

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. LÝ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA

1) Hàm số sin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\sin x$

$$\begin{aligned}\sin x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sin x\end{aligned}$$

được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

2) Hàm số cosin

Quy tắc đặt tương ứng với mỗi số thực x với số thực $\cos x$

$$\begin{aligned}\cos x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \cos x\end{aligned}$$

được gọi là hàm số cosin, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$.

3) Hàm số tang

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($\cos x \neq 0$), kí hiệu là $y = \tan x$.

Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4) Hàm số cotang

Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($\sin x \neq 0$), kí hiệu là $y = \cot x$.

Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

II – TÍNH TUẦN HOÀN VÀ CHU KÌ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

- $x - T \in D$ và $x + T \in D$.
- $f(x + T) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$; hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$; hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$; hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

2) Chú ý

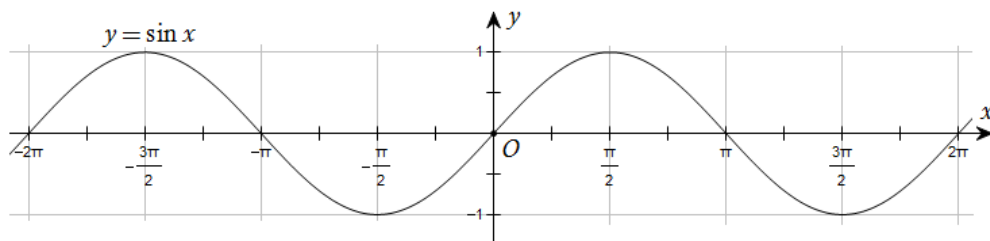
- Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.
- Hàm số $y = f_1(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1 và hàm số $y = f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_2 thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ tuần hoàn với chu kì T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Lưu ý 2 số thực không xác định được bội chung nn, nên là $T_0 = mT_1 = nT_2$ với m,n là 2 số tự nhiên nguyên tố cùng nhau)

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Hàm số $y = \sin x$

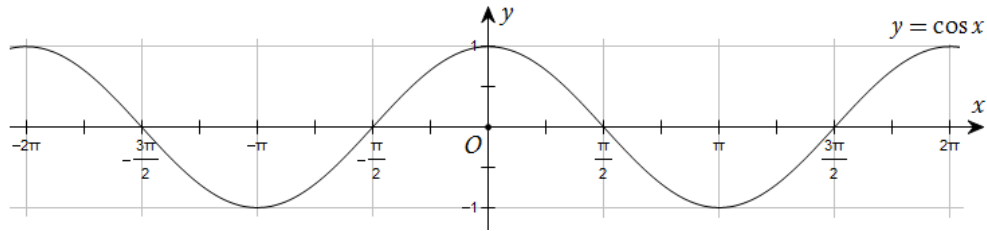
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$, có nghĩa và xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, có nghĩa $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π , có nghĩa $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



2) Hàm số $y = \cos x$

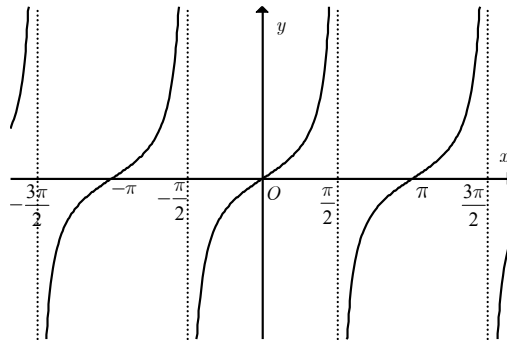
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$, có nghĩa và xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Tập giá trị $T = [-1; 1]$, có nghĩa $-1 \leq \cos x \leq 1$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π , có nghĩa $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.



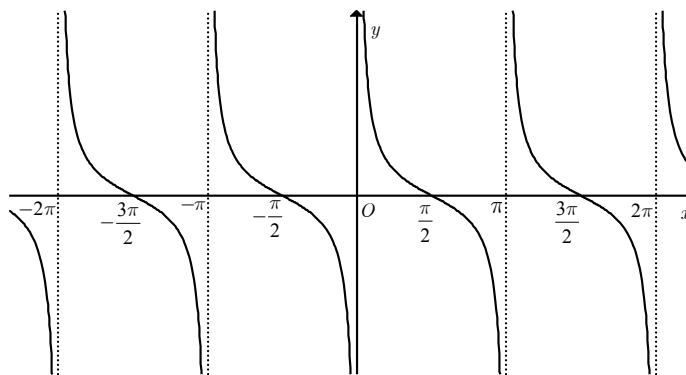
3) Hàm số $y = \tan x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π , có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



4) Hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π , có nghĩa $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \geq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) \neq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x)$, $v(x)$ xác định và $v(x) > 0$.
- Hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
 $-1 \leq \sin x \leq 1$; $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Như vậy, $y = \sin[u(x)]$, $y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

- $y = \tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y = \cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$; b) $y = \cos\sqrt{4 - x^2}$; c) $y = \sqrt{\sin x}$; d) $y = \sqrt{2 - \sin x}$.

Giải

a) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$ xác định $\Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

c) Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$.

Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; c) $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$; d) $y = \frac{1}{\tan x - 1}$.

Giải

a) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) Hàm số $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos(x - \pi) \neq 0 \Leftrightarrow x - \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y = \frac{1}{\tan x - 1}$ xác định $\tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$; b) $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$.

Giải

a) Hàm số $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Hàm số $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$$\sin 3x \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 6x \neq 0 \Leftrightarrow 6x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R} : y = \sqrt{2m - 3\cos x}$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m - 3\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1 \leq \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ (1+2k)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{ (1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x - \cos x}.$

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \emptyset.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y = 3 \tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 7. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3 \tan x - 5}{1 - \sin^2 x}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin^2 x \neq 0$ và $\tan x$ xác định

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 8. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}.$

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = [-2; +\infty).$

C. $D = [0; 2\pi].$

D. $D = \emptyset.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}.$

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}.$

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = [-1; 1].$

D. $D = \emptyset.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó không tồn tại căn bậc hai của $\sin x - 2.$

Vậy tập xác định $D = \emptyset.$

Câu 10. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$. (*)

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên (*) $\Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$.

A. $D = \emptyset$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

D. $D = \left[\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{13\pi}{6} + k2\pi\right], k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x \geq 0 \\ 1 - \sin 2x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2} \cdot \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k$. (*)

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên (*) $\Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp:

Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D ;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D .

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho

$$\begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \sin^4 x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x$; b) $y = \sin x \cdot \cos x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + 3$; b) $y = \sin x + \cos x$.

Giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\text{Ta có: } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$; b) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$.

Giải

a) Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin^2 x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x - \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x} = f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$\text{b) TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + 1}{\sin^3(-x)} = \frac{\cos^3 x + 1}{-\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

Ta có:

$$f(-x) = 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m \sin 4x + \cos 2x = -3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow 6m \sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{aligned}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cot x$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = -\sin x$. B. $y = \cos x - \sin x$. C. $y = \cos x + \sin^2 x$. D. $y = \cos x \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Tất cả các hàm số đều có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Bây giờ ta kiểm tra $f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$.

- Với $y = f(x) = -\sin x$. Ta có $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x)$

$\longrightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = -\sin x$ là hàm số lẻ.

- Với $y = f(x) = \cos x - \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$

$\longrightarrow f(-x) \neq \{-f(x), f(x)\}$. Suy ra hàm số $y = \cos x - \sin x$ không chẵn không lẻ.

- Với $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$

$$= \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos x + [-\sin x]^2 = \cos x + \sin^2 x$$

$\longrightarrow f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

- Với $y = f(x) = \cos x \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = -\cos x \sin x$

$\longrightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x \sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = x \cos x$. C. $y = \cos x \cdot \cot x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn D

- Xét hàm số $y = f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $y = f(x) = x \cos x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $y = f(x) = \cos x \cot x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \cot(-x) = -\cos x \cot x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = x^2 \sin x$. C. $y = \frac{x}{\cos x}$. D. $y = x + \sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ.

Câu 5: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A. $y = \sin x \cos 2x$. B. $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$. D. $y = \cos x \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .

Xét đáp án B, ta có $y = f(x) = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 x \cdot \sin x = \sin^4 x$. Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \cos x + \sin^2 x$. B. $y = \sin x + \cos x$.
C. $y = -\cos x$. D. $y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = \cot 4x$. B. $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$. C. $y = \tan^2 x$. D. $y = |\cot x|$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

Câu 8: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. B. $y = \sin^2 x$. C. $y = \frac{\cot x}{\cos x}$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn C

Viết lại đáp án A là $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = 1 - \sin^2 x$. B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$.
C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$. D. $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Lời giải

Chọn C

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

- Xét hàm số $f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $g(x) = \tan^2 x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = [\tan(-x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x = g(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn.

B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

D. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải

Chọn B

● Xét hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

● Xét hàm số $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x) \longrightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

Câu 12: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại đáp án B là $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$.

Viết lại đáp án C là $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$.

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án D.

● Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in [k2\pi; \pi + k2\pi] \Leftrightarrow x \in \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

$\longrightarrow D = \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \ (k \in \mathbb{Z})$.

● Chọn $x = \frac{\pi}{4} \in D$ nhưng $-x = -\frac{\pi}{4} \notin D$. Vậy $y = \sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ.

Câu 13: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O .
- B. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy .
- C. Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy .
- D. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được hàm số $y = |\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy .
Do đó đáp án A sai.

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad M = \max_D f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \\ \blacksquare \quad m = \min_D f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \end{aligned}$$

Lưu ý:

- $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1$.
- $0 \leq \sin^2 x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1$.
- $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1; 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1$.
- Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản
 - o Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
 - o Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
 - o Nếu hàm số có dạng: $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$
Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a \sin x + b \cos x = c$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$; b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$.

Giải

a) Ta có:

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 3$$

Hay $-1 \leq y \leq 3$. Suy ra:

$$\text{Max}y = 3 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -1 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2} \\ &\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

Hay $-3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3 \text{ khi } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -3 \text{ khi } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$\text{a) } y = \sin x + \cos x ; \quad \text{b) } y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x.$$

Giải

$$\text{a) Ta có: } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}.$$

Suy ra:

$$\text{Max}y = \sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b) Ta có: } y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Suy ra: $-2 \leq y \leq 2$. Do đó:

$$\text{Max}y = 2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$;

b) $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$.

Giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x)^2 + 2 \sin x + 2 \\ &= -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4$$

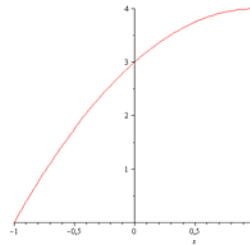
Hay $0 \leq y \leq 4$

Do đó:

$$\text{Maxy} = 4 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Miny} = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:



Nếu đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = -t^2 + 2t + 3$ xác định với mọi $t \in [-1; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 1$ và trên đoạn $[-1; 1]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1$ hay $\sin x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 1$ hay $\sin x = 1$.

b) Ta có

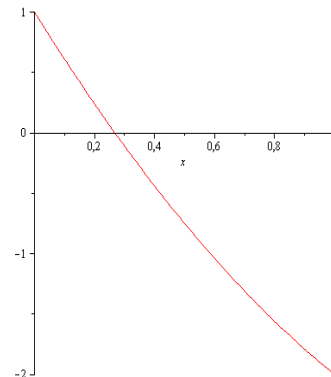
$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = (1 - \cos^2 x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 \\ &= \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq -1$$

Do đó:

$$\text{Maxy} = 2 \text{ khi}$$



$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Miny = -1 khi

$$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:

Nếu đặt $t = \cos^2 x, t \in [0; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$ xác định với mọi $t \in [0; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 2 \notin [0; 1]$ và trên đoạn $[0; 1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

Giải

$$\text{Ta có: } \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$$

$$\text{Vì } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Biến đổi } y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$$

$$\Leftrightarrow y \sin x + y \cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)\sin x + (y + 1)\cos x = 2y + 1 \quad (*)$$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (y - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq (2y + 1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \leq y \leq \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Kết luận: } \max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3\sin x - 2$.

A. $M = 1, m = -5$.

B. $M = 3, m = 1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \longrightarrow -5 \leq 3\sin x - 2 \leq 1$$

$$\longrightarrow -5 \leq y \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 2: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3 \cos 2x + 5$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-1; 11]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \cos 2x \leq 1 &\longrightarrow -3 \leq 3 \cos 2x \leq 3 \longrightarrow 2 \leq 3 \cos 2x + 5 \leq 8 \\ &\longrightarrow 2 \leq y \leq 8 \longrightarrow T = [2; 8]. \end{aligned}$$

Câu 3: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3 \sin x$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-3; 3]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 &\longrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \longrightarrow 3 \geq -3 \sin x \geq -3 \\ &\longrightarrow 8 \geq 5 - 3 \sin x \geq 2 \longrightarrow 2 \leq y \leq 8 \longrightarrow T = [2; 8]. \end{aligned}$$

Câu 4: Hàm số $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x. \\ \text{Mà } -1 \leq \sin 4x \leq 1 &\longrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \longrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7 \\ &\longrightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\} \text{ nên } y \text{ có 5 giá trị nguyên.} \end{aligned}$$

Câu 5: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2} \sin(2016x + 2017)$.

- A. $m = -2016\sqrt{2}$. B. $m = -\sqrt{2}$. C. $m = -1$. D. $m = -2017\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin(2016x + 2017) \leq 1 &\longrightarrow \sqrt{2} \geq -\sqrt{2} \sin(2016x + 2017) \geq -\sqrt{2}. \\ \text{Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là } &-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Ta có $\frac{1}{\cos x + 1}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x = 1$.

Khi $\cos x = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính $P = M - m$.

- A.** $P = 4$. **B.** $P = 2\sqrt{2}$. **C.** $P = \sqrt{2}$. **D.** $P = 2$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Mà $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$\longrightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow P = M - m = 2\sqrt{2}$.

Câu 8: Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x$.

- A.** $T = [-2; 2]$. **B.** $T = [-4034; 4034]$. **C.** $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. **D.** $T = [0; \sqrt{2}]$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $y = \sin 2017x - \cos 2017x = \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Mà $-1 \leq \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$\longrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \longrightarrow T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Câu 9: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải**Chọn C**

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 10: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$.

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq 1 \longrightarrow -1 \geq y \geq 1$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \cos 3x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \longrightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$

$\longrightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \longrightarrow 1 \geq y \geq -1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$

$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$.

Mà $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

Câu 13: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $T = [0; 2]$.

B. $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

C. $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

D. $T = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1.$$

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

A. $M = 3, m = 0$.

B. $M = 2, m = 0$.

C. $M = 2, m = 1$.

D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$.

A. $M = \frac{1}{2}$.

B. $M = \frac{2}{3}$.

C. $M = 1$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{2}{1 + \tan^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \cos^2 x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq y \leq 2 \longrightarrow M = 2.$$

Câu 16: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$.

$$\text{Tính } P = 2M - m^2.$$

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 112$.

D. $P = 130$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5$$

$$\longrightarrow 3 \leq y \leq 5 \longrightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \longrightarrow P = 2M - m^2 = 1.$$

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x$.

- A. $m = 2 - \sqrt{3}$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = 2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + 1$$

$$= 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) + 1 = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) + 1.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq 1 + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 3 \longrightarrow -1 \leq y \leq 3.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

Câu 18: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 12 \sin x - 5 \cos x$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-7; 7]$. C. $T = [-13; 13]$. D. $T = [-17; 17]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = 12 \sin x - 5 \cos x = 13 \left(\frac{12}{13} \sin x - \frac{5}{13} \cos x \right).$$

$$\text{Đặt } \frac{12}{13} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{5}{13} = \sin \alpha. \text{ Khi đó } y = 13 (\sin x \cos \alpha - \sin \alpha \cos x) = 13 \sin (x - \alpha)$$

$$\longrightarrow -13 \leq y \leq 13 \longrightarrow T = [-13; 13].$$

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x$.

- A. $M = 3$. B. $M = 1$. C. $M = 5$. D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x = 5 \left(\frac{4}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \right).$$

$$\text{Đặt } \frac{4}{5} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{3}{5} = \sin \alpha. \text{ Khi đó } y = 5 (\cos \alpha \sin 2x - \sin \alpha \cos 2x) = 5 \sin (2x - \alpha)$$

$$\longrightarrow -5 \leq y \leq 5 \longrightarrow M = 5.$$

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5$.

$$\text{Tính } P = M - 2m^2.$$

A. $P = 1$.

B. $P = 7$.

C. $P = 8$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5 = (\sin x - 2)^2 + 1$.

Do $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \longrightarrow 1 \leq (\sin x - 2)^2 \leq 9$

$\longrightarrow 2 \leq (\sin x - 2)^2 + 1 \leq 10 \longrightarrow \begin{cases} M = 10 \\ m = 2 \end{cases} P = M - 2m^2 = 2$.

Câu 21: Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \cos^2 x - \cos x = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Mà $-1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$\longrightarrow -\frac{1}{4} \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \longrightarrow -\frac{1}{4} \leq y \leq 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{0; 1; 2\}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 22: Hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = 1 - \sin^2 x + 2 \sin x + 2$

$= -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \longrightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4$

$\longrightarrow 0 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq -4 \longrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 + 4 \geq 0$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 23: Tìm giá trị lớn nhất M và nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = 1, m = 0$.

C. $M = 4, m = -1$.

D. $M = 2, m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 x) + 1 = (\sin^2 x + 1)^2 - 2$.

Do $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \longrightarrow 1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4$

$\longrightarrow -1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 - 2 \leq 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 4 \sin^4 x - \cos 4x$.

A. $m = -3$.

B. $m = -1$.

C. $m = 3$.

D. $m = -5$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y = 4 \sin^4 x - \cos 4x = 4 \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 - (2 \cos^2 2x - 1)$

$= -\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 2 = -(\cos 2x + 1)^2 + 3 \leq 3$.

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos 2x + 1 \leq 2 \longrightarrow 0 \leq (\cos 2x + 1)^2 \leq 4$

$\longrightarrow -1 \leq -(\cos 2x + 1)^2 + 3 \leq 3 \longrightarrow m = -1$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{7 - 3 \cos^2 x}$.

A. $M = \sqrt{10}, m = 2$.

B. $M = \sqrt{7}, m = 2$.

C. $M = \sqrt{10}, m = \sqrt{7}$.

D. $M = 0, m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1$

$\longrightarrow 4 \leq 7 - 3 \cos^2 x \leq 7 \longrightarrow 2 \leq \sqrt{7 - 3 \cos^2 x} \leq \sqrt{7}$.

Câu 26: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5.

B. 29 tháng 5.

C. 30 tháng 5.

D. 31 tháng 5.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] \leq 1 \longrightarrow y = 4 \sin \left[\frac{\pi}{178} (t - 60) \right] + 10 \leq 14$.

$$\text{Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất} \Leftrightarrow y = 14 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Do } 0 < t \leq 365 \longrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{54}{89} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0.$$

Với $k = 0 \longrightarrow t = 149$ rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0 < t \leq 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

Câu 27: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

- A. $t = 13$ (giờ). B. $t = 14$ (giờ). C. $t = 15$ (giờ). D. $t = 16$ (giờ).

Lời giải

. Chọn B

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \text{ với } 0 < t \leq 24 \text{ và } k \in \mathbb{Z}.$$

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn

$$\text{Vì với } t = 14 \longrightarrow \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = 2\pi \text{ (đúng với } k = 1 \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó

1. Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn $f(x)$ tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x \in D$, ta có $x - T_0 \in D$ và $x + T_0 \in D$ (1). Chỉ ra $f(x + T_0) = f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0 < T < T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow \dots \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết $0 < T < T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Từ đó $y = \sin(ax + b), y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ π . Từ đó $y = \tan(ax + b), y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$

Chú ý:

$y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ; $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn
- Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm hữu hạn
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $\dots < x_m < x_{m+1} < \dots$ mà $|x_m - x_{m+1}| \rightarrow 0$ hay ∞

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x) = \sin x, T_0 = 2\pi$; b) $f(x) = \tan 2x, T_0 = \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử có số thực dương $T < 2\pi$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Cho $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow VT(*) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T < 1$; VP(*) = $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (*)$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$

b) Ta có: $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x), \forall x \in D$.

Giả sử có số thực dương $T < \frac{\pi}{2}$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x + 2T) = \tan 2x, \forall x \in D$ (**)

Cho $x = 0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0$; VP(**) = 0

$B \Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$; b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; c) $f(x) = \sin(x^2)$; d) $y = \tan \sqrt{x}$.

Hướng dẫn giải

c) Hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

d) Hàm số $f(x) = \tan \sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$(k+1)^2 \pi^2 - k^2 \pi \rightarrow \infty \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 2: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x$ B. $y = x + \sin x$ C. $y = x \cos x$. D. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x + \sin x$ không tuần hoàn. Thật vậy:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
 - Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$
- $$\Leftrightarrow (x+T) + \sin(x+T) = x + \sin x, \forall x \in D$$
- $$\Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in D. (*)$$

Cho $x = 0$ và $x = \pi$, ta được
$$\begin{cases} T + \sin x = \sin 0 = 0 \\ T + \sin(\pi + T) = \sin \pi = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow 2T + \sin T + \sin(\pi + T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$. Điều này trái với định nghĩa là $T > 0$.

Vậy hàm số $y = x + \sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Tương tự chứng minh cho các hàm số $y = x \cos x$ và $y = \frac{\sin x}{x}$ không tuần hoàn.

Câu 3: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không tuần hoàn?

- A. $y = \cos x$. B. $y = \cos 2x$. C. $y = x^2 \cos x$. D. $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải.

Chọn C

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $T = \frac{2\pi}{5}$. B. $T = \frac{5\pi}{2}$. C. $T = \frac{\pi}{2}$. D. $T = \frac{\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{5}$.

Câu 5: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$.

- A. $T = 4\pi$. B. $T = 2\pi$. C. $T = -2\pi$. D. $T = \pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 6: Tìm chu kì T của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

- A. $T = \frac{1}{50}$. B. $T = \frac{1}{100}$. C. $T = \frac{\pi}{50}$. D. $T = 200\pi^2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$.

Câu 7: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Nhận xét. T là của T_1 và T_2 .

Câu 8: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = 3\pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = 5\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Câu 9: Tìm chu kì T của hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

A. $T = 2\pi$.

B. $T = 4\pi$

C. $T = 6\pi$

D. $T = \pi$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = 3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = -2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 10: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = 2\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Suy ra hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Câu 11: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

A. $T = \frac{\pi}{3}$.

B. $T = \frac{4}{3}$.

C. $T = \frac{2\pi}{3}$.

D. $T = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{1}{3}$.

Câu 12: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x + \cot x$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan 3x + \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Câu 13: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cot \frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 3\pi$.

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = 3\pi$.

Câu 14: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$.

Hàm số $y = -\tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 15: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\cos^2 x + 2017$.

A. $T = 3\pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = \pi$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 2\cos^2 x + 2017 = \cos 2x + 2018$.

Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 16: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 3x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1}{2}(3\cos 6x - 2\cos 2x + 5)$.

Hàm số $y = 3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 17: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x - \cos^2 2x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = \frac{\pi}{3}$.

C. $T = \frac{\pi}{2}$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \tan 3x - \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}(2 \tan 3x - \cos 4x - 1)$.

Hàm số $y = 2 \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 18: Hàm số nào sau đây có chu kì khác π ?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

B. $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $y = \tan(-2x + 1)$.

D. $y = \cos x \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Vì $y = \tan(-2x + 1)$ có chu kì $T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. Hàm số $y = \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ có chu kỳ là π .

Câu 19: Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

A. $y = \cos^3 x$.

B. $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

C. $y = \sin^2(x + 2)$.

D. $y = \cos^2\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Lời giải.

Chọn C

Hàm số $y = \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin^2(x + 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x + 4)$ có chu kì là π .

Hàm số $y = \cos^2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(x + 2)$ có chu kì là 2π .

Câu 20: Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

A. $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$.

B. $y = \sin x$ và $y = \tan 2x$.

C. $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$.

D. $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$.

Lời giải

Chọn B

Hai hàm số $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 2π .

Hai hàm số $y = \sin x$ có chu kì là 2π , hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Hai hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 4π .

Hai hàm số $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$ có cùng chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác

1. Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

$$x \in [0, T_0] \text{ hoặc } x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

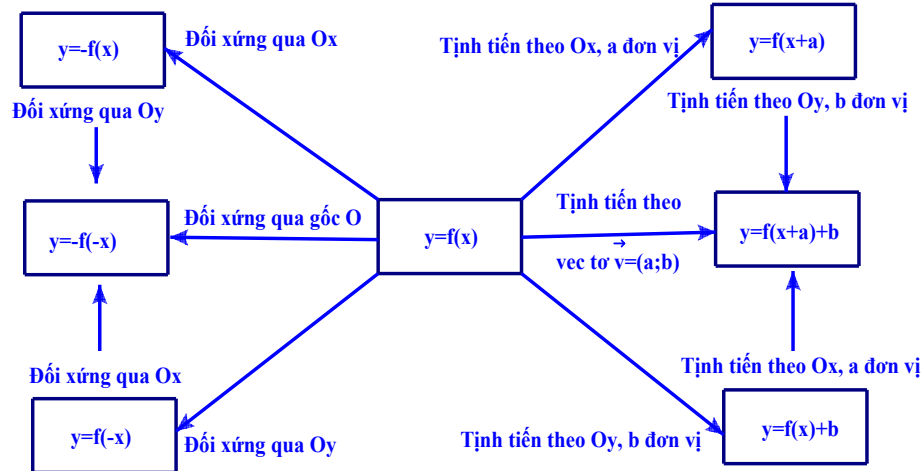
2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

- a) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- b) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang phải trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- c) Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.

d) Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên

hần đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành và lấy đối xứng $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \sin 4x$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số $y = \sin 4x$.

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

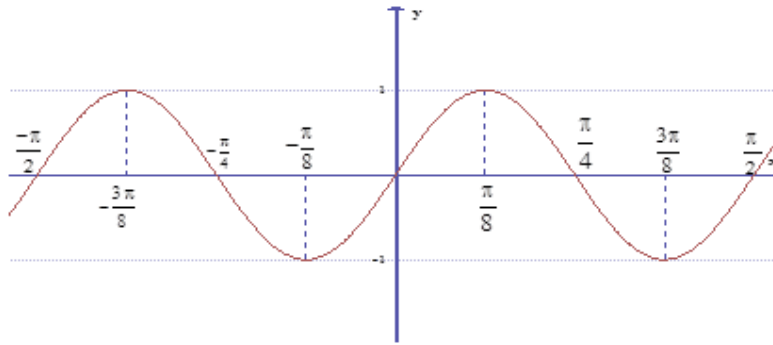
(Do chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{3}$	
	$\frac{\pi}{2}$									
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: $\dots, \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \dots$



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Miền xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $[0; 6\pi]$

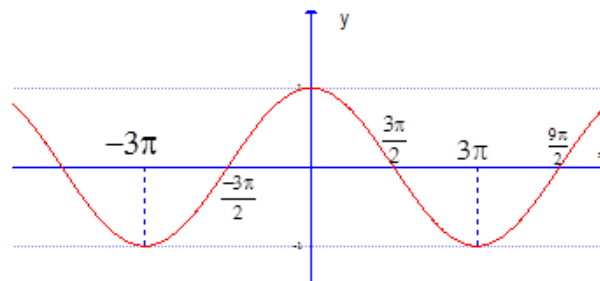
(Do chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ trên đoạn $[0; 6\pi]$ là:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{6}$	3π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{33\pi}{6}$	
									6π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ trên đoạn $[0; 6\pi]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: ..., $[-6\pi, 0]$, $[6\pi, 12\pi]$, ...

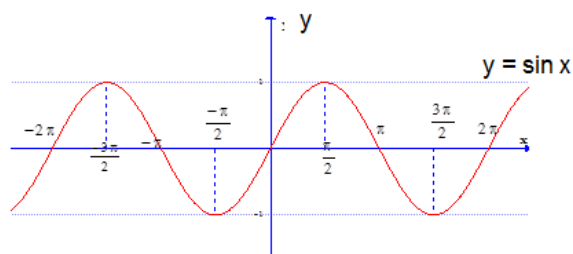


Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C). Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ b) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$.

Hướng dẫn giải

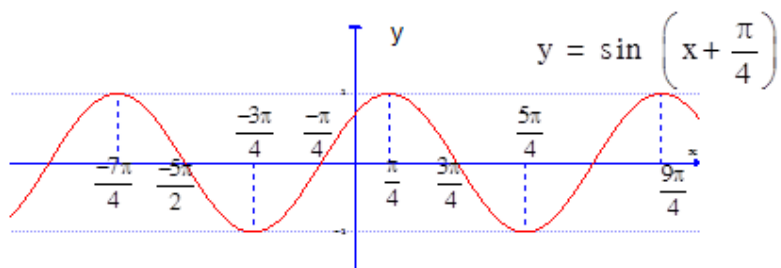
Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C) như sau:



a) Từ đồ thị (C), ta có đồ thị $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái

một đoạn là $\frac{\pi}{4}$ đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, (C') như (hình 8)

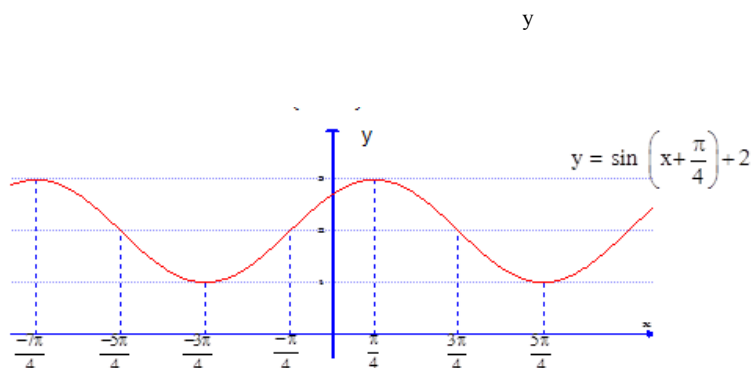
sau:



b) Từ đồ thị (C') của hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, ta có đồ thị hàm số

$y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$ bằng cách tịnh tiến (C') lên trên một đoạn là 2 đơn vị, ta

được đồ thị hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$, (C'') như sau:



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại lý thuyết

Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $p > 0$, ta có:

- + Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + p$.
- + Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - p$.
- + Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.
- + Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x + 1$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.
- C. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.
- D. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

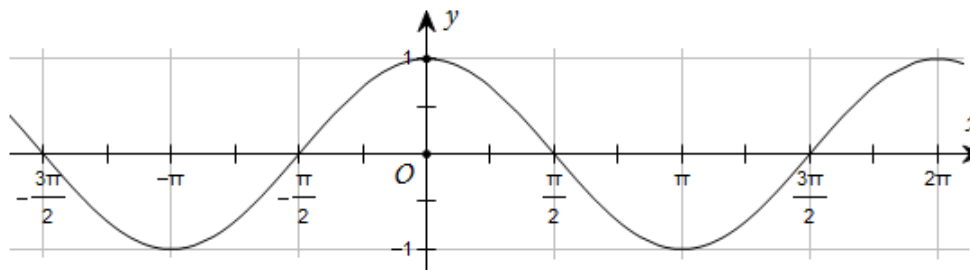
- Tịnh tiến đồ thị $y = \cos x + 1$ sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

- Tiếp theo tịnh tiến đồ thị $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ xuống dưới 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Câu 4: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin 2x$. B. $y = \cos x$. C. $y = -\sin x$. D. $y = -\cos x$.

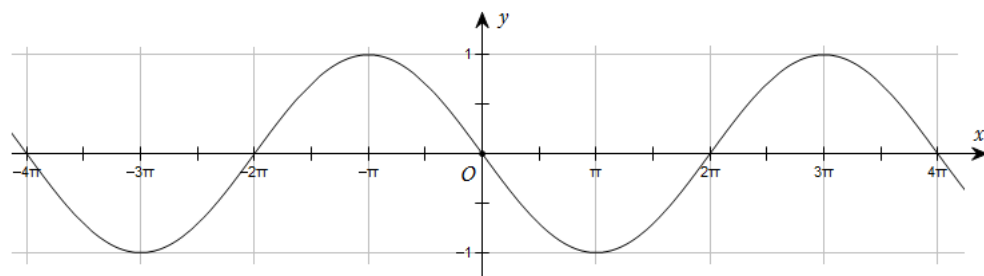
Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó loại đáp án C và D.

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 5: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin \frac{x}{2}$. B. $y = \cos \frac{x}{2}$. C. $y = -\cos \frac{x}{4}$. D. $y = \sin \left(-\frac{x}{2} \right)$.

Lời giải

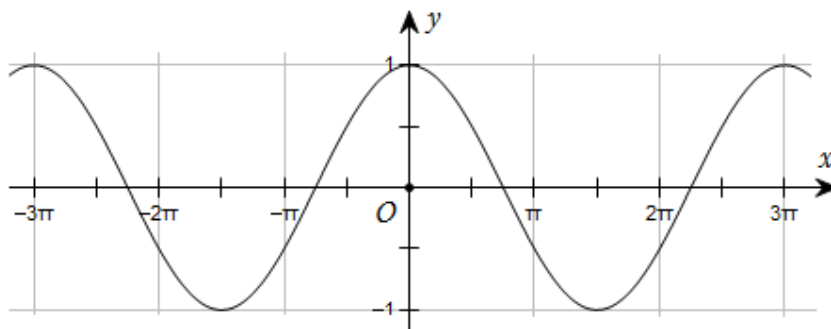
Chọn D

Ta thấy:

Tại $x = 0$ thì $y = 0$. Do đó loại B và C.

Tại $x = \pi$ thì $y = -1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 6: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \cos \frac{2x}{3}$. B. $y = \sin \frac{2x}{3}$. C. $y = \cos \frac{3x}{2}$. D. $y = \sin \frac{3x}{2}$.

Lời giải

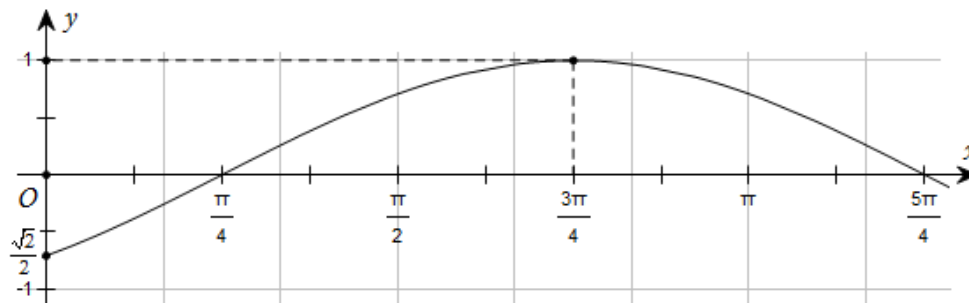
Chọn A

Ta thấy:

Tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó ta loại đáp án B và D.

Tại $x = 3\pi$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án A và C thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 7: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. **C.** $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **D.** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

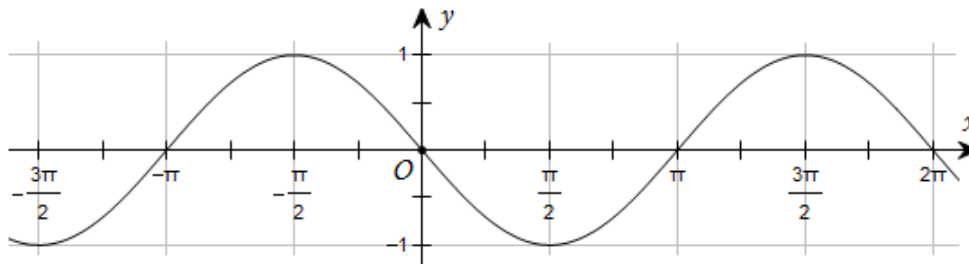
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1 . Do đó loại đáp án C.

Tại $x = 0$ thì $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó loại đáp án D.

Tại $x = \frac{3\pi}{4}$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 8: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = \sin x$. **B.** $y = |\sin x|$. **C.** $y = \sin |x|$. **D.** $y = -\sin x$.

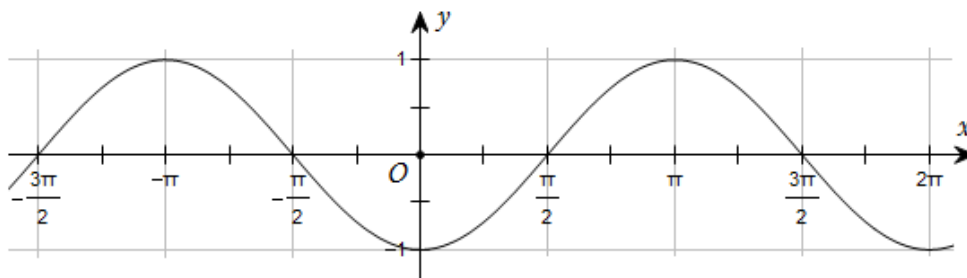
Lời giải

Chọn D

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$. Cả 4 đáp án đều thỏa.

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Câu 9: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

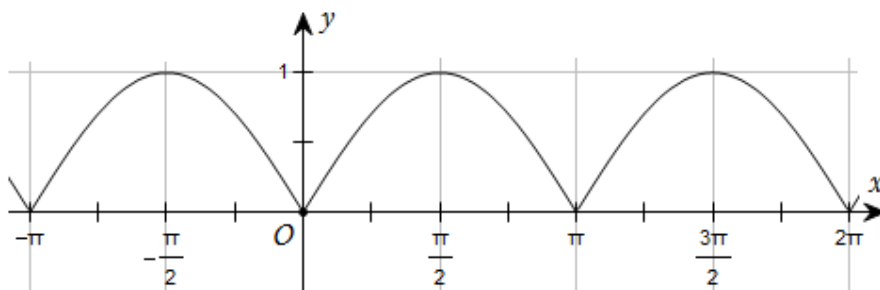
- A. $y = \cos x$. B. $y = -\cos x$ C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 10: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = \sin|x|$. C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

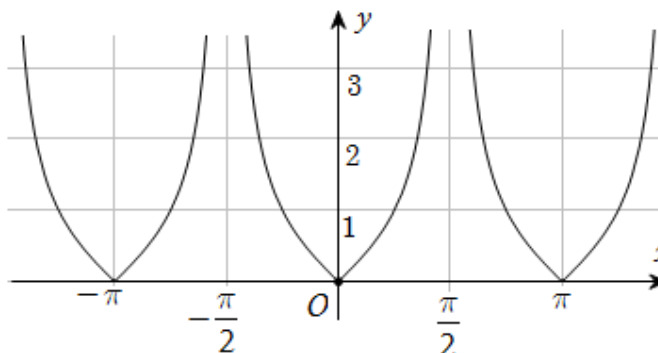
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó chỉ có A hoặc D thỏa mãn.

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$. Thay vào hai đáp án A và D chỉ có duy nhất A thỏa mãn.

Câu 11: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = |\tan x|$. D. $y = |\cot x|$.

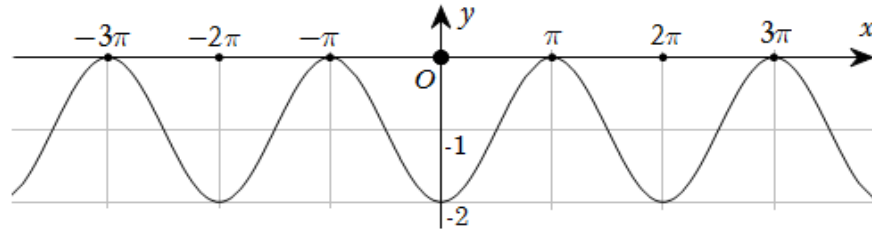
Lời giải

Chọn C

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó ta loại đáp án A và B.

Hàm số xác định tại $x = \pi$ và tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có C thỏa mãn.

Câu 12: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. B. $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Lời giải

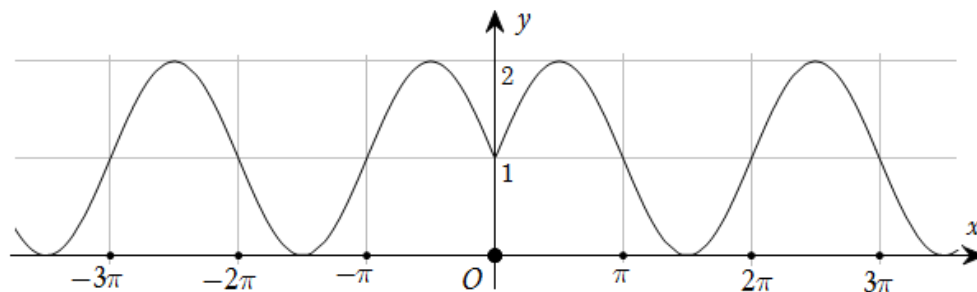
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2. Do đó ta loại đáp án B vì

$$y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in [-2; 2].$$

Tại $x = 0$ thì $y = -2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 13: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

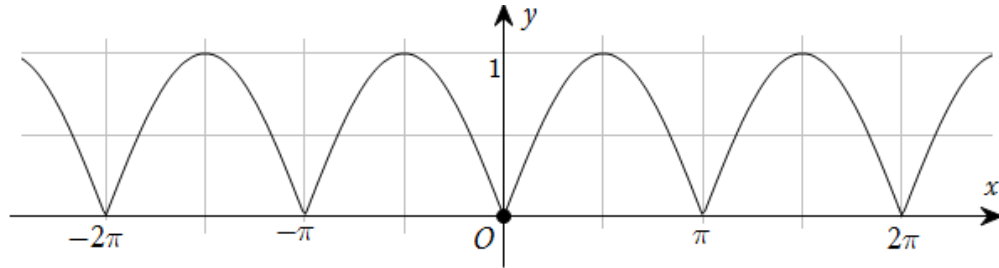
Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và **D**.

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 14: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, **D**.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = 1 + \sin |x|$. **B.** $y = |\sin x|$. **C.** $y = 1 + |\cos x|$. **D.** $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và **D**.

Ta thấy tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có B thỏa.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1) Phương trình $\sin x = a$

Trường hợp $|a| > 1 \longrightarrow$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ với mọi x .

Trường hợp $|a| \leq 1 \longrightarrow$ phương trình có nghiệm, cụ thể:

▪ $a \in \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

▪ $a \notin \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

2) Phương trình $\cos x = a$

Trường hợp $|a| > 1 \longrightarrow$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi x .

Trường hợp $|a| \leq 1 \longrightarrow$ phương trình có nghiệm, cụ thể:

▪ $a \in \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

▪ $a \notin \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$. Khi đó $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

3) Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• $a \in \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

• $a \notin \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4) Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện: $x \neq \pi + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• $a \in \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

• $a \notin \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. CÁC VÍ DỤ RÈN LUYỆN KĨ NĂNG

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$; b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$;

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$;

Hướng Dẫn Giải

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} - x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-4\pi}{5} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình

a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ (1); b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (2)

c) $\tan \frac{x}{3} = 2$ (3); d) $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ (4)

Giải

a) Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là: $x = \pm \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $(3) \Leftrightarrow x = 3 \arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = 3 \arctan 2 + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Ta có:

$$(4) \Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Lời bình: Những phương trình ch trên là những phương trình lượng giác cơ bản. Sử dụng MTCT ta có thể tìm được các giá trị đặc biệt của hàm số lượng giác

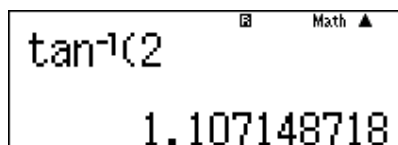
- Ở câu a) $\sin 3x = \frac{1}{2}$. Dùng MTCT (ở chế độ rad) ta ấn $\boxed{\text{SHIF}}\boxed{\sin}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả là

$$\frac{\pi}{6}. \text{ Do đó: } \sin 3x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

- Hoàn toàn tương tự cho câu b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Ta ấn:

$$\boxed{\text{SHIF}}\boxed{\cos}\boxed{-}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}$$
 ta được kết quả là $\frac{2\pi}{3}$. Do đó: $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$

- Ở câu c) nếu ta dùng MTCT: Thử ấn $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\tan}\boxed{2}\boxed{=}$ ta được kết quả



Do đó, phương trình $\tan \frac{x}{3} = 2$ ta chỉ có thể ghi $\frac{x}{3} = \arctan 2 + k\pi$

- Trên MTCT không có hàm cot, tuy nhiên ta thừa biết $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$. Do đó, đối với câu d)

$$\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \text{ ta ấn máy như sau:}$$

$$\boxed{\text{SHIT}}\boxed{\tan}\boxed{1}\boxed{\div}\boxed{\sqrt{3}}\boxed{=}$$
 ta được kết quả là $\frac{\pi}{6}$. Do đó: $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} = \cot \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\text{a) } \sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \quad \text{b) } \cot g\left(x + 30^0\right) = \cot g \frac{x}{2}.$$

$$\text{c) } \cos^2 x = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}; \quad \text{d) } \sin 2x = \cos 3x.$$

Giải

a) Ta có:

$$\sin 4x = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}$

$$\text{b) Điều kiện: } \begin{cases} x + 30^0 \neq k.180^0 \\ \frac{x}{2} \neq n.180^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -30^0 \\ x \neq n.360^0 \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \cot g\left(x + 30^0\right) &= \cot g \frac{x}{2} \Leftrightarrow x + 30^0 = \frac{x}{2} + k.180^0 \Leftrightarrow 2x + 60^0 = x + k.360^0 \\ &\Leftrightarrow x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -60^0 + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$

c) Ta có

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x) = \sqrt{3} + 2 \\ &\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Ngoài cách giải trên ta có thể giải theo cách sau:

$$\cos^2 x = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3} + 2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3} + 2}{4}\right) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Tuy nhiên không nên giải theo cách này vì mất đi cái vẻ đẹp của toán học. Lời giải ban đầu sử dụng dụng công thức hạ bậc với các phép biến đổi hết sức đơn giản đưa về phương trình rất đẹp với đáp số.

d) Ta có

$$\sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét: Phương trình $\sin 2x = \cos 3x$ được chuyển thành $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, ta cũng có thể chuyển thành dạng sau: $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$.

Ví dụ 4. Giải và biện luận phương trình $\sin x = 4m - 1$ (*)

Giải

- Trường hợp 1: $|4m - 1| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 1 > 1 \\ 4m - 1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases}$

Phương trình (*) vô nghiệm

- Trường hợp 2: $|4m - 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 4m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$

Phương trình (*) có nghiệm $\begin{cases} x = \arcsin(4m - 1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(4m - 1) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Tóm lại:

- Nếu $\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases}$ thì phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm $\begin{cases} x = \arcsin(4m - 1) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(4m - 1) + k2\pi \end{cases}$

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Giải

Ta có: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{2}$

Ví dụ 6. Giải phương trình

a) $\sin 2x - \sin 2x \cos x = 0$ (1); b) $\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x$ (2).

Giải

a) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin 2x(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lưu ý: Một số học sinh mắc sai lầm nghiệm trọng (lỗi rất cơ bản) là rút gọn phương trình ban đầu cho $\sin 2x$, dẫn đến thiếu nghiệm

b) **Định hướng:** Cả hai vế phương trình đều cho dưới dạng tích của hai hàm lượng giác. Thông thường ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng.

Ta nhắc lại: $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x) = \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 5x = \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3x + k2\pi \\ 5x = \pi - 3x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi; x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{5} = -\frac{1}{2}$ là

A. $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{35\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{5\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{35\pi}{6} + 10k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{5\pi}{6} + k1800^\circ, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{35\pi}{6} + k1800^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$$\sin \frac{x}{5} = \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \frac{x}{5} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + 10k\pi \\ x = \frac{35\pi}{6} + 10k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ **B.** $x = \frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ **C.** $x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D. B và C đúng**

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = -\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

A. $x = 180^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = 90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\tan x = 1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 8. Nghiệm của phương trình $\tan x = -1$ là

A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = (-1)^{2k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. B và C đúng

Hướng dẫn giải

CHỌN C.

$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi = (-1)^{2k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Câu 9. Phương trình $\tan x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 10. Phương trình $\cot x = 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 11. Phương trình $\cot x = -1$ có nghiệm là

- A. $x = (-1)^{2k+1} \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. tất cả đều đúng

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} = (-1)^{2k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 12. Phương trình $\cot x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. tất cả đều đúng

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\cot x = \frac{1}{2}$ là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN A.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là

- A. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$$\text{Ta có: } \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\tan 2x = -\sqrt{3}$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$$\text{Ta có: } \tan 2x = -\sqrt{3} = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 16. Nghiệm của phương trình $\cot x = -\sqrt{3}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ C. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN B.

$$\text{Ta có: } \cot x = -\sqrt{3} = \cot \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 17. Nghiệm của phương trình $\tan x = \tan 25^\circ$ là

A. $x = 25^\circ + k360^\circ$ và $x = 155^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = 25^\circ + k180^\circ$ và $x = 155^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 25^\circ + k360^\circ$ và $x = -25^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = 25^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 5$ là

A. $x = 20^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = 15^\circ + 5 + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = 15^\circ + \arctan 5 + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{\pi}{12} + \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải

CHỌN D.

$$\tan\left(x - 15^\circ\right) = 5 \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \arctan 5$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{12} = \arctan 5 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \arctan 5 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 19: Giải phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

A. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Phương trình } \sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 20: Số nghiệm của phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ là?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - 40^\circ) = \sin 60^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x - 40^\circ = 180^\circ - 60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 100^\circ + k360^\circ \\ 2x = 160^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k180^\circ \\ x = 80^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

● Xét nghiệm $x = 50^\circ + k180^\circ$. Vì $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow -180^\circ \leq 50^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ$

$$\Leftrightarrow -\frac{23}{18} \leq k \leq \frac{13}{18} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -130^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 50^\circ \end{cases}$$

● Xét nghiệm $x = 80^\circ + k180^\circ$. Vì $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow -180^\circ \leq 80^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ$

$$\Leftrightarrow -\frac{13}{9} \leq k \leq \frac{5}{9} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -100^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 80^\circ \end{cases}$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Cách 2 (CASIO). Ta có $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow -360^\circ \leq 2x \leq 360^\circ$.

Chuyển máy về chế độ DEG, dùng chức năng TABLE nhập hàm $f(X) = \sin(2X - 40) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ với các thiết lập Start = -360, End = 360, Step = 40. Quan sát bảng giá trị của $f(X)$ ta suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 21: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

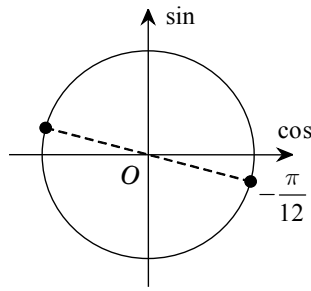
Lời giải

Chọn C

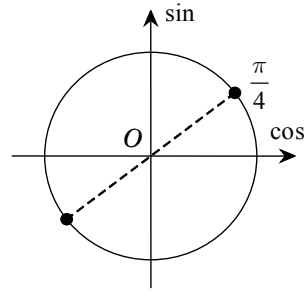
$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Biểu diễn nghiệm $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 1).

Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình.

Cách trắc nghiệm. Ta đưa về dạng $x = \alpha + k \frac{2\pi}{n} \longrightarrow$ số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là n .

- Xét $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k \frac{2\pi}{2} \longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.
- Xét $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \frac{2\pi}{2} \longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

Nhận xét. Cách trắc nghiệm tuy nhanh nhưng cần thận các vị trí có thể trùng nhau.

Câu 22: Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

- A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
- C. $x = k \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\sin 3x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 23: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$ B. $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$ C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right).$ D. $x_0 \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1$.

$$\text{Phương trình } \frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow{\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1} \begin{cases} \sin 2x = 1 \text{ (loại)} \\ \sin 2x = -1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Cho } -\frac{\pi}{4} + k\pi > 0 \longrightarrow k > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Do đó nghiệm dương nhỏ nhất ứng với } k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$$

Câu 24: Hỏi trên đoạn $[-2017; 2017]$, phương trình $(\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{2}) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 4034.

B. 4035.

C. 641.

D. 642.

Lời giải.

Chọn D

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \sqrt{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Theo giả thiết } -2017 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017 + \frac{\pi}{2}}{2\pi} \leq k \leq \frac{2017 + \frac{\pi}{2}}{2\pi}$$

$$\xrightarrow{\text{xấp xỉ}} -320,765 \leq k \leq 321,265 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-320; -319; \dots; 321\}.$$

Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của k tương ứng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $\frac{\pi}{9}$.

B. $-\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $-\frac{\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{TH1. Với } x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{17\pi}{36} \end{cases}$$

$$\text{TH2. Với } x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{11\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{13\pi}{36} \end{cases}$$

So sánh bốn nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{13\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất

là $x = \frac{7\pi}{36}$. Khi đó tổng hai nghiệm này bằng $-\frac{13\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = -\frac{\pi}{6}$.

Câu 26: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ trên khoảng $(-90^\circ; 90^\circ)$ bằng:

- A. 0° . B. -30° . C. 30° . D. -60° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in (-90^\circ; 90^\circ) \longrightarrow -90^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3}$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -60^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 30^\circ \end{cases} \longrightarrow -60^\circ + 30^\circ = -30^\circ.$$

Câu 27: Giải phương trình $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$.

- A. $x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.
C. $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x - 1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=1} x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18}.$$

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ là?

- A. 1 B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \xrightarrow[\text{xấp xỉ}]{\text{CASIO}} -0,027 < k < 1,72 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0;1\}$.

Câu 29: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng:

A. π .

B. $\frac{3\pi}{2}$.

C. 2π .

D. $\frac{5\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in [0; \pi)$, suy ra $0 \leq \frac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0;1;2;3\}$.

Suy ra các nghiệm của phương trình trên $[0; \pi)$ là $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Suy ra $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 30: Giải phương trình $\tan 3x \cdot \cot 2x = 1$.

A. $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Đối chiếu điều kiện, ta thấy nghiệm $x = k\pi$ không thỏa mãn $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 31: Giải phương trình $\cos 2x \tan x = 0$.

A. $x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$.

D.

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\cos 2x \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = k\pi \text{ (thỏa mãn)} \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 32: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Câu 33: Tìm tất các các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$.
C. $m \in [-1; 1]$. D. $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.
- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

- Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.

- Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m + 1| \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}.$$

Câu 35: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

A. $T = 6$.

B. $T = 3$.

C. $T = -2$.

D. $T = -6$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6.$$

BÀI 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1) Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$at + b = 0$$

trong đó a, b là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Chuyển vế rồi chia hai vế phương trình cho a , ta đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

2) Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Cách giải. Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$.

Khi đó phương trình trở thành

$$\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

3) Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$at^2 + bt + c = 0$$

trong đó a, b, c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

4) Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Cách giải.

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình.
- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết cách giải.

Đặc biệt. Phương trình dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ ta làm như sau:

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d.1$$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (a-d)\sin^2 x + b \sin x \cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

5) Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$

Định nghĩa. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$

$$a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

Cách giải. Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$)

Biểu diễn $\sin x \cdot \cos x$ theo t ta được phương trình cơ bản.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Giải phương trình $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 2: Giải phương trình $2 \sin x - 1 = 0$

Lời giải

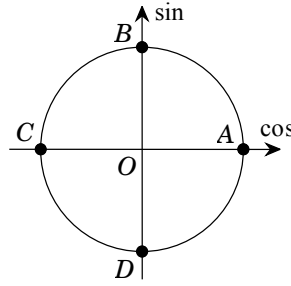
$$\text{Ta có: } 2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Quá dễ để nhận ra có 4 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình đã cho trên đường tròn lượng giác là A, B, C, D.

Cách trắc nghiệm. Ta có $x = \frac{k\pi}{2} = k \frac{2\pi}{4} \longrightarrow$ có 4 vị trí biểu diễn.

Ví dụ 4: Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Ta có $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Theo giả thiết, ta có $0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 2018\pi \xrightarrow{\text{xấp xỉ}} -\frac{1}{6} \leq k \leq 2017,833$

$3 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; \dots; 2017\}$. Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của k tương ứng với có 2018 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Phương trình $2 \sin x + 1 = 0$ có nghiệm là:

A.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases}$$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 2: Giải phương trình $\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{x}{2}+2\right)=0$

A. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Chọn D

Vì $-1 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} + 2 > 0$

Vậy phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{x}{2}-1=0 &\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ &\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k4\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Câu 3: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 4: Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{4}$.

B. $x = \frac{7\pi}{24}$.

C. $x = \frac{\pi}{8}$.

D. $x = \frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 4x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

TH1. Với $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{\text{Cho } > 0} \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{4} \rightarrow k_{\min} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}.$

TH2. Với $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \xrightarrow{\text{Cho } > 0} \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{7}{12} \rightarrow k_{\min} = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{24}.$

So sánh hai nghiệm ta được $x = \frac{\pi}{8}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Câu 5: Giải phương trình $4 \sin^2 x = 3$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{cases} (k, \ell \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{cases} (k, \ell \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

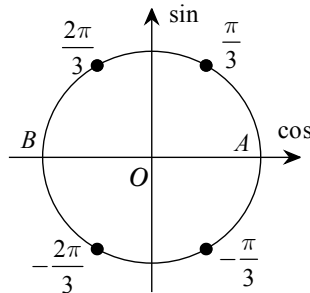
Chọn D

Ta có $4 \sin^2 x = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$

● Với $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

● Với $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Nhận thấy chưa có đáp án nào phù hợp. Ta biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác (hình vẽ).



Nếu tính luôn hai điểm A, B thì có tất cả 6 điểm cách đều nhau nên ta gộp được 6 điểm này thành một họ nghiệm, đó là $x = k\frac{\pi}{3}$.

$$\text{Suy ra nghiệm của phương trình } \begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ k\frac{\pi}{3} \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ k \neq 3\ell \end{cases} (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Câu 6: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1-m}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-m}{\sqrt{3}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2\}.$$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2108; 2018]$ để phương trình $m\cos x + 1 = 0$ có nghiệm?

- A. 2018. B. 2019. C. 4036. D. 4038.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } m\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{m}.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{m} \leq 1 \Leftrightarrow m \geq 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-2018; 2018]} m \in \{1; 2; 3; \dots; 2018\}.$$

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 8: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1$ nhận $x = \frac{\pi}{12}$ làm nghiệm.

- A. $m \neq 2$. B. $m = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-2}$. C. $m = -4$. D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x = \frac{\pi}{12}$ là một nghiệm của phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1$ nên ta có:

$$(m-2) \cdot \sin \frac{2\pi}{12} = m+1 \Leftrightarrow \frac{m-2}{2} = m+1 \Leftrightarrow m-2 = 2m+2 \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m+1)\sin x + 2 - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \leq -1$. B. $m \geq \frac{1}{2}$. C. $-1 < m \leq \frac{1}{2}$. D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } (m+1)\sin x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (m+1)\sin x = m - 2 \Leftrightarrow \sin x = \frac{m-2}{m+1}.$$

$$\text{Để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow -1 \leq \frac{m-2}{m+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 + \frac{m-2}{m+1} \\ \frac{m-2}{m+1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m+1} \geq 0 \\ -\frac{3}{m+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m < -1 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1$ vô nghiệm.

- A. $m \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

TH1. Với $m = 2$, phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1 \Leftrightarrow 0 = 3$: vô lý.

Suy ra $m = 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 2$, phương trình $(m-2)\sin 2x = m+1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{m+1}{m-2}$.

$$\text{Để phương trình (*) vô nghiệm } \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-2} \notin [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{m-2} > 1 \\ \frac{m+1}{m-2} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m > \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp

Cách 1

- Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Đặt: $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\alpha \in [0, 2\pi])$ phương trình trở thành:

$$\sin \alpha \cdot \sin x + \cos \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Cách 2

- Xét $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có là nghiệm hay không?
- Xét $x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \neq 0$.

Đặt: $t = \tan \frac{x}{2}$, thay $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta được phương trình bậc hai theo t:

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0 \quad (3)$$

Vì $x \neq \pi + k2\pi \Leftrightarrow b+c \neq 0$, nên (3) có nghiệm khi:

$$\Delta' = a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2.$$

Giải (3), với mỗi nghiệm t_0 , ta có phương trình: $\tan \frac{x}{2} = t_0$.

Ghi chú

- 1/ Cách 2 thường dùng để giải và biện luận.
- 2/ Cho dù cách 1 hay cách 2 thì điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.
- 3/ Bất đẳng thức B.C.S:

$$|y| = |a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \min y = -\sqrt{a^2 + b^2} \text{ và } \max y = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{a} = \frac{\cos x}{b} \Leftrightarrow \tan x = \frac{a}{b}$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$a) \sin x + 2 \cos x = 5; \quad b) \sin x - \sqrt{3} \cos x = 1; \quad c) 5 \cos x + 3 \sin x = 4\sqrt{2}.$$

Giải

a) Ta thấy $a^2 + b^2 = 5 < c^2 = 25 \Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, ta được :

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{3} - \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2} = 34$, ta được :

$$\frac{5}{\sqrt{34}} \cos x + \frac{3}{\sqrt{34}} \sin x = \frac{4}{\sqrt{17}} (*)$$

$$\text{Đặt } \cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}, \sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Lúc đó : pt} \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} + \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 7x - \sqrt{3} \sin 7x = -\sqrt{2} (*)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2\pi}{5} < x < \frac{6\pi}{7}$.

Giải

Ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 7x - \frac{3}{2} \sin 7x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{6} \cos 7x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 7x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - 7x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + \frac{m2\pi}{7} \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z})$$

Do

$$\frac{2\pi}{5} < x < \frac{6\pi}{7} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + \frac{k2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{5}{84} < \frac{2k}{7} < \frac{6}{7} - \frac{5}{84} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + \frac{m2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{11}{84} < \frac{2m}{7} < \frac{6}{7} - \frac{11}{84} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{5} - \frac{5}{24} < k < 3 - \frac{5}{24} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{52\pi}{84}; x = \frac{35\pi}{84}; x = \frac{59\pi}{84}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$.

Định hướng: Chuyển $\cos 2x$ sang về trái, dùng công thức nhân đôi $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$. Lúc đó phương trình đưa về phương trình tích với sự xuất hiện của nhân tử chung là $\sin x$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 2x + 1 &= 6\sin x + \cos 2x \Leftrightarrow (\sin 2x - 6\sin x) + (1 - \cos 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 3) + 2\sin^2 x &= 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 3 + \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 3 \text{ (VN)} \end{cases} &\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $2\sin 2x - \cos 2x = 7\sin x + 2\cos x - 4$.

Định hướng: Chuyển toàn bộ về phải của phương trình sang về trái, nhóm $2\sin 2x - 2\cos x = 2\cos x(2\sin x - 1)$, sử dụng công thức $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ để nhóm $2\sin^2 x - 1 - 7\sin x + 4 = 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = (\sin x - 3)(2\sin x - 1)$

Chú ý rằng: nếu $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \text{PT} &\Leftrightarrow 4\sin x \cdot \cos x - 2\cos x + 2\sin^2 x - 1 - 7\sin x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x - 1) + (\sin x - 3)(2\sin x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 2\cos x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x + 2\cos x - 3 = 0 \text{ (VN vì } 1^2 + 2^2 < 3^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sin x(2\sin x + 1) = \cos x(2\cos x + \sqrt{3})$.

Định hướng: Khai triển cả hai vế phương trình ta thấy vế trái xuất hiện $2\sin^2 x$ và vế phải xuất hiện $2\cos^2 x$, như vậy nếu đặt 2 ra ngoài ta sẽ được công thức nhân hai: $2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$.

Chuyển vế, phương trình đã cho trở thành:

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cos 2x.$$

Giải

Ta có:

$$PT \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x (*)$

Định hướng: Ở cả hai vế phương trình đều xuất hiện $7x, 5x$. Chuyển vế ta được:

$$\cos 7x \cos 5x + \sin 7x \sin 5x = \cos(7x - 5x) = \cos 2x$$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \cos 7x \cos 5x + \sin 7x \sin 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(7x - 5x) - \sqrt{3} \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 \quad (1)$$

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$$\text{Ta được: } \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 7. Xác định m để phương trình $\sqrt{2} \sin x + m \cos x = m - \sqrt{2} (*)$ có nghiệm.

Định hướng : Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Giải

Ta có :

$$(*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \sqrt{2^2} + m^2 \geq (m - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2 + m^2 \geq m^2 - 2\sqrt{2}m + 2 \Leftrightarrow m \geq 0$$

Vậy $m \geq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 8. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

$$a) \sin x + m \cos x = 1 - m \quad (1)$$

$$b) (2m + 1) \sin x + (2m - 1) \cos x = 2m^2 + \frac{3}{2} \quad (2)$$

Giải

a) **Cách 1.** Thay $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ vào (1). Ta có :

$$VT(1) = 0 - m = -m, \text{ nên (1) không có nghiệm } x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}. \text{ Ta có (1) trở thành: } \frac{2t}{1+t^2} + m \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) = 1 - m$$

$$\Leftrightarrow 2t + m - mt^2 = 1 + t^2 - m - mt^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 - 2m = 0(*)$$

$$\Delta' = 1 - (1 - 2m) = 2m$$

▪ Nếu $m < 0$ thì $\Delta' < 0 \Rightarrow (*)$ vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

▪ Nếu $m = 0$ thì $\Delta' = 0 \Rightarrow (*)$ có nghiệm kép $t_1 = t_2 = -\frac{b'}{a} = 1$

$$\Rightarrow (1) \text{ có nghiệm } \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

▪ Nếu $m > 0$ thì $\Delta' > 0 \Rightarrow (*)$ có nghiệm $t = 1 - \sqrt{2m}$ hoặc $t = 1 + \sqrt{2m}$

$$\Rightarrow (1) \text{ có nghiệm là } x = 2 \arctan(1 \pm \sqrt{2m}) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Tóm lại :

Nếu $m < 0$ thì (1) vô nghiệm

$$\text{Nếu } m = 0 \text{ thì có nghiệm } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Nếu } m > 0 \text{ thì (1) có nghiệm là } x = 2 \arctan(1 + \sqrt{2m}) + k2\pi, x = 2 \arctan(1 - \sqrt{2m}) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Cách 2

(1) có dạng $a \sin X + b \cos X = c$ với $a = 1, b = m, c = 1, X = x$

Ta có :

$$A = a^2 + b^2 - c^2 = 1^2 + m^2 - (1 - m)^2 = 2m$$

Nếu $m < 0$ thì $A < 0 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm

$$\text{Nếu } m = 0 : (1) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nếu $m > 0$ thì $A > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow (1)$ có nghiệm

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\sqrt{m^2 + 1}$

$$\text{Ta được: } \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \sin x + \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \cos x = \frac{1 - m}{\sqrt{m^2 + 1}} (*)$$

$$\text{Đặt } \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} = \cos \varphi, \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sin \varphi, \frac{1 - m}{\sqrt{m^2 + 1}} = \cos \alpha.$$

$$(*) \Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \varphi + \alpha + k2\pi \text{ hoặc } x = \varphi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) (1) có dạng $a \sin X + b \cos X = c$ với $a = 2m, b = 2m - 1, c = 2m^2 + \frac{3}{2}, X = x$. Ta có

$$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2m - 1)^2 = 8m^2 + 2$$

$$c^2 = \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2 = 4m^4 + 6m^2 + \frac{9}{4}$$

$$(2) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4m^4 - 2m^2 + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(2m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } m = \frac{1}{2} : (2) \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } m = -\frac{1}{2} : (2) \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\pi}{4} \in S$.

B. $\frac{\pi}{2} \in S$.

C. $\frac{3\pi}{4} \in S$.

D. $\frac{5\pi}{4} \in S$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Xét nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, với $k=1$ ta được $x = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet \quad 0 < k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < k < \frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \text{ không có giá trị } k \text{ thỏa mãn.}$$

$$\bullet \quad 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 3: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

A. $T = \frac{7\pi}{8}$.

B. $T = \frac{21\pi}{8}$.

C. $T = \frac{11\pi}{4}$.

D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Do } 0 < x < 2\pi \longrightarrow 0 < -\frac{\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{17}{8} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k=1 \rightarrow x = \frac{7\pi}{8} \\ k=2 \rightarrow x = \frac{15\pi}{8} \end{cases}$$

$$\longrightarrow T = \frac{7\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = \frac{11\pi}{4}.$$

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x = \sin 7x \Leftrightarrow \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 7x$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 5x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 7x = \pi - \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\bullet \quad 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{1}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\bullet \quad 0 < \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{8}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{18} \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{9} \\ k = 2 \rightarrow x = \frac{7\pi}{18} \end{cases}.$$

Vậy có 4 nghiệm thỏa mãn.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{3} \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \sin 2x$.

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin x \text{ và } \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos x.$$

$$\text{Do đó phương trình } \Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x = -2 \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \sin (-2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{6} - k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét nghiệm } x = -\frac{5\pi}{6} - k2\pi \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}, k' \in \mathbb{Z}]{k = -1 - k'} x = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi.$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{6} + k'2\pi \quad (k, k' \in \mathbb{Z}).$$

Câu 6: Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của $\sin 9x + \sqrt{3} \cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3} \cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{12}; 0\right)$. B. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{12}\right]$. C. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$. D. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3} \cos 9x = \sin 7x - \sqrt{3} \cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(7x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - \frac{\pi}{3} = 7x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(7x - \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{8} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Cho } x < 0} \begin{cases} k\pi < 0 \Leftrightarrow k < 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\pi \\ \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{8} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{5}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{\pi}{48} \end{cases} \text{ So sánh hai nghiệm ta được}$$

$$\text{nghiệm âm lớn nhất của phương trình là } x = -\frac{\pi}{48} \in \left(-\frac{\pi}{12}; 0\right).$$

Câu 7: Biến đổi phương trình $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ về dạng $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $b + d$.

- A. $b + d = \frac{\pi}{12}$. B. $b + d = \frac{\pi}{4}$. C. $b + d = -\frac{\pi}{3}$. D. $b + d = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 3x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Suy ra } b + d = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

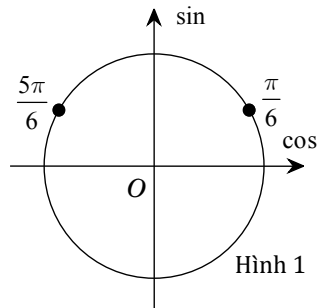
Câu 8: Giải phương trình $\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{\sin x - \frac{1}{2}} = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn C

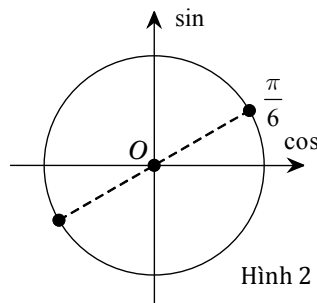
$$\text{Điều kiện } \sin x - \frac{1}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \neq \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Điều kiện bài toán tương đương với bỏ đi vị trí hai điểm trên đường tròn lượng giác (Hình 1).

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$



Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + l\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí như Hình 2.

Đối chiếu điều kiện, ta loại nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. Do đó phương trình có nghiệm

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Câu 9: Hàm số $y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3} \Leftrightarrow (y-2) \sin 2x - (y+1) \cos 2x = -3y.$$

$$\text{Điều kiện để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow (y-2)^2 + (y+1)^2 \geq (-3y)^2 \Leftrightarrow 7y^2 + 2y - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{5}{7} \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{-1; 0\} \text{ nên có 2 giá trị nguyên.}$$

Câu 10: Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right)$. B. $x_0 \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right]$. C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. D. $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{\pi}{6} \longrightarrow x = t + \frac{\pi}{6} \rightarrow 2x = 2t + \frac{\pi}{3} \rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = 2t + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Phương trình trở thành } \Leftrightarrow \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin t = 1 \Leftrightarrow \cos 2t + \sin t = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t (2 \sin t - 1) = 0.$$

$$\bullet \sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\bullet \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{3}. \\ t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \longrightarrow x = \pi + k2\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \pi. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là } x = \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6}\right].$$

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2m \text{ vô nghiệm.}$$

- A. 21. B. 20. C. 18. D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình vô nghiệm } \Leftrightarrow 1^2 + (-\sqrt{3})^2 < (2m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[m \in [-10; 10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-10; -9; -8; \dots; -2; 2; \dots; 8; 9; 10\} \longrightarrow \text{có 18 giá trị.}$$

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x + \sin x = \sqrt{2}(m^2 + 1)$ vô nghiệm.

- A.** $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **B.** $m \in [-1; 1]$. **C.** $m \in (-\infty; +\infty)$ **D.**
 $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Phương trình vô nghiệm} &\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 < \left[\sqrt{2}(m^2 + 1) \right]^2 \\ &\Leftrightarrow m^4 + 2m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2(m^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0. \end{aligned}$$

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $(m+1)\sin x - m\cos x = 1 - m$ có nghiệm.

- A.** 21. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Phương trình có nghiệm} &\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (1-m)^2 \Leftrightarrow m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases} \\ &\xrightarrow[m \in [-10; 10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-10; -9; -8; \dots; -4; 0; 1; 2; \dots; 8; 9; 10\} \longrightarrow \text{có 18 giá trị.} \end{aligned}$$

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0$ có nghiệm.

- A.** 4037. **B.** 4036. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Phương trình} &\Leftrightarrow (m+1)\frac{1-\cos 2x}{2} - \sin 2x + \cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow -2\sin 2x + (1-m)\cos 2x = -m-1. \\ \text{Phương trình có nghiệm} &\Leftrightarrow (-2)^2 + (1-m)^2 \geq (-m-1)^2 \Leftrightarrow 4m \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 1 \\ &\xrightarrow[m \in [-2018; 2018]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2018; -2017; \dots; 0; 1\} \longrightarrow \text{có 2020 giá trị.} \end{aligned}$$

Dạng 3. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

1. Phương pháp

Phương trình bậc hai đối với phương trình lượng giác là phương trình có một trong 4 dạng sau:

1. $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$. Cách giải: $t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$
2. $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$. Cách giải: $t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$

3. $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$. Cách giải: $t = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4. $a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$. Cách giải: $t = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$; b) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$

c) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$; d) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$

Hướng dẫn giải

a)

$$2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

a) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0$

Đặt $t = \tan^2 x$, phương trình đã cho trở thành

$$t + \frac{1}{t} - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Điều kiện: $\sin x \neq 0$

$$\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot 2x = 3 \\ \cot 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \arccot 3 + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$; b) $\frac{1}{\cos^2 x} - (3 + \sqrt{3})\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$

Hướng dẫn giải

a) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 9\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) Điều kiện: $\cos x \neq 0$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - (3 + \sqrt{3}) \tan x + 1 + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - (3 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(\sqrt{3} + 2) + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $\cos x - 2m \cos x + 6m - 9 = 0 (*)$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \cos x$. Với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t \leq 1$

Ta có $t^2 - 2m + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 2m - 3$ hoặc $t = 3 > 1$ (loại)

Phương trình (*) có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 < 2m - 3 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \leq 2$.

Ví dụ 4. Xác định m để phương trình $2\cos^2 x - (m + 2)\cos x + m = 0 (*)$ có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \cos x, |t| \leq 1$. với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Ta có: $2t^2 - (m + 2)t + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [0; 1] \\ t = \frac{m}{2} \end{cases}$

Để (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $\frac{m}{2} \in [0; 1) \Leftrightarrow m \in [0; 2)$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hỏi trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{12} < k < \frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ -\frac{5}{12} < k < -\frac{1}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \emptyset \\ -\frac{1}{4} < k < 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \emptyset \end{cases}.$$

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 2: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác.

Câu 3: Cho phương trình $\cot^2 3x - 3\cot 3x + 2 = 0$. Đặt $t = \cot 3x$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 3t + 2 = 0$.

B. $3t^2 - 9t + 2 = 0$.

C. $t^2 - 9t + 2 = 0$.

D. $t^2 - 6t + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $4\sin^2 2x - 2(1 + \sqrt{2})\sin 2x + \sqrt{2} = 0$ trên $(0; \pi)$ là?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } 4\sin^2 2x - 2(1 + \sqrt{2})\sin 2x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\bullet \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

$$\bullet \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \xrightarrow{(0;\pi)} x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$ là?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } \sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -\cos^2 2x - \cos 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do } x \in [-\pi; 4\pi] \longrightarrow -\pi \leq k\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow -1 \leq k \leq 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Vậy phương trình có 6 nghiệm thỏa mãn.

Câu 6: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin^2 \frac{x}{4} - 3\cos \frac{x}{4} = 0$ trên đoạn $[0; 8\pi]$.

A. $T = 0$.

B. $T = 8\pi$.

C. $T = 16\pi$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } 2\sin^2 \frac{x}{4} - 3\cos \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \cos^2 \frac{x}{4}\right) - 3\cos \frac{x}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 \frac{x}{4} - 3\cos \frac{x}{4} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{x}{4} = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{4} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} + k8\pi \xrightarrow{x \in [0; 8\pi]} x = \frac{4\pi}{3} \\ x = -\frac{4\pi}{3} + k8\pi \xrightarrow{x \in [0; 8\pi]} x = \frac{20\pi}{3} \end{cases} \rightarrow T = \frac{4\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} = 8\pi.$$

Câu 7: Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0$ trên $(0; \pi)$ là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (1 + \cot^2 x) - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow \cot^2 x - (\sqrt{3} - 1)\cot x - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = -1 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \cot x = \cot\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \xrightarrow{x \in (0; \pi)} x = \frac{3\pi}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \xrightarrow{x \in (0; \pi)} x = \frac{\pi}{6} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thỏa mãn.

Câu 8: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$ trên đoạn $[0; 3\pi]$.

A. $T = \frac{17\pi}{4}$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = 4\pi$.

D. $T = 6\pi$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } 2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}+1}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \xrightarrow{x \in [0; 3\pi]} x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{9\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \xrightarrow{x \in [0; 3\pi]} x = \frac{7\pi}{4} \end{cases} \longrightarrow T = \frac{\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{17\pi}{4}.$$

Câu 9: Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3\sin x + 4 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 3\sin x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Suy ra có duy nhất 1 vị trí đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm.

Câu 10: Cho phương trình $\cos x + \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$. Nếu đặt $t = \cos \frac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

A. $2t^2 + t = 0$.

B. $-2t^2 + t + 1 = 0$.

C. $2t^2 + t - 1 = 0$.

D. $-2t^2 + t = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow \left(2\cos^2 \frac{x}{2} - 1\right) + \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0$.

Đặt $t = \cos \frac{x}{2}$, phương trình trở thành $2t^2 + t = 0$.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$ thuộc $[0; 2\pi]$ là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow -2\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \xrightarrow{x \in [0; 2\pi]} x = \frac{11\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \xrightarrow{x \in [0; 2\pi]} x = \frac{\pi}{2}$.

Vậy có hai nghiệm thỏa mãn.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + m \cot x = 8$ có nghiệm.

A. $m > 16$.

B. $m < 16$.

C. $m \geq 16$.

D. $m \leq 16$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\tan x + m \cot x = 8 \Leftrightarrow \tan x + \frac{m}{\tan x} = 8 \Leftrightarrow \tan^2 x - 8 \tan x + m = 0$.

Để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = (-4)^2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 16$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$

có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1 \leq m \leq 0$.

B. $-1 \leq m < 0$.

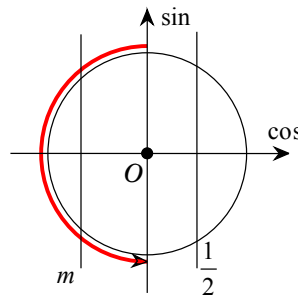
C. $-1 < m < 0$.

D. $-1 \leq m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}.$$



Nhận thấy phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ (Hình vẽ). Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos x = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.

Câu 14: Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x - (5m+1)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

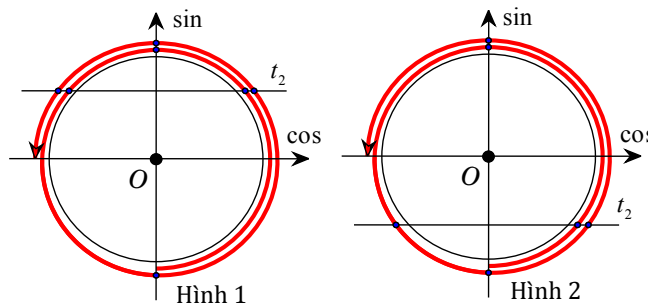
- A. $m = -3$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m_0 \in \left[\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right]$. D. $m_0 \in \left[-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$).

Phương trình trở thành $2t^2 - (5m+1)t + 2m^2 + 2m = 0$. (*)



Yêu cầu bài toán tương đương với:

- **TH1:** Phương trình (*) có một nghiệm $t_1 = -1$ (có một nghiệm x) và một nghiệm $0 < t_2 < 1$ (có bốn nghiệm x) (Hình 1).

✓ Do $t_1 = -1 \rightarrow t_2 = -\frac{c}{a} = -m^2 - m$.

✓ Thay $t_1 = -1$ vào phương trình (*), ta được $\begin{cases} m = -3 \longrightarrow t_2 = -6 \notin (0;1) \text{ (loại)} \\ m = -\frac{1}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{1}{4} \in (0;1) \text{ (thỏa)} \end{cases}$.

● **TH2:** Phương trình (*) có một nghiệm $t_1 = 1$ (có hai nghiệm x) và một nghiệm $-1 < t_2 \leq 0$ (có ba nghiệm x) (Hình 2).

✓ Do $t_1 = 1 \longrightarrow t_2 = \frac{c}{a} = m^2 + m$.

✓ Thay $t_1 = 1$ vào phương trình (*), ta được $\begin{cases} m = 1 \longrightarrow t_2 = 2 \notin (-1;0] \text{ (loại)} \\ m = \frac{1}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{3}{4} \notin (-1;0] \text{ (loại)} \end{cases}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m = -\frac{1}{2} \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right]$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos^2 3x + (3-2m)\cos 3x + m-2 = 0$ có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

A. $-1 \leq m \leq 1$.

B. $1 < m \leq 2$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

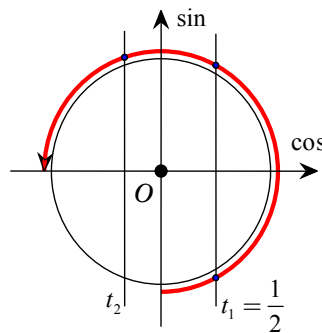
D. $1 \leq m < 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$). Phương trình trở thành $2t^2 + (3-2m)t + m-2 = 0$.

Ta có $\Delta = (2m-5)^2$. Suy ra phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = m-2 \end{cases}$.



Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \frac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. Do đó yêu cầu bài toán $-1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 < m-2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 < m \leq 2$.

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $2t^2 + (3-2m)t + m-2 = 0$ có hai

nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_2 \leq 0 < t_1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P \leq 0 \\ a.f(1) > 0 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases}$.

Dạng 4. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

1. Phương pháp

Cách 1:

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có thoả mãn hay không?

$$\text{Lưu ý: } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$$

- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

- Đặt: $t = \tan x$, đưa về phương trình bậc hai theo t :

$$(a - d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc

$$(1) \Leftrightarrow a.\frac{1 - \cos 2x}{2} + b.\frac{\sin 2x}{2} + c.\frac{1 + \cos 2x}{2} = d$$

$$\Leftrightarrow b.\sin 2x + (c - a).\cos 2x = 2d - a - c$$

(đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0 (*)$.

Giải

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Ta có $\text{VT} (*) = 1 \neq \text{VP} (*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^2 x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$, ta được: $\tan^2 x + 3\tan x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \\ \tan x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-4) + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (*) là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-4) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải phương trình $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2 (*)$

Giải

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Ta có: $\text{VT}(*)=2=\text{VP}(*)\Rightarrow(*)$ có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Khi $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}:\cos^2 x\neq 0$, chia hai vế của $(*)$ cho $\cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình $(*)$ là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\cos^3 x + 2\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x = 0(*)$.

Giải

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Ta có: $\text{VT}(*)=\pm 3 \neq \text{VP}(*)$ không có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos^3 x \neq 0$

Chia hai vế của $(*)$ cho $\cos^3 x$, ta được:

$$1 + 2\tan x - 3\tan^3 x = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1) \underbrace{(3\tan^2 x + 3\tan x + 1)}_{\Delta < 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình $(*)$ là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 4. Giải phương trình $\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x \cos x = 0(*)$.

Giải

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Ta có: $\text{VT}(*)=\pm 1 \neq \text{VP}(*)\Rightarrow(*)$ không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3 x \neq 0$

Chia hai vế của $(*)$ cho $\cos^3 x$, ta được $1 + \tan x(1 + \tan^2 x) - 3\tan^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - 2\tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x - 2\tan x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x - 1 = 0 \\ \tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \arctan(1 \pm \sqrt{2}) + k\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của $(*)$ là $x = \frac{\pi}{4}; x = \arctan(1 \pm \sqrt{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 5. Xác định a để $a \sin^2 x + 2 \sin 2x + 3a \cos^2 x = 2(*)$ có nghiệm.

Giải

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow a \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + 2 \sin 2x + 3a \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) = 2 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin 2x + a \cos 2x = 2 - 2a(1) \end{aligned}$$

$$(*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow 2^2 + a^2 \geq (2 - 2a)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 + a^2 \geq 4 - 8a + 4a^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 8a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{8}{3}$$

Vậy với $0 \leq a \leq \frac{8}{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 6. Cho phương trình:

$$\sin^3 x + (2m + 1) \sin^2 x \cos x + (3m - 1) \sin x \cos^3 x = 0(*)$$

Xác định m để phương trình có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$.

Giải

$$\text{Khi } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

Ta có: VT(*) = $\pm 1 \neq 0 \Rightarrow$ (*) không có nghiệm trên $\Rightarrow \cos^3 x \neq 0$

Chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$, ta được:

$$\tan^3 x + (2m + 1) \tan^2 x + (3m - 1) \tan x + m - 1 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \tan x. \text{ với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right] \Rightarrow t \in (-\infty; 0]$$

$$\text{Ta có: } t^3 + (2m + 1)t^2 + (3m - 1)t + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t^2 + 2mt + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ f(t) = t^2 + 2mt + m - 1 = 0(1) \end{cases}$$

Để (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$ khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$t_1, t_2 : \begin{cases} t_1 < t_2 \leq 0 \\ t_1, t_2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P \geq 0 \\ S < 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m + 1 > 0, \forall m \\ m - 1 \geq 0 \\ -m < 0 \\ 1 - 2m + m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Vậy $m \geq 1$ thỏa mãn đề bài.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải phương trình $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow \tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 2: Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$?

A. $\cos x (\cot^2 x - 3) = 0$.

B. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3}\right] = 0$.

C. $\left[\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] \cdot (\tan x - \sqrt{3}) = 0$.

D. $(\sin x - 1)(\cot x - \sqrt{3}) = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$.

● $\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

● $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left[\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3}\right] = 0$.

Câu 3: Cho phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$.

C. Nếu chia 2 vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2 \cot^2 x + 3 \cot x + 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - 3 \sin 2x + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn C

● Với $x = k\pi \longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}$. Thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy

A đúng. (vì thay $x = k\pi$ không thỏa mãn pt)

● Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$. Vậy B đúng.

● Phương trình $\Leftrightarrow \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \cot^2 x - 3 \cot x + 1 = 0$. Vậy C sai.

● Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3 \frac{\sin 2x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - 3 \sin 2x + 3 = 0$. Vậy D đúng.

Câu 4: Số vị trí biểu diễn các nghiệm phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 5$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow -4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x + \cos x)^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$ trên $(-2\pi; 2\pi)$?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 1 - 3 \tan x + 2 \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \end{cases}$.

● Vì $x \in (-2\pi; 2\pi) \longrightarrow -2\pi < \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \rightarrow -\frac{9}{4} < k < \frac{7}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

● Vì $x \in (-2\pi; 2\pi) \longrightarrow -2\pi < \arctan \frac{1}{2} + k\pi < 2\pi$

$\xrightarrow[\text{xấp xỉ}]{\text{CASIO}} -28,565 < k < -24,565 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-28; -27; -26; -25\}$.

Vậy có tất cả 8 nghiệm.

Câu 6: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$ là:

A. $\frac{\pi}{12}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4 (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3} \sin 2x - 6 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6 \cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{Cho } > 0} \begin{cases} \frac{\pi}{2} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} + k\pi > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{6} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

So sánh hai nghiệm ta được $x = \frac{\pi}{6}$ là nghiệm dương nhỏ nhất.

Câu 7: Cho phương trình $(\sqrt{2}-1)\sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2}+1)\cos^2 x - \sqrt{2} = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $x = \frac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 2 \tan x - 1 = 0$.

C. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x + 2 \cot x - 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 8: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $2 \sin^2 x + (1-\sqrt{3}) \sin x \cos x + (1-\sqrt{3}) \cos^2 x = 1$.

A. $-\frac{\pi}{6}$.

B. $-\frac{\pi}{4}$.

C. $-\frac{2\pi}{3}$.

D. $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 2\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x \cos x + (1-\sqrt{3})\cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{Cho } x < 0} \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{3} + k\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{3} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

So sánh hai nghiệm ta được $x = -\frac{\pi}{4}$ là nghiệm âm lớn nhất.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $11\sin^2 x + (m-2)\sin 2x + 3\cos^2 x = 2$ có nghiệm?

A. 16.

B. 21.

C. 15.

D. 6.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow 9\sin^2 x + (m-2)\sin 2x + \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} + (m-2)\sin 2x + \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow (m-2)\sin 2x - 4\cos 2x = -5.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow (m-2)^2 + 16 \geq 25 \Leftrightarrow (m-2)^2 \geq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[m \in [-10;10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-10; -9; \dots; -1; 5; 6; \dots; 10\} \longrightarrow \text{có 16 giá trị nguyên.}$$

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc để phương trình $\sin^2 x - 2(m-1)\sin x \cos x - (m-1)\cos^2 x = m$ có nghiệm?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (1-m)\sin^2 x - 2(m-1)\sin x \cos x - (2m-1)\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-m) \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} - (m-1)\sin 2x - (2m-1) \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m-1)\sin 2x + m\cos 2x = 2-3m.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } 4(m-1)^2 + m^2 \geq (2-3m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1\} \longrightarrow \text{có 2 giá trị nguyên.}$$

Câu 11: Tìm điều kiện để phương trình $a \sin^2 x + a \sin x \cos x + b \cos^2 x = 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm.

A. $a \geq 4b$.

B. $a \leq -4b$.

C. $\frac{4b}{a} \leq 1$.

D. $\left| \frac{4b}{a} \right| \leq 1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $a \tan^2 x + a \tan x + b = 0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow a(a - 4b) \geq 0$

$\Leftrightarrow a(4b - a) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b - a}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4b}{a} \leq 1$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2 \sin^2 x + m \sin 2x = 2m$ vô nghiệm.

A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

B. $m < 0, m > \frac{4}{3}$.

C. $0 < m < \frac{4}{3}$.

D. $m < -\frac{4}{3},$

$m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + m \sin 2x = 2m \Leftrightarrow m \sin 2x - \cos 2x = 2m - 1$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 1 < (2m - 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}$

Câu 13: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để phương trình $(m^2 + 2) \cos^2 x - 2m \sin 2x + 1 = 0$ có nghiệm.

A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow (m^2 + 2) \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2m \sin 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m \sin 2x - (m^2 + 2) \cos 2x = m^2 + 4$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 16m^2 + (m^2 + 2)^2 \geq (m^2 + 4)^2 \Leftrightarrow 12m^2 \geq 12 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1$

$\xrightarrow[m \in [-3; 3]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\} \longrightarrow$ có 6 giá trị nguyên.

Dạng 5. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cos x$.

1. Phương pháp

Bài toán 1: $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$

▪ Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$; $|t| \leq \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \leq \sqrt{2}$. Suy ra x.

Lưu ý dấu

• $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

• $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Bài toán 2: $a \cdot |\sin x \pm \cos x| + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c = 0$

• Đặt: $t = |\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2} \cdot \left| \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right) \right|$; Đk: $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- Tương tự dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Giải các phương trình

a) $\sin x + \cos x + 2 \sin x \cos x - 1 = 0$ (1)

b) $6(\sin x - \cos x) - \sin x \cos x - 6 = 0$ (2)

Giải

a) Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $|t| \leq \sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t + 2 \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 < -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2}$

Phương trình (2) trở thành: $6t - \left(\frac{1-t^2}{2}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -13 < -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$.

Giải

Đặt $\sin x + \cos x = t \left(|t| \leq \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

PT $\Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Giải phương trình

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin x + \cos x) - 1$ (*)

Định hướng: Ta sử dụng hằng đẳng thức

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 2(\sin x + \cos x) - 1 \quad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2}$

Phương trình (1) trở thành: $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 2t - 1$

$$\Leftrightarrow t(3-t^2)=4t-2 \Leftrightarrow t^3+t-2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1 \left(\text{do } t^2+t+2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\cos 3x + 3\cos x + 4\cos^2 x + 8\sin x - 8 = 0$.

Định hướng: Ta sử dụng công thức nhân 3 cho $\cos 3x$ để triệt tiêu phần $3\cos x$ phía liền kề sau đó. Như vậy, phương trình viết thành: $4\cos^3 x + 4\cos^2 x + 8\sin x - 8 = 0$, nhóm các cụm $4\cos^3 x + 4\cos^2 x = 4\cos^2 x(\cos x + 1)$, $8\sin x - 8 = -8(1 - \sin x)$. Sử dụng hằng đẳng thức $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$. Đưa phương trình đã cho về phương trình tích với nhân tử chung là $1 - \sin x$.

Giải

Ta có:

$$\text{PT} \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos x + 4\cos^2 x + 8\sin x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x + 1) = 2(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x + 1) = 2(1 - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ (1 + \sin x)(\cos x + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1 (*) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sin x + \cos x = t \left(|t| \leq \sqrt{2} \right) \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$(*) \text{ trở thành } t + \frac{t^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có một họ nghiệm là: $x = \frac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $2\cos^3 x + \sin x + 1 = 2\sin^2 x (*)$

Định hướng: Biến đổi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, chuyển về phương trình ta được $2\cos^3 x + 2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$, đến đây hoàn toàn tương tự ví dụ 4.

Giải

Ta có:

$$(*) \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 2(1 - \cos^2 x) + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x (\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \sin x)(1 + \sin x)(\cos x + 1) - (1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[2(1 + \sin x)(\cos x + 1) - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)[2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin x = 0 & (1) \\ 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2), ta đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2}$

(2) trở thành : $2t + (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t(t + 2) = 0 \Rightarrow t = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình (*) là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 6. Cho $\sin 2x - (2m + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 2m\sqrt{2} + 1 = 0(*)$. Xác định m để phương trình (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$

Giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Với $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$

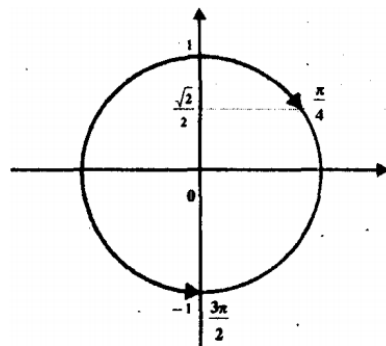
Phương trình (*) trở thành

$$t^2 - 1 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (2m + \sqrt{2})t + 2m\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ hoặc } t = 2m$$

Với $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Mà $0 < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{4} + k2\pi < \frac{5\pi}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{8} < k < \frac{1}{2} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 0$



Do đó $x = \frac{\pi}{4}$ là một nghiệm của (*)

Đề (*) có đúng hai nghiệm $x \in \left(0; \frac{5\pi}{4}\right)$ khi $-1 < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < 2m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{1}{2}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$.

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ x = k\pi \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ x = k2\pi \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ x = k2\pi \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \\ x = k\pi \end{cases}$$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Vì $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\frac{t^2 - 1}{2} + 2t = 2 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -5 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = 1$, ta được $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2: Cho phương trình $3\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x + 4 = 0$. Đặt $t = \sin x + \cos x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$.

B. $4t^2 + 3\sqrt{2}t + 4 = 0$.

C. $2t^2 + 3\sqrt{2}t - 2 = 0$.

D. $4t^2 + 3\sqrt{2}t - 4 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin x + \cos x \longrightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $3\sqrt{2}t + 2(t^2 - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3\sqrt{2}t + 2 = 0$.

Câu 3: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$.

B. $-\pi$.

C. $-\frac{3\pi}{2}$.

D. -2π .

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $t = