\text{Với } x = 0 \text{ thì } t = 1. \text{ Với } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 2.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_1^2 2t \ln t dt = \int_1^2 \ln t d(t^2) = (t^2 \ln t) \Big|_1^2 - \int_1^2 t dt = 4 \ln 2 - \frac{t^2}{2} \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 9.$$

CHỦ ĐỀ 4: ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$ cho (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 7$. Để diện tích elip (E) gấp 7 lần diện tích hình tròn (C) khi đó.
- A. $ab = 7\sqrt{7}$. B. $ab = 49$. C. $ab = \sqrt{7}$. D. $ab = 7$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0) \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Diện tích}(E) \text{ là } S_{(E)} = 4 \int_0^a \frac{b\sqrt{a^2 - x^2} dx}{a} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = a \sin t \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = a \cos t dt. \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$S_{(E)} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a a^2 \cdot \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab. \text{ Mà ta có } S_{(C)} = \pi R^2 = 7\pi.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } S_{(E)} = 7 \cdot S_{(C)} \Leftrightarrow \pi ab = 49\pi \Leftrightarrow ab = 49.$$

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$. C. $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a; a^2); B(b; b^2) (b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a + b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b |(a + b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a + b)x - ab - x^2) dx = \frac{1}{6} (b - a)^3.$$

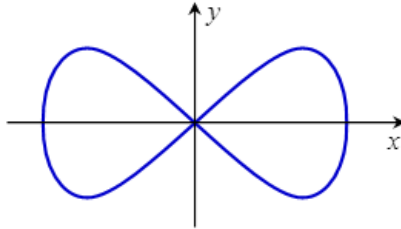
$$\text{Vì } AB = 2018 \Leftrightarrow (b - a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b - a)^2 (1 + (b + a)^2) = 2018^2.$$

$$\Rightarrow (b - a)^2 \leq 2018^2 \Rightarrow |b - a| = b - a \leq 2018 \Rightarrow S \leq \frac{2018^3}{6}.$$

$$\text{Vậy } S_{\max} = \frac{2018^3}{6} \text{ khi } a = -1009 \text{ và } b = 1009.$$

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên. Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \frac{125}{6} (m^2)$ B. $S = \frac{125}{4} (m^2)$ C. $S = \frac{250}{3} (m^2)$ D. $S = \frac{125}{3} (m^2)$



Lời giải

Chọn D

Vì tính đối xứng trục nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}$. Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25 - x^2}; x \in [0; 5]$

Nên $S_{(I)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25 - x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3} (m^2)$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a, x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo

thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1, x = e$ quanh Ox là

A. $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$. B. $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$. C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$. D. $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. (Giải tự luận)

Ta có $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{4x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$

Lại có $f'(x) = x - \frac{1}{4x} > 0, \forall x \in (1; e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; e]$. Suy ra

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [1; e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2} \right)} dx \\
 S &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x} \right)^2} dx \\
 &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right) \left(x + \frac{1}{4x} \right) dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{8} x - \frac{1}{4} x \ln x - \frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = 2\pi (I_1 + I_2 + I_3)
 \end{aligned}$$

$$\text{Với } I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{8} x \right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16} \right) \Big|_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$$

$$I_2 = \int_1^e \left(-\frac{1}{4} x \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16} e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left(-\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x} \right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

Cách 2.

Các em có thể trực tiếp bấm máy tính tích phân $S = 2\pi \int_1^e \left| \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \right| \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2} \right)} dx$ để có kết quả (Cách CASIO chỉ áp dụng khi hiểu rõ bản chất)

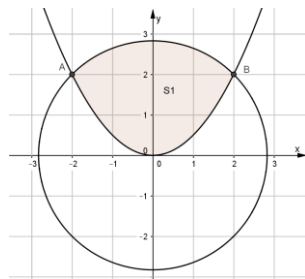
- ❖ **VÍ DỤ 5 :** Trong hệ tọa độ Oxy , parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia đường tròn tâm O (O là gốc tọa độ) bán kính $r = 2\sqrt{2}$ thành 2 phần, diện tích phần nhỏ bằng:
- A. $2\pi + \frac{3}{4}$. B. $2\pi + \frac{4}{3}$. C. $2\pi - \frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đường tròn: $x^2 + y^2 = 8$.

Ta có: $x^2 + y^2 = 8 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{8 - x^2}$.



Parabol chia hình tròn giới hạn bởi đường tròn (C) thành hai phần. Gọi S là phần diện tích giới hạn bởi $y = \sqrt{8 - x^2}$ và parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) $\sqrt{8 - x^2} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó ta tính được S như sau.

$$S = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx. \text{ Tính } I = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx.$$

Đặt $t = 2\sqrt{2} \sin x \Rightarrow dt = 2\sqrt{2} \cos x dx$, ta có.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(8\sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \right) dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = (4t + 2\sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4.$$

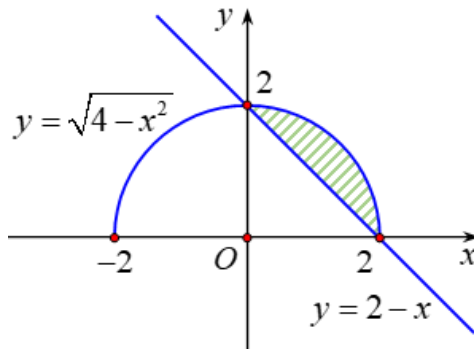
Ta có: $\int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{-2}^2 = \frac{8}{3}$. Suy ra $S = 2\pi + \frac{4}{3}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của S .

A. $S_{\max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. B. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$. C. $S_{\max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. D. $S_{\max} = \frac{2018^3}{3}$.

CÂU 2: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$ và đường thẳng $y = 2-x$ (như hình vẽ bên). Biết diện tích của hình (H) là $S = a\pi + b$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P = 2a^2 + b^2$.

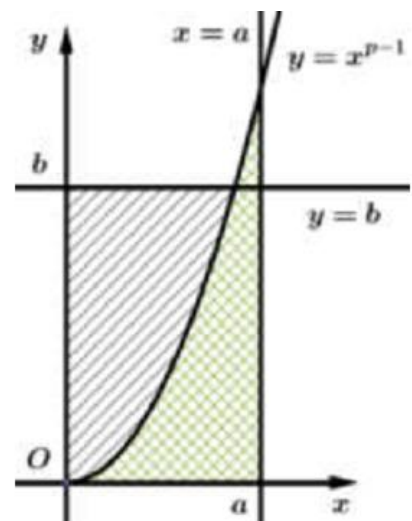


A. $P = 6$. B. $P = 9$. C. $P = 16$. D. $S = 10$.

CÂU 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành. Xác định k để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; 4)$ có hệ số góc k chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

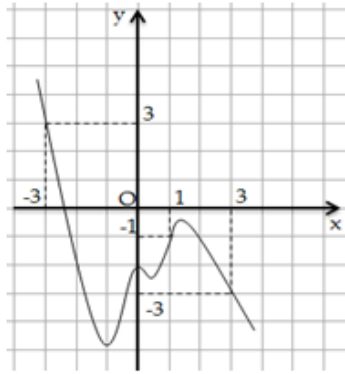
A. $k = -4$. B. $k = -8$. C. $k = -6$. D. $k = -2$.

CÂU 4: Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



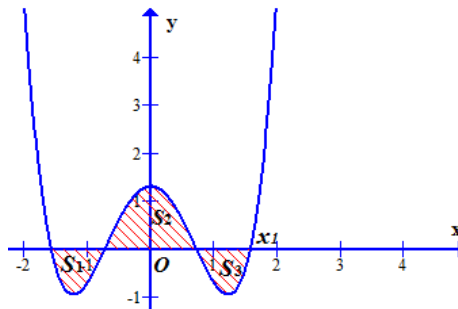
A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$

CÂU 5: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = 2f(x) + x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $g(1) < g(3) < g(-3)$.
 B. $g(3) < g(-3) < g(1)$.
 C. $g(1) < g(-3) < g(3)$.
 D. $g(-3) < g(3) < g(1)$.

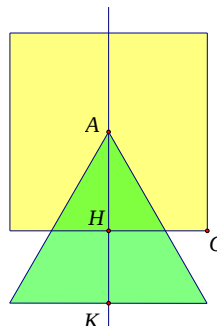
CÂU 6: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

- A. $-\frac{5}{2}$
 B. $\frac{5}{4}$
 C. $-\frac{5}{4}$
 D. $\frac{5}{2}$

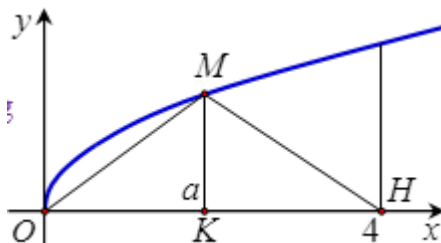
CÂU 7. Cho tam giác đều và hình vuông cùng có cạnh bằng 8 được xếp chồng lên nhau sao cho một đỉnh của tam giác đều trùng với tâm của hình vuông, trục của tam giác đều trùng với trục của hình vuông (như hình vẽ). Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh bởi hình đã cho khi quay quanh trục.



- A. $\frac{16\pi(23+4\sqrt{3})}{3}$.
 B. $\frac{64\pi(17+\sqrt{3})}{3}$.
 C. $\frac{16\pi(17+3\sqrt{3})}{9}$.
 D. $\frac{64\pi(17+3\sqrt{3})}{9}$.

CÂU 8: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ bên). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó

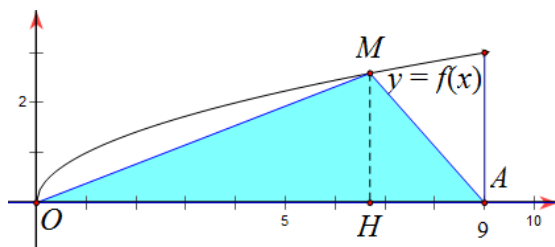
- A. $a = 2$. B. $a = 2\sqrt{2}$. C. $a = \frac{5}{2}$. D. $a = 3$.



CÂU 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = 2x^2$ và $x = 2y^2$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox .

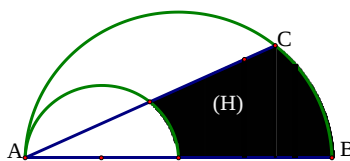
- A. $V = \frac{3\pi}{80}$. B. $V = \frac{123\pi}{5}$. C. $V = \frac{\pi}{12}$. D. $V = 4\pi$.

CÂU 10: Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .



- A. $S = 3$. B. $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. C. $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $S = \frac{4}{3}$.

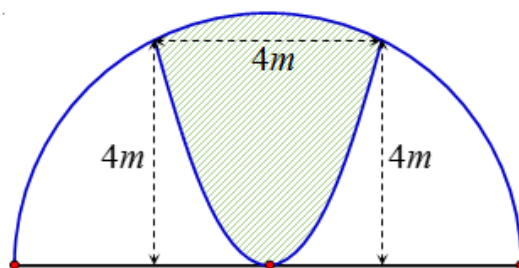
CÂU 11: Ta vẽ hai nửa đường tròn như hình vẽ bên, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 8π và $BAC = 30^\circ$. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB .



- A. $\frac{220}{3}\pi$. B. $\frac{98}{3}\pi$. C. $\frac{224}{3}\pi$. D. $4\pi^2$.

CÂU 12: Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai

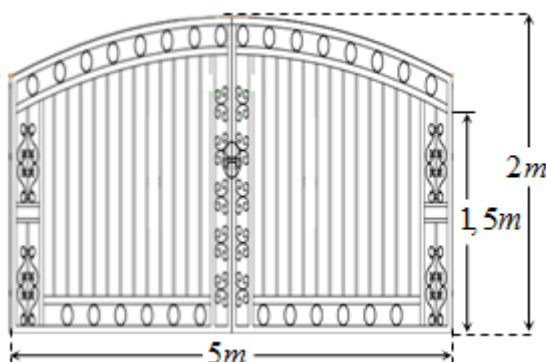
đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản.



Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

- A. 2.388.000 (đồng). B. 3.895.000 (đồng).
C. 1.194.000 (đồng). D. 1.948.000 (đồng).

CÂU 13: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1(m²) của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).

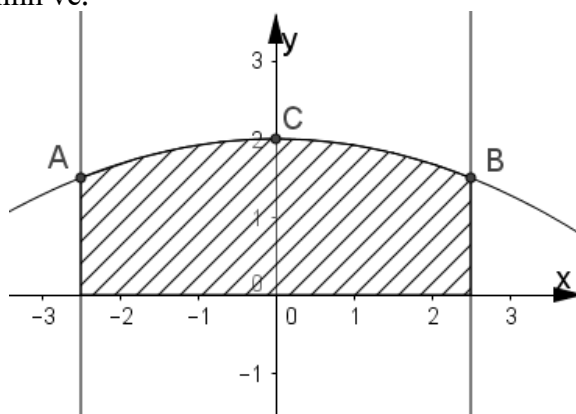


- A. 6.417.000 đồng. B. 6.320.000 đồng. C. 6.520.000 đồng. D. 6.620.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2, 1.5)$, $B(2, 1.5)$, $C(0, 2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2, 1.5)$, $B(2, 1.5)$, $C(0, 2)$ nên ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(-2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}.$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là.

$$S.(700.000) = \frac{55}{6}.700000 \approx 6.417.000 \text{ (đồng)}.$$

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

Giả sử $A(a; a^2)$; $B(b; b^2)$ ($b > a$) sao cho $AB = 2018$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = (a+b)x - ab$. Khi đó

$$S = \int_a^b |(a+b)x - ab - x^2| dx = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$$\text{Vì } AB = 2018 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 2018^2 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 2018^2.$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \leq 2018^2 \Rightarrow |b-a| = b-a \leq 2018 \Rightarrow S \leq \frac{2018^3}{6}. \text{ Vậy } S_{\max} = \frac{2018^3}{6} \text{ khi } a = -1009 \text{ và } b = 1009.$$

CÂU 2: Chọn A

+ Cách 1 :

$$\text{Diện tích hình phẳng } (H) \text{ là : } S = \int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - 2 + x) dx.$$

$$\text{Đặt } x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt.$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t - 2 + 2 \sin t) 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 t - 4 \cos t + 4 \sin t \cos t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2 \cos 2t - 4 \cos t + 2 \sin 2t) dt = (2t + \sin 2t - 4 \sin t - \cos 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -2 \Rightarrow P = 2a^2 + b^2 = 2 + 4 = 6.$$

+ Cách 2 :

$$\text{Diện tích hình phẳng } (H) \text{ là : } S = \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = \pi - 2.$$

$$\Rightarrow a = 1, b = -2 \Rightarrow P = 2a^2 + b^2 = 2 + 4 = 6.$$

CÂU 3: Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$ và trục hoành là:
 $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x + 4$, trục tung và trục hoành là:

$$S = \int_0^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;4)$

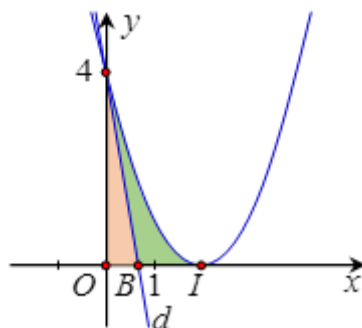
có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 4$.

Gọi B là giao điểm của (d) và trục hoành. Khi đó $B\left(\frac{-4}{k}; 0\right)$.

