Chương 07

ĐẠO HÀM

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 11

Biên soạn

LÊ MINH TÂM

Mục lục

Đại số & Giải tích

Bài 01

ĐẠO HÀM

ĐẠO HÀM

A Lý thuyết

1. Đạo hàm.

Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$.

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0, tức là:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

⌘ Tính đạo hàm bằng định nghĩa:

Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b), x\neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Chú ý

Trong định nghĩa & quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x\in(a;b)$.

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Ví dụ 2.1.

Cho hàm số $y=f(x)=x^2$ (C) và điểm $M(1;1)\in(C)$

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C)

Lời giải

....

....

....

....

....

....

⌘ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ và điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$.

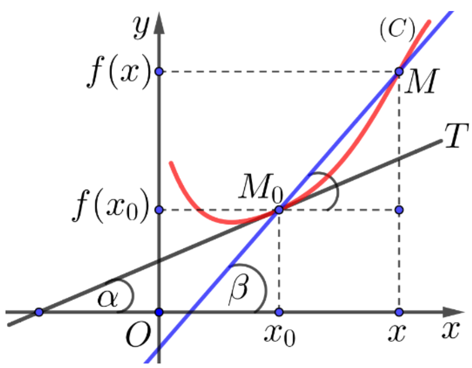
Xét $M(x;f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C).

Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).

Hệ số góc của cát tuyến MM_0 được tính bởi công thức $k_{MM_0}=\tan\beta=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0.

Giả sử cát tuyến MM_0 có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm



Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là $k_{M_0T}=\tan\alpha=\lim\limits_{x\to x_0}(\tan\beta)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Đạo hàm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$

Tiếp tuyến M_0T có phương trình: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

- Nếu hàm số $s=f(t)$ biểu thị *quãng đường* di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.
- Nếu hàm số $T=f(t)$ biểu thị *nhiệt độ* T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

4. Số e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e=2,718281828...$ *(Số thập phân vô hạn không tuần hoàn)*.

B Bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa

Phương pháp

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b)$ và $x\neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (2) $f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (3) $f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

☑ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0\Leftrightarrow f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$.

☑ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y=f(x)=2x^3+x-1$ tại $x_0=0$ (2) $y=f(x)=x^2+2x-1$ tại $x_0=1$

Lời giải

Ví dụ 1.2.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y=f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ tại $x_0=-2$ (2) $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$ tại $x_0=3$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x=1$

(2) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.4.

Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ a & \text{khi } x=1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Tính đạo hàm tại 1 điểm bất kỳ trên (a;b) bằng định nghĩa

Phương pháp

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $x_0\in(a;b)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $f(x)-f(x_0)$ với $x\in(a;b)$ và $x\neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

☑ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa của các hàm số sau:

(1) $y=f(x)=4x+3$

(2) $y=f(x)=2024x+2025$

(3) $y=f(x)=2x^2+2024$

(4) $y=f(x)=x^2-3x+1$

(5) $y=f(x)=x^3-2x$

(6) $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

Lời giải

Dạng 3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Phương pháp

⌘ Ý nghĩa hình học: *(Phương trình tiếp tuyến)*

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), $M(x_0;y_0)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ có dạng: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Trong đó: x_0 hoành độ tiếp điểm.

y_0 tung độ tiếp điểm.

$f'(x_0)$ hệ số góc tiếp tuyến.

Bài toán: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ (C) tại $x_0=a$.

- **Bước 1.** Tính $f'(x)$.
- **Bước 2.** Từ $x_0 \longrightarrow \begin{cases} f'(x_0) \\ y_0 \end{cases}$.
- **Bước 3.** Hoàn thiện phương trình tiếp tuyến cần tìm $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Ví dụ 3.1.

Viết phương trình tiếp tuyến của

(1) Đồ thị hàm số $y=x^2+2x-4$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0=0$.

(2) Đồ thị hàm số $y=x^3+1$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0=1$.

(3) Đồ thị hàm số $y=2x^2-3$ (C) tại điểm có tung độ $y_0=-1$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Phương pháp

⌘ Ý nghĩa vật lý: *(quãng đường, nhiệt độ, điện lượng)*

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị *quãng đường* di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị *nhiệt độ* T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

Ví dụ 4.1.

Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

(1) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0.

(2) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$

Lời giải

....

....

....

....

Dạng 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0

Phương pháp

☑ Cho hàm số $y=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\neq a \\ h(x;m) & \text{khi } x=a \end{cases}$ hoặc $y=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\geq a \\ h(x;m) & \text{khi } x<a \end{cases}$. Tìm tham số m để hàm số có đạo hàm tại $x=a$

- **Bước 1.** Xác định $\lim\limits_{x\to a^+} f(x;m)$; $\lim\limits_{x\to a^-} g(x;m); f(a)$.
- **Bước 2.** Hàm số liên tục tại $x=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x;m)=\lim\limits_{x\to a^-} g(x;m)=f(a)\to a=?$
- **Bước 3.** Tính $f'(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$; $f'(a^-)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- **Bước 4.** Hàm số có đạo hàm tại $x=a \Leftrightarrow f'(a^+)=f'(a^-)$.

Ví dụ 5.1.

Cho hàm số $y=\begin{cases} 2x^2-x+a & \text{khi } x\neq 0 \\ x^2 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

....

....

....

....

Ví dụ 5.2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{khi } x\leq 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Tìm a, b thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

Lời giải

....

....

....

....

....

C Luyện tập

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

(1) $f(x)=2x-1$ tại $x=-2$

(2) $f(x)=2024-2023x$ tại $x=1$

(3) $f(x)=x^2+2x-1$ tại $x=1$

(4) $f(x)=2x^3+1$ tại $x=2$

(5) $f(x)=2x^2+x+1$ tại $x=1$

(6) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x=2$

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ tại $x=2$

(8) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ tại $x=3$

(9) $f(x)=\sqrt{x+1}$ tại $x=1$

(10) $f(x)=\sqrt{2023+x}$ tại $x=2$

Câu 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm (nếu có):

(1) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 3\\ x^2 & \text{khi } x<3\end{cases}$. Tính $f'(3)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1-2x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

(3) $f(x)=|x|$. Tính $f'(0)$.

(4) $f(x)=x+|x|$. Tính $f'(0)$.

(5) $f(x)=2x+|x-1|$. Tính $f'(1)$.

(6) $f(x)=x+|x|$. Tính $f'(1)$.

(7) $f(x)=|x|-2023$. Tính $f'(0)$.

(8) $f(x)=|x^2+2x|$. Tính $f'(0)$.

(9) $y=\dfrac{|x|}{x+1}$. Tính $f'(0)$.

(10) $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$. Tính $f'(-1)$.

Câu 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ (nếu có):

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & \text{khi } x\ne 1\\ -2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\ne 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\ne 3\\ -1 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tính $f'(3)$

(5) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x>1\\ x^2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tính $f'(1)$

(6) $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{4-x} & \text{khi } x\ne 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$

(8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

(9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

(10) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Câu 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ (nếu có):

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Câu 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0

(1) Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

(2) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{khi } x\geq 0\\ ax-b-1 & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

(3) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\geq 0\\ ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

(4) Tìm $a;b$ để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}ax^2-2x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ \sqrt{3-2x}-bx & \text{khi } x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^2+2x-4$ có đồ thị $\left(C\right)$

(1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ thuộc $\left(C\right)$.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có $x_0=0$ thuộc $\left(C\right)$.

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có $y_0=-1$ thuộc $\left(C\right)$.

(4) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc tiếp tuyến bằng -4.

(5) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=1-3x$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{3x}$ có đồ thị $\left(C\right)$

(1) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của $\left(C\right)$ với trục Oy.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của $\left(C\right)$ với trục Ox.

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của $\left(C\right)$ với đường thẳng $y=x+1$.

(4) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k=-\dfrac{1}{3}$.

(5) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=1-3x$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-2x+1$ có đồ thị $\left(C\right)$

(1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có $x=0$.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của hầm số biết nó có $k=-2$.

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số trên, biết nó tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

Câu 9. Một chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình $s=2t^2+t-1\ \left(m\right)$

(1) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=2s$.

(2) Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t=0$ tới $t=2s$.

Câu 10. Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s\left(t\right)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Thực hiện các yêu cầu dưới đây:

(1) Với $s=s\left(t\right)=t^3-3t^2$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3$s là bao nhiêu?

(2) Với $s=s\left(t\right)=t^2+7t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4$s là bao nhiêu?

(3) Với $s=s\left(t\right)=-\dfrac{1}{2}t^3+12t^2$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=10\text{s}$ là bao nhiêu?

(4) Với $s=s\left(t\right)=-t^3+6t^2+4$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3\text{s}$ là bao nhiêu?

(5) Với $s=s\left(t\right)=2t^3-t-10$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3\text{s}$ là bao nhiêu?

(6) Với $s=s\left(t\right)=3t^3+4t^2-t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4\text{s}$ là bao nhiêu?

(7) Với $s=s\left(t\right)=2t^2+3t+7$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=6\text{s}$ là bao nhiêu?

(8) Với $s=s\left(t\right)=3\cos\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=2\text{s}$ là bao nhiêu?

(9) Với $s=s\left(t\right)=\dfrac{1}{2}\left(t^4+3t^2\right)$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4\text{s}$ là bao nhiêu?

(10) Với $s=s\left(t\right)=t^3-3t^2-9t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=5\text{s}$ là bao nhiêu?

Câu 11. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s=s\left(t\right)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất

(1) Với $s\left(t\right)=10+t+9t^2-t^3$ trong khoảng 10 giây đầu tiên.

(2) Với $s\left(t\right)=-t^3+9t^2+t+10$ trong 12 giây đầu tiên.

(3) Với $s\left(t\right)=-t^3+6t^2$ trong 10 giây đầu tiên.

(4) Với $s\left(t\right)=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ trong 10 giây đầu tiên.

(5) Với $s\left(t\right)=-\dfrac{1}{2}t^3+9t^2$ trong 10 giây đầu tiên.

(6) Với $s\left(t\right)=-\dfrac{1}{3}t^3+6t^2$ trong 9 giây đầu tiên.

(7) Với $s\left(t\right)=t^2-\dfrac{1}{6}t^3$ trong 5 giây đầu tiên.

(8) Với $s=-\dfrac{1}{2}t^3+3t^2+20$ trong 10 giây đầu tiên.

Câu 12. Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s\left(t\right)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

(1) Với $s=s\left(t\right)=2t^4+6t^2-3t+1$ thì gia tốc của vật tại thời điểm $t=3\text{s}$ là bao nhiêu?

(2) Với $s=s\left(t\right)=4t^3-10t+9$ thì gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc bằng 2 là bao nhiêu?

(3) Với $s=s\left(t\right)=t^3-3t^2-5$ thì gia tốc của vật tại tại giây thứ 10 là bao nhiêu?

(4) Với $s=s\left(t\right)=t^3-3t^2-9t+1$ thì gia tốc của vật tại tại thời điểm vật dừng lại là bao nhiêu?

(5) Với $s = s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ thì gia tốc của vật tại giây thứ 3 là bao nhiêu?

(6) Với $s = s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 10$ thì gia tốc của vật tại thời điểm vật dừng lại là bao nhiêu?

(8) Với $s = s(t) = \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - t + 4$ thì gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2s$ là bao nhiêu?

Câu 13. Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Hỏi:

(1) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ là bao nhiêu?

(2) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$ là bao nhiêu?

(3) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ là bao nhiêu?

(4) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t^3 - 3t^2$ là bao nhiêu?

(5) Vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng không với $s = s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t,$ là bao nhiêu?

(6) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 36t$ là bao nhiêu?

(7) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s = s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t + 2020$ là bao nhiêu?

(8) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$ là bao nhiêu?

(9) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t(t^2 - 3t - 9) + 2024$ là bao nhiêu?

(10) Vận tốc tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất trong 20 giây đầu tiên với $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$ là bao nhiêu?

------------------Hết------------------

Đại số & Giải tích

Bài 02

ĐẠO HÀM

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A Lý thuyết

1. Đạo hàm hàm số $y = x^n$

Hàm số $y = x^n \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm hàm số lượng giác

(1) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$.

(2) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$.

(3) Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

(4) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

(1) Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$.

(2) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $\boxed{\left(a^x\right)' = a^x.\ln a}$.

(3) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ $\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}}$.

(4) Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$.

5. Các quy tắc tính đạo hàm

Giả sử các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

Khi đó: (1) $(ku)'=ku'\ (k=const)$

(2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

(3) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}\ (v\neq 0)\rightarrow\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}\ (v=v(x)\neq 0)$

6. Đạo hàm của hàm hợp

6.1 Khái niệm hàm số hợp

Giả sử $u=g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a;b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c;d)$ và $y=f(u)$ là hàm số xác định trên $(c;d)$. Hàm số $y=f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y=f(u)$ với $u=g(x)$.

6.2 Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u=g(x)$ có đạo hàm u_x' tại x và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm y_u' tại u thì hàm số hợp $y=f(g(x))$ có đạo hàm y_x' tại x là

$$y_x'=y_u'.u_x'$$

Từ đó ta có các kết quả sau:

(1) $\left(x^n\right)' = n.x^{n-1}$	$\left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'$
(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}.u'$
(3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$
(4) $\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u'.\cos u$
(5) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$
(6) $\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}.u'$
(7) $\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.u'$
(8) $\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = u'.e^u$
(9) $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$
(10) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u}.u'$
(11) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u\ln a}.u'$

7. Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a;b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y' = f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Khi đó: $\left(f'(x)\right)' = f''(x)$.

⌘ ***Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai***

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s = f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t. Ta có $a(t) = f''(t)$

B Bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm đa thức – hữu tỉ – căn thức

Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku'$ $(k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ $(v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$

☑ Áp dụng công thức đạo hàm:

(1) $(x^n)' = n.x^{n-1}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

(3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $f(x) = (1 - x^3)^5$

(2) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

(3) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2021$

(4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \dfrac{5}{x} + 7$

(5) $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$

(6) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

(7) $f(x) = (x+1)(x-2)$

(8) $f(x) = \dfrac{3x+5}{-1+2x}$

(9) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

(10) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Tính đạo hàm lượng giác

Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku'$ $(k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ $(v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(4) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$

(2) $y = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$

(3) $y = 2\cos x^2$

(4) $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$

(5) $y = \sin\sqrt{2 + x^2}$

(6) $y = \sin(\sin x)$

(7) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$

(8) $y = \cos^3(2x - 1)$

(9) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

(10) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Tính đạo hàm mũ - logarit

Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \ (v \neq 0) \rightarrow \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2} \ (v = v(x) \neq 0)$

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

(1) $(e^x)' = e^x$

(2) $(a^x)' = a^x.\ln a$

(3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

Ví dụ 3.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \log_3(2x+1)$

(2) $y = \log_3(1-2x)$

(3) $y = 5^{2x-1}$

(4) $y = 2025^{x-2025}$

(5) $y = x + \ln(x+3)$

(6) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$

(7) $y = \mathrm{e}^{2x-3} + \mathrm{e}^{2025}$

(8) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

(9) $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$

(10) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

C Luyện tập

Câu 14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=-2x^3+4\sqrt{x}$

(2) $y=\left(3x^2-1\right)^2$

(3) $y=-2x^4+4x^2+1$

(4) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$

(5) $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$

(6) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

(7) $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

(8) $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$

(9) $y=x^2(2x+1)(5x-3)$

(10) $y=\left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)$

Câu 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=\dfrac{2x-1}{4x-3}$

(2) $y=\dfrac{3}{2x+1}$

(3) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$

(4) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

(5) $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-3}$

(6) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

(7) $y=x^2\sqrt{x}$

(8) $y=(2x-3)\left(x^5-2x\right)$

(9) $y=x(2x-1)(3x+2)$

(10) $y=\left(x^2-2x+3\right)\left(2x^2+3\right)$.

Câu 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=\sqrt{x^2+x+1}$

(2) $y=\left(x^2-x+1\right)^5$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$

(5) $y=\sqrt{5x^2-2x+1}$

(6) $y=\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right)^4$

(7) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^4+1}}$

(8) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

(9) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$

(10) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Câu 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$

(2) $y=\cos x.\sin^2 x$

(3) $y=\sin^2 x+\sin 2x$

(4) $y=\sqrt{1+\cos^2 2x}$

(5) $y=\cos^2 3x$

(6) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

(7) $y=\sqrt{\tan x+\cot x}$

(8) $y=\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}$

(9) $y=\cos^3\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+3}}$

(10) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$

Câu 18. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

(1) $y=x\sqrt{1+x^2}$

(2) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$

(3) $y=\sin\sqrt{2+x^2}$

(4) $y=\sin^2 x+\sin 2x$

(5) $y=2\sin^2 x-\cos 2x+x$

(6) $y=\dfrac{x+3}{1-2x}$

(7) $y=\sqrt{x^2+x+1}$

(8) $y=\left(3x^2-1\right)^2$

(9) $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

(10) $y=\sin(\sin x)$

Câu 19. Tính đạo hàm cấp 3 tại các điểm được chỉ ra dưới đây

(1) Cho hàm số $y=-3x^3+3x^2-x+5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

(2) Cho hàm số $y=\dfrac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

(3) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-1}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2)$.

(4) Cho hàm số $y=\cos^2 x$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Câu 20. Chứng minh rằng:

(1) Với hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ ta có $y^3.y''+1=0$.

(2) Với hàm số $y=x+\sqrt{x^2+1}$ ta có $(y-x)^3.y''-1=0$.

(3) Với hàm số $y=x\sin x$ ta có $xy''-2(y'-\sin x)+xy=0$.

(4) Với hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ ta có $2y'^2=(y-1)y''$.

(5) Với hàm số $y=\cot 2x$ ta có $y'+2y^2+2=0$.

(6) Với hàm số $y=x\tan x$ ta có $x^2y''-2\left(x^2+y^2\right)(1+y)=0$.

(7) Với hàm số $y=\tan x$ ta có $y'-y^2-1=0$.

(8) Với hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$ ta có $y^2.y''+xy'=y$.

(9) Với hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$ ta có $y^2y''+xy'=y$.

⑽ Với hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ ta có $y^2.y''-xy'+y=0$.

Câu 21. Cho $f\left(x\right)=x^4-4x^2+3$ và $g\left(x\right)=3+10x-7x^2$. Giải phương trình $f''\left(x\right)+g'\left(x\right)=0$

Câu 22. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+4x-6$. Giải bất phương trình $f''\left(x\right)\le f'\left(x\right)-1$

Câu 23. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4x-6$. Giải bất phương trình $y''<0$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=5\left(x+1\right)^3+4\left(x+1\right)$. Giải phương trình $f''\left(x\right)=0$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Tìm các nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$của phương trình $f^{(4)}\left(x\right)=-8$.

--------------------Hết--------------------

Chương 07

ĐẠO HÀM

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 11

Biên soạn

LÊ MINH TÂM

Mục lục

Đại số & Giải tích

Bài 01

ĐẠO HÀM

ĐẠO HÀM

A Lý thuyết

1. Đạo hàm.

Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.

- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0, tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

⌘ **Tính đạo hàm bằng định nghĩa:**

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x) - f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a;b), x \neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý

Trong định nghĩa & quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a;b)$.

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Ví dụ 2.1.

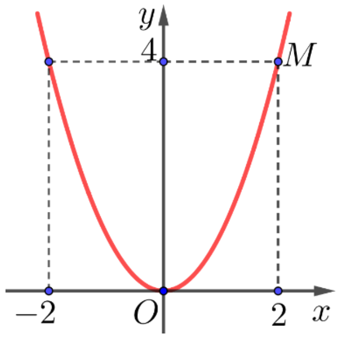
Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ (C) và điểm $M(1;1) \in (C)$

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C)

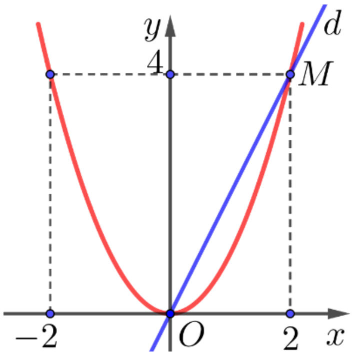
Lời giải

(1) Vẽ đồ thị (C) và tính $f'(1)$.



$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\lim_{x\to1}(x+1) = 2$$

(2) Vẽ đường thẳng d qua M có hệ số góc $f'(1)$. Nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C).



Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm $O(0;0)$ và $M(2;4)$.

⌘ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và điểm $M(x_0;y_0) \in (C)$.

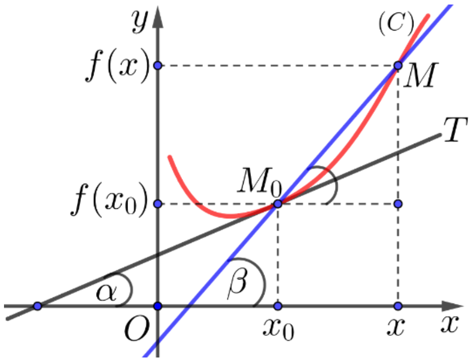
Xét $M(x; f(x))$ là một diểm di chuyển trên (C).

Đường thẳng MM_0 là một cát tuyến của (C).

Hệ số góc của cát tuyến MM_0 được tính bởi công thức $k_{MM_0} = \tan\beta = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0.

Giả sử cát tuyến MM_0 có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm



Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là $k_{M_0T} = \tan\alpha = \lim\limits_{x\to x_0}(\tan\beta) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Đạo hàm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$

Tiếp tuyến M_0T có phương trình: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị *quãng đường* di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị *nhiệt độ* T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

4. Số e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2,718281828...$ *(Số thập phân vô hạn không tuần hoàn)*.

B Bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm tại 1 điểm bằng định nghĩa

Phương pháp

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b)$ và $x\neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^{-}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (2) $f'(x_0^{+})=\lim\limits_{x\to x_0^{-}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (3) $f'(x_0^{-})=\lim\limits_{x\to x_0^{-}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

☑ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^{+})=f'(x_0^{-})$.

☑ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y=f(x)=2x^3+x-1$ tại $x_0=0$ (2) $y=f(x)=x^2+2x-1$ tại $x_0=1$

Lời giải

(1) $y=f(x)=2x^3+x-1$ tại $x_0=0$

Tại $x_0=0$ ta có $f(x)-f(x_0)=f(x)-f(0)=2x^3+x-1-(-1)=2x^3+x=x(2x^2+1)$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x(2x^2+1)}{x}=2x^2+1$$

$$\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}(2x^2+1)=1$$

(2) $y=f(x)=x^2+2x-1$ tại $x_0=1$

Tại $x_0=0$ ta có $f(x)-f(x_0)=f(x)-f(0)=x^2+2x-1-(2)=x^2+2x-3$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3$$

$$\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}(x+3)=4$$

Ví dụ 1.2.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ tại $x_0=-2$ (2) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$ tại $x_0=3$

Lời giải

(1) $y=f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ tại $x_0=-2$

Tại $x_0=-2$ ta có $f(x)-f(x_0)=f(x)-f(-2)$

$$=\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{4-2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3-x^2-x-1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{-x^2-x+2}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x+1}$$

$$\longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to -2}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)}{x^2+x+1}\right]=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-2-1)}{(-2)^2+(-2)+1}=\frac{1}{3}$$

(2) $y=f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$ tại $x_0=3$

Tại $x_0=3$ ta có

$$f(x)-f(x_0)=f(x)-f(3)=\frac{x^2+x-3}{2x-1}-\frac{9}{5}=\frac{5x^2-13x-6}{5(2x-1)}=\frac{(x-3)(5x+2)}{5(2x-1)}$$

$$\longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{(x-3)(5x+2)}{5(2x-1)}\cdot\frac{1}{x-3}=\frac{(5x+2)}{5(2x-1)}$$

$$\Rightarrow f'(3)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(5x+2)}{5(2x-1)}=\frac{17}{25}$$

Ví dụ 1.3.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa tại một điểm của các hàm số sau:

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x=1$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

Lời giải

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -3 & \text{khi } x=1\end{cases}$ tại $x=1$

Ta có: $f(1)=-3$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+4)(x-1)}{x-1}=5$

Vậy $f'(0)=5$.

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$

Ta có $f(0)=0$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 1.4.

Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$

Lời giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$

Hay $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$.

Khi đó, ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$.

Vậy $a=2$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2. Tính đạo hàm tại 1 điểm bất kỳ trên (a;b) bằng định nghĩa

Phương pháp

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại $x_0\in(a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1.** Tính $f(x)-f(x_0)$.
- **Bước 2.** Lập và rút gọn tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x\in(a;b)$ và $x\neq x_0$
- **Bước 3.** Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

☑ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm bằng định nghĩa của các hàm số sau:

(1) $y=f(x)=4x+3$ (2) $y=f(x)=2024x+2025$

(3) $y=f(x)=2x^2+2024$ (4) $y=f(x)=x^2-3x+1$

(5) $y=f(x)=x^3-2x$ (6) $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

Lời giải

(1) $y=f(x)=4x+3$

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x)-f(x_0)=4x+3-4x_0+3=4(x-x_0)$

$$\longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{4(x-x_0)}{x-x_0}=4$$

$$\longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}4=4\Rightarrow y'=4$$

(2) $y=f(x)=2024x+2025$

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x)-f(x_0)=2024x+2025-2024x_0-2025=2024(x-x_0)$

$$\longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2024(x-x_0)}{x-x_0}=2024$$

$$\longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}2024=2024\Rightarrow y'=2024$$

(3) $y=f(x)=2x^2+2024$

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x)-f(x_0)=2x^2+2024-2x_0^2-2024=2x^2-2x_0^2=2(x-x_0)(x+x_0)$$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=2(x+x_0)$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}2(x+x_0)=4x_0 \Rightarrow y'=4x$$

(4) $y=f(x)=x^2-3x+1$

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x)-f(x_0)=x^2-3x-1-x_0^2+3x_0-1=(x-x_0)(x+x_0-3)$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0-3)}{x-x_0}=x+x_0-3$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0-3)=2x_0-3\Rightarrow y'=2x-3$$

(5) $y=f(x)=x^3-2x$

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x)-f(x_0)=x^3-2x-x_0^3+2x_0=(x-x_0)(x^2+x.x_0+x_0^2-2)$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^2+x.x_0+{x_0}^2-2)}{x-x_0}=(x^2+x.x_0+{x_0}^2-2)$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^2+x.x_0+{x_0}^2-2)=3{x_0}^2-2\Rightarrow y'=3x^2-2$$

(6) $y=f(x)=x^4-2x^2+2$

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x)-f(x_0)=x^4-2x^2+2-x_0^4-2x_0^2-2=(x-x_0)(x^3+x^2x_0+x(x_0^2-2)+x_0^3-2x_0)$$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^3+x^2x_0+x(x_0^2-2)+x_0^3-2x_0)}{x-x_0}=x^3+x^2x_0+x(x_0^2-2)+x_0^3-2x_0$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x^3+x^2x_0+x(x_0^2-2)+x_0^3-2x_0)=x_0^3+x_0^3+x_0^3-2x_0+x_0^3-2x_0=4x_0^3-4x_0$$

$$\Rightarrow y'=4x^3-4x$$

Dạng 3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Phương pháp

⌘ Ý nghĩa hình học: *(Phương trình tiếp tuyến)*

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), $M(x_0;y_0) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0) \in (C)$ có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Trong đó: x_0 hoành độ tiếp điểm.

y_0 tung độ tiếp điểm.

$f'(x_0)$ hệ số góc tiếp tuyến.

Bài toán: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)\ (C)$ tại $x_0 = a$.

- **Bước 1.** Tính $f'(x)$.
- **Bước 2.** Từ $x_0 \longrightarrow \begin{cases} f'(x_0) \\ y_0 \end{cases}$.
- **Bước 3.** Hoàn thiện phương trình tiếp tuyến cần tìm $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Ví dụ 3.1.

Viết phương trình tiếp tuyến của

(1) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 4\ (C)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

(2) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1\ (C)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

(3) Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 3\ (C)$ tại điểm có tung độ $y_0 = -1$.

Lời giải

(1) Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 4\ (C)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

Gọi $Z(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x) - f(x_0) = x^2 + 2x - 4 - x_0^2 - 2x_0 + 4 = (x - x_0)(x + x_0 + 2)$

$$\longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 2)}{x - x_0} = x + x_0 + 2$$

$$\longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}(x + x_0 + 2) = 2x_0 + 2 \Rightarrow y' = 2x + 2$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $k = y'(0) = 2$

Tung độ tiếp điểm tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là $y(x_0) = -4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(0)(x-0)+y(0) \Leftrightarrow y = 2x-4$

(2) Đồ thị hàm số $y = x^3+1$ (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Gọi $C(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x)-f(x_0) = x^3+1-x_0^3-1 = (x-x_0)(x^2+x.x_0+x_0^2)$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^2+x.x_0+x_0^2)}{x-x_0} = x^2+x.x_0+x_0^2$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^2+x.x_0+x_0^2) = 3x_0^2 \Rightarrow y' = 3x^2$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $k = y'(1) = 3$

Tung độ tiếp điểm tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y(x_0) = 2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1)(x-1)+y(1) \Leftrightarrow y = 3x-1$

(3) Đồ thị hàm số $y = 2x^2-3$ (C) tại điểm có tung độ $y_0 = -1$.

Gọi $T(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f(x)-f(x_0) = 2x^2-1-2x_0^2+1 = 2(x-x_0)(x+x_0)$

$$\longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{2(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = 2(x+x_0)$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(2(x+x_0)) = 4x_0 \Rightarrow y' = 4x$$

Ta có $y_0 = -2 \Rightarrow 2x_0^2-3 = -1 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$.

- Với $x_0 = 1$:

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $k = y'(1) = 4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(1)(x-1)+y(1) \Leftrightarrow y = 4x-5$.

- Với $x_0 = -1$:

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là $k = y'(-1) = -4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(-1)(x+1)+y(-1) \Leftrightarrow y = -4x-5$.

Dạng 4. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Phương pháp

⌘ **Ý nghĩa vật lý:** *(quãng đường, nhiệt độ, điện lượng)*

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị *quãng đường* di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0.
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị *nhiệt độ* T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0.

Ví dụ 4.1.

Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét).

(1) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0.

(2) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

(1) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0.

Ta có $f'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

$$= \lim_{t \to t_0}\left(\frac{t^2 + 4t + 6 - (t_0^2 + 4t_0 + 6)}{t - t_0}\right) = \lim_{t \to t_0}\left(\frac{(t - t_0)(t + t_0 + 4)}{t - t_0}\right) = \lim_{t \to t_0}(t + t_0 + 4) = 2t_0 + 4.$$

(2) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$: $f'(5) = 2.5 + 4 = 14\left({}^{m}\!/_{s}\right)$.

Ví dụ 4.2.

Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$

Lời giải

Ta có $Q = 6t + 5 \to Q'(t) = 6$.

Cường độ dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$ là $I = Q'(10) = 6$.

Dạng 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0

Phương pháp

☑ Cho hàm số $y=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\neq a \\ h(x;m) & \text{khi } x=a \end{cases}$ hoặc $y=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\geq a \\ h(x;m) & \text{khi } x<a \end{cases}$. Tìm tham số m để hàm số có đạo hàm tại $x=a$

- **Bước 1.** Xác định $\lim\limits_{x\to a^+} f(x;m)$; $\lim\limits_{x\to a^-} g(x;m)$; $f(a)$.
- **Bước 2.** Hàm số liên tục tại $x=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x;m)=\lim\limits_{x\to a^-} g(x;m)=f(a)\to a=?$
- **Bước 3.** Tính $f'(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$; $f'(a^-)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- **Bước 4.** Hàm số có đạo hàm tại $x=a \Leftrightarrow f'(a^+)=f'(a^-)$.

Ví dụ 5.1.

Cho hàm số $y=\begin{cases} 2x^2-x+a & \text{khi } x\neq 0 \\ x^2 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x+a)=a$, $f(0)=0$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=0 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x+a)=f(0)\Leftrightarrow a=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(2x-1)=-1.$$

Ví dụ 5.2.

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{khi } x\leq 1 \\ ax+b & \text{khi } x>1 \end{cases}$. Tìm a, b thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2/2\right)=\dfrac{1}{2}$; $f(1)=\dfrac{1}{2}$ .Hàm số liên tục tại $x=1$ nên $a+b=\dfrac{1}{2}$.

Đạo hàm phải $f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-(a.1+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}a=a$.

Đạo hàm trái $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2/2-1/2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+1)}{2}=1.$

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ $f'(1^+)=f'(1^-)\Leftrightarrow a=1$

Vậy $a=1;b=-0,5$.

C Luyện tập

Câu 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

(1) $f(x)=2x-1$ tại $x=-2$

(2) $f(x)=2024-2023x$ tại $x=1$

(3) $f(x)=x^2+2x-1$ tại $x=1$

(4) $f(x)=2x^3+1$ tại $x=2$

(5) $f(x)=2x^2+x+1$ tại $x=1$

(6) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x=2$

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ tại $x=2$

(8) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ tại $x=3$

(9) $f(x)=\sqrt{x+1}$ tại $x=1$

(10) $f(x)=\sqrt{2023+x}$ tại $x=2$

Lời giải

(1) $f(x)=2x-1$ tại $x=-2$

Ta có $f'(-2)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x-1-(-4-1)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+4}{x+2}=2$.

(2) $f(x)=2024-2023x$ tại $x=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2024-2023x-(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2023x+2023}{x-1}=-2023$.

(3) $f(x)=x^2+2x-1$ tại $x=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+3)=4$

(4) $f(x)=2x^3+1$ tại $x=2$

Ta có $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-16}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}2(x^2+2x+4)=24$.

(5) $f(x)=2x^2+x+1$ tại $x=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x+1-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(2x+3)=5$

(6) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại $x=2$

Ta có $f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{x+1-3x+3}{x-1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-2}{x-1}=-2$.

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ tại $x=2$

Ta có $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2-x}{x-1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{x-1}=\dfrac{-1}{2-1}=-1$.

(8) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ tại $x=3$

Ta có $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{2x+1}{x-2}-7}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{2x+1-7x+14}{x-2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-5}{x-2}=\dfrac{-5}{3-2}=-5$.

(9) $f(x)=\sqrt{x+1}$ tại $x=1$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(10) $f(x)=\sqrt{2023+x}$ tại $x=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2023+x}-\sqrt{2025}}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2023+x-2025}{(x-2)\left(\sqrt{2023+x}+\sqrt{2025}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{2023+x}+\sqrt{2025}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2025}}$

Câu 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm (nếu có):

(1) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 3\\ x^2 & \text{khi } x<3\end{cases}$. Tính $f'(3)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{khi } x\ge 0\\ 1-2x & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tính $f'(0)$.

(3) $f(x)=|x|$. Tính $f'(0)$.

(4) $f(x)=x+|x|$. Tính $f'(0)$.

(5) $f(x)=2x+|x-1|$. Tính $f'(1)$.

(6) $f(x)=x+|x|$. Tính $f'(1)$.

(7) $f(x)=|x|-2023$. Tính $f'(0)$.

(8) $f(x)=|x^2+2x|$. Tính $f'(0)$.

(9) $y=\dfrac{|x|}{x+1}$. Tính $f'(0)$.

(10) $f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$. Tính $f'(-1)$.

Lời giải

(1) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 3\\ x^2 & \text{khi } x<3\end{cases}$. Tính $f'(3)$.

Đạo hàm phải $f'(3^+)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+3-(2.3+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}2=2$.

Đạo hàm trái $f'(3^-)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-(2.3+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)=6$.

Suy ra $f'(3^+)\ne f'(3^-)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=3$.

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ 1-2x & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Đạo hàm phải $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$.

Đạo hàm trái $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=-2.$.

Suy ra $f'(0^+)\ne f'(0^-)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=0$.

(3) $f(x)=|x|$. Tính $f'(0)$.

Ta có: $y=f(x)=\begin{cases} x & \text{khi } x\ge 0 \\ -x & \text{khi } x<0 \end{cases}$

Đạo hàm phải $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1$.

Đạo hàm trái $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x-0}{x}=-1$.

Suy ra $f'(0^+)\ne f'(0^-)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=0$.

(4) $f(x)=x+|x|$. Tính $f'(0)$.

Ta có: $y=f(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\ge 0 \\ 0 & \text{khi } x<0 \end{cases}$

Đạo hàm phải $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{x}=2$.

Đạo hàm trái $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{0-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{0}{x}=0$.

Suy ra $f'(0^+)\ne f'(0^-)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=0$.

(5) $f(x)=2x+|x-1|$. Tính $f'(1)$.

Ta có: $y=f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ x+1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$

Đạo hàm phải $f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3(x-1)}{x-1}=3$.

Đạo hàm trái $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

Suy ra $f'(1^+)\ne f'(1^-)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=1$.

(6) $f(x)=x+|x|$. Tính $f'(1)$.

Ta có: $y=f(x)=\begin{cases} 3x-1 & \text{khi } x\ge 1 \\ x+1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$

Đạo hàm phải $f'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x-1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3\left(x-1\right)}{x-1}=3$.

Đạo hàm trái $f'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

Suy ra $f'\left(1^+\right)\neq f'\left(1^-\right)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=1$.

(7) $f\left(x\right)=\left|x\right|-2023$. Tính $f'\left(0\right)$.

Ta có $y=f\left(x\right)=\begin{cases} x-2023 & \text{khi } x\geq 0 \\ 2023-x & \text{khi } x<0 \end{cases}$

Đạo hàm phải $f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-2023-\left(-2023\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$.

Đạo hàm trái $f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2023-x-\left(-2023\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$.

Suy ra $f'\left(0^+\right)\neq f'\left(0^-\right)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=0$.

(8) $f\left(x\right)=\left|x^2+2x\right|$. Tính $f'\left(0\right)$.

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+2x & \text{khi } x<-2;\ x>0 \\ -\left(x^2+2x\right) & \text{khi } -2<x<0 \end{cases}$.

Đạo hàm phải $f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+2\right)=2$.

Đạo hàm trái $f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\left(x^2+2x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\left(x+2\right)\right)=-2$.

Suy ra $f'\left(0^+\right)\neq f'\left(0^-\right)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=0$.

(9) $y=\dfrac{\left|x\right|}{x+1}$. Tính $f'\left(0\right)$.

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{khi } x\geq 0 \\ \dfrac{-x}{x+1} & \text{khi } x<0 \end{cases}$

Đạo hàm phải $f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x+1}=1$.

Đạo hàm trái $f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{-x}{x+1}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x+1}=-1$.

Suy ra $f'\left(0^+\right)\neq f'\left(0^-\right)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=0$.

(10) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+\left|x+1\right|}{x}$. Tính $f'\left(-1\right)$.

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+1}{x} & \text{khi } x\geq -1\\ \dfrac{x^2-x-1}{x} & \text{khi } x<-1\end{cases}$

Đạo hàm phải $f'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\dfrac{x^2+x+1}{x}+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\left(x+1\right)}{x}=0$

Đạo hàm trái $f'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\dfrac{x^2-x-1}{x}+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x}=2$

Suy ra $f'\left(1^+\right)\neq f'\left(1^-\right)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=1$.

Câu 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ (nếu có):

(1) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-3x & \text{khi } x\neq 1\\ -2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'\left(1\right)$

(2) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'\left(1\right)$

(3) $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $f'\left(1\right)$.

(4) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ -1 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tính $f'\left(3\right)$

(5) $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x>1\\ x^2 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$. Tính $f'\left(1\right)$

(6) $f\left(x\right)=\begin{cases}3-\sqrt{4-x} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'\left(0\right)$

(7) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'\left(1\right)$

(8) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'\left(0\right)$

(9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

(10) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Lời giải

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x & \text{khi } x\neq 1\\ -2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$

Thấy $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x)=-2\\ f(1)=-2\end{cases}$ $\to$ Hàm số liên tục tại $x=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$

Thấy $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-3)}{x-2}=2\\ f(1)=0\end{cases}$

$\to \lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

$\to$ Hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=1$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

Thấy $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=5\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0\end{cases}$

$\to \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\to$ Hàm số không liên tục tại $x=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=1$

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ -1 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tính $f'(3)$

Thấy $\begin{cases} f(3)=-1 \\ \lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x-4)=-1 \end{cases}$

$\to$ Hàm số liên tục tại $x=3$

$\to$ Đạo hàm của hàm số tại $x_0=3$: $f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-7x+12-0}{x-3}=-1$

(5) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x>1 \\ x^2 & \text{khi } x\le1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$

Thấy $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{x}=1 \\ f(1)=1 \end{cases}$ $\to$ Hàm số liên tục tại $x=1$

Đạo hàm trái $f'(1^-)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=1+1=2$

Đạo hàm phải $f'(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $f'(1^+)\ne f'(1^-)\Rightarrow$ Hàm số không tồn tại đạo hàm tại $x=1$.

(6) $f(x)=\begin{cases} 3-\sqrt{4-x} & \text{khi } x\ne0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\begin{cases} \lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(3-\sqrt{4-x}\right)=1 \\ f(0)=1 \end{cases}$ $\to$ Hàm số liên tục tại $x=1$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{4-x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4-(4-x)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{4-0}}=\dfrac{1}{4}$

(7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\ne1 \\ 0 & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$

Thấy $f(1)=0$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2+x}{(x-1)\left(\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=0$$

$\to$ Hàm số liên tục tại $x=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$

(8) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\begin{cases} f(0)=0\\ \lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\to$ Hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$.

(9) $f(x)=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x\neq0\\ \frac{1}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\begin{cases} f(0)=\frac{1}{4}\\ \lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{4-x}}{4}=\frac{1}{4}\end{cases}$ $\to$ Hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{3-\sqrt{4-x}}{4}-\frac{1}{4}}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{4-(4-x)}{4x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{4\left(2+\sqrt{4-0}\right)}=\frac{1}{16}.$$

(10) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x)=0 \end{cases}$ $\to$ Hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ (nếu có):

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ -\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

Lời giải

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\dfrac{1}{2} \\ f(0)=0 \end{cases}$ $\to$ Hàm số không liên tục tại $x=0$

$\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

$\to$ Hàm số không liên tục tại $x=0$ nên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

$\rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ -\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

Thấy $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x^2+3x+1}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-4\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3x+1}+2x}=-\frac{5}{4}$$

Và $f(1)=-\dfrac{5}{4}$

$\rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$

Ta có $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}+\dfrac{5}{4}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{3x+1}-3x-5}{4(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(4\sqrt{3x+1}-3x-5\right)\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{16(3x+1)-(3x+5)^2}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-9x^2+18x-9}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-9(x-1)^2}{4(x-1)^2\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-9}{4\left(4\sqrt{3x+1}+3x+5\right)}=-\frac{9}{64}.$$

(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tính $f'(0)$

Thấy $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-2}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^2+4}-2}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x^2+8}-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+\sqrt[3]{4x^2+8}.2+4\right)}{x\left(\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+\sqrt[3]{4x^2+8}.2+4\right)}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{8x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{8x^2+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{8x^2+4}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\left(\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+\sqrt[3]{4x^2+8}.2+4\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(4x^2+8\right)^2}+\sqrt[3]{4x^2+8}.2+4\right)}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x\left(\sqrt{8x^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{8x^2+4}+2\right)}=0-0=0$

Và $f(0)=0$

$\to$ Hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x}$

Thừa nhận kết quả bên trên, ta được $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

Câu 5. Tìm tham số để hàm số có đạo hàm tại x_0

(1) Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

(2) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & \text{khi } x\ge 0\\ ax-b-1 & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

(3) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ge 0\\ ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

(4) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2-2x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ \sqrt{3-2x}-bx & \text{khi } x<1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

Lời giải

(1) Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2,\ f(1)=a$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=1\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=2$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1-2x+2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}=1.$$

(2) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{khi } x\ge0\\ ax-b-1 & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(ax^2+bx+1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax-b-1)=-b-1\end{cases}$.

Hàm số liên tục tại $x=0$ nên $-b-1=1\Leftrightarrow b=-2$.

Đạo hàm phải $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax^2-2x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(ax-2)=-2$.

Đạo hàm trái $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}(a)=a$.

Hàm số có đạo hàm tại $x=0\Leftrightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=-2$

Vậy với $a=-2,b=-2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

(3) Tìm $a;b$ để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ge0\\ ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax+b)=b\end{cases}$

Hàm số liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow b=1$.

Đạo hàm phải $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^2-1}{x-1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$.

Đạo hàm trái $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax+b-b}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}a=a$.

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x=0\Leftrightarrow f'(0^+)=f'(0^-)\Leftrightarrow a=1$.

Vậy với $a=1;b=1$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=0$.

(4) Tìm $a;b$ để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2-2x+1 & \text{khi } x\ge 1 \\ \sqrt{3-2x}-bx & \text{khi } x<1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=1$.

Ta có $\begin{cases} f\left(1\right)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax^2-2x+1\right)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{3-2x}-bx\right)=1-b \end{cases}$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a-1=1-b\Leftrightarrow b=2-a$.

Đạo hàm phải $f'\left(1^+\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax^2-2x-a+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax+a-2\right)=2a-2$.

Đạo hàm trái $f'\left(1^-\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3-2x}-bx-a+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3-2x}-\left(2-a\right)x-a+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(a-2-\dfrac{2}{\sqrt{3-2x}+1}\right)=a-3$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x=1\Leftrightarrow f'\left(1^+\right)=f'\left(1^-\right)\Leftrightarrow 2a-2=a-3\Leftrightarrow a=-1$

Vậy với $a=-1;b=3$ thì hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^2+2x-4$ có đồ thị $\left(C\right)$

(1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại điểm có hoành độ $x_0=1$ thuộc $\left(C\right)$.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có $x_0=0$ thuộc $\left(C\right)$.

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có $y_0=-1$ thuộc $\left(C\right)$.

(4) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc tiếp tuyến bằng -4.

(5) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=1-3x$.

Lời giải

• *Tính đạo hàm bằng định nghĩa:*

Tại $x_0\in\mathbb{R}$ tùy ý, ta có: $f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=x^2+2x-4-x_0{}^2-2x_0+4=\left(x-x_0\right)\left(x+x_0+2\right)$

$\longrightarrow\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\dfrac{-\left(x-x_0\right)}{3x.x_0}.\dfrac{1}{x-x_0}=\dfrac{-1}{3x.x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\dfrac{\left(x-x_0\right)\left(x+x_0+2\right)}{x-x_0}=x+x_0+2$

$\longrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x+x_0+2\right)=2x_0+2\Rightarrow y'=2x+2$

• *Tính đạo hàm bằng công thức:*

$y=x^2+2x-4\Rightarrow y'=\left(x^2+2x-4\right)'=\left(x^2\right)'+\left(2x\right)'+\left(-4\right)'=2x+2$

⌘ Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm.

(1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C).

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) là $k = y'(1) = 4$

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có $x_0 = 0$ thuộc (C).

Ta có $\begin{cases} y'(x_0) = y'(0) = 2 \\ y(x_0) = y(0) = -4 \end{cases}$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = y'(0)(x-0) + y(0) \Leftrightarrow y = 2x - 4$

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có $y_0 = -1$ thuộc (C).

Ta có $y_0 = -1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 - 4 = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$.

Với $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = y'(1)(x-1) + y(1) \Leftrightarrow y = 4x - 5$.

Với $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = -1 \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = y'(-3)(x+3) + y(-3) \Leftrightarrow y = -4x - 13$.

(4) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -4.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -4$

$\Rightarrow y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow 2x_0 + 2 = -4 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = -1$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến với hệ số góc $k = -4$ là $y = -4(x+3) - 1 \Leftrightarrow y = -4x - 13$.

(5) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$.

Vì tiếp tuyến song song với đưởng thẳng $y = 1 - 3x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = -3$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -4$

$\Rightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 2x_0 + 2 = -3 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow y_0 = -\dfrac{11}{4}$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến với hệ số góc $k = -3$ là $y = -3\left(x + \dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{11}{4} \Leftrightarrow y = -3x - \dfrac{41}{4}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C)

(1) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Oy.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Ox.

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$.

(4) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k=-\frac{1}{3}$.

(5) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y=1-3x$.

Lời giải

• *Tính đạo hàm bằng định nghĩa:*

Tại $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tùy ý, ta có:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{x+1}{3x}-\frac{x_0+1}{3x_0}=\frac{-(x-x_0)}{3x.x_0}$$

$$\longrightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{-(x-x_0)}{3x.x_0}.\frac{1}{x-x_0}=\frac{-1}{3x.x_0}$$

$$\longrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{3x.x_0}=\frac{-1}{3{x_0}^2}\Rightarrow y'=-\frac{1}{3x^2}$$

• *Tính đạo hàm bằng công thức:*

$$y=\frac{x+1}{3x}\Rightarrow y'=\left(\frac{x+1}{3x}\right)'=\frac{-3}{(3x)^2}=-\frac{1}{3x^2}$$

⌘ Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm.

(1) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Oy.

Vì (C) không cắt Oy nên không tồn tại tiếp tuyến thỏa YCBT.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Ox.

Tọa độ giao điểm của (C) với trục Ox là $(-1;0)$

$\Rightarrow$Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=y'(-1)(x+1)+0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y=x+1$

Tọa độ giao điểm của (C) với $y=x+1$ là nghiệm của

$$\frac{x+1}{3x}=x+1\Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=0\\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

Với $\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=0\end{cases}\to$Phương trình tiếp tuyến là $y=y'(-1)(x+1)+0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

Với $\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{3} \\ y_0 = \dfrac{4}{3} \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = y'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \dfrac{7}{3}$.

(4) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k = -\dfrac{1}{3}$.

Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow y'\left(x_0\right) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3\left(x_0\right)^2} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \dfrac{2}{3} \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + 1$.

Với $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

(5) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó vuông góc với đưởng thẳng $y = 3x - 4$.

Tiếp tuyến đó vuông góc với đưởng thẳng $y = 3x - 4$.

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến hệ số góc $k = -\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow y'\left(x_0\right) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3\left(x_0\right)^2} = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \dfrac{2}{3} \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = \dfrac{2}{3} \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{3}(x-1) + \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + 1$.

Với $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \to$ Phương trình tiếp tuyến là $y = -\dfrac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C)

(1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có $x = 0$.

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số biết nó có $k = -2$.

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số trên, biết nó tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

Lời giải

• *Tính đạo hàm bằng công thức:*

$y=x^3-2x+1\Rightarrow y'=\left(x^3-2x+1\right)'=3x^2-2$

⌘ Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm.

(1) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có $x=0$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số tại điểm có $x=0$ là $k=y'(0)=3.0-2=-2$

(2) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số biết nó có $k=-2$.

Ta có $k=-2\Rightarrow f'\left(x_0\right)=-2\Leftrightarrow 3x_0^2-2=-2\Leftrightarrow x_0=0$

$\Rightarrow$Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ có dạng: $y=-2(x-0)+1\Leftrightarrow y=-2x+1$

(3) Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số trên, biết nó tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

Cách 1: Gọi phương trình đoạn chắn cắt 2 trục tọa độ và tạo với 2 trục 1 tam giác vuông cân tại O có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\Rightarrow y=b.\left(1-\frac{x}{a}\right)=-\frac{b}{a}x+b,\left(a.b\neq 0;|a|=|b|\right)(d)$

(d) là tiếp tuyến của (C) thì $3x_0^2-2=-\frac{b}{a}$

Vì $|a|=|b|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3x_0^2-2=1\\3x_0^2-2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow y_0=0\\x_0=-1\Rightarrow y_0=2\\x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y_0=\frac{9-5\sqrt{3}}{9}\\x_0=\frac{-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y_0=\frac{9+5\sqrt{3}}{9}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$Có 4 phương trình tiếp tuyến ứng với các điểm tiếp xúc và hệ số góc trên như sau

$y=1.(x-1)+0\Leftrightarrow y=x-1$

$y=1.(x+1)+2\Leftrightarrow y=x+3$

$y=-1.\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{9-5\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow y=-x+\frac{9-2\sqrt{3}}{9}$

$y=-1.\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\frac{9+5\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow y=-x+\frac{9+2\sqrt{3}}{9}$

Cách 2: Gọi phương trình tiếp tuyến của (C) thỏa mãn YCBT có dạng $(d): y=kx+b$

Ta có $k=3x_0^2-2$

Có giao điểm của d với Ox tại $\left(\frac{-b}{k};0\right)$; với trục Oy tại $(0;b)$

Vì d tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

$$\Rightarrow \left|\frac{-b}{k}\right| = |b| \Leftrightarrow |b|.\left(\frac{1}{|k|-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \ (loai) \\ k = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow k = \pm 1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0^2 - 2 = 1 \\ 3x_0^2 - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0^2 = 1 \\ x_0^2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2 \\ x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \dfrac{9-5\sqrt{3}}{9} \\ x_0 = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \dfrac{9+5\sqrt{3}}{9} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Có 4 phương trình tiếp tuyến ứng với các điểm tiếp xúc và hệ số góc trên như sau

$y = 1.(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = x - 1$

$y = 1.(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = x + 3$

$$y = -1.\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{9-5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow y = -x + \frac{9-2\sqrt{3}}{9}$$

$$y = -1.\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{9+5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow y = -x + \frac{9+2\sqrt{3}}{9}$$

Câu 9. Một chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình $s = 2t^2 + t - 1 \ (m)$

(1) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$.

(2) Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = 2s$.

Lời giải

Ta có: $v = s' = 4t + 1$

(1) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$.

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$ là: $4.2 + 1 = 9(m/s)$

(2) Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = 2s$.

Trong khoảng thời gian từ $t = 0s \to t = 2s$ thì chất điểm di chuyển được quãng đường:

$$4.2 + 2 - 1 = 9(m)$$

$\to$ Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $2s$ kể từ thời điểm $t = 0$ là: $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{9-0}{2-0} = 4,5(m/s)$.

Câu 10. Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Thực hiện các yêu cầu dưới đây:

(1) Với $s = s(t) = t^3 - 3t^2$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$s là bao nhiêu?

(2) Với $s = s(t) = t^2 + 7t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$s là bao nhiêu?

(3) Với $s = s(t) = -\dfrac{1}{2}t^3 + 12t^2$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t = 10$s là bao nhiêu?

(4) Với $s=s(t)=-t^3+6t^2+4$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3s$ là bao nhiêu?

(5) Với $s=s(t)=2t^3-t-10$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3s$ là bao nhiêu?

(6) Với $s=s(t)=3t^3+4t^2-t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4s$ là bao nhiêu?

(7) Với $s=s(t)=2t^2+3t+7$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=6s$ là bao nhiêu?

(8) Với $s=s(t)=3\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=2s$ là bao nhiêu?

(9) Với $s=s(t)=\frac{1}{2}\left(t^4+3t^2\right)$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4s$ là bao nhiêu?

(10) Với $s=s(t)=t^3-3t^2-9t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=5s$ là bao nhiêu?

Lời giải

(1) Với $s=s(t)=t^3-3t^2$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=S'(t)=3t^2-6t$. Từ đó: $v(3)=9(\text{m/s})$.

(2) Với $s=s(t)=t^2+7t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=S'(t)=2t+7$. Từ đó: $v(4)=2.4+7=15(\text{m/s})$.

(3) Với $s=s(t)=-\frac{1}{2}t^3+12t^2$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=10s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+24t\Rightarrow v(10)=\frac{-3.100}{2}+240=90(\text{m/s})$.

(4) Với $s=s(t)=-t^3+6t^2+4$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t\Rightarrow v(3)=-3.3^2+12.3=9(\text{m/s})$.

(5) Với $s=s(t)=2t^3-t-10$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=3s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=6t^2-1\Rightarrow v(3)=6.3^2-1=53(\text{m/s})$.

(6) Với $s=s(t)=3t^3+4t^2-t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=9t^2+8t-1\Rightarrow v(4)=9.4^2+8.4-1=175(\text{m/s})$.

(7) Với $s=s(t)=2t^2+3t+7$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=6s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=4t+3\Rightarrow v(6)=4.6+3=27(\text{m/s})$.

(8) Với $s=s(t)=3\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=2s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=-6\pi\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow v(2)=-6\pi\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)\approx-16.32(\text{m/s})$.

(9) Với $s=s(t)=\frac{1}{2}\left(t^4+3t^2\right)$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=4s$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=2t^3+3t \Rightarrow v(4)=2.4^3+3.4=140(\text{m/s})$.

(10) Với $s=s(t)=t^3-3t^2-9t$ thì vận tốc của vật tại thời điểm $t=5\text{s}$ là bao nhiêu?

Ta có $v(t)=s'(t)=3t^2-6t-9 \Rightarrow v(5)=3.5^2-6.5-9=36(\text{m/s})$.

Câu 11. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s=s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

(1) Với $s(t)=10+t+9t^2-t^3$ trong khoảng 10 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1$ trên đoạn $[0;10]$.

$$v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1=-3\left(t^2-6t+9-9+1\right)=-3\left[(t-3)^2-8\right]=-3(t-3)^2+24\le 24$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $24 \Leftrightarrow t-3=0 \Leftrightarrow t=3(s)$

(2) Với $s(t)=-t^3+9t^2+t+10$ trong 12 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=S'(t)=-3t^2+18t+1$ trên đoạn $[0;12]$.

$$v(t)=S'(t)=-3t^2+18t+1=-3\left(t^2-6t+9-9+1\right)=-3(t-3)^2+24\le 24$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $24 \Leftrightarrow t-3=0 \Leftrightarrow t=3(s)$

(3) Với $s(t)=-t^3+6t^2$ trong 10 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-3t^2+12t$ trên đoạn $[0;10]$.

$$v(t)=s'(t)=-3t^2+12t=-3\left(t^2-4t+4\right)+12=-3(t-2)^2+12\le 12$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $12 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2(s)$

(4) Với $s(t)=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ trong 10 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+12t$ trên đoạn $[0;10]$.

$$v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}\left(t^2-8t+16-16\right)=-\frac{3}{2}\left[(t-4)^2-16\right]=-\frac{3}{2}(t-4)^2+24\le 24$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $24 \Leftrightarrow t-4=0 \Leftrightarrow t=4(s)$

(5) Với $s(t)=-\frac{1}{2}t^3+9t^2$ trong 10 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}t^2+18t$ trên đoạn $[0;10]$.

$$v(t)=s'(t)=-\frac{3}{2}\left(t^2-12t+36-36\right)=-\frac{3}{2}\left[(t-6)^2-36\right]=-\frac{3}{2}(t-6)^2+54\le 54$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $54 \Leftrightarrow t-6=0 \Leftrightarrow t=6(s)$

(6) Với $s(t)=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ trong 9 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-t^2+12t$ trên đoạn $[0;9]$.

$v(t)=s'(t)=-t^2+12t=-\left[(t-6)^2-36\right]=-(t-6)^2+36\le 36$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $36 \Leftrightarrow t-6=0 \Leftrightarrow t=6(s)$

(7) Với $s(t)=t^2-\frac{1}{6}t^3$ trong 5 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=2t-\frac{1}{2}t^2$ trên đoạn $[0;5]$.

$v(t)=s'(t)=-\frac{1}{2}(t^2-4t+4-4)=-\frac{1}{2}\left[(t-2)^2-4\right]=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2\le 2$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $2 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2(s)$

(8) Với $s=-\frac{1}{2}t^3+3t^2+20$ trong 10 giây đầu tiên.

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=\frac{-3}{2}t^2+6t$ trên đoạn $[0;5]$.

$v(t)=s'(t)=\frac{-3}{2}(t^2-4t+4-4)=\frac{-3}{2}\left[(t-2)^2-4\right]=\frac{-3}{2}(t-2)^2+6\le 6$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất bằng $6 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2(s)$

Câu 12. Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

(1) Với $s=s(t)=2t^4+6t^2-3t+1$ thì gia tốc của vật tại thời điểm $t=3$s là bao nhiêu?

(2) Với $s=s(t)=4t^3-10t+9$ thì gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc bằng 2 là bao nhiêu?

(3) Với $s=s(t)=t^3-3t^2-5$ thì gia tốc của vật tại tại giây thứ 10 là bao nhiêu?

(4) Với $s=s(t)=t^3-3t^2-9t+1$ thì gia tốc của vật tại tại thời điểm vật dừng lại là bao nhiêu?

(5) Với $s=s(t)=t^3-3t^2+5t+2$ thì gia tốc của vật tại giây thứ 3 là bao nhiêu?

(6) Với $s=s(t)=t^3-3t^2+3t+10$ thì gia tốc của vật tại thời điểm vật dừng lại là bao nhiêu?

(8) Với $s=s(t)=\frac{2}{3}t^3+2t^2-t+4$ thì gia tốc của vật tại thời điểm $t=2$s là bao nhiêu?

Lời giải

(1) Với $s=s(t)=2t^4+6t^2-3t+1$ thì gia tốc của vật tại thời điểm $t=3$s là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=\left(2t^4+6t^2-3t+1\right)'=8t^3+12t-3$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=24t^2+12$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3\text{s}$ là: $a(3)=24.9+12=228\left(\text{m/s}^2\right)$.

(2) Với $s=s(t)=4t^3-10t+9$ thì gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc bằng 2 là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=12t^2-10$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=24t$.

Mà $v(t)=2\Leftrightarrow 12t^2-10=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$. Do $t>0$ nên $t=1$ suy ra $a(2)=24\text{m/ s}^2$.

(3) Với $s=s(t)=t^3-3t^2-5$ thì gia tốc của vật tại tại giây thứ 10 là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t-6$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=10\text{s}$ là: $a(10)=6.10-6=54\left(\text{m/s}^2\right)$.

(4) Với $s=s(t)=t^3-3t^2-9t+1$ thì gia tốc của vật tại tại thời điểm vật dừng lại là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t-9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t-6$.

Tại thời điểm chất điểm dừng lại thì $v=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(\text{L})\\t=3\end{array}\right.$

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm chất điểm dừng lại là $a(3)=6.3-6=12$.

(5) Với $s=s(t)=t^3-3t^2+5t+2$ thì gia tốc của vật tại giây thứ 3 là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+5$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t-6$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=3\text{s}$ là: $a(3)=6.3-6=12\left(\text{m/s}^2\right)$.

(6) Với $s=s(t)=t^3-3t^2+3t+10$ thì gia tốc của vật tại thời điểm vật dừng lại là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t+3$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t-6$.

Tại thời điểm chất điểm dừng lại thì $v=0\Leftrightarrow 3t^2-6t+3=0\Leftrightarrow t=1$
Gia tốc của chất điểm tại thời điểm chất điểm dừng lại là $a(1)=6.1-6=0$.

(7) Với $v(t)=8t+3t^2$ thì gia tốc của vật khi vận tốc của vật là 11 (m/s).là bao nhiêu?

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=8+6t$.

Mà $v(t)=11 \Leftrightarrow 8t+3t^2=11 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{11}{3} \end{array}\right.$. Do $t>0$ nên $t=1$ suy ra $a(1)=14\text{m/ s}^2$.

(8) Với $s=s(t)=\dfrac{2}{3}t^3+2t^2-t+4$ thì gia tốc của vật tại thời điểm $t=2\text{s}$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=2t^2+4t-1$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=4t+4$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t=10\text{s}$ là: $a(2)=4.2+4=12\left(\text{m/s}^2\right)$.

Câu 13. Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=s(t)$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Hỏi:

(1) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t^3-3t^2-9t$ là bao nhiêu?

(2) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t^3+3t^2-9t+27$ là bao nhiêu?

(3) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=-t^3+3t^2+9t$ là bao nhiêu?

(4) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t^3-3t^2$ là bao nhiêu?

(5) Vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng không với $s=s(t)=2t^3-3t^2+4t,$ là bao nhiêu?

(6) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=\dfrac{1}{3}t^3-3t^2+36t$ là bao nhiêu?

(7) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s=s(t)=-t^3+3t^2+9t+2020$ là bao nhiêu?

(8) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=2t^3-3t^2+4t$ là bao nhiêu?

(9) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t\left(t^2-3t-9\right)+2024$ là bao nhiêu?

(10) Vận tốc tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất trong 20 giây đầu tiên với $s(t)=\dfrac{1}{12}t^4-t^3+6t^2+10t$ là bao nhiêu?

Lời giải

(1) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t^3-3t^2-9t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t-9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t-6$.

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0 \Leftrightarrow t=3$ (vì $t>0$)

Khi đó gia tốc là $a(3)=6.3-6=12\text{m/s}^2$.

(2) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t^3+3t^2-9t+27$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t-9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t+6$.

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2+6t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$ (vì $t>0$)

Khi đó gia tốc là $a(1)=6.1+6=12\text{m/s}^2$.

(3) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=-t^3+3t^2+9t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=-3t^2+6t+9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=-6t+6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t)=0 \Leftrightarrow -6t+6=0 \Leftrightarrow t=1$

Khi đó vận tốc là $v(1)=-3.1^2+6.1+9=12\text{m/s}$.

(4) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=t^3-3t^2$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=3t^2-6t$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=6t-6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t)=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$

Khi đó vận tốc là $v(1)=3.1^2-6.1=-3\text{m/s}$.

(5) Vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng không với $s=s(t)=2t^3-3t^2+4t,$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=6t^2-6t+4$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=12t-6$.

Khi gia tốc triệt bằng 0 có $a(t)=0 \Leftrightarrow 12t-6=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Khi đó vận tốc là $v\left(\frac{1}{2}\right)=6.\left(\frac{1}{2}\right)^2-6.\left(\frac{1}{2}\right)+4=\frac{5}{2}\text{m/s}$.

(6) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s=s(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2+36t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=t^2-6t+36$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=2t-6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t)=0 \Leftrightarrow 2t-6=0 \Leftrightarrow t=3$

Khi đó vận tốc là $v(3)=3^2-6.3+36=27\text{m/s}$.

(7) Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu với $s=s(t)=-t^3+3t^2+9t+2020$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t)=s'(t)=-3t^2+6t+9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t)=v'(t)=-6t+6$.

Khi vận tốc triệt tiêu ta có $v(t)=0 \Leftrightarrow -3t^2+6t+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (\text{loại}) \\ t=3 \end{array}\right.$ (vì $t>0$)

Khi đó gia tốc là $a = v'(t) = -6.3 + 6 = -12\left(\text{m}/\text{s}^2\right)$.

(8) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 6t + 4$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = 12t - 6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$

Khi đó vận tốc là $v\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\text{m/s}$.

(9) Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu với $s = s(t) = t\left(t^2 - 3t - 9\right) + 2024$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Khi gia tốc triệt tiêu ta có $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Khi đó vận tốc là $v(1) = -12\ \text{m/s}^2$.

(10) Vận tốc tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất trong 20 giây đầu tiên với $s(t) = \dfrac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$ là bao nhiêu?

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$.

Gia tốc của chuyển động là: $a(t) = v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t-3)^2 + 3$

Thấy rằng $a(t) = (t-3)^2 + 3 \geq 3$

Gia tốc đạt được giá trị bé nhất bằng $3 \Leftrightarrow t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3(s)$

Khi đó vận tốc của vật bằng $v(3) = 28\left(\text{m/s}\right)$.

--------------------Hết--------------------

Đại số & Giải tích

Bài 02

ĐẠO HÀM

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A Lý thuyết

1. Đạo hàm hàm số $y=x^n$

Hàm số $y=x^n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm hàm số $y=\sqrt{x}$

Hàm số $y=\sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm hàm số lượng giác

(1) Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$.

(2) Hàm số $y=\cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$.

(3) Hàm số $y=\tan x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ và $\boxed{(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

(4) Hàm số $y=\cot x$ có đạo hàm tại mọi $x\neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

(1) Hàm số $y=e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $\boxed{\left(e^x\right)'=e^x}$.

(2) Hàm số $y=a^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $\boxed{\left(a^x\right)'=a^x.\ln a}$.

(3) Hàm số $y=\log_a x$ có đạo hàm tại mọi $x>0$ $\boxed{\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}}$.

(4) Hàm số $y=\ln x$ có đạo hàm tại mọi $x>0$ $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$.

5. Các quy tắc tính đạo hàm

Giả sử các hàm số $u=u(x), v=v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

Khi đó: (1) $(ku)'=ku'$ $(k=\text{const})$

(2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$

(3) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$ $(v\neq 0)\rightarrow\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$ $(v=v(x)\neq 0)$

6. Đạo hàm của hàm hợp

6.1 Khái niệm hàm số hợp

Giả sử $u=g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a;b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c;d)$ và $y=f(u)$ là hàm số xác định trên $(c;d)$. Hàm số $y=f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y=f(u)$ với $u=g(x)$.

6.2 Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u=g(x)$ có đạo hàm u_x' tại x và hàm số $y=f(u)$ có đạo hàm y_u' tại u thì hàm số hợp $y=f(g(x))$ có đạo hàm y_x' tại x là

$$y_x'=y_u'.u_x'$$

Từ đó ta có các kết quả sau:

(1) $\left(x^{n}\right)'=n.x^{n-1}$	$\left(u^{n}\right)'=n.u^{n-1}.u'$
(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^{2}}.u'$
(3) $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}.u'$
(4) $\left(\sin x\right)'=\cos x$	$\left(\sin u\right)'=u'.\cos u$
(5) $\left(\cos x\right)'=-\sin x$	$\left(\cos u\right)'=-u'.\sin u$
(6) $\left(\tan x\right)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$	$\left(\tan u\right)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}.u'$
(7) $\left(\cot x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$	$\left(\cot x\right)'=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}.u'$
(8) $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$	$\left(e^{u}\right)'=u'.e^{u}$
(9) $\left(a^{x}\right)'=a^{x}.\ln a$	$\left(a^{u}\right)'=u'.a^{u}.\ln a$
(10) $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}.u'$
(11) $\left(\log_{a}x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_{a}u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}.u'$

7. Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $y'=f'\left(x\right)$ tại mọi điểm $x\in\left(a;b\right)$.

Nếu hàm số $y'=f'\left(x\right)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y'=f'\left(x\right)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y=f\left(x\right)$ tại x, kí hiệu là y'' hoặc $f''\left(x\right)$.

Khi đó: $\left(f'\left(x\right)\right)'=f''\left(x\right)$.

⌘ Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s=f\left(t\right)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s=f\left(t\right)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s=s\left(t\right)$ tại thời điểm t. Ta có $a\left(t\right)=f''\left(t\right)$

B Bài tập

Dạng 1. Tính đạo hàm đa thức – hữu tỉ – căn thức

Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku' \quad (k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \; (v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2} \; (v = v(x) \neq 0)$

☑ Áp dụng công thức đạo hàm:

(1) $(x^n)' = n.x^{n-1}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

(3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(4) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Ví dụ 1.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $f(x) = (1-x^3)^5$

(2) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

(3) $f(x) = 3x^4 - x^3 + x - 2021$

(4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + \dfrac{5}{x} + 7$

(5) $f(x) = x - \dfrac{4}{x}$

(6) $f(x) = -x^7 + 2x^5 + 3x^3$

(7) $f(x) = (x+1)(x-2)$

(8) $f(x) = \dfrac{3x+5}{-1+2x}$

(9) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

(10) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Lời giải

(1) $f(x) = (1-x^3)^5$

Ta có $f'(x) = 5(1-x^3)^4(1-x^3)' = -15x^2(1-x^3)^4$.

(2) $f(x) = x^4 - x^2 + x + 200$

Ta có $f'(x)=\left(x^4-x^2+x+200\right)'=\left(x^4\right)'-\left(x^2\right)'+x'+200'=4x^3-2x+1$.

(3) $f(x)=3x^4-x^3+x-2021$

Ta có $f'(x)=\left(3x^4-x^3+x-2021\right)'=12x^3-3x^2+1$.

(4) $f(x)=x^3-2x^2+\dfrac{5}{x}+7$

Ta có $f'(x)=\left(x^3-2x^2+\dfrac{5}{x}+7\right)'=\left(x^3\right)'+\left(-2x^2\right)'+\left(\dfrac{5}{x}\right)'+(7)'=3x^2-4x-\dfrac{5}{x^2}$

(5) $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$

Ta có $f'(x)=\left(x-\dfrac{4}{x}\right)'=1+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2+4}{x^2}$.

(6) $f(x)=-x^7+2x^5+3x^3$

Ta có $f'(x)=\left(-x^7+2x^5+3x^3\right)'=-7x^6+10x^4+9x^2$.

(7) $f(x)=(x+1)(x-2)$

Ta có $f'(x)=(x+1)'(x-2)+(x+1)(x-2)'=x-2+x+1=2x-1$.

(8) $f(x)=\dfrac{3x+5}{-1+2x}$

Ta có $f'(x)=\dfrac{(3x+5)'.(2x-1)-(3x+5)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\dfrac{3(2x-1)-2(3x+5)}{(2x-1)^2}=\dfrac{-13}{(2x-1)^2}$

(9) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

Ta có. $f'(x)=\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)'=\dfrac{(x-2)'(x-1)-(x-2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

(10) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

Ta có $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Dạng 2. Tính đạo hàm lượng giác

Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku'$ $(k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ $(v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(4) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Ví dụ 2.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$

(2) $y = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$

(3) $y = 2\cos x^2$

(4) $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$

(5) $y = \sin\sqrt{2 + x^2}$

(6) $y = \sin(\sin x)$

(7) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$

(8) $y = \cos^3(2x - 1)$

(9) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

(10) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$

Lời giải

(1) $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)'.\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$$

(2) $y = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x^2\right)$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2}.\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)'.\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = -\frac{1}{2}.(-2x).\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = x.\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$$

(3) $y = 2\cos x^2$

$$\Rightarrow y' = 2.\left(x^2\right)'.\left(-\sin x^2\right) = -4x.\sin x^2.$$

(4) $y = \tan\dfrac{x+1}{2}$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{x+1}{2}\right)'.\frac{1}{\cos^2\frac{x+1}{2}} = \left(\frac{x+1}{2}\right)'.\left(1+\tan^2\frac{x+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x+1}{2}\right)$$

(5) $y = \sin\sqrt{2+x^2}$

$$\Rightarrow y' = \left(\sqrt{2+x^2}\right)'.\cos\sqrt{2+x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cos\sqrt{2+x^2}$$

(6) $y = \sin(\sin x)$

$$\Rightarrow y' = (\sin x)'.\cos(\sin x) = \cos x.\cos(\sin x)$$

(7) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$

$$\Rightarrow y' = 2.2.\cos x.\sin x + 2\sin 2x + 1 = 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1$$

(8) $y = \cos^3(2x-1)$

$$\Rightarrow y' = 3.\left(\cos(2x-1)\right)'.\cos^2(2x-1)$$

$$= 3.2\left(-\sin(2x-1)\right).\cos^2(2x-1) = -6\sin(2x-1)\cos^2(2x-1)$$

(9) $y = \tan^3 x + \cot 2x$

$$\Rightarrow y' = \left(\tan^3 x + \cot 2x\right)' = 3.(\tan x)'.\tan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x} = 3\frac{1}{\cos^2 x}\tan^2 x - \frac{2}{\sin^2 2x}$$

(10) $y = \sin\left(x^2 - 3x + 2\right)$

$$\Rightarrow y' = \left(x^2 - 3x + 2\right)'.\cos\left(x^2 - 3x + 2\right) = (2x-3)\cos\left(x^2 - 3x + 2\right).$$

Dạng 3. Tính đạo hàm mũ - logarit

Phương pháp

☑ Áp dụng quy tắc đạo hàm:

Khi đó: (1) $(ku)' = ku'$ $(k = \text{const})$

(2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ $(v \neq 0) \to \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ $(v = v(x) \neq 0)$

☑ Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a;b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

(1) $(e^x)' = e^x$

(2) $(a^x)' = a^x.\ln a$

(3) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

Ví dụ 3.1.

Tính đạo hàm các hàm số sau:

(1) $y = \log_3(2x+1)$

(2) $y = \log_3(1-2x)$

(3) $y = 5^{2x-1}$

(4) $y = 2025^{x-2025}$

(5) $y = x + \ln(x+3)$

(6) $y = \mathrm{e}^{\sin x}$

(7) $y = \mathrm{e}^{2x-3} + \mathrm{e}^{2025}$

(8) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

(9) $y = \log_3(2x^2 - x + 1)$

(10) $y = 3^x + \log_3(x - 2x^2)$

Lời giải

(1) $y = \log_3(2x+1)$

Ta có $y' = \dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 3} = \dfrac{2}{(2x+1)\ln 3}$.

(2) $y = \log_3(1-2007x)$

Ta có $y' = \dfrac{(1-2007x)'}{(1-2007x).\ln 3} = \dfrac{-2007}{(1-2007x)\ln 3}$.

(3) $y = 5^{2x-1}$

Ta có $y' = (2x-1)'.5^{2x-1}.\ln 5 = 2.5^{2x-1}.\ln 5$.

(4) $y=2025^{x-2025}$

Ta có $y'=\left(2025^{x-2025}\right)' \Leftrightarrow y'=2025^{x-2025}.\ln 2025$.

(5) $y=x+\ln\left(x+3\right)$

Ta có $y'=1+\dfrac{\left(x+3\right)'}{x+3}=1+\dfrac{1}{x+3}$.

(6) $y=\mathrm{e}^{\sin x}$

Ta có $y'=\left(\sin x\right)'.\mathrm{e}^{\sin x}=\cos x.\mathrm{e}^{\sin x}$.

(7) $y=\mathrm{e}^{2x-3}+\mathrm{e}^{2025}$

Ta có $y'=\left(\mathrm{e}^{2x-3}+\mathrm{e}^{2025}\right)'=\left(2x-3\right)'.\mathrm{e}^{2x-3}=2.\mathrm{e}^{2x-3}$.

(8) $y=\log_2\left(x^2-2x\right)$

Ta có $y'=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}=\dfrac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}$.

(9) $y=\log_3\left(2x^2-x+1\right)$

Ta có $y'=\left(\log_3\left(2x^2-x+1\right)\right)'=\dfrac{\left(2x^2-x+1\right)'}{\left(2x^2-x+1\right)\ln 3}=\dfrac{2x-1}{\left(2x^2-x+1\right)\ln 3}$.

(10) $y=3^x+\log_3\left(x-2x^2\right)$

Ta có $y'=\left(3^x+\log_3\left(x-2x^2\right)\right)'=3^x\ln 3+\dfrac{\left(x-2x^2\right)'}{\left(x-2x^2\right)\ln 3}=3^x\ln 3+\dfrac{1-4x}{\left(x-2x^2\right)\ln 3}$.

C Luyện tập

Câu 14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=-2x^3+4\sqrt{x}$ (2) $y=\left(3x^2-1\right)^2$

(3) $y=-2x^4+4x^2+1$ (4) $y=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$

(5) $y=\frac{2x+1}{x+2}$ (6) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

(7) $y=\frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$ (8) $y=\frac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$

(9) $y=x^2(2x+1)(5x-3)$ (10) $y=\left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)$

Lời giải

(1) $y=-2x^3+4\sqrt{x}$

$$\Rightarrow y'=\left(-2x^3+4\sqrt{x}\right)'=-6x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

(2) $y=\left(3x^2-1\right)^2$

$$\Rightarrow y'=\left(\left(3x^2-1\right)^2\right)'=2\left(3x^2-1\right).\left(3x^2-1\right)'=12x\left(3x^2-1\right).$$

(3) $y=-2x^4+4x^2+1$

$$\Rightarrow y'=\left(-2x^4+4x^2+1\right)'=-8x^3+8x.$$

(4) $y=\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1\right)'=x^2-4\sqrt{2}x+8.$$

(5) $y=\frac{2x+1}{x+2}$

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)'=\frac{(2x+1)'(x+2)-(2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}.$$

(6) $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'$$

$$=\frac{\left(x^2-x+1\right)'(x-1)-\left(x^2-x+1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-1)(x-1)-\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

(7) $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

Cách 1: $\Rightarrow y'=\left(\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}\right)'=\dfrac{\left(x^2+x+3\right)'\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2+x+3\right)\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

$$=\frac{(2x+1)\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2+x+3\right)(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\frac{(2x+1)\left(x^2+x-1-x^2-x-3\right)}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\frac{-4(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$$

Cách 2:

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}=\dfrac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1}=1+\dfrac{4}{x^2+x-1}$

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}\right)'=\left(1+\frac{4}{x^2+x-1}\right)'=1'+\left(\frac{4}{x^2+x-1}\right)'=-\frac{4\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\frac{-4(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$$

(8) $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$

$$\Rightarrow y'=\left(\frac{-x^2+3x-3}{2x-2}\right)'=\frac{\left(-x^2+3x-3\right)'(2x-2)-\left(-x^2+3x-3\right)(2x-2)'}{(2x-2)^2}$$

$$=\frac{(-2x+3)(2x-2)-2\left(-x^2+3x-3\right)}{(2x-2)^2}=\frac{-4x^2+10x-6+2x^2-6x+6}{(2x-2)^2}=\frac{-2x^2+4x}{4(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}$$

(9) $y=x^2(2x+1)(5x-3)$

Cách 1:

$\Rightarrow y'=\left[x^2(2x+1)(5x-3)\right]'$

$=\left(x^2\right)'(2x+1)(5x-3)+x^2(2x+1)'(5x-3)+x^2(2x+1)(5x-3)'$

$=2x\left(10x^2-x-3\right)+2x^2(5x-3)+5x^2(2x+1)$

$=20x^3-2x^2-6x+10x^3-6x^2+10x^3+5x^2=40x^3-3x^2-6x$

Cách 2:

Ta có $y=x^2(2x+1)(5x-3)=x^2\left(10x^2-x-3\right)=10x^4-x^3-3x^2$

$$\Rightarrow y' = \left[x^2(2x+1)(5x-3)\right]' = \left(10x^4 - x^3 - 3x^2\right)' = 40x^3 - 3x^2 - 6x$$

(10) $y = \left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)$

$$\Rightarrow y' = \left(x^2+1\right)'\left(5-3x^2\right) + \left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)'$$

$$= 2x\left(5-3x^2\right) - 6x\left(x^2+1\right) = 10x - 6x^3 - 6x^3 - 6x = -12x^3 + 4x$$

Câu 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y = \sqrt{4x^2+3x+1}$

(2) $y = \sqrt{x^2+x+3}$

(3) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$

(4) $y = \left(x^2+2x+3\right)^5$

(5) $y = \sqrt{2x^2+1}$

(6) $y = \left(2x^5-3x-7\right)^3$

(7) $y = \sqrt{1-3x^2}$

(8) $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$

(9) $y = \dfrac{-3x+4}{x-2}$

(10) $y = \sqrt{x^4-4x^2+7}$

Lời giải

(1) $y = \sqrt{4x^2+3x+1}$

$$y' = \left(\sqrt{4x^2+3x+1}\right)' = \frac{\left(4x^2+3x+1\right)'}{2\sqrt{4x^2+3x+1}} = \frac{8x+3}{2\sqrt{4x^2+3x+1}}.$$

(2) $y = \sqrt{x^2+x+3}$

$$y' = \frac{\left(x^2+x+3\right)'}{2\sqrt{x^2+x+3}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+3}}.$$

(3) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$

Cách 1. $y' = \dfrac{(2x-1)'.(x+2)-(2x-1).(x+2)'}{(x+2)^2} = \dfrac{2.(x+2)-(2x-1).1}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}.$

Cách 2. $y' = \dfrac{2.2-1.(-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}.$

(4) $y = \left(x^2+2x+3\right)^5$

$$y' = 5\left(x^2+2x+3\right)^4(2x+2) = 10(x+1)\left(x^2+2x+3\right)$$

(5) $y = \sqrt{2x^2+1}$

$$y' = \left(\sqrt{2x^2+1}\right)' = \frac{\left(2x^2+1\right)'}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}.$$

(6) $y=\left(2x^5-3x-7\right)^3$

$$y'=3\left(2x^5-3x-7\right)^2\left(10x^4-3\right).$$

(7) $y=\sqrt{1-3x^2}$

$$y'=\frac{-6x}{2\sqrt{1-3x^2}}=\frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}.$$

(8) $y=\left(2x-1\right)\sqrt{x^2+x}$.

$$y'=\left(2x-1\right)'.\sqrt{x^2+x}+\left(2x-1\right).\left(\sqrt{x^2+x}\right)'$$

$$=2.\sqrt{x^2+x}+\frac{\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)}{2\sqrt{x^2+x}}=2\sqrt{x^2+x}+\frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

(9) $y=\dfrac{-3x+4}{x-2}$

$$y'=\frac{\left(-3x+4\right)'\left(x-2\right)-\left(x-2\right)'\left(-3x+4\right)}{\left(x-2\right)^2}=\frac{-3.\left(x-2\right)-\left(-3x+4\right)}{\left(x-2\right)^2}=\frac{2}{\left(x-2\right)^2}.$$

(10) $y=\sqrt{x^4-4x^2+7}$

$$y'=\frac{\left(x^4-4x^2\right)'}{2\sqrt{x^4-4x^2+7}}=\frac{2x^3-4x}{\sqrt{x^4-4x^2+7}}.$$

Câu 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=\dfrac{2x-1}{4x-3}$

(2) $y=\dfrac{3}{2x+1}$

(3) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$

(4) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

(5) $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-3}$

(6) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

(7) $y=x^2\sqrt{x}$

(8) $y=\left(2x-3\right)\left(x^5-2x\right)$

(9) $y=x\left(2x-1\right)\left(3x+2\right)$

(10) $y=\left(x^2-2x+3\right)\left(2x^2+3\right)$.

Lời giải

(1) $y=\dfrac{2x-1}{4x-3}$

$$y'=\frac{\left(4x-3\right)\left(2x-1\right)'-\left(4x-3\right)'\left(2x-1\right)}{\left(4x-3\right)^2}=\frac{2\left(4x-3\right)-4\left(2x-1\right)}{\left(4x-3\right)^2}=\frac{8x-6-8x-4}{\left(4x-3\right)^2}=\frac{-10}{\left(4x-3\right)^2}$$

(2) $y=\dfrac{3}{2x+1}$

$$\Rightarrow y'=\frac{3'.(2x+1)-(2x+1)'.3}{(2x+1)^2}=\frac{-6}{(2x+1)^2}.$$

(3) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$

$$\Rightarrow y'=\frac{(2x+1)'(1-3x)-(1-3x)'(2x+1)}{(1-3x)'}=\frac{2(1-3x)+3(2x+1)}{(1-3x)^2}=\frac{5}{(1-3x)^2}.$$

(4) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

$$\Rightarrow y'=\frac{(x^2-3x+3)'(x-1)-(x^2-3x+3)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x+3)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-5x+3-x^2+3x-3}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

(5) $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-3}$

$$y=\frac{2x^2-4x+1}{x-3}=2x+2+\frac{7}{x-3}\Rightarrow y'=2-\frac{7}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-12x+11}{(x-3)^2}.$$

(6) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

$$\Rightarrow y'=\frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2)-(1+x-x^2).(1-x+x^2)'}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-2x)(1-x+x^2)-(1+x-x^2)(2x-1)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1-2x)(1-x+x^2+1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}=\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}.$$

(7) $y=x^2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow y'=(x^2)'.\sqrt{x}+x^2.(\sqrt{x})'=2x.\sqrt{x}+x^2.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=2x\sqrt{x}+\frac{x\sqrt{x}}{2}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}.$$

(8) $y=(2x-3)(x^5-2x)$

$$y' = (2x-3)'\left(x^5-2x\right)+(2x-3)\left(x^5-2x\right)'$$
$$= 2\left(x^5-2x\right)+(2x-3)\left(5x^4-2\right)$$
$$= 2x^5-4x+10x^5-4x-15x^4+6 = 12x^5-15x^4-8x+6.$$

(9) $y = x(2x-1)(3x+2)$

$$y = x(2x-1)(3x+2) = x\left(6x^2+x-2\right) = 6x^3+x^2-2x$$
$$y' = \left(6x^3+x^2-2x\right)' = 18x^2+2x-2.$$

(10) $y = \left(x^2-2x+3\right)\left(2x^2+3\right)$.

$$y' = \left(x^2-2x+3\right)'\left(2x^2+3\right)+\left(x^2-2x+3\right)\left(2x^2+3\right)' = (2x-2)\left(2x^2+3\right)+\left(x^2-2x+3\right)(4x)$$
$$= 4x^3+6x-4x^2-6+4x^3-8x^2+12x = 8x^3-12x^2+18x-6.$$

Câu 17. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y = \sqrt{x^2+x+1}$

(2) $y = \left(x^2-x+1\right)^5$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$

(5) $y = \sqrt{5x^2-2x+1}$

(6) $y = \left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right)^4$

(7) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^4+1}}$

(8) $y = x+\sqrt{4-x^2}$

(9) $y = \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2$

(10) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Lời giải

(1) $y = \sqrt{x^2+x+1}$

$$y' = \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = -\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{2\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

(2) $y = \left(x^2-x+1\right)^5$

$$y' = \left[\left(x^2-x+1\right)^5\right]' = 5(2x-1)\left(x^2-x+1\right)^4.$$

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = -\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

(4) $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$

$$y'=\sqrt{x^2+1}+(x-2)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(5) $y=\sqrt{5x^2-2x+1}$

$$y'=\left(\sqrt{5x^2-2x+1}\right)'=\frac{\left(5x^2-2x+1\right)'}{2\sqrt{5x^2-2x+1}}=\frac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}}=\frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}.$$

(6) $y=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)^4$

$$y'=\left(\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)^4\right)'=4\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)^3.\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=4\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)^3.\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

(7) $y=\frac{x-1}{\sqrt{x^4+1}}$

$$y'=\frac{(x-1)'\sqrt{x^4+1}-(x-1)\left(\sqrt{x^4+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^4+1}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^4+1}-(x-1)\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1}=\frac{x^4+1-(x-1)2x^3}{\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}}=\frac{x^4+1-(x-1)2x^3}{\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}}=\frac{-x^4+2x^3+1}{\sqrt{\left(x^4+1\right)^3}}.$$

(8) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

$$y'=1+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

(9) $y=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$

$$y'=2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)\frac{-3}{(x-1)^2}=-\frac{12x+6}{(x-1)^3}.$$

(10) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow y^2=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 2y.y'=1+\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\Leftrightarrow y'=\frac{1}{2y}+\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{2y.2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\frac{1}{2y}+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2y.2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}+\frac{2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}$$

Câu 18. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

(1) $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$

(2) $y=\cos x.\sin^2 x$

(3) $y=\sin^2 x+\sin 2x$

(4) $y=\sqrt{1+\cos^2 2x}$

(5) $y=\cos^2 3x$

(6) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

(7) $y=\sqrt{\tan x+\cot x}$

(8) $y=\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}$

(9) $y=\cos^3\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+3}}$

(10) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$

Lời giải

(1) $y=\dfrac{\cos 2x}{3x+1}$

$$y'=\frac{\left(\cos 2x\right)'.\left(3x+1\right)-\cos 2x.\left(3x+1\right)'}{\left(3x+1\right)^2}=\frac{-2\left(3x+1\right)\sin 2x-3\cos 2x}{\left(3x+1\right)^2}$$

(2) $y=\cos x.\sin^2 x$

$$y'=\left(\cos x\right)'.\sin^2 x+\cos x.\left(\sin^2 x\right)=-\sin^3 x+2\cos^2 x.\sin x$$

(3) $y=\sin^2 x+\sin 2x$

$$y'=\left(\sin^2 x+\sin 2x\right)'=2\sin x\cos x+2\cos 2x$$

(4) $y=\sqrt{1+\cos^2 2x}$

$$y'=\left(\sqrt{1+\cos^2 2x}\right)'=\frac{\left(1+\cos^2 2x\right)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}=\frac{-2.\sin 2x\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}=\frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}.$$

(5) $y=\cos^2 3x$

$$y'=\left(\cos^2 3x\right)'=-6\sin 3x\left(\cos 3x\right)$$

(6) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

$$y'=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=-\frac{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=-\frac{\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2+2\sin x\cos x+\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=-\frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(\sin x-\cos x)^2}=-\frac{2}{(\sin x-\cos x)^2}.$$

(7) $y=\sqrt{\tan x+\cot x}$

$$y'=\left(\sqrt{\tan x+\cot x}\right)'=\frac{(\tan x+\cot x)'}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin^2 x.\cos^2 x\sqrt{\tan x+\cot x}}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin^2 x.\cos^2 x\sqrt{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin^2 x.\cos^2 x\sqrt{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x.\cos x}}}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x.\cos x\sqrt{\sin x.\cos x}}$$

(8) $y=\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}$

$$y'=\frac{\left[\left(\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2\right)\right]'}{2\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}}=\frac{2\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)\left[\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)\right]'}{2\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)'\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)\cos\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)}{\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}}=\frac{-\dfrac{3}{(2x+1)^2}\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)\cos\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)}{\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}}$$

$$=\frac{-3\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)\cos\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)}{(2x+1)^2\sqrt{\sin\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)^2}}$$

(9) $y=\cos^3\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+3}}$

$$y'=3\cos^2\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\left(\cos\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\right)'$$

$$=-3\left(\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\right)'\cos^2\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\sin\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}$$

$$=-3\frac{\left(\dfrac{1-x}{2x+3}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+3}}}\cos^2\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\sin\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}$$

$$=-\frac{\dfrac{15}{(2x+3)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+3}}}\cos^2\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\sin\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}=-\frac{15}{2(2x+3)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+3}}}\cos^2\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}\sin\sqrt{\frac{1-x}{2x+3}}$$

(10) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$

$$y'=\frac{(\sin x+x\cos x-\sin x)(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(\cos x-x\sin x-\cos x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

$$=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}$$

$$=\frac{x^2(\cos^2x+\sin^2x)-x\cos x\sin x+x\cos x\sin x}{(x\cos x-\sin x)^2}=\left(\frac{x}{x\cos x-\sin x}\right)^2.$$

Câu 19. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau:

(1) $y=x\sqrt{1+x^2}$ (2) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$

(3) $y=\sin\sqrt{2+x^2}$

(4) $y=\sin^2 x+\sin 2x$

(5) $y=2\sin^2 x-\cos 2x+x$

(6) $y=\dfrac{x+3}{1-2x}$

(7) $y=\sqrt{x^2+x+1}$

(8) $y=\left(3x^2-1\right)^2$

(9) $y=\dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

(10) $y=\sin\left(\sin x\right)$

Lời giải

(1) $y=x\sqrt{1+x^2}$

- $y'=x\left(\sqrt{1+x^2}\right)'+\left(x\right)'\sqrt{1+x^2}=x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$.

- $y''=\left(\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\dfrac{\left(2x^2+1\right)'\sqrt{1+x^2}-\left(2x^2+1\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}$

$$=\frac{4x\sqrt{1+x^2}-\left(2x^2+1\right)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{4x\left(1+x^2\right)-x\left(2x^2+1\right)}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x^3+3x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

(2) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$

- $y'=\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)\right]'=\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)'\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)=-3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$

- $y''=\left[-3\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)\right]'=3\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)'\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)=-9\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-3x\right)$.

(3) $y=\sin\sqrt{2+x^2}$

- $y'=\left(\sin\sqrt{2+x^2}\right)'=\left(\sqrt{2+x^2}\right)'.\cos\sqrt{2+x^2}=\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}$

- $y''=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\cos\sqrt{2+x^2}\right)'$

$$=\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)'.\cos\left(\sqrt{2+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\left(\cos\sqrt{2+x^2}\right)'$$

$$=\frac{\sqrt{2+x^2}-x.\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}}{\left(\sqrt{2+x^2}\right)^2}\cos\sqrt{2+x^2}-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\sin\left(\sqrt{2+x^2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}}\cos\sqrt{2+x^2}-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}.\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\sin\left(\sqrt{2+x^2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}}\cos\sqrt{2+x^2}-\frac{x^2}{2+x^2}.\sin\left(\sqrt{2+x^2}\right).$$

(4) $y=\sin^2 x+\sin 2x$

- $y'=\left(\sin^2 x+\sin 2x\right)'=\left(\sin^2 x\right)'+\left(\sin 2x\right)'=2\sin x.\cos x+2\cos 2x=\sin 2x+2\cos 2x$
- $y''=\left(\sin 2x+2\cos 2x\right)'=\left(\sin 2x\right)'+\left(2\cos 2x\right)'=2\cos 2x-4\sin 2x$.

(5) $y=2\sin^2 x-\cos 2x+x$

- $y'=\left(2\sin^2 x-\cos 2x+x\right)'$

$=\left(2\sin^2 x\right)'-\left(\cos 2x\right)'+\left(x\right)'=4\sin x\cos x+2\sin 2x+1=2\sin 2x+2\sin 2x+1=4\sin 2x+1$

- $y''=\left(4\sin 2x+1\right)'=8\cos 2x$.

(6) $y=\dfrac{x+3}{1-2x}$

- $y'=\dfrac{(x+3)'(1-2x)-(x+3)(1-2x)'}{(1-2x)^2}=\dfrac{1-2x+2(x+3)}{(1-2x)^2}=\dfrac{7}{(1-2x)^2}$
- $y''=\left[\dfrac{7}{(1-2x)^2}\right]'=-7\cdot\dfrac{\left[(1-2x)^2\right]'}{(1-2x)^4}=-7\dfrac{2\cdot(-2)\cdot(1-2x)}{(1-2x)^4}=\dfrac{28}{(1-2x)^3}$

(7) $y=\sqrt{x^2+x+1}$

- $y'=\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'=\dfrac{\left(x^2+x+1\right)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
- $y''=\left[\dfrac{2x+1}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)}\right]'=\dfrac{(2x+1)'\cdot 2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)-(2x+1)\cdot 2\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'}{4\left(x^2+x+1\right)}$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x+1}-2(2x+1)\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{4\left(x^2+x+1\right)}=\frac{3}{4\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$$

(8) $y=\left(3x^2-1\right)^2$

- $y' = \left[\left(3x^2-1\right)^2\right]' = 2\cdot\left(3x^2-1\right)\left(3x^2-1\right)' = 12x\cdot\left(3x^2-1\right)$
- $y'' = \left[12x\cdot\left(3x^2-1\right)\right]' = 12\left(3x^2-1\right)+12x\cdot 6x = 108x^2-12$

(9) $y = \dfrac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$

- $y' = \dfrac{\left(x^2+x+3\right)'\cdot\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2+x+3\right)\cdot\left(x^2+x-1\right)'}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

$= \dfrac{(2x+1)\cdot\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2+x+3\right)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2} = \dfrac{-4\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

- $y'' = \left[\dfrac{-4\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}\right]' = \dfrac{-8\left(x^2+x-1\right)^2+4\cdot(2x+1)\cdot 2(2x+1)\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2+x-1\right)^4} = \dfrac{24x^2+24x+16}{\left(x^2+x-1\right)^3}$

(10) $y = \sin(\sin x)$

- $y' = \left[\sin(\sin x)\right]' = (\sin x)'\cdot\cos(\sin x) = \cos x\cdot\cos(\sin x)$
- $y'' = \left[\cos x\cdot\cos(\sin x)\right]' = (\cos x)'\cdot\cos(\sin x)+(\cos x)\cdot\left(\cos(\sin x)\right)'$

$= -\sin x\cdot\cos(\sin x)+(\cos x)\cdot(\cos x)\cdot\left(-\sin(\sin x)\right)$

$= -\sin x\cdot\cos(\sin x)-\cos^2 x\cdot\sin(\sin x)$

Câu 20. Tính đạo hàm cấp 3 tại các điểm được chỉ ra dưới đây

(1) Cho hàm số $y = -3x^3+3x^2-x+5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

(2) Cho hàm số $y = \dfrac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

(3) Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x^2-1}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2)$.

(4) Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

(1) Cho hàm số $y = -3x^3+3x^2-x+5$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2017)$.

Ta có: $y' = -9x^2+6x-1$

$y'' = -18x+6$

$y''' = -18$

$\Rightarrow y^{(3)}(2017) = -18$.

(2) Cho hàm số $y=\dfrac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

Cách 1:Ta có: $y^{(3)}=(-1)^3\dfrac{2.3!}{(1+x)^4}=-\dfrac{12}{(1+x)^4}$

$\Rightarrow y^{(3)}(1)=-\dfrac{3}{4}$.

Cách 2: Ta có: $y'=-\dfrac{2}{(1+x)^2}$

$y''=\dfrac{2.2(1+x)}{(1+x)^4}=\dfrac{4}{(1+x)^3}$.

$y^{(3)}=\left(\dfrac{4}{(1+x)^3}\right)'=-\dfrac{12(1+x)^2}{(1+x)^6}=-\dfrac{12}{(1+x)^4}$

$\Rightarrow y^{(3)}(1)=-\dfrac{3}{4}$.

(3) Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x^2-1}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(2)$.

Ta có: $y'=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

$y''=\dfrac{-2(x^2-1)^2+2.2x(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}=\dfrac{-2(x^2-1)+8x^2}{(x^2-1)^3}=\dfrac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$.

$y^{(3)}=\dfrac{12x(x^2-1)^3-6x(x^2-1)^2.(6x^2+2)}{(x^2-1)^6}=\dfrac{12x(x^2-1)-6x(6x^2+2)}{(x^2-1)^4}=\dfrac{-24x^3-24x}{(x^2-1)^4}$

$\Rightarrow y^{(3)}(2)=-\dfrac{80}{3}$.

(4) Cho hàm số $y=\cos^2 x$. Tính giá trị của $y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ta có: $y'=-2\sin x.\cos x=-\sin 2x$.

$y''=-2\cos 2x$.

$y^{(3)}=4\sin 2x$.

$\Rightarrow y^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$.

Câu 21. Chứng minh rằng:

(1) Với hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ ta có $y^3.y''+1=0$.

(2) Với hàm số $y=x+\sqrt{x^2+1}$ ta có $(y-x)^3.y''-1=0$.

(3) Với hàm số $y=x\sin x$ ta có $xy''-2(y'-\sin x)+xy=0$.

(4) Với hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ ta có $2y'^2=(y-1)y''$.

(5) Với hàm số $y=\cot 2x$ ta có $y'+2y^2+2=0$.

(6) Với hàm số $y=x\tan x$ ta có $x^2y''-2(x^2+y^2)(1+y)=0$.

(7) Với hàm số $y=\tan x$ ta có $y'-y^2-1=0$.

(8) Với hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$ ta có $y^2.y''+xy'=y$.

(9) Với hàm số $y=\sqrt{x^2+1}$ ta có $y^2y''+xy'=y$.

(10) Với hàm số $y=\sqrt{1-x^2}$ ta có $y^2.y''-xy'+y=0$.

Lời giải

(1) Với hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ ta có $y^3.y''+1=0$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}.(2-2x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{(-1).\sqrt{2x-x^2}-\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.(1-x)}{2x-x^2}=\frac{x^2-2x-(1-x)^2}{(2x-x^2).\sqrt{2x-x^2}}=\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}$$

Khi đó: $y^3.y''+1=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3.\dfrac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}+1=-1+1=0$.

Vậy $y^3.y''+1=0$.

(2) Với hàm số $y=x+\sqrt{x^2+1}$ ta có $(y-x)^3.y''-1=0$.

Ta có $y'=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\Rightarrow y''=\frac{\sqrt{x^2+1}-x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}.(x^2+1)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

Khi đó: $(y-x)^3.y''-1=\left(x+\sqrt{x^2+1}-x\right)^3.\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}-1=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3.\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}-1=1-1=0$

Vậy $(y-x)^3.y''-1=0$.

(3) Với hàm số $y=x\sin x$ ta có $xy''-2(y'-\sin x)+xy=0$.

Ta có $y'=\sin x+x\cos x$

$\Rightarrow y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$

Khi đó: $xy'' - 2(y' - \sin x) + xy$

$= x.(2\cos x - x\sin x) - 2(\sin x + x\cos x - \sin x) + x.(x.\sin x)$

$= 2x\cos x - x^2\sin x - 2x\cos x + x^2\sin x = (2x\cos x - 2x\cos x) + (x^2\sin x - x^2\sin x) = 0$

Vậy $xy'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0$.

(4) Với hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ ta có $2y'^2 = (y-1)y''$.

Ta có $y = \dfrac{x-3}{x+4}$, điều kiện: $x \neq -4$.

$\Rightarrow y' = \dfrac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{-14}{(x+4)^3}$.

Khi đó: $2y'^2 = (y-1)y''$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{7}{(x+4)^2}\right)^2 = \left(\dfrac{x-3}{x+4} - 1\right)\dfrac{-14}{(x+4)^3} \Leftrightarrow \dfrac{98}{(x+4)^4} = \dfrac{-7}{x+4}.\dfrac{-14}{(x+4)^3} \Leftrightarrow \dfrac{98}{(x+4)^4} = \dfrac{98}{(x+4)^4}$.

Vậy $2y'^2 = (y-1)y''$.

(5) Với hàm số $y = \cot 2x$ ta có $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Ta có $y = \cot 2x$, điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow y' = -\dfrac{2}{\sin^2 2x}$.

Khi đó: $y' + 2y^2 + 2 = -\dfrac{2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 = -2(1 + \cot^2 2x) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$.

Vậy $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

(6) Với hàm số $y = x\tan x$ ta có $x^2y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0$.

Ta có $y = x\tan x$, điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow y' = \tan x + \dfrac{x}{\cos^2 x} = \tan x + x\tan^2 x + x$.

$\Rightarrow y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x + 2x\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x} + 1$.

Khi đó: $x^2y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y)$

$= x^2.\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x + 2x\tan x\dfrac{1}{\cos^2 x} + 1\right) - 2(x^2 + x^2\tan^2 x)(1 + x\tan x)$

$= x^2.\left[1 + 2\tan^2 x + 2x\tan x(1 + \tan^2 x) + 1\right] - 2(x^2 + x^2\tan^2 x)(1 + x\tan x)$

$= 2x^2 + 2x^2\tan^2 x + 2x^3\tan x + 2x^3\tan^3 x - 2x^2 - 2x^3\tan x - 2x^2\tan^2 x - 2x^3\tan^3 x = 0$

Vậy $x^2y'' - 2\left(x^2 + y^2\right)(1+y) = 0$.

(7) Với hàm số $y = \tan x$ ta có $y' - y^2 - 1 = 0$.

Ta có $y = x\tan x$, điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow y' = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Khi đó: $y' - y^2 - 1 = 1 + \tan^2 x - \tan^2 x - 1 = 0$.

Vậy $y' - y^2 - 1 = 0$.

(8) Với hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$ ta có $y^2.y'' + xy' = y$.

$$y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{y}.$$

$$y'' = \left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'.y - x.y'}{y^2} = \frac{y - x.\dfrac{x}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{\left(x^2+1\right) - x^2}{y^3} = \frac{1}{y^3}.$$

Khi đó: $y^2.y'' + xy' = y^2.\dfrac{1}{y^3} + x.\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{1+x^2}{y} = \dfrac{y^2}{y} = y$.

Vậy $y^2.y'' + xy' = y$.

(9) Với hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$ ta có $y^2y'' + xy' = y$.

Ta có: $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $y'' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$;

Khi đó: $y^2y'' + xy' = \left(x^2+1\right)\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} + x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} = y$.

Vậy $y^2y'' + xy' = y$.

(10) Với hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ ta có $y^2.y'' - xy' + y = 0$.

Ta có $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'' = \dfrac{-\sqrt{1-x^2} + x.\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-\left(1-x^2\right) - x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} = \dfrac{-1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$

Khi đó $y^2.y'' - xy' + y = -\left(1-x^2\right).\dfrac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} - x.\dfrac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = -\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} = 0$ (ĐPCM)

Câu 22. Cho $f\left(x\right)=x^4-4x^2+3$ và $g\left(x\right)=3+10x-7x^2$. Giải phương trình $f''\left(x\right)+g'\left(x\right)=0$

Lời giải

Ta có $f\left(x\right)=x^4-4x^2+3\Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3-8x; f''\left(x\right)=12x^2-8$.

$g\left(x\right)=3+10x-7x^2\Rightarrow g'\left(x\right)=10-14x.$

Khi đó $f''\left(x\right)+g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 12x^2-8+10-14x=0\Leftrightarrow 12x^2-14x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{1}{6}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;\dfrac{1}{6}\right\}$.

Câu 23. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x^2+4x-6$. Giải bất phương trình $f''\left(x\right)\le f'\left(x\right)-1$

Lời giải

Ta có $f\left(x\right)=x^3-3x^2+4x-6\Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2-6x+4; f''\left(x\right)=6x-6$.

Khi đó $f''\left(x\right)\le f'\left(x\right)-1\Leftrightarrow 6x-6\le 3x^2-6x+4-1\Leftrightarrow 3x^2-12x+9\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4x-6$. Giải bất phương trình $y''<0$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x+4; y''=6x-6$.

Do đó $y''<0\Leftrightarrow 6x-6<0\Leftrightarrow x<1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(-\infty;1\right)$.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=5\left(x+1\right)^3+4\left(x+1\right)$. Giải phương trình $f''\left(x\right)=0$.

Lời giải

Ta có $f'\left(x\right)=15\left(x+1\right)^2+4x; f''\left(x\right)=30\left(x+1\right)+4$.

Do đó $f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow 30\left(x+1\right)+4=0\Leftrightarrow x+1=-\dfrac{2}{15}\Leftrightarrow x=-\dfrac{17}{15}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T=\left\{-\dfrac{17}{15}\right\}$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Tìm các nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\pi\right]$của phương trình $f^{(4)}\left(x\right)=-8$.

Lời giải

Ta có $f'\left(x\right)=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right); f''\left(x\right)=-4\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

$f'''(x)=8\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right); f^{(4)}(x)=16\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

Do đó $f^{(4)}(x)=-8 \Leftrightarrow 16\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-8 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $x\in[0;\pi]$

Xét $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Ta có $0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{1}{2} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Xét $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$. Ta có $0\le-\frac{\pi}{6}+k\pi\le\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le k\le\frac{7}{6} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=1 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T=\left\{\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}$.

--------------------Hết--------------------