Đường thẳng (d) chia (H) thành hai phần có diện tích

bằng nhau khi $B \in OI$ và $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}S = \frac{4}{3}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-4}{k} < 2 \\ S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{-4}{k} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -2 \\ k = -6 \end{cases} \Leftrightarrow k = -6.$$



CÂU 4: Chọn D

Ta có: $S \leq S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left(\frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p}; \quad S_2 = \int_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left(\frac{\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}} \right) \Big|_0^b = \left(\frac{y^q}{q} \right) \Big|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

$$\text{Vì: } \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

CÂU 5: Chọn A

Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-3; 1; 3\}$.

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên. (Chú ý là hàm $g(x)$ và $g'(x)$).

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Suy ra $g(3) > g(1)$.

Kết hợp với bảng biến thiên ta có:

$$\int_{-3}^1 (-g'(x)) dx > \int_1^3 g'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{-3} g'(x) dx > \int_1^3 g'(x) dx \Leftrightarrow g(-3) - g(1) > g(3) - g(1) \Leftrightarrow g(-3) > g(3)$$

Vậy ta có $g(-3) > g(3) > g(1)$.

CÂU 6: Chọn B

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$ (1).

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x) dx = 0$.

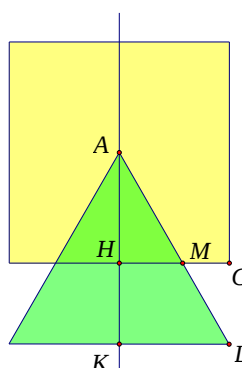
$$\text{Mà } \int_0^{x_1} f(x) dx = \int_0^{x_1} (x^4 - 3x^2 + m) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right).$$

$$\text{Do đó, } x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có phương trình } \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}.$$

CÂU 7. Chọn D



Ta cần tìm HM

$$\text{Ta có } \frac{HM}{KL} = \frac{AH}{AK} \Leftrightarrow \frac{HM}{4} = \frac{4}{4\sqrt{3}} \Rightarrow R' = HM = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Thể tích được tính bằng thể tích trụ cộng với thể tích nón lớn trừ đi thể tích nón nhỏ phía trong.

$$V_{vu} = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi.$$

$$V_{\text{non lon}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{64\sqrt{3}\pi}{3}$$

$$V_{\text{non nho}} = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 4 = \frac{64\pi}{9}$$

$$V = V_{\text{tru}} + V_{\text{non lon}} - V_{\text{non nho}} = 128\pi + \frac{64\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{64\pi}{9} = 64 \left(\frac{17\pi + 3\sqrt{3}\pi}{9} \right)$$

CÂU 8 : Chọn D

Ta có $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

Ta có $M(a; \sqrt{a})$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

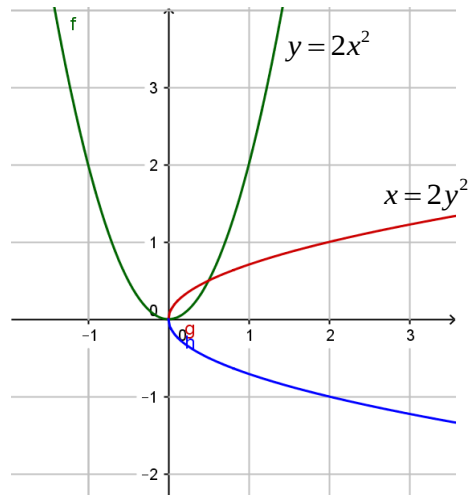
* Hình nón (N_1) có đỉnh là O , chiều cao $h_1 = OK = a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$;

* Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H , chiều cao $h_2 = HK = 4 - a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$

$$\text{Khi đó } V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi R^2 h_2 = \frac{4}{3} \pi a$$

$$\text{Theo đề bài } V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi a \Rightarrow a = 3.$$

CÂU 9: Chọn A



$$x = 2y^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x}{2}}$$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$2x^2 = \sqrt{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^4 = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 = -\sqrt{\frac{x}{2}} \text{ (VN)}.$$

Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, trục Ox , đường thẳng $x = 0, x = \frac{1}{2}$ quanh trục Ox .

V_2 là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$, trục Ox , đường thẳng $x = 0, x = \frac{1}{2}$ quanh trục Ox .

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (2x^2)^2 dx = \frac{3}{80} \pi$.

CÂU 10: Chọn B

Ta có $V_1 = \pi \int_0^9 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox , đặt $OH = m$ (với $0 < m \leq 9$), ta có $M(m; \sqrt{m})$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot OH + \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot AH = \frac{1}{3} \pi \cdot MH^2 \cdot OA = 3m\pi$.

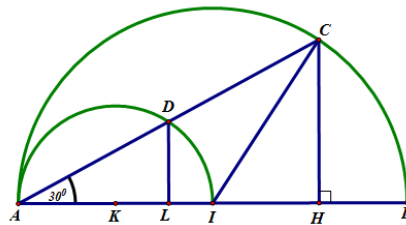
Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\frac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \frac{27}{4}$. Do đó $M\left(\frac{27}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \frac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x \right) dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2 \right) \Big|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

CÂU 11: Chọn B



Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích khối tròn xoay khi quay tam giác AHC , ALD và đa giác LID, HBC quanh AB . Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn lớn và nhỏ.

Ta có: $2.8\pi = \pi R^2 \Rightarrow R = 4$ và $r = 2$.

Vì $\triangle IHC$ vuông tại H , $\angle CIH = 60^\circ$ có

$$\begin{cases} CH = IC \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ IH = \sqrt{IC^2 - CH^2} = \sqrt{16 - 12} = 2 \\ AL = \frac{1}{2} AH = 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} AH \cdot \pi CH^2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \pi \cdot 12 = 24\pi \\ V_2 = \frac{1}{3} AL \cdot \pi DL^2 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \pi \cdot 3 = 3\pi \end{cases}$$

Giả sử nửa trên đường tròn lớn tâm $I(0;0)$, $R=4$ nên có phương trình: $y = \sqrt{16-x^2}$.

$$\text{Khi đó } V_4 = \pi \int_2^4 \left(\sqrt{16-x^2} \right)^2 dx = \pi \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{40}{3} \pi.$$

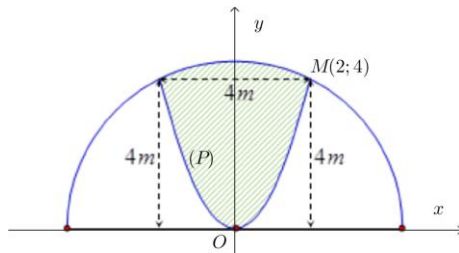
Giả sử nửa trên đường tròn nhỏ tâm $K(0;0)$, $R=2$ nên có phương trình: $y = \sqrt{4-x^2}$.

$$\text{Khi đó } V_3 = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx = \pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{3} \pi.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = (V_1 + V_4) - (V_2 + V_3) = \left(24\pi + \frac{40}{3} \pi \right) - \left(3\pi + \frac{5}{3} \pi \right) = \frac{98}{3} \pi$$

CÂU 12: Chọn D



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là.

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}.$$

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2;4)$ do đó: $4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1$.

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn. (phần tô màu).

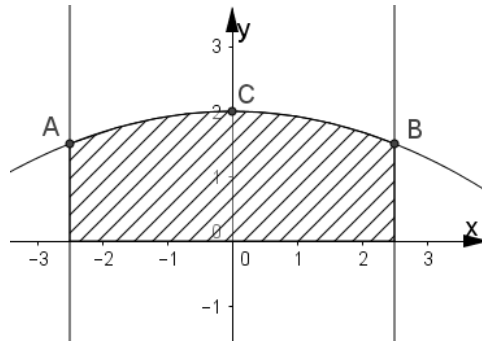
$$\text{Ta có công thức } S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{20-x^2} - x^2 \right) dx \approx 11,94 m^2.$$

$$\text{Vậy phần diện tích trống cỏ là } S_{\text{trong cỏ}} = \frac{1}{2} S_{\text{hinhtron}} - S_1 \approx 19,47592654.$$

$$\text{Vậy số tiền cần có là } S_{\text{trong cỏ}} \times 100000 \approx 1.948.000 \text{ (đồng).đồng.}$$

CÂU 13: Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5)$, $B(2,5)$, $C(0,2)$.

Giả sử đường cong phá trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5)$, $B(2,5)$, $C(0,2)$ nên ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(-2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{ . Khi đó phương trình Parabol là } y = -\frac{2}{25}x^2 + 2 \text{ .}$$

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Bigg|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6} \Rightarrow S.(700.000) = \frac{55}{6}.700000 \approx 6.417.000 \text{ (đồng)}.$$

DẠNG CÂU HỎI THƯỜNG XUẤT HIỆN TRONG ĐỀ THI

CÂU 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{9}{2} \text{ và } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x)dx \text{ bằng.}$$

- A. $\frac{6}{\pi}$. B. $\frac{2}{\pi}$. C. $\frac{4}{\pi}$. D. $\frac{1}{\pi}$.

CÂU 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Tính

tích phân $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 5$. C. $I = 2$. D. $I = 6$.

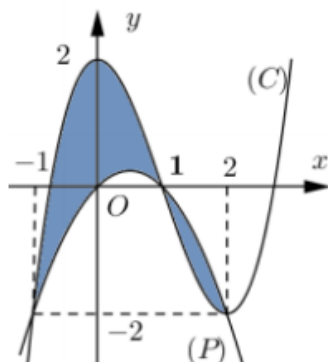
CÂU 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}, f(0)=0, f'(0) \neq 0$ và thỏa mãn hệ thức

$$f(x)/f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x)f'(x) + (6x+1)f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } \int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx = ae^2 + b \quad (a, b \in \mathbb{Q}). \text{ Giá}$$

trị của $a-b$ bằng:

- A. 1 B. 2 C. 0 D. $\frac{2}{3}$

CÂU 4: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng:



- A. $\frac{37}{12}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{5}{12}$

CÂU 5 : Cho hàm số $f(x)$ dương thỏa mãn $f(0)=e$ và $x^2 f'(x) = f(x) + f'(x), \forall x \neq \pm 1$. Giá trị $f\left(\frac{1}{2}\right)$ là:

- A. $e^{\sqrt{3}}$ B. $e\sqrt{3}$ C. e^2 D. $\frac{e}{\sqrt{3}}$

CÂU 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục. Biết $f(0)=2e$ và $f(x)$ luôn thỏa mãn đẳng thức

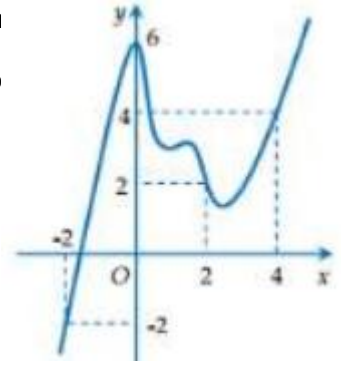
$$f'(x) + \sin x f(x) = \cos x e^{\cos x} \quad \forall x \in [0; \pi]. \text{ Tính } I = \int_0^{\pi} f(x)dx \text{ (làm tròn đến phần trăm)}$$

- A. $I \approx 6,55$ B. $I \approx 17,30$ C. $I \approx 10,31$ D. $I \approx 16,91$

CÂU 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Khi đó giá trị của biểu thức

$$\int_0^4 f'(x-2)dx + \int_0^2 f'(x+2)dx \text{ bằng bao nhiêu?}$$

- A. 2 B. 8
C. 10 D. 6



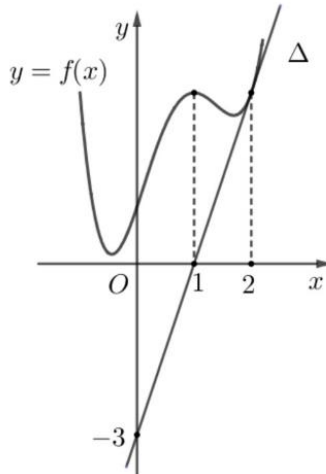
CÂU 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1; 2]$. Biết

$$\int_1^2 f'(x)dx = 10 \text{ và } \int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2. \text{ Tính } f(2).$$

- A. $f(2) = -20$ B. $f(2) = 10$ C. $f(2) = 20$ D. $f(2) = -10$

CÂU 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$; đường thẳng Δ trong hình vẽ bên là tiếp tuyến của

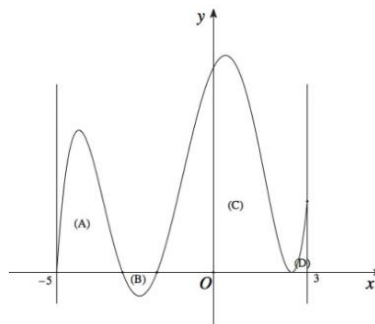
đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$. Tích phân $\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)dx$ bằng



- A. 8 B. 4 C. 3 D. 6

CÂU 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích các hình phẳng (A), (B), (C), (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành lần lượt bằng 6; 3; 12; 2.

Tích phân $\int_{-3}^1 (2f(2x+1) + 1)dx$ bằng



A. 27

B. 25

C. 17

D. 21

CÂU 11. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, có đồ thị (C). Gọi $\Delta: y = dx + e$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm A có hoành độ $x = -1$. Biết Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M, N (M, N \neq A)$ có hoành độ lần lượt $x = 0; x = 2$. Cho biết $\int_0^2 (dx + e - f(x)) dx = \frac{28}{5}$. Tích phân $\int_{-1}^0 (f(x) - dx - e) dx$ bằng

A. $\frac{2}{5}$

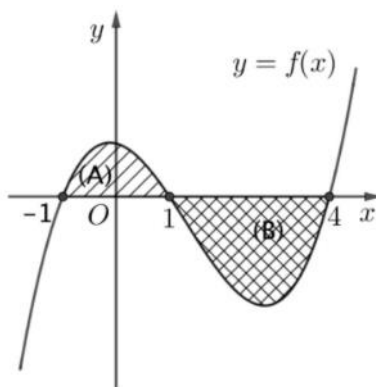
B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{1}{5}$

CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình phẳng

(A), (B) lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$

B. 2

C. $\frac{4}{5}$

D. -2

CÂU 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0; 1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$M = \int_0^2 (2f(x) + 3x) f(x) dx - \int_0^1 (4f(x) + x) \sqrt{xf(x)} dx$ bằng

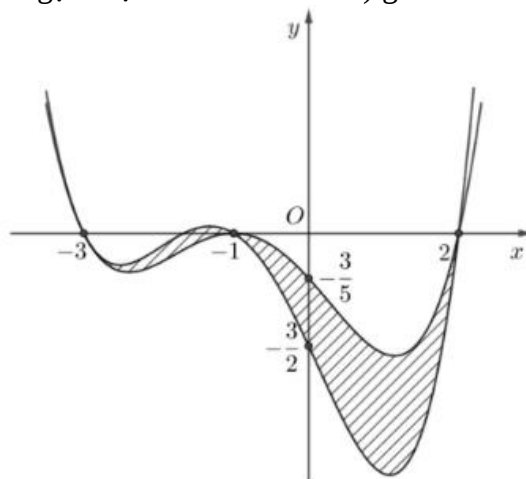
A. $-\frac{1}{24}$

B. $-\frac{1}{8}$

C. $-\frac{1}{12}$

D. $-\frac{1}{6}$

CÂU 14. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



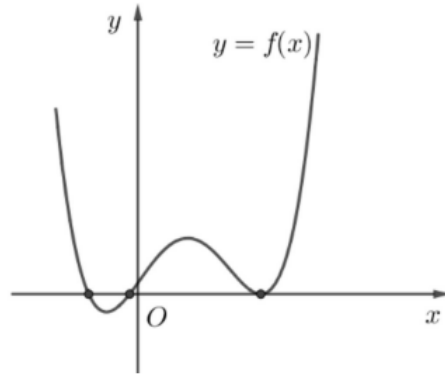
A. 3,11

B. 2,45

C. 3,21

D. 2,95

CÂU 15. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $(f'(x))^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là



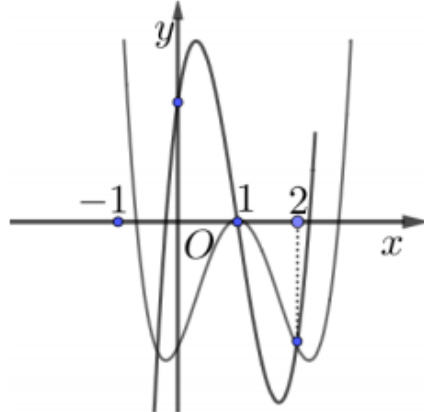
A. 1

B. 2

C. 6

D. 0

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức hệ số thực. Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$. Phương trình $f(x) = me^x$ có hai nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi m thuộc nửa khoảng $[a;b)$. Giá trị của $a+b$ gần nhất với giá trị nào dưới đây ?



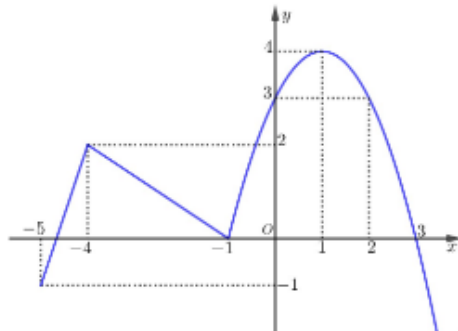
A. 0,27.

B. -0,54.

C. -0,27.

D. 0,54.

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $6f(-5) + 3f(2)$ bằng

A. -9

B. 11.

C. 9.

D. -11.

CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in [1;2]$ thỏa mãn $f(1) = 1, f(2) = \frac{22}{15}$ và

$$\int_1^2 \frac{(f'(x))^3}{x^4} dx = \frac{7}{375}. \text{ Tích phân } \int_1^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{7}{5}$

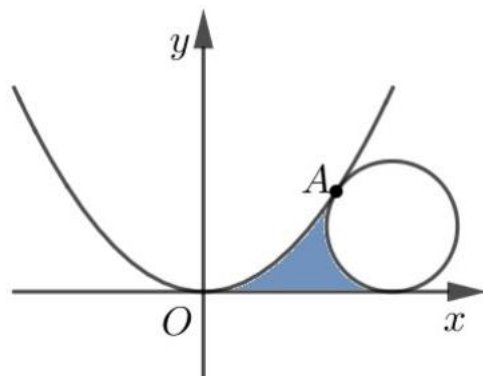
C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $x \cdot f'(x) = x f^2(x) - 3f(x) + \frac{1}{x}, \forall x \in [1;e]$. Giá trị của $f(e)$ bằng

- A. $\frac{3}{2e}$ B. $\frac{4}{3e}$ C. $\frac{3}{4e}$ D. $\frac{2}{3e}$

CÂU 20. Cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường tròn (C) có bán kính bằng 1 tiếp xúc với trục hoành đồng thời có chung một điểm A duy nhất với (P). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P), (C) và trục hoành (phần bôi đậm trong hình vẽ) bằng

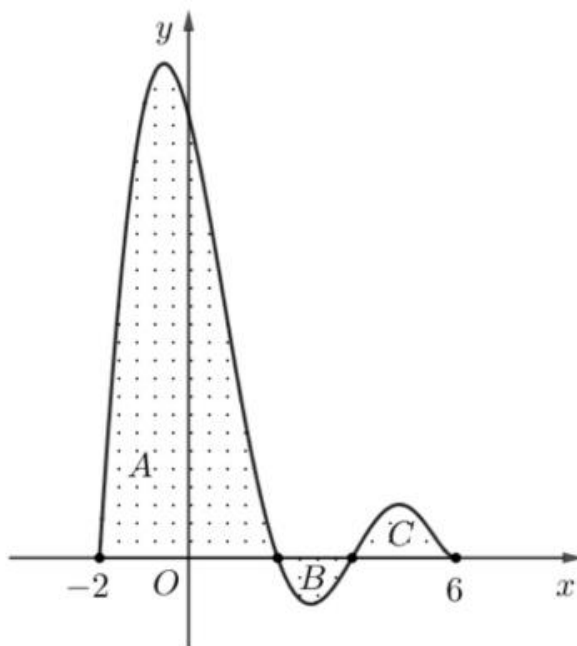


- A. $\frac{3\sqrt{3}+2-\pi}{3}$ B. $\frac{29\sqrt{3}-9\pi}{24}$ C. $\frac{9\sqrt{3}+9-4\pi}{12}$ D. $\frac{27\sqrt{3}-8\pi}{24}$

CÂU 21. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + f^2(x)}$. Biết rằng $\int_1^2 g(x) dx = 1$ và $2g(2) - g(1) = 2$. Tích phân $\int_1^2 \frac{x^2}{x + f^2(x)} dx$ bằng

- A. 1,5 B. 1 C. 3 D. 2

CÂU 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng A, B, C trong hình vẽ lần lượt bằng 32; 2; 3. Tích phân $\int_{-2}^6 (f(2x+2)+1) dx$ bằng



- A. 22,5 B. 19,5 C. 37 D. 20,5

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn A

- Đặt $\begin{cases} u = \cos \frac{\pi x}{2} \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$
 $\Rightarrow \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \cos \frac{\pi x}{2} f(x) \Big|_0^1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx$
- $= f(1) \cdot \cos \frac{\pi}{2} - f(0) \cos 0 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3}{2}$
- Xét tích phân $\int_0^1 \left[f(x) + k \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0$
 $\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f^2(x) + 2kf(x) \sin \frac{\pi x}{2} + k^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx + 2k \int_0^1 f(x) \sin \frac{\pi x}{2} dx + k^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi x}{2} dx = 0$
- $\Leftrightarrow \frac{9}{2} + 2k \frac{3}{2} + \frac{1}{2} k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -3$
- Khi đó ta có $\int_0^1 \left[f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} \right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}$
- Vậy $\int_0^1 f(x) dx = 3 \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -3 \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi}{2}} \Big|_0^1 = -\frac{6}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 = -\frac{6}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{6}{\pi}$

CÂU 2: Chọn C.

- Ta có: $I = \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - 1 = J - 1$
- Ta có: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(2x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(2x) dx = 3$
- Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 f(2x) dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx = 3 \Rightarrow J = 3$
- Vậy $I = \int_1^2 f(x) dx = 3 - 1 = 2$

CÂU 3:

- Ta có
 $f(x) \cdot f'(x) + 18x^2 = (3x^2 + x) f'(x) + (6x + 1) f(x)$
 $\Rightarrow \int_0^x (f(x) \cdot f'(x) + 18x^2) dx = \int_0^x ((3x^2 + x) f'(x) + (6x + 1) f(x)) dx$
- $\Leftrightarrow \int_0^x f(x) f'(x) dx + \int_0^x 18x^2 dx = \int_0^x ((3x^2 + x) f(x))' dx \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} (f(x))^2 + 6x^3 \right) \Big|_0^x = ((3x^2 + x) f(x)) \Big|_0^x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} (f(x))^2 + 6x^3 \right) - \left(\frac{1}{2} (f(0))^2 + 0 \right) = (3x^2 + x) f(x) - 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2(3x^2 + x) f(x) + 12x^3 = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2(3x^2 + x) f(x) + (3x^2 + x)^2 = (3x^2 + x)^2 - 12x^3 \Leftrightarrow (f(x) - (3x^2 + x))^2 = (3x^2 - x)^2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - (3x^2 + x) = 3x^2 - x \\ f(x) - (3x^2 + x) = -3x^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 6x^2 \\ f(x) = 2x \end{cases} \end{aligned}$$

- Do $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$ nên $f(x) = 2x$. Khi đó:

$$\int_0^1 (x+1) e^{f(x)} dx = \int_0^1 (x+1) e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1) d(e^{2x})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad & = \frac{1}{2} (x+1) \cdot e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} d(x+1) = \frac{1}{2} (x+1) \cdot e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \\ & = \frac{1}{2} (x+1) \cdot e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^0 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} e^0 = \frac{7}{4} e^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{7}{4}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow a - b = 2 \end{aligned}$$

CÂU 4: Chọn A.

- Giả sử $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

$$\bullet \quad \text{Ta có: } \begin{cases} -2 = -a + b - c + d \\ 2 = d \\ 0 = a + b + c + d \\ -2 = 8a + 4b + 2c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = -4 \\ a + b + c = -2 \\ 8a + 4b + 2c = -4 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow (C): y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

- Giả sử $(P): y = mx^2 + nx + l, (m \neq 0)$

$$\bullet \quad \text{Ta có: } \begin{cases} -2 = m - n + l \\ 0 = m + n + l \\ -2 = 4m + 2n + l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \\ l = 0 \end{cases} \Rightarrow (P): y = g(x) = -x^2 + x$$

- Diện tích cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx - \int_1^2 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ \bullet \quad &= \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

CÂU 5:

- Ta có: $x^2 f'(x) = f(x) + f'(x), \forall x \neq \pm 1 \Rightarrow f'(x) \cdot (x^2 - 1) = f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 1}$

$$\bullet \quad \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 - 1} dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| - \ln |e| = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln 1 \right)$$

- $\Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| - 1 = -\frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \ln \frac{e}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{e}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{\sqrt{3}}$ (do hàm số $f(x)$ dương)

CÂU 6:

$$f'(x) + \sin x f(x) = \cos x e^{\cos x} \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow f'(x) e^{-\cos x} + \sin x f(x) e^{-\cos x} = \cos x \Leftrightarrow [f(x) e^{-\cos x}]' = \cos x \Leftrightarrow \int_0^x [f(x) e^{-\cos x}]' dx = \int_0^x \cos x dx$$

- $$\Leftrightarrow f(x) e^{-\cos x} \Big|_0^x = \sin x \Big|_0^x \Leftrightarrow f(x) e^{-\cos x} - f(0) \cdot e^{-1} = \sin x \Leftrightarrow f(x) e^{-\cos x} - 2e \cdot e^{-1} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow f(x) e^{-\cos x} = \sin x + 2 \Leftrightarrow f(x) = (\sin x + 2) e^{\cos x}$$

- Khi đó ta có $I = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (\sin x + 2) e^{\cos x} dx \approx 10,31$

CÂU 7: Chọn: D

- Ta có:

- $$\int_0^4 f'(x-2) dx + \int_0^2 f'(x+2) dx = \int_0^4 f'(x-2) d(x-2) + \int_0^2 f'(x+2) d(x+2) = f(x-2) \Big|_0^4 + f(x+2) \Big|_0^2$$

- $= f(2) - f(-2) + f(4) - f(2) = f(4) - f(-2) = 4 - (-2) = 6$

CÂU 8: Chọn: C

- Ta có: $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln 2 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{d(f(x))}{f(x)} = \ln 2 \Leftrightarrow \ln f(x) \Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln f(2) - \ln f(1) = \ln 2$

- $\Leftrightarrow f(2) = 2f(1)$

- Lại có: $\int_1^2 f'(x) dx = 10 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10$

- Từ đó $\begin{cases} f(2) = 2f(1) \\ f(2) - f(1) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 20 \\ f(1) = 10 \end{cases}$

CÂU 9: Chọn đáp án D.

- Đặt $t = \frac{e^x + 1}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} e^x dx; x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \ln 3 \Rightarrow t = 2.$

- Khi đó $\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) dx = 2 \int_1^2 f''(t) = 2 f'(t) \Big|_1^2 = 2(f'(2) - f'(1)).$

- Do hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1 \Rightarrow f'(1) = 0$ và đường thẳng Δ qua hai điểm $(0; -3); (1; 0)$ nên có phương trình $y = 3x - 3.$

- Vì Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2 \Rightarrow f'(2) = k_{\Delta} = 3.$

- Vậy $\int_0^{\ln 3} e^x f''\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) dx = 2(3 - 0) = 6.$

CÂU 10:

- Đổi biến $t = 2x + 1 \rightarrow dt = 2dx$ và $x = -3 \Rightarrow t = -5; x = 1 \Rightarrow t = 3.$

- Do đó $\int_{-3}^1 (2f(2x+1) + 1) dx = \int_{-5}^3 (2f(t) + 1) \cdot \frac{dt}{2} = \int_{-5}^3 f(t) dt + \int_{-5}^3 \frac{1}{2} dt = \int_{-5}^3 f(t) dt + 4.$

- Để tính $\int_{-5}^3 f(t)dt$ ta dùng diện tích các hình phẳng đã cho:
- Quan sát đồ thị nhận thấy trên đoạn $[-5;3]$ thì đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành lần lượt tại các điểm có hoành độ $x = -5; x = a; x = b; x = c$ ($-5 < a < b < c < 3$). Trong đó
- $\int_{-5}^a f(t)dt = \int_{-5}^a |f(t)|dt = S_{(A)} = 6; \int_a^b f(t)dt = -\int_a^b |f(t)|dt = -S_{(B)} = -3$
- $\int_b^c f(t)dt = \int_b^c |f(t)|dt = S_{(C)} = 12; \int_c^3 f(t)dt = S_{(D)} = 2.$
- Vì vậy $\int_{-5}^3 f(t)dt = \int_{-5}^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt + \int_c^3 f(t)dt = 6 - 3 + 12 + 2 = 17.$
- Vậy tích phân cần tính bằng $17 + 4 = 21.$

Chọn đáp án D.

CÂU 11:

- Theo giả thiết phương trình $f(x) - dx - e = 0$ có bốn nghiệm là $x_1 = x_2 = -1; x_3 = 0; x_4 = 2.$
- Vì vậy $\int_0^2 (dx + e - f(x))dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow \int_0^2 -a(x+1)^2 x(x-2)dx = \frac{28}{5} \Leftrightarrow a = \frac{-\frac{28}{5}}{\int_0^2 (x+1)^2 x(x-2)dx} = 1.$
- Vậy $f(x) - dx - e = (x+1)^2 x(x-1) \Rightarrow \int_{-1}^0 (f(x) - dx - e)dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 x(x-2)dx = \frac{1}{5}.$

Chọn đáp án D.

CÂU 12:

- Đặt $t = 5 \sin x - 1 \Rightarrow dt = 5 \cos x dx \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{5} dt.$ Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = -1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 4.$
- Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1)dx = \int_{-1}^4 f(t) \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^4 f(t)dt = \frac{1}{5} \left(\int_{-1}^1 f(t)dt + \int_1^4 f(t)dt \right).$
- Mặt khác $\begin{cases} 3 = \int_{-1}^1 |f(t)|dt = \int_{-1}^1 f(t)dt \\ 7 = \int_1^4 |f(t)|dt = -\int_1^4 f(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 f(t)dt = 3 \\ \int_1^4 f(t)dt = -7 \end{cases}.$ Vậy $I = \frac{1}{5}(3 - 7) = -\frac{4}{5}.$

Chọn đáp án A.

CÂU 13:

- Để cho đơn giản đặt $a = f(x)$ ta có
- $M = \int_0^1 (2f(x) + 3x) f(x)dx - \int_0^1 (4f(x) + x) \sqrt{xf(x)}dx = \int_0^1 (2a + 3x)adx - \int_0^1 (4a + x) \sqrt{xa}dx$
- $= \int_0^1 (2a^2 - 4a\sqrt{xa} + 3ax - x\sqrt{xa})dx \geq \int_0^1 -\frac{x^2}{8}dx = -\frac{1}{24}.$
- Vì $2a^2 + 3ax - 4a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax} + \frac{x^2}{8} = \frac{1}{8}(2\sqrt{a} - \sqrt{x})^4 \geq 0.$
- Dấu bằng đạt tại $2\sqrt{a} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4a = x \Leftrightarrow a = \frac{x}{4} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{4}.$

Chọn đáp án A.

CÂU 14:

- Tại điểm có hoành độ $x = -3$ hai đồ thị hàm số này tiếp xúc với nhau.
- Có $f(x) - g(x) = \frac{1}{-18} \left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{5} \right) \right) (x+3)^2 (x+1)(x-2)$. Vì vậy
- $S_{(H)} = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^2 \left| -\frac{1}{18} \left(-\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{5} \right) \right) (x+3)^2 (x+1)(x-2) \right| dx = \frac{3733}{1200} \approx 3,11$.

Chọn đáp án A.

CÂU 15:

- Đồ thị hàm $f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < x_2 < x_3$ và $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn trong đó điểm có hoành độ x_3 là điểm tiếp xúc với trục hoành nên
- $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2$ với $a > 0$.
- Thực hiện lấy đạo hàm ta có:
- $f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_3} \right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$.
- Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_3}$.
- Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế ta có:
- $\frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} = -\frac{1}{(x-x_1)^2} - \frac{1}{(x-x_2)^2} - \frac{2}{(x-x_3)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$.
- Vậy phương trình tương đương với:
- $a^2(x-x_2)^2(x-x_3)^4 - a^2(x-x_1)^2(x-x_3)^4 - 2a^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2 = 0$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \\ (x-x_2)^2(x-x_3)^2 + (x-x_1)^2(x-x_3)^2 + 2(x-x_1)^2(x-x_2)^2 = 0 \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \\ \begin{cases} (x-x_2)(x-x_3) = 0 \\ (x-x_1)(x-x_3) = 0 \\ (x-x_1)(x-x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_3. \end{cases}$
- NOTE:** Đi thi các em nên dùng ngay mẹo sau đây bởi lẽ đề cho sẽ đúng với mọi hàm đa thức bậc bốn có đúng 3 nghiệm thực phân biệt
- Chọn hàm số đa thức bậc bốn chỉ có 3 nghiệm thỏa mãn đề bài chẳng hạn
- $f(x) = (x+1)(x-1)x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x; f''(x) = 12x^2 - 2$.
- Ta chỉ cần tìm số nghiệm của phương trình:
- $(12x^2 - 2)(x^4 - x^2) = (4x^3 - 2x)^2 \Leftrightarrow 4x^6 - 2x^4 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(4x^4 - 2x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

CÂU 16:

- Có $y_{cbt} \Leftrightarrow f(x) = me^x \Leftrightarrow m = g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2]$

- Xét $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ trên đoạn $[0;2]$ có $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - e^x \cdot f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \in [0;2] \\ x=2 \in [0;2] \end{cases}$.
- Bảng biến thiên:

x	0	1	2
y'		+	-
y	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$

- trong đó tại giao điểm của đồ thị $f'(x)$ với trục hoành là điểm cực trị của đồ thị $f(x)$ nên đồ thị $f(x)$ là đường cong cắt trục tung tại điểm có tung độ âm.
- Suy ra $g(1) = \frac{f(1)}{e} = 0; g(0) = f(0) \approx -2; g(2) = \frac{f(2)}{e^2} \approx -\frac{2}{e^2}$.
- Vậy phương trình có hai nghiệm thực phân biệt trên đoạn $[0;2] \Leftrightarrow g(2) \leq m < g(1) \Rightarrow a+b = g(2) + g(1) \approx -\frac{2}{e^2} + 0 \approx -0,27$.

Chọn đáp án C.

CÂU 17:

- Phương trình đường thẳng qua hai điểm $(-5;-1); (-4;2)$ là $y = 3x + 14$.
- Phương trình đường thẳng qua hai điểm $(-4;2); (-1;0)$ là $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.
- Phương trình parabol qua các điểm $(-1;0); (1;4); (3;0)$ là $y = 4 - (x-1)^2$.
- Vậy $f'(x) = \begin{cases} 3x+14 & (x \leq -4) \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} & (-4 \leq x \leq -1) \\ 4 - (x-1)^2 & (x \geq 1) \end{cases}$. Ta có:
- $f(2) = f(0) + \int_0^2 f'(x)dx = \int_0^2 (4 - (x-1)^2)dx = \frac{22}{3}$;
- $f(-1) = f(0) - \int_{-1}^0 f'(x)dx = -\int_{-1}^0 (4 - (x-1)^2)dx = -\frac{5}{3}$;
- $f(-4) = f(-1) - \int_{-4}^{-1} f'(x)dx = -\frac{5}{3} - \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right)dx = -\frac{14}{3}$;
- $f(-5) = f(-4) - \int_{-5}^{-4} f'(x)dx = -\frac{14}{3} - \int_{-5}^{-4} (3x+14)dx = -\frac{31}{6}$.
- Do đó $6f(-5) + 3f(2) = 6\left(-\frac{31}{6}\right) + 3\left(\frac{22}{3}\right) = -9$.

CÂU 18:

- Ta có $\int_1^2 f'(x)dx = f(2) - f(1) = \frac{22}{15} - 1 = \frac{7}{15}$.
- Mặt khác sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:
- $\frac{(f'(x))^3}{x^4} + \frac{1}{125}x^2 + \frac{1}{125}x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{(f'(x))^3}{x^4} \cdot \frac{1}{125}x^2 \cdot \frac{1}{125}x^2} = \frac{3}{25}f'(x)$. Do đó:

- $\int_1^2 \left(\frac{(f'(x))^3}{x^4} + \frac{2}{125} x^2 \right) dx \geq \frac{3}{25} \int_1^2 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{(f'(x))^3}{x^4} dx \geq \frac{3}{25} \int_1^2 f'(x) dx - \frac{2}{125} \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{375}.$
- Vì vậy dấu bằng xảy ra, tức $\frac{(f'(x))^3}{x^4} = \frac{1}{125} x^2 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2}{5} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x^2}{5} dx = \frac{x^3}{15} + C.$
- Vì $f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{15} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{14}{15} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{15} + \frac{14}{15}.$
- Vậy $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{15} + \frac{14}{15} \right) dx = \frac{7}{5}.$

CÂU 19:

- Biến đổi giả thiết có
- $xf'(x) = xf^2(x) - 3f(x) + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 f^2(x) - 3f(x) + 1 = x^2 f'(x)$
- $\Leftrightarrow x^2 f^2(x) - 2xf(x) + 1 = x^2 f'(x) + xf(x) \Leftrightarrow (xf(x) - 1)^2 = x(xf'(x) + f(x)) = x(xf(x) - 1)'$
- $\Leftrightarrow \frac{(xf(x) - 1)'}{(xf(x) - 1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{(xf(x) - 1)'}{(xf(x) - 1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{xf(x) - 1} = \ln|x| + C$
- $\Leftrightarrow xf(x) - 1 = -\frac{1}{\ln|x| + C} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(\ln|x| + C)}.$
- $f(1) = 1 - \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(\ln|x| + 2)} \Rightarrow f(e) = \frac{2}{3e}.$

CÂU 20:

- Ta cần tìm phương trình của đường tròn:
- Vì đường tròn có bán kính bằng 1 và tiếp xúc với trục hoành nên tâm của đường tròn là $I(t; 1), (t > 0)$ phương trình của đường tròn là $(x - t)^2 + (y - 1)^2 = 1.$
- Theo giả thiết đường tròn (C) có chung một điểm AA duy nhất với (P). nên tiếp tuyến t_A tại A của (P) cũng là tiếp tuyến của (C).
- Xét điểm $A\left(a; \frac{1}{2}a^2\right), t_A: y = a(x - a) + \frac{1}{2}a^2, (a > 0).$
- Ta có hệ điều kiện: $\begin{cases} A \in (C) \\ IA \perp t_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - a)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right)^2 = 1 \\ \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u_{t_A}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - a)^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - 1\right)^2 = 1 \\ \left(a - t; \frac{1}{2}a^2 - 1\right) \cdot (1; a) = 0 \end{cases}$
- Vậy phương trình đường tròn (C): $\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{1 - (y - 1)^2}$
- Diện tích hình phẳng cần tính là

$$\bullet \quad S: \begin{cases} x = \sqrt{2}y \\ x = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-(y-1)^2} \Rightarrow S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left| \sqrt{2}y - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1-(y-1)^2} \right) \right| dy = \frac{27\sqrt{3}-8\pi}{24}. \\ y = 0; y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

CÂU 21:

- Vì $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x+f^2(x)}$ nên $g'(x) = \frac{x}{x+f^2(x)}$.
- Suy ra $\frac{1}{x+f^2(x)} = \frac{g'(x)}{x}$. Tích phân từng phần có:
- $\int_1^2 \frac{x^2}{x+f^2(x)} dx = \int_1^2 x^2 \times \frac{g'(x)}{x} dx = \int_1^2 xg'(x) dx = \int_1^2 x d(g(x))$
- $= xg(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 g(x) dx = 2g(2) - g(1) - \int_1^2 g(x) dx = 2 - 1 = 1.$

CÂU 22:

- Đổi biến $t = 2x + 2 \Rightarrow dt = 2dx; x = -2 \Rightarrow t = -2; x = 2 \Rightarrow t = 6$. Khi đó
- $I = \int_{-2}^2 (f(2x+2)+1) dx = \int_{-2}^6 (f(t)+1) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^6 f(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-2}^6 dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^6 f(t) dt + 4.$
- Trên đoạn $[-2;6]$ ta có $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = a \\ t = b \\ t = 6 \end{cases} \quad (-2 < a < b < 6)$. Dựa trên diện tích các hình phẳng có:
- $\int_{-2}^a f(t) dt = S_A = 32; \int_a^b f(t) dt = -S_B = -2; \int_b^6 f(t) dt = S_C = 3.$
- Vậy $\int_{-2}^6 f(t) dt = \int_{-2}^a f(t) dt + \int_a^b f(t) dt + \int_b^6 f(t) dt = 32 - 2 + 3 = 33$. Vậy $I = \frac{33}{2} + 4 = 20,5.$

CHỦ ĐỀ 1: CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$. Tính giá trị biểu thức $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $\Leftrightarrow f(z) = (2z-i)^4 - (z-1)^4 = 0$

Suy ra:

$$f(z) = 15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4). \text{ Vì } z_1^2 + 1 = (z_1-i)(z_1+i) \Rightarrow P = \frac{f(i) \cdot f(-i)}{225} \quad (1).$$

$$\text{Mà } f(i) = i^4 - (i-1)^4 = 5; f(-i) = (-3i)^4 - (i+1)^4 = 85. \text{ Vậy từ (1) } \Rightarrow P = \frac{17}{9}.$$

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Kí hiệu z_1, z_2 (qui ước: z_1 là số phức có phần ảo lớn hơn) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z \cdot \bar{z} = 1 \\ |z^2 + 2\bar{z} - 1| = \sqrt{\frac{8}{27}} \end{cases}$. Khi đó $3z_1 + 6z_2$ bằng:
- A. $-6 - \sqrt{5}i$. B. $6 - \sqrt{5}i$. C. $-6 + \sqrt{5}i$. D. $6 + \sqrt{5}i$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) suy ra $\bar{z} = x - yi$. Khi đó ta được.

$$\begin{cases} (x+yi)(x-yi) = 1 \\ \left| (x+yi)^2 + 2(x-yi) - 1 \right| = \sqrt{\frac{8}{27}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ 4x^3 - x^2 - 2x + \frac{52}{27} = 0 \end{cases}$$

$$\text{suy ra } z_1 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i, z_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i.$$

$$\text{Vậy } 3z_1 + 6z_2 = 6 - \sqrt{5}i$$

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho số phức $z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m$, m nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m \in [1; 50]$ để z là số thuần ảo?
- A. 24. B. 26. C. 25. D. 50.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } z = \left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^m = (2i)^m = 2^m \cdot i^m$$

z là số thuần ảo khi và chỉ khi $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ (do $z \neq 0; \forall m \in \mathbb{N}^*$).

Vậy có 25 giá trị m thỏa yêu cầu đề bài.

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{z}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H) .

A. $S = 32(6 - \pi)$. B. $S = 16(4 - \pi)$. C. 256. D. 64π .

Lời giải:

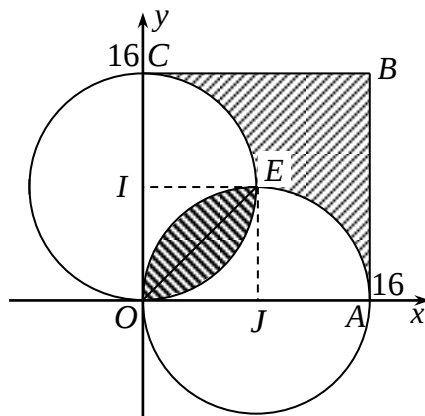
Chọn A

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có: $\frac{z}{16} = \frac{x}{16} + \frac{y}{16}i$; $\frac{16}{z} = \frac{16}{x - yi} = \frac{16x}{x^2 + y^2} + \frac{16y}{x^2 + y^2}i$.

Vì $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{z}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$ nên

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{16} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{y}{16} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{16x}{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{16y}{x^2 + y^2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 16 \\ 0 \leq y \leq 16 \\ 0 \leq 16x \leq x^2 + y^2 \\ 0 \leq 16y \leq x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 16 \\ 0 \leq y \leq 16 \\ (x-8)^2 + y^2 \geq 64 \\ x^2 + (y-8)^2 \geq 64 \end{cases}$$



Suy ra (H) là phần mặt phẳng giới hạn bởi hình vuông cạnh 16 và hai hình tròn (C_1) có tâm $I(8;0)$, bán kính $R_1 = 8$ và (C_2) có tâm $J(0;8)$, bán kính $R_2 = 8$.

Gọi S' là diện tích của đường tròn (C_2) .

Diện tích phần giao nhau của hai đường tròn là: $S_1 = 2\left(\frac{1}{4}S' - S_{OEJ}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\right)$.

Vậy diện tích S của hình (H) là:

$$S = 16^2 - \pi \cdot 8^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\right) = 256 - 64\pi + 32\pi - 64 = 192 - 32\pi = 32(6 - \pi).$$

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Biết $2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$, với C_n^k là các số tổ hợp chập k của n và $i^2 = -1$. Đặt $T_{k+1} = i^k C_n^k$, giá trị của T_8 bằng
- A. $-330i$. B. $-8i$. C. $-36i$. D. $-120i$.

Chọn B

Lời giải:

Ta có:

$$2^n (C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (C_n^0 + iC_n^1 + i^2 C_n^2 + i^3 C_n^3 + \dots + i^k C_n^k + \dots + i^n C_n^n) = 32768i$$

$$\Leftrightarrow 2^n (1+i)^n = 2^{15}i \quad (*)$$

Ta có $(1+i)^2 = 2i$ nên nếu $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, thì $(1+i)^n = (1+i)^{2k+1} = 2^k i^k (1+i)$ nên không thỏa mãn $(*)$.

Xét $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, thì $(1+i)^n = (1+i)^{2k} = 2^k i^k$, nên:

$$(*) \Leftrightarrow 2^{2k} \cdot 2^k i^k = 2^{15}i \Leftrightarrow 2^{3k} i^k = 2^{15}i \Rightarrow k = 5 \Rightarrow n = 10.$$

Từ đó ta có $T_8 = i^7 C_8^7 = -8i$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1. Cho số phức $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z|(2+i) = z - 1 + i(2z+3)$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = -1$. B. $S = 1$. C. $S = 7$. D. $S = -5$.

CÂU 2. Tính tổng S của các phần thực của tất cả các số phức z thỏa mãn điều kiện $\bar{z} = \sqrt{3}z^2$.

- A. $S = \sqrt{3}$. B. $S = \frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $S = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

CÂU 3. Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn 2 điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2017$ và $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Tính

$$P = \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right|.$$

- A. $P = 2017$. B. $P = 1008,5$. C. $P = 2017^2$. D. $P = 6051$.

CÂU 4: Số phức $z = (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

- A. $2^{1009} - 1$ B. $2^{1009} + 1$ C. $1 - 2^{1009}$ D. $-(2^{1009} + 1)$

CÂU 5: Cho số phức $z = (m+1-2i)(2m+3+i)$ với m là tham số thực. Với giá trị nào của m thì z có phần thực bằng 5.

- A. $m = 0; m = -\frac{5}{2}$. B. $m = 1; m = \frac{5}{2}$. C. $m = -1; m = \frac{3}{2}$. D. $m = 2; m = -\frac{5}{3}$.

CÂU 6: Cho số phức $z = \frac{9m-6+(m^3-4m^2+7m+2)i}{m+2i}$, với m là tham số thực. Với giá trị nào của m thì z là số thực.

- A. $m = -1, m = -3$. B. $m = 4, m = 5$. C. $m = 1, m = 3$. D. $m = 2, m = 4$.

CÂU 7: Trong mặt phẳng xOy , gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+3-\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Tìm phần ảo của z trong trường hợp góc xOM nhỏ nhất.

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. 0. D. $2\sqrt{3}$.

CÂU 8. Biết phương trình $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có $z_1, z_2, z_3 = 1 + 2i$ là nghiệm. Biết z_2 có phần ảo âm, tìm phần ảo của $w = z_1 + 2z_2 + 3z_3$.

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -1.

CÂU 9. Cho số phức $z = (1+i)^n$, biết $n \in \mathbb{N}$ và thỏa mãn $\log_4(n-3) + \log_4(n+9) = 3$. Tìm phần thực của số phức z .

- A. $a = 7$. B. $a = 0$. C. $a = 8$. D. $a = -8$.

CÂU 10: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = 1, |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng:

- A. 2. B. $\sqrt{3}$. C. $2 - \sqrt{3}$. D. 1.

CÂU 11: Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

- A. $|w| = 6$. B. $|w| = 16$. C. $|w| = 10$. D. $|w| = 13$.

CÂU 12: Cho số phức z . Gọi A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng (Oxy) biểu diễn các số phức z và $(1+i)z$. Tính $|z|$ biết diện tích tam giác OAB bằng 8.

- A. $|z| = 2\sqrt{2}$. B. $|z| = 4\sqrt{2}$. C. $|z| = 2$. D. $|z| = 4$.

CÂU 13: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{1+i\sqrt{7}}{z} + 5-i$. Tính $P = a + b$.

- A. $P = 2$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. D. $P = -2$.

CÂU 14. Cho số phức z thỏa mãn $z[(1+3i)|z| - 3+i] = 4\sqrt{10}$, $|z| > 1$. Tính $|z|$.

- A. $|z| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{4}}$. B. $|z| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{65}}{2}}$. C. $|z| = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{65}}{2}}$. D. $|z| = \sqrt{\frac{1+\sqrt{65}}{4}}$.

CÂU 15: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|z_1| = 4, |z_2| = 3, |z_3| = 2$ và $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng:

- A. 1 B. 8. C. 2 D. 6

CÂU 16: Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)|z|(z - (1-2i)z) = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

- A. $M = 19$. B. $M = 25$. C. $M = 5$. D. $M = \sqrt{19}$.

CÂU 17: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 5 - 2i|$ bằng:

- A. $\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$. C. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

CÂU 18: Cho số phức z thỏa điều kiện $\frac{1+5i}{1+i}z + \bar{z} = 10 - 4i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + iz + z^2$.

- A. $|w| = 5$. B. $|w| = \sqrt{47}$. C. $|w| = 6$. D. $|w| = \sqrt{41}$.

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ THỰC

- ❖ **VÍ DỤ 1:** Cho a là số thực, phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a-3=0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 . Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 120° , tính tổng các giá trị của a .
- A. -6. B. 6. C. -4. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1, z_2$ là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a-3=0$.

Do đó, ta phải có: $\Delta = a^2 - 12a + 16 < 0 \Leftrightarrow a \in (6-2\sqrt{5}; 6+2\sqrt{5})$.

$$\text{Khi đó, ta có: } \begin{cases} z_1 = \frac{2-a}{2} - \frac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \\ z_2 = \frac{2-a}{2} + \frac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \end{cases}.$$

$$\Rightarrow OM = ON = |z_1| = |z_2| = \sqrt{2a-3} \text{ và } MN = |z_1 - z_2| = \sqrt{-a^2+12a-16}.$$

$$\text{Tam giác } OMN \text{ cân nên } \angle MON = 120^\circ \Rightarrow \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON} = \cos 120^\circ \Leftrightarrow \frac{a^2 - 8a + 10}{2(2a-3)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 7 = 0 \quad a = 3 \pm \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là 6.

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 - 4ac < 0)$. Đặt $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{c}{2a}$. B. $P = \frac{c}{a}$. C. $P = \frac{2c}{a}$. D. $P = \frac{4c}{a}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } z_1, z_2 \text{ là các nghiệm phức của phương trình } az^2 + bz + c = 0 \text{ nên } z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$\text{Do đó } z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } z_1 - z_2 = \frac{i\sqrt{4ac-b^2}}{a}$$

$$\text{Suy ra } P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{a^2} = \frac{4c}{a}.$$

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho các số phức $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$. Tính giá trị của

$$\text{biểu thức } P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|.$$

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $P = 2$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow \frac{2z_2 + z_1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2} \Leftrightarrow (2z_2 + z_1)(z_1 + z_2) - z_1 z_2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2z_1 z_2 + 2z_2^2 + z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_2 &= 0 \Leftrightarrow 2z_1 z_2 + 2z_2^2 + z_1^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\frac{z_1}{z_2} + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z_1}{z_2} = -1 - i \\ \frac{z_1}{z_2} = -1 + i \end{cases} &\Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}; \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{1}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Tính giá trị của $P = |z_1^{2017} - z_2^{2017}|$.
- A. $P = \sqrt{3}$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 3$. D. $P = 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} z^2 - z + 1 = 0 &\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases} \\ \text{Ta có: } (1 + \sqrt{3}i)^{2017} &= \left[(1 + \sqrt{3}i)^3\right]^{672} (1 + \sqrt{3}i) = (-8)^{672} (1 + \sqrt{3}i). \\ (1 - \sqrt{3}i)^{2017} &= \left[(1 - \sqrt{3}i)^3\right]^{672} (1 - \sqrt{3}i) = (-8)^{672} (1 - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Cho phương trình $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 = 0$ có bốn nghiệm phức phân biệt là z_1, z_2, z_3, z_4 . Tính giá trị của biểu thức $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$.
- A. $T = 2i$. B. $T = 1$. C. $T = -2i$. D. $T = 0$.

Suy ra: $P = |z_1^{2017} - z_2^{2017}| = \frac{1}{2^{2017}} \cdot |(-8)^{672} (2\sqrt{3}i)| = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Đặt } f(z) &= z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 \Rightarrow f(z) = 0. \\ \text{Ta có } z^2 + 4 &= z^2 - 4i^2 = (z + 2i)(z - 2i) \\ \Rightarrow T &= [(z_1 + 2i)(z_2 + 2i)(z_3 + 2i)(z_4 + 2i)] \cdot [(z_1 - 2i)(z_2 - 2i)(z_3 - 2i)(z_4 - 2i)] \\ &= [f(-2i) \cdot f(2i)]^4 = 1. \end{aligned}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- CÂU 1.** Tìm tất cả các giá trị thực của a sao cho phương trình $z^2 - az + 2a - a^2 = 0$ có hai nghiệm phức có mô-đun bằng 1.
A. $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = 1; a = -1$.
- CÂU 2.** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 + 4z + 3 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$.
A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.
- CÂU 3:** Biết số phức z thỏa phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$. Giá trị của $P = z^{2016} + \frac{1}{z^{2016}}$ là.
A. $P = 0$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 3$.
- CÂU 4:** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 - z + 2 = 0$. Phần thực của số phức $[(i - z_1)(i - z_2)]^{2017}$ là.
A. 2^{2016} . **B.** 2^{1008} . **C.** -2^{2016} . **D.** -2^{1008} .
- CÂU 5:** Gọi z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 + 4z + 5 = 0$. Đặt $w = (1 + z_1)^{100} (1 + z_2)^{100}$, khi đó.
A. $w = -2^{51}$. **B.** $w = 2^{50}i$. **C.** $w = -2^{50}i$. **D.** $w = 2^{51}$.
- CÂU 6:** Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $|z| \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ **B.** $|z| \in (1; 2)$ **C.** $|z| \in [0; 1)$ **D.** $|z| \in [2; 3)$
- CÂU 7:** Biết $z_1, z_2 = 5 - 4i$ và z_3 là ba nghiệm của phương trình $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$ ($b, c, d \in \mathbb{R}$), trong đó z_3 là nghiệm có phần ảo dương. Phần ảo của số phức $w = z_1 + 3z_2 + 2z_3$ bằng
A. -12. **B.** -8. **C.** -4. **D.** 0.
- CÂU 8:** Kí hiệu z_1 và z_2 là các nghiệm của phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$ và A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1 và z_2 . Tính $\cos AOB$.
A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.
- CÂU 9 :** Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$. Tổng $T = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng.
A. $3\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 5.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn B

Theo Vi-et, ta có $z_1 \cdot z_2 = 2a - a^2$.

Mặt khác $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1$. Suy ra $2a - a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

CÂU 2: Chọn B

$$\text{Ta có } 2z^2 + 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

$$|z_1| + |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

CÂU 3: Chọn C

Ta có:

$$z + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \cdot \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) \end{cases}.$$

$$z^{2016} = 1^{2016} \left(\cos \frac{2016\pi}{3} + i \sin \frac{2016\pi}{3} \right) = 1.$$

$$z^{2016} = 1^{2016} \left(\cos \frac{-2016\pi}{3} + i \sin \frac{-2016\pi}{3} \right) = 1.$$

$$\text{Do đó } P = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

CÂU 4: Chọn D

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - z + 2 = 0$ nên $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } [(i - z_1)(i - z_2)]^{2017} &= [z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) + i^2]^{2017} = (2 - i - 1)^{2017} = (1 - i)^{2017}. \\ &= (1 - i)^{2016} (1 - i) = [(1 - i)^2]^{1008} (1 - i) = (-2i)^{1008} (1 - i) = -2^{1008} (1 - i) = -2^{1008} + 2^{1008}i. \end{aligned}$$

Vậy phần thực của $[(i - z_1)(i - z_2)]^{2017}$ là -2^{1008} .

CÂU 5: Chọn A

$$\text{Ta có: } z^2 + 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2 + i \\ z_2 = -2 - i \end{cases} \Rightarrow w = (-1 + i)^{100} + (-1 - i)^{100} = (-2i)^{50} + (2i)^{50} = -2^{51}.$$

CÂU 6: Chọn A

Đặt $z = x + yi$.

$$11z^{2018} + 10iz^{2017} + 10iz - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^{2017} = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \Rightarrow |z|^{2017} = \left| \frac{11 - 10iz}{11z + 10i} \right|$$

$$\Leftrightarrow |z|^{2017} = \frac{\sqrt{100(x^2 + y^2) + 121 + 220y}}{\sqrt{121(x^2 + y^2) + 100 + 220y}}$$

$$\text{TH1: } |z| < 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$$

$$\Rightarrow 100(x^2 + y^2) + 121 + 220y > 121(x^2 + y^2) + 100 + 220y$$

$$\Rightarrow |z| > 1 (\text{sai})$$

$$\text{TH2: } |z| > 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$$

$$\Rightarrow 100(x^2 + y^2) + 121 + 220y < 121(x^2 + y^2) + 100 + 220y$$

$$\Rightarrow |z| < 1 (\text{sai})$$

$$\text{TH2: } |z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \text{ Thay vào thấy đúng.}$$

$$\text{Vậy } |z| = 1.$$

CÂU 7: Chọn C

Phương trình $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{R}$ có ba nghiệm $z_1, z_2 = 5 - 4i$ và z_3 , trong đó z_3 là nghiệm có phần ảo dương nên $z_1 \in \mathbb{R}$ và $z_3 = \bar{z}_2 = 5 + 4i$.

$$\text{Suy ra: } w = z_1 + 3z_2 + 2z_3 = z_1 + 25 - 4i.$$

Do đó phần ảo của số phức $w = z_1 + 3z_2 + 2z_3$ bằng -4 .

CÂU 8: Chọn A

$$\text{Phương trình } z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - i \\ z_2 = 2 + i \end{cases}.$$

Vậy tọa độ hai điểm biểu diễn z_1 và z_2 là : $A(2;1)$, $B(2;-1)$.

$$\text{Ta có: } \cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \cdot OB} = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

Lời giải**Chọn D**

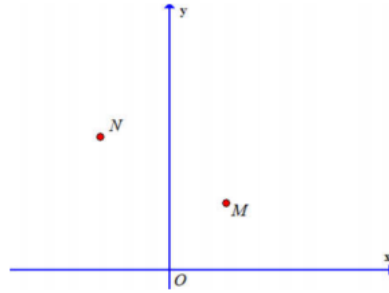
$$\text{Ta có } 2z^4 - 3z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \\ z^2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } z^2 = 2 \text{ suy ra } \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Với } z^2 = -\frac{1}{2} \text{ suy ra } \begin{cases} z = \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } T = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = 2 + 2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 5.$$

CHỦ ĐỀ 3: TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

❖ **VÍ DỤ 1:** Cho số phức z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là M , biết z^2 có điểm biểu diễn là N như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $|z| < 1$.

B. $1 < |z| < 3$.

C. $3 < |z| < 5$.

D. $|z| > 5$.

Lời giải

Chọn B

Theo hình vẽ ta có: $OM < ON \Leftrightarrow |z| < |z^2| = |z|^2 \Rightarrow |z| > 1$.

và $ON = OM^2 < 3OM \Leftrightarrow OM < 3 \Rightarrow |z| < 3$.

Vậy $1 < |z| < 3$.

❖ **VÍ DỤ 2:** Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + 2w| = 3$, $|2z + 3w| = 6$ và $|z + 4w| = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = z\bar{w} + \bar{z}w$.

A. $P = -14i$.

B. $P = -28i$.

C. $P = -14$.

D. $P = -28$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z + 2w| = 3 \Leftrightarrow |z + 2w|^2 = 9 \Leftrightarrow (z + 2w) \cdot (\overline{z + 2w}) = 9 \Leftrightarrow (z + 2w) \cdot (\bar{z} + 2\bar{w}) = 9$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + 2(z\bar{w} + \bar{z}w) + 4w\bar{w} = 9 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 9 \quad (1).$$

Tương tự:

$$|2z + 3w| = 6 \Leftrightarrow |2z + 3w|^2 = 36 \Leftrightarrow (2z + 3w) \cdot (\overline{2z + 3w}) = 36 \Leftrightarrow 4|z|^2 + 6P + 9|w|^2 = 36 \quad (2).$$

$$|z + 4w| = 7 \Leftrightarrow (z + 4w) \cdot (\bar{z} + 4\bar{w}) = 49 \Leftrightarrow |z|^2 + 4P + 16|w|^2 = 49 \quad (3).$$

Giải hệ phương trình gồm (1), (2), (3) ta có:
$$\begin{cases} |z|^2 = 33 \\ P = -28 \Rightarrow P = -28. \\ |w|^2 = 8 \end{cases}$$

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = |z - 2 - 3i|$. Biết $|z - 1 - 2i| + |z - 7 - 4i| = 6\sqrt{2}$, $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , khi đó x thuộc khoảng
- A. $(0; 2)$ B. $(1; 3)$ C. $(4; 8)$ D. $(2; 4)$

Lời giải

Chọn D

$$|z - 2 + 3i| = |z - 2 - 3i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow y = 0.$$

$$|z - 1 - 2i| + |z - 7 - 4i| = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + 4} + \sqrt{(x - 7)^2 + 16} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + 4} = 6\sqrt{2} - \sqrt{(x - 7)^2 + 16}$$

$$\Rightarrow -x + 11 = \sqrt{2x^2 - 28x + 130}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ (-x + 11)^2 = 2x^2 - 28x + 130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 11 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3. \text{ Thử lại thấy thỏa.}$$

- ❖ **VÍ DỤ 4:** Hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức a, b, c, d, h . Biết $a = -2 + i$, $h = 1 + 3i$ và số phức b có phần ảo dương. Khi đó, mô-đun của số phức b là

- A. $\sqrt{37}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn A

Do $ABCD$ là hình vuông và H là tâm hình vuông nên ta có $HB \perp AH, HB = AH$.

Do điểm A biểu diễn bởi số phức $a = -2 + i \Rightarrow A(-2; 1)$, Điểm H biểu diễn bởi $h = 1 + 3i \Rightarrow H(1; 3)$.

Đường thẳng BH nhận $\overrightarrow{AH}(3; 2)$ làm VTPT nên có phương trình là:

$$3(x - 1) + 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 9 = 0.$$

$$\text{Do } B \in BH \Rightarrow B\left(\frac{9 - 2m}{3}; m\right), m > 0.$$

$$\text{Ta có: } AH^2 = BH^2 \Leftrightarrow 3^2 + 2^2 = \left(\frac{9 - 2m}{3} - 1\right)^2 + (m - 3)^2 \Leftrightarrow 13m^2 - 78m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow m = 6.$$

Vậy $b = -1 + 6i$, suy ra mô-đun của số phức b là: $\sqrt{37}$.

❖ **VÍ DỤ 5:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\angle MON = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

A. $T = 18$.

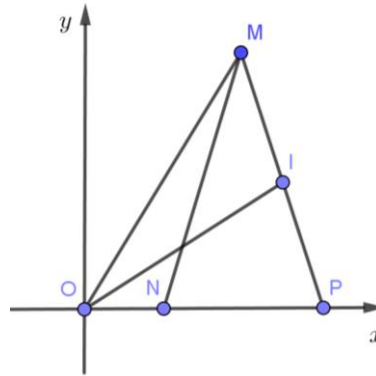
B. $T = 24\sqrt{3}$.

C. $T = 36\sqrt{2}$.

D. $T = 36\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Ta có

$$T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2|$$

Gọi P là điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$.

Khi đó ta có

$$|z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{2OI}| = 2PM \cdot OI.$$

Do $\angle MON = 60^\circ$ và $OM = OP = 6$ nên $\triangle MOP$ đều suy ra $PM = 6$ và $OI = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } T = 2PM \cdot OI = 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Cho số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Tính $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

A. $A = 1$.

B. $A = 1 + i$.

C. $A = -1$.

D. $A = 0$.

CÂU 2: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left| \frac{(12 - 5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13$.

A. $d: 6x + 4y - 3 = 0$.

B. $d: x + 2y - 1 = 0$.

C. $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

D. $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

CÂU 3: Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z + 2i - 1| = |z + i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1, 3)$.

A. $3 + i$.

B. $1 + 3i$.

C. $2 - 3i$.

D. $-2 + 3i$.

CÂU 4: Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left| z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2 \right| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

A. $d(d_1, d_2) = 2$.

B. $d(d_1, d_2) = 4$.

C. $d(d_1, d_2) = 1$.

D. $d(d_1, d_2) = 6$.

CÂU 5: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$.

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

B. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.

C. $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 16$.

D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

CÂU 6: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

A. $S = 9\pi$.

B. $S = 12\pi$.

C. $S = 16\pi$.

D. $S = 25\pi$.

CÂU 7: Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng tọa độ theo thứ tự biểu diễn các số phức $1 + 2i$; $1 + \sqrt{3} + i$; $1 + \sqrt{3} - i$; $1 - 2i$. Biết $ABCD$ là tứ giác nội tiếp tâm I . Tâm I biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $z = \sqrt{3}$.

B. $z = 1 - \sqrt{3}i$.

C. $z = 1$.

D. $z = -1$.

CÂU 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ thỏa mãn $|z - 1| \leq 2$. Tính diện tích của hình (H) .

A. 8π .

B. 18π .

C. 16π .

D. 4π .

CÂU 9: Biết số phức z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

A. 9π .

B. 16π .

C. 25 .

D. 4π .

CÂU 10: Trong mặt phẳng xOy , gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Tìm phần ảo của z trong trường hợp góc xOM nhỏ nhất.

A. $\sqrt{3}$.

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. 0 .

D. $2\sqrt{3}$.

CÂU 11: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + m - 1 + \sqrt{3}i| = 4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy .

A. $m = -5$; $m = 3$.

B. $m = 5$; $m = -3$.

C. $m = -3$.

D. $m = 5$.

CÂU 12: Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó.

A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$.

B. $I(-1; 2), R = 5$.

C. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$.

D. $I(1; -2), R = 5$.

CÂU 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R . Tính R .

A. $R = 5\sqrt{17}$

B. $R = 5\sqrt{10}$

C. $R = 5\sqrt{5}$

D. $R = 5\sqrt{13}$

CÂU 14: Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

A. 3π .

B. $\frac{3\pi}{2}$.

C. $\frac{3\pi}{4}$.

D. 6π .

CÂU 15. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = 2 - i, z_4 = -3i$. Gọi S là diện tích tứ giác $ABCD$. Tính S .

- A. $S = \frac{17}{2}$. B. $S = \frac{19}{2}$. C. $S = \frac{23}{2}$. D. $S = \frac{21}{2}$.

CÂU 16: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \frac{z + 2\bar{z} - 3i}{z^2 + 2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i) = 3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

- A. Góc phần tư thứ (I). B. Góc phần tư thứ (II).
C. Góc phần tư thứ (III). D. Góc phần tư thứ (IV).

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn D

Cách 1: Chọn $z_1 = 1, z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Khi đó:

$$A = 1^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0.$$

(Lí giải cách chọn là vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ nên các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị nhận gốc O làm trọng tâm, nên ta chỉ việc giải nghiệm của phương trình $z^3 = 0$ để chọn ra các nghiệm là z_1, z_2, z_3).

Cách 2: Nhận thấy $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$. Do đó $z_1 = \frac{1}{\bar{z}_1}, z_2 = \frac{1}{\bar{z}_2}, z_3 = \frac{1}{\bar{z}_3}$. Khi đó.

$$\begin{aligned} A &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) \\ &= 0 - 2\left(\frac{1}{\bar{z}_1\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_1\bar{z}_3} + \frac{1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}\right) \\ &= -2\left(\frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3}\right) = -2\left(\frac{\overline{z_1 + z_2 + z_3}}{\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3}\right) = -2.0 = 0. \end{aligned}$$

Cách 3: Vì $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ nên các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 là ba đỉnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị nhận gốc O làm trọng tâm.

Do đó ta có thể giả sử argumen của z_1, z_2, z_3 lần lượt là $\phi_1, \phi_1 + \frac{2\pi}{3}, \phi_1 + \frac{4\pi}{3}$.

Nhận thấy argumen của z_1^2, z_2^2, z_3^2 lần lượt là $2\phi_1, 2\phi_1 + \frac{4\pi}{3}, 2\phi_1 + \frac{8\pi}{3} = 2\phi_1 + \frac{2\pi}{3}$ (vẫn lệch đều pha $\frac{2\pi}{3}$) và $|z_1^2| = |z_2^2| = |z_3^2| = 1$ nên các điểm biểu diễn của z_1^2, z_2^2, z_3^2 cũng là ba đỉnh của tam

giác đều nội tiếp đường tròn đơn vị nhận gốc O làm trọng tâm. Từ đó $A = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Lưu ý: Nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$.

CÂU 2: Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \\ z \neq 2 + i \end{cases},$$

$$\text{ta có: } \left| \frac{(12 - 5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13 \Leftrightarrow |(12 - 5i)z + 17 + 7i| = 13|z - 2 - i|$$

$$\Leftrightarrow |(12 - 5i)(z + 1 + i)| = 13|z - 2 - i| \Leftrightarrow |12 - 5i||z + 1 + i| = 13|z - 2 - i| \Leftrightarrow 13|z + 1 + i| = 13|z - 2 - i|$$

$$\Leftrightarrow |z + 1 + i| = |z - 2 - i| \Leftrightarrow |x + yi + 1 + i| = |x + yi - 2 - i| \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4y - 3 = 0. (\text{thỏa điều kiện } z \neq 2 + i)$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $6x + 4y - 3 = 0$.

CÂU 3: Chọn A

Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Gọi $E(1, -2)$ là điểm biểu diễn số phức $1 - 2i$

Gọi $F(0, -1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có: $|z + 2i - 1| = |z + i| \Leftrightarrow ME = MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x - y - 2 = 0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3, 1) \Rightarrow z = 3 + i$.

CÂU 4: Chọn B

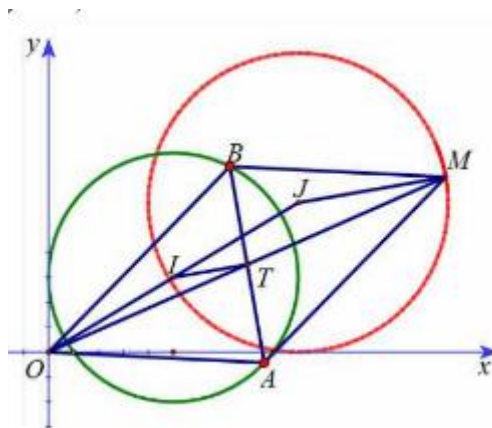
Gọi $M(x, y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

$$\text{Ta có: } \left| z^2 + \left(\bar{z}\right)^2 + 2|z|^2 \right| = 16 \Leftrightarrow \left| x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 + 2x^2 + 2y^2 \right| = 16$$

$$\Leftrightarrow |4x^2| = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow d(d_1, d_2) = 4$$

Ở đây lưu ý hai đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$ song song với nhau.

CÂU 5: Chọn B



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w . Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C): (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$ và $AB = |z_1 - z_2| = 8$.

(C) có tâm $I(5; 3)$ và bán kính $R = 5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT = \sqrt{IA^2 - TA^2} = 3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10; 6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM , do đó $JM = 2IT = 6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 36$.

CÂU 6: Chọn C

$$w = 2z + 1 - i \Rightarrow z = \frac{w-1+i}{2}$$

$$|z-3+4i| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{w-1+i}{2} - 3 + 4i \right| \leq 2 \Leftrightarrow |w-1+i-6+8i| \leq 4 \Leftrightarrow |w-7+9i| \leq 4 \quad (1)$$

Giả sử $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó $(1) \Leftrightarrow (x-7)^2 + (y+9)^2 \leq 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7; -9)$, bán kính $r = 4$.

Vậy diện tích cần tìm là $S = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

CÂU 7: Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} - i$; $\overrightarrow{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} + 3i$. Mặt khác $\frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{3}i$ nên

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D . Vậy $I(1; 0) \Rightarrow z = 1$.

CÂU 8: Chọn C

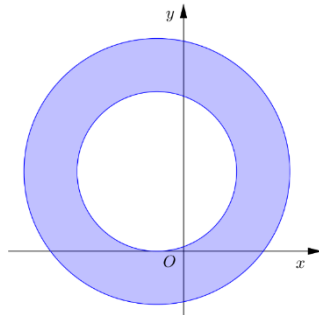
$$\text{Ta có } w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2 \Leftrightarrow w - 3 - \sqrt{3}i = (1 + \sqrt{3}i)(z - 1).$$

$$\Leftrightarrow |w - 3 - \sqrt{3}i| = |1 + \sqrt{3}i| |z - 1| \leq 4.$$

Vậy điểm biểu diễn số phức w nằm trên hình tròn có bán kính $r = 4$.

Diện tích hình (H) là $S = \pi r^2 = 16\pi$.

CÂU 9: Chọn B



Gọi $z = x + yi$.

$$(\text{với } x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow 3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5 \Leftrightarrow 9 \leq (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 25.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $R = 5$ và $r = 3$. Diện tích $S = \pi(R^2 - r^2) = 16\pi$.

CÂU 10: Chọn B

$$\text{Gọi } M(x; y) \text{ biểu diễn số phức } z. \text{ Ta có } |z + 3 - \sqrt{3}i| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x+3^2 + y-\sqrt{3}^2 = 3 \quad C.$$

xOM nhỏ nhất hoặc lớn nhất khi đường thẳng OM là tiếp tuyến của đường tròn C .

Khi đó phương trình đường thẳng chứa OM là $d_1: y = 0$; $d_2: y = -\sqrt{3}x$.

Trường hợp 1: $d_1: y = 0$ góc $xOM = 180^\circ$.

Trường hợp 2: $d_2: y = -\sqrt{3}x$ góc $xOM = 150^\circ$ khi đó số phức $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Vậy phần ảo của z trong trường hợp góc xOM nhỏ nhất là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

CÂU 11: Chọn B

Đặt $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó.

$$|z + m - 1 + \sqrt{3}i| = 4 \Leftrightarrow |x + yi + m - 1 + \sqrt{3}i| = 4.$$

$$\Leftrightarrow |(x + m - 1) + (y + \sqrt{3})i| = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x + m - 1)^2 + (y + \sqrt{3})^2} = 4.$$

$$\Leftrightarrow (x + m - 1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 16.$$

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(1 - m; -\sqrt{3})$ và bán kính

$$R = 4. \text{ Để đường tròn này tiếp xúc với trục } Oy \text{ thì } |1 - m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m = 4 \\ 1 - m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 5 \end{cases}.$$

Vậy $m = 5; m = -3$.

CÂU 12: Chọn B

Đặt $z = a + bi$ và $|z| = c > 0$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Lại có } w = (3 - 4i)z - 1 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{w + 1 - 2i}{3 - 4i}.$$

Gọi $w = x + yi$ với $x; y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó } |z| = c \Rightarrow \left| \frac{w + 1 - 2i}{3 - 4i} \right| = c \Leftrightarrow \frac{|w + 1 - 2i|}{|3 - 4i|} = c \Leftrightarrow |x + yi + 1 - 2i| = 5c.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2} = 5c \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25c^2.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn $I(-1; 2)$.

Khi đó chỉ có đáp án C có khả năng đúng và theo đó $R = 5 \Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$.

Thử $c = 1$ vào phương trình (1) thì thỏa mãn.

CÂU 13: Chọn D

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$ là đường tròn (C) tâm $I(1; 0)$ và bán kính

$R = 5$. Ta có (C) nhận trục hoành là trục đối xứng nên tọa độ điểm biểu diễn $\bar{z}$ cũng nằm trên

đường tròn này hay $|\bar{z} - 1| = 5$.

Ta có

$$w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i \Leftrightarrow w = (2 + 3i)(\bar{z} - 1) + (2 + 3i) + 3 + 4i \Leftrightarrow w - (5 + 7i) = (2 + 3i)(\bar{z} - 1)$$

$$\Leftrightarrow |w - (5 + 7i)| = |(2 + 3i)| |(\bar{z} - 1)| \Leftrightarrow |w - (5 + 7i)| = 5\sqrt{13}.$$

CÂU 14: Chọn C

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |2(x + yi) - (x - yi)| \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9y^2} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} \leq 1.$$

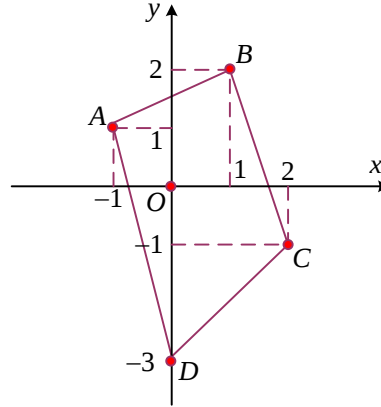
Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền trong của Elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} \leq 1$.

Ta có $a = 3, b = 1$, nên diện tích hình H cần tìm bằng $\frac{1}{4}$ diện tích Elip.

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a \cdot b = \frac{3\pi}{4}.$$

CÂU 15. Chọn A

Ta có $z_1 = -1 + i \Rightarrow A(-1; 1), z_2 = 1 + 2i \Rightarrow B(1; 2), z_3 = 2 - i \Rightarrow C(2; -1), z_4 = -3i \Rightarrow D(0; -3)$



$\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}, \vec{n} = (2; 3)$ là véc tơ pháp tuyến của AC , phương trình AC : $2(x+1) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$.

Khoảng cách từ B đến AC là:
 $d(B; AC) = \frac{|2 + 3 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} d(B; AC) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{2}.$

Khoảng cách từ D đến AC là: $d(D; AC) = \frac{|0 - 9 - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot d(D; AC) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{13} = 5.$$

$$\text{Vậy } S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{7}{2} + 5 = \frac{17}{2}.$$

CÂU 16: Chọn A

Ta có: $(2+i)(z+i) = 3-i+z \Rightarrow z = 1-i \Rightarrow w = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}i \Rightarrow M\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \tan \varphi = \frac{1}{5}.$

$$\text{Lúc đó: } \sin 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{5}{13} > 0; \cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi} = \frac{12}{13} > 0.$$

CHỦ ĐỀ 4: MAX, MIN, MODUN CỦA SỐ PHỨC

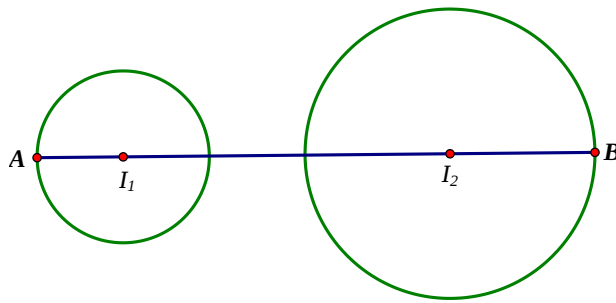
- ❖ **VÍ DỤ 1:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.
- A. $\sqrt{313} + 16$. B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313} + 8$. D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4$ (1); $|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$. Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6; -10)$ và bán kính $R_1 = 4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6; 3)$ và bán kính $R_2 = 12$.



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$.

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

- ❖ **VÍ DỤ 2:** Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng
- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |z - (1 + i\sqrt{2})| = 1$. Gọi $z_0 = 1 + i\sqrt{2}$ có điểm biểu diễn là $I(1; \sqrt{2})$.

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 . Vì $|z_1 - z_2| = 2$ nên I là trung điểm của AB .

Ta có $|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{2(OA^2 + OB^2)} = \sqrt{4OI^2 + AB^2} = \sqrt{16} = 4$.

Dấu bằng khi $OA = OB$.

- ❖ **VÍ DỤ 3:** Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u - 6i| + 3|u - 1 - 3i| = 5\sqrt{10}$, $|v - 1 + 2i| = |\bar{v} + i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|u - v|$ là:
- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$

Lời giải

Chọn B

▪ Ta có: $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10} \Leftrightarrow |u-6i|+|u-1-3i|=\frac{5\sqrt{10}}{3} \Rightarrow MF_1+MF_2=\frac{5\sqrt{10}}{3}$.

$\Rightarrow u$ có điểm biểu diễn M thuộc elip với hai tiêu điểm $F_1(0;6), F_2(1;3)$, tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)$ và độ dài

trục lớn là $2a=\frac{5\sqrt{10}}{3} \Rightarrow a=\frac{5\sqrt{10}}{6}$.

$\overline{F_1F_2}=(1;-3) \Rightarrow F_1F_2: 3x+y-6=0$.

▪ Ta có: $|\bar{v}-1+2i|=\left|\overline{\bar{v}+i}\right|=|\bar{v}-i| \Rightarrow NA=NB$

$\Rightarrow v$ có điểm biểu diễn N thuộc đường thẳng d là trung trực của đoạn AB với $A(1;-2), B(0;1)$.

$\overline{AB}=(-1;3), K\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow d: x-3y-2=0$.

$d(I,d)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{27}{2}-2\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

Để thấy $F_1F_2 \perp d \Rightarrow \min|u-v|=\min MN=|d(I,d)-a|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

❖ **VÍ DỤ 4:** Xét các số phức $z=a+bi$ ($a,b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$.

B. $2+\sqrt{3}$.

C. 3.

D. $4+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

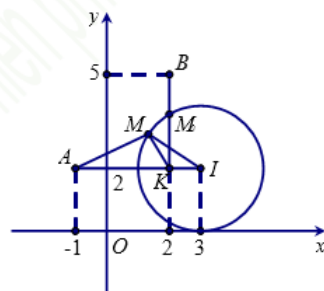
Cách 1:

Đặt $z-3-2i=w$ với $w=x+yi$ ($x,y \in \mathbb{R}$). Theo bài ra ta có $|w|=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Ta có $P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=|w+4|+2|w+1-3i|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$
 $=\sqrt{20+8x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{5+2x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$
 $=2\left(\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)=2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)$
 $\geq 2(|y|+|y-3|)\geq 2|y+3-y|=6$.

$P=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y(3-y)\geq 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z=2+(2+\sqrt{3})i$.



Cách 2:

$$|z - 3 - 2i| = 2 \Rightarrow MI = 2 \Rightarrow M \in (I; 2) \text{ với } I = (3; 2).$$

$$P = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = MA + 2MB \text{ với } A = (1; 2), B = (2; 5).$$

$$\text{Ta có } IM = 2; IA = 4. \text{ Chọn } K(2; 2) \text{ thì } IK = 1. \text{ Do đó ta có } IA \cdot IK = IM^2 \Rightarrow \frac{IA}{IM} = \frac{IM}{IK}$$

$$\Rightarrow \triangle IAM \text{ và } \triangle IMK \text{ đồng dạng với nhau} \Rightarrow \frac{AM}{MK} = \frac{IM}{IK} = 2 \Rightarrow AM = 2MK.$$

$$\text{Từ đó } P = MA + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2BK.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK .

$$\text{Từ đó tìm được } M = (2; 2 + \sqrt{3}).$$

Cách 3:

Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$. Đặt $I = (3; 2)$, $A(-1; 2)$ và $B(2; 5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I , bán kính $R = 2$ sao cho biểu thức $P = MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x; y)$ sao cho $MA = 2MK \forall M \in (C)$.

$$\text{Ta có } MA = 2MK \Leftrightarrow MA^2 = 4MK^2 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 = 4(\overline{MI} + \overline{IK})^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} = 4(MI^2 + IK^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IK}) \Leftrightarrow 2\overline{MI}(\overline{IA} - 4\overline{IK}) = 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 (*)$$

$$(*) \text{ luôn đúng } \forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{IA} - 4\overline{IK} = \vec{0} \\ 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{IA} - 4\overline{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - 3) = -4 \\ 4(y - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Thử trực tiếp ta thấy $K(2; 2)$ thỏa mãn $3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0$.

Vì $BI^2 = 1^2 + 3^2 = 10 > R^2 = 4$ nên B nằm ngoài (C) .

Vì $KI^2 = 1 < R^2 = 4$ nên K nằm trong (C) .

$$\text{Ta có } MA + 2MB = 2MK + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2KB.$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK .

Do đó $MA + 2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK .

Phương trình đường thẳng $BK: x = 2$.

$$\text{Phương trình đường tròn } (C): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 2 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Thử lại thấy $M(2; 2 + \sqrt{3})$ thuộc đoạn BK .

$$\text{Vậy } a = 2, b = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a + b = 4 + \sqrt{3}.$$

- ❖ **VÍ DỤ 5:** Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz + 1 + 2i| = 3$ và biểu thức $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T . Giá trị tích của $M.n$ là
- A. $10\sqrt{21}$ B. $6\sqrt{13}$ C. $5\sqrt{21}$ D. $2\sqrt{13}$

Lời giải

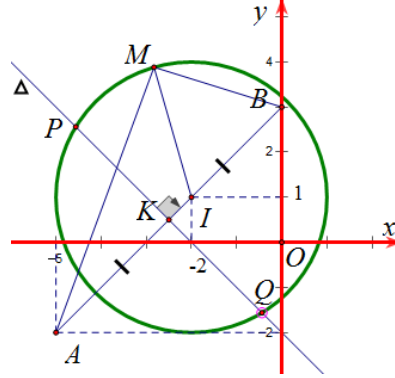
Chọn A

Gọi $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $M(x; y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z .

Theo giả thiết, $|iz + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - i| = 3 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Ta có $T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i| = 2MA + 3MB$, với $A(-5; -2)$ và $B(0; 3)$.

Nhận xét rằng A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$.



Cách 1:

Gọi Δ là đường trung trực của AB , ta có $\Delta: x + y + 5 = 0$.

$T = 2MA + 3MB \leq PA + PB$. Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv P$ hoặc $M \equiv Q$.

Giải hệ $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow P\left(\frac{-8 - \sqrt{2}}{2}; \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } Q\left(\frac{-8 + \sqrt{2}}{2}; -\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$.

Khi đó $M = \max T = 5\sqrt{21}$.

Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.

Cách 2:

Ta có A, B, I thẳng hàng và $2IA = 3IB$ nên $2\vec{IA} + 3\vec{IB} = \vec{0}$.

$\Rightarrow 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 = 105$.

Do đó $T^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}MA + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}MB)^2 \leq 5(2MA^2 + 3MB^2) = 525$ hay $T \leq 5\sqrt{21}$.

Khi đó $M = \max T = 5\sqrt{21}$. Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv P$ hoặc $M \equiv Q$.

Vậy $M.n = 10\sqrt{21}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

CÂU 1: Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó môđun của số phức $w = z_1 + z_2$ là

- A. $|w| = 2\sqrt{2}$. B. $|w| = 2$. C. $|w| = \sqrt{2}$. D. $|w| = 1 + \sqrt{2}$.

CÂU 2: Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 3 + 4i$ và $|z - w| = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z| + |w|$.

- A. $\max T = \sqrt{176}$. B. $\max T = 14$. C. $\max T = 4$. D. $\max T = \sqrt{106}$.

CÂU 3: số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z + 2| + |(1 + i)z - 2| = 4\sqrt{2}$. Gọi $m = \max|z|$, $n = \min|z|$ và số phức $w = m + ni$. Tính $|w|^{2018}$

- A. 4^{1009} . B. 5^{1009} . C. 6^{1009} . D. 2^{1009} .

- CÂU 4:** Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$?
- A. $M = \frac{10}{3}$ B. $M = 1 + \sqrt{13}$ C. $M = 4\sqrt{5}$ D. $M = 9$
- Chọn C**
- CÂU 5:** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$, với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tính tỷ số $\frac{M}{m}$.
- A. $\frac{M}{m} = 5$ B. $\frac{M}{m} = 3$ C. $\frac{M}{m} = \frac{3}{4}$ D. $\frac{M}{m} = \frac{1}{3}$
- CÂU 6:** Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-i|=1$, số phức w thỏa mãn $|\bar{w}-2-3i|=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-w|$.
- A. $\sqrt{13}-3$ B. $\sqrt{17}-3$ C. $\sqrt{17}+3$ D. $\sqrt{13}+3$
- CÂU 7:** Cho số phức z thỏa $|z|=1$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1|$. Tính $M-m$.
- A. $m=-4, n=3$. B. $m=4, n=3$ C. $m=-4, n=4$. D. $m=4, n=-4$.
- CÂU 8:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?
- A. $m = \sqrt{2}-1$. B. $m = 2\sqrt{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 2\sqrt{2}-2$.
- CÂU 9:** Xét các số phức $z = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $4(z-\bar{z})-15i = i(z+\bar{z}-1)^2$. Tính $F = -a+4b$ khi $\left| z - \frac{1}{2} + 3i \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất
- A. $F = 7$. B. $F = 6$. C. $F = 5$. D. $F = 4$.
- CÂU 10:** Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+1| + |z^2 - z + 1|$. Giá trị của $M.m$ bằng
- A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{13\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
- CÂU 11:** Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1+3z_2|$.
- A. $\sqrt{313}+16$. B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313}+8$. D. $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.
- CÂU 12:** Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=12$ và $|z_2-3-4i|=5$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là:
- A. 0. B. 2 C. 7 D. 17
- CÂU 13:** các số phức z thỏa mãn $|z-4+3i|=2$. Giả sử biểu thức $P = |z|$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất khi z lần lượt bằng $z_1 = a_1 + b_1i$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$) và $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_2, b_2 \in \mathbb{R}$). Tính $S = a_1 + a_2$
- A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 8$. D. $S = 10$.

CÂU 14: Cho các số phức z thỏa mãn $|z^2 + 4| = |(z - 2i)(z - 1 + 2i)|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 3 - 2i|$.

- A. $P_{\min} = 4$. B. $P_{\min} = 2$. C. $P_{\min} = \frac{7}{2}$. D. $P_{\min} = 3$.

CÂU 15: Cho các số phức z thỏa mãn $|z - 1 - i| + |z - 8 - 3i| = \sqrt{53}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z + 1 + 2i|$.

- A. $P_{\max} = 53$. B. $P_{\max} = \frac{\sqrt{185}}{2}$. C. $P_{\max} = \sqrt{106}$. D. $P_{\max} = \sqrt{53}$.

CÂU 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i|$ bằng:

- A. $4 + 2\sqrt{3}$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $4 + \frac{14}{\sqrt{15}}$. D. $2 + \frac{7}{\sqrt{15}}$.

GIẢI CHI TIẾT

CÂU 1: Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Đặt } z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}) \text{ thì } |z^2 + 1| = 2|z| &\Leftrightarrow |(a + bi)^2 + 1| = 2|a + bi| \\ &\Leftrightarrow |a^2 - b^2 + 1 + 2abi| = 2|a + bi| \Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 1)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 + 1 - 2a^2 - 6b^2 + 2a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1)^2 - 4b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1 - 2b)(a^2 + b^2 - 1 + 2b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 1 - 2b = 0 \\ a^2 + b^2 - 1 + 2b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } a^2 + b^2 - 1 - 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = 2.$$

Khi đó tập hợp điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_1(0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_1(0; \sqrt{2} + 1)$ và $M_2(0; 1 - \sqrt{2})$
 $\Rightarrow w = (\sqrt{2} + 1)i + (1 - \sqrt{2})i \Rightarrow w = 2i \Rightarrow |w| = 2$

$$\text{TH2: } a^2 + b^2 - 1 + 2b = 0 \Leftrightarrow a^2 + (b + 1)^2 = 2.$$

Khi đó tập hợp điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I_2(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$, giao điểm của OI (trục tung) với đường tròn là $M_3(0; \sqrt{2} - 1)$ và $M_4(0; -\sqrt{2} - 1)$
 $\Rightarrow w = (\sqrt{2} - 1)i + (-1 - \sqrt{2})i \Rightarrow w = -2i \Rightarrow |w| = 2$.

CÂU 2. Chọn D

Đặt $z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$. Do $z + w = 3 + 4i$ nên $w = (3 - x) + (4 - y)i$.

$$\text{Mặt khác } |z - w| = 9 \text{ nên } |z - w| = \sqrt{(2x - 3)^2 + (2y - 4)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y + 25} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 28 \ (1). \text{ Suy ra } T = |z| + |w| = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(3 - x)^2 + (4 - y)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $T^2 \leq 2(2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y + 25) \ (2)$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3 - x)^2 + (4 - y)^2}.$$

Từ (1) và (2) ta có $T^2 \leq 2 \cdot (28 + 25) \Leftrightarrow -\sqrt{106} \leq T \leq \sqrt{106}$. Vậy $\text{Max} T = \sqrt{106}$.

CÂU 3: Chọn C

Ta có $|(1+i)z+2|+|(1+i)z-2|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow |z+1-i|+|z-1+i|=4$.

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z , $F_1(-1;1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_1=-1+i$ và $F_2(1;-1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_2=1-i$. Khi đó ta có $MF_1+MF_2=4$. Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là Elip nhận F_1 và F_2 làm hai tiêu điểm.

Ta có $F_1F_2=2c \Leftrightarrow 2c=2\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\sqrt{2}$.

Mặt khác $2a=4 \Leftrightarrow a=2$ suy ra $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.

Do đó Elip có độ dài trục lớn là $A_1A_2=2a=4$, độ dài trục bé là $B_1B_2=2b=2\sqrt{2}$.

Mặt khác O là trung điểm của AB nên $m=\max|z|=\max OM=OA_1=a=2$ và $n=\min|z|=\min OM=OB_1=b=\sqrt{2}$.

Do đó $w=2+\sqrt{2}i$ suy ra $|w|=\sqrt{6} \Rightarrow |w|^{2018}=6^{1009}$.

CÂU 4: Gọi $A(0;1)$, $B(-1;3)$, $C(1;-1)$. Ta thấy A là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MA^2 = \frac{MB^2 + MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 = 2MA^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2 + 10.$$

Ta lại có : $5|z-i|=|z+1-3i|+3|z-1+i|$

$$\Leftrightarrow 5MA = MB + 3MC \leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{MB^2 + MC^2}$$

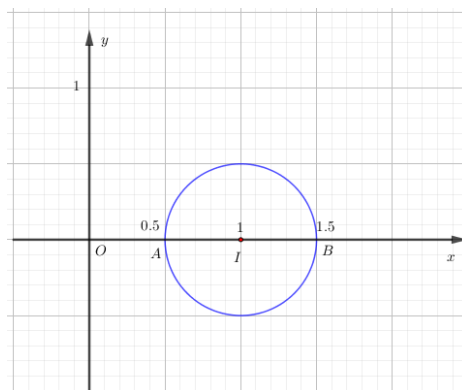
$$\Rightarrow 25MA^2 \leq 10(2MA^2 + 10) \Rightarrow MC \leq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Mà } |z-2+3i| = |(z-i)+(-2+4i)| \leq |z-i| + |2-4i| \leq |z-i| + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} |z-i|=2\sqrt{5} \\ \frac{a}{-2} = \frac{b-1}{4} \end{cases}, \text{ với } z=a+bi; a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=2-3i \text{ (loại)} \\ z=-2+5i \end{cases}.$$

CÂU 5: Chọn B



$$\text{Gọi } T = \frac{z+i}{z} \Rightarrow (T-1)z = i.$$

Nếu $T=1 \Rightarrow$ Không có số phức nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Nếu } T \neq 1 \Rightarrow z = \frac{i}{T-1} \Leftrightarrow |z| = \left| \frac{i}{T-1} \right| \geq 2 \Rightarrow |T-1| \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức T là hình tròn tâm $I(1;0)$ có bán kính $R = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M = OB = OI + R = \frac{3}{2} \\ m = OA = |OI - R| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{M}{m} = 3.$$

CÂU 6: Chọn B

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + iy$ thì M thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1; 1)$, bán kính $R_1 = 1$.

$N(x'; y')$ biểu diễn số phức $w = x' + iy'$ thì N thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; -3)$, bán kính $R_2 = 2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$ chính là giá trị nhỏ nhất của đoạn MN .

Ta có $\overrightarrow{I_1 I_2} = (1; -4) \Rightarrow I_1 I_2 = \sqrt{17} > R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) ở ngoài nhau.

$$\Rightarrow MN_{\min} = I_1 I_2 - R_1 - R_2 = \sqrt{17} - 3$$

CÂU 7: Chọn A

Vì $|z| = 1$ và $z\bar{z} = |z|^2$ nên ta có $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

$$\text{Từ đó, } P = |z^5 + \bar{z}^3 + 6z| - 2|z^4 + 1| = |z||z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^4 + 1| = |z^4 + \bar{z}^4 + 6| - 2|z^4 + 1|.$$

Đặt $z^4 = x + iy$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Do $|z| = 1$ nên $|z^4| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ và $-1 \leq x, y \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= |x + iy + x - iy + 6| - 2|x + iy + 1| = |2x + 6| - 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ &= 2x + 6 - 2\sqrt{2x+2} = (\sqrt{2x+2} - 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

Do đó $P \geq 3$. Lại có $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{2x+2} \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{2x+2} - 1 \leq 1 \Rightarrow P \leq 4$.

Vậy $M = 4$ khi $z^4 = \pm 1$ và $m = 3$ khi $z^4 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Suy ra $M - m = 1$.

CÂU 8: Chọn D

Đặt $z_1 = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai$

$$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a+b) + (b-a)i.$$

$$\text{Nên } |z_1 - z_2| = \sqrt{(a+b)^2 + (b-a)^2} = \sqrt{2} \cdot |z_1|$$

$$\text{Ta lại có } 2 = |z_1 + 1 - i| \leq |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}. \text{ Suy ra } |z_1 - z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1| \geq 2\sqrt{2} - 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} < 0$.

$$\text{Vậy } m = \min |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2.$$

CÂU 9: Chọn A

Ta có

$$4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2 \Leftrightarrow 4(a + bi - a + bi) - 15i = i(a + bi + a - bi - 1)^2 \Leftrightarrow 8b - 15 = (2a - 1)^2$$

suy ra $b \geq \frac{15}{8}$.

$$\left| z - \frac{1}{2} + 3i \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(2a-1)^2 + (2b+6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{8b-15+4b^2+24b+36} = \frac{1}{2} \sqrt{4b^2+32b+21}$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + 32x + 21$ với $x \geq \frac{15}{8}$

$f'(x) = 8x + 32 > 0, \forall x \geq \frac{15}{8}$ suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\left[\frac{15}{8}; +\infty\right)$ nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{15}{8}\right) = \frac{4353}{16}.$$

Do đó $\left|z - \frac{1}{2} + 3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4353}{16}}$ khi $b = \frac{15}{8}; a = \frac{1}{2}$.

Khi đó $F = -a + 4b = 7$.

CÂU 10: Chọn A

Đặt $t = |z+1| \leq |z|+1 = 2$ nên $t \in [0; 2]$.

Do $|z|=1$ nên $z\bar{z}=1 \Rightarrow P = |z+1| + |z^2 - z + z\bar{z}| = |z+1| + |z+\bar{z}-1|$.

Ta có $t^2 = |z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = z\bar{z} + (z+\bar{z}) + 1 = 2 + (z+\bar{z})$ nên $z+\bar{z} = t^2 - 2$.

Vậy $P = f(t) = t + |t^2 - 3|$, với $t \in [0; 2]$.

Khi đó, $f(t) = \begin{cases} t^2 + t - 3 & \text{khi } \sqrt{3} \leq t \leq 2 \\ -t^2 + t + 3 & \text{khi } 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases}$ nên $f'(t) = \begin{cases} 2t + 1 & \text{khi } \sqrt{3} < t \leq 2 \\ -2t + 1 & \text{khi } 0 \leq t < \sqrt{3} \end{cases}$.

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

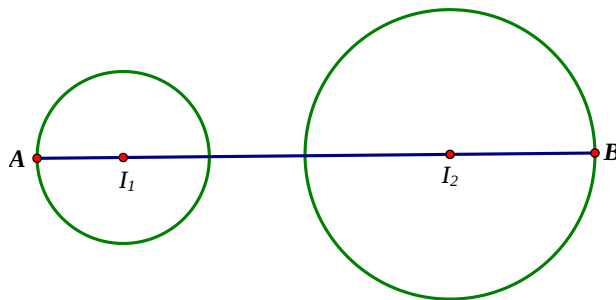
$$f(0) = 3; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}; f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}; f(2) = 3.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{13}{4}; m = \sqrt{3} \text{ nên } M.m = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

CÂU 11: Chọn A

Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4$ (1); $|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow |(-3z_2) - 6 - 3i| = 12$ (2).

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $2iz_1$, B là điểm biểu diễn số phức $-3z_2$. Từ (1) và (2) suy ra điểm A nằm trên đường tròn tâm $I_1(-6; -10)$ và bán kính $R_1 = 4$; điểm B nằm trên đường tròn tâm $I_2(6; 3)$ và bán kính $R_2 = 12$.



Ta có $T = |2iz_1 + 3z_2| = AB \leq I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{12^2 + 13^2} + 4 + 12 = \sqrt{313} + 16$.

Vậy $\max T = \sqrt{313} + 16$.

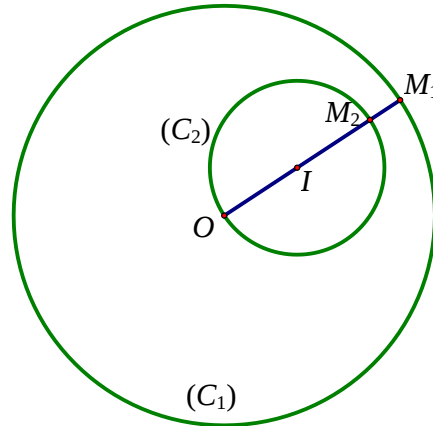
CÂU 12: Chọn B

Gọi $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$, trong đó $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$; đồng thời $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 .

Theo giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 144 \\ (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 4)^2 = 25 \end{cases}.$$

Do đó M_1 thuộc đường tròn (C_1) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R_1 = 12$, M_2 thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R_2 = 5$.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} O \in (C_2) \\ OI = 5 < 7 = R_1 - R_2 \end{cases}$ nên (C_2) chứa trong (C_1) .



Khi đó $|z_1 - z_2| = M_1M_2$. Suy ra $|z_1 - z_2|_{\min} \Leftrightarrow (M_1M_2)_{\min} \Leftrightarrow M_1M_2 = R_1 - 2R_2 = 2$.

CÂU 13: Chọn C

Gọi $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$

$$|z - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |a + ib - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |a - 4 + (b + 3)i| = 2$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)^2 + (b + 3)^2 = 4$$

Khi đó tập hợp các điểm $M(a; b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$ thuộc vào đường tròn (C) có tâm $I(4; -3)$, $R = 2$. Ta có $OI = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Suy ra $|z|_{\max} = OI + R = 5 + 2 = 7$, $|z|_{\min} = |OI - R| = 5 - 2 = 3$.

Gọi Δ là đường thẳng qua hai điểm OI ta có

phương trình của (Δ) : $3x + 4y = 0$. Gọi M và N lần lượt là hai giao điểm của (Δ) và (C)

sao cho $OM = 3$ và $ON = 7$ khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OI} \Rightarrow M\left(\frac{12}{5}; -\frac{9}{5}\right) \\ \overrightarrow{ON} = \frac{7}{5}\overrightarrow{OI} \Rightarrow N\left(\frac{28}{5}; -\frac{21}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}i \\ z_2 = \frac{28}{5} - \frac{21}{5}i \end{cases} \Rightarrow S = \frac{28}{5} + \frac{12}{5} = 8.$$

CÂU 14: Chọn D

$$\text{Ta có } |z^2 + 4| = |(z - 2i)(z - 1 + 2i)| \Leftrightarrow |z - 2i|(|z + 2i| - |z - 1 + 2i|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z - 2i| = 0 \\ |z + 2i| = |z - 1 + 2i| \end{cases}.$$

Do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $A(0; 2)$ và đường trung trực của đoạn thẳng BC với $B(0; -2)$, $C(1; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; 0)$, $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ là trung điểm BC nên phương trình đường trung trực của BC là

$$\Delta: 2x - 1 = 0. \text{ Đặt } D(-3; 2), DA = 3, d(D, \Delta) = \frac{7}{2}.$$

Khi đó $P = |z + 3 - 2i| = DN$, với N là điểm biểu diễn cho z .

Suy ra $\min P = \min \{DA, d(D, \Delta)\} = 3$.

CÂU 15: Chọn C

Xét $A(1;1), B(8;3)$ ta có $AB = \sqrt{53}$

$\Rightarrow$ các điểm biểu diễn z là đoạn thẳng AB

$P = |z + 1 + 2i| = MM'$ với M là điểm biểu diễn số phức z , M' là điểm biểu diễn số phức $z' = -1 - 2i$

Phương trình đường thẳng $AB: -2x + 7y - 5 = 0$

Hình chiếu vuông góc của M' lên AB là $M_1 = \left(-\frac{87}{53}; \frac{13}{53}\right)$

Ta có A nằm giữa M_1 và B nên $P = MM'$ lớn nhất $\Leftrightarrow MM_1$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow z = 8 + 3i$
 $\Rightarrow P_{\max} = \sqrt{106}$.

CÂU 16: Chọn A

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có $|z| \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

Suy ra $-2 \leq x, y \leq 2$.

Khi đó, $P = 2|z + 1| + 2|z - 1| + |z - \bar{z} - 4i| = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + |y-2|\right)$

$\Leftrightarrow P = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + |y-2|\right) \geq 2\left(2\sqrt{1+y^2} + 2 - y\right)$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y$ trên đoạn $[-2; 2]$, ta có:

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3}$; $f(-2) = 4 + 2\sqrt{5}$; $f(2) = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $\min_{[-2; 2]} f(y) = 2 + \sqrt{3}$ khi $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do đó $P \geq 2(2 + \sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min} = 4 + 2\sqrt{3}$ khi $z = \frac{1}{\sqrt{3}}i$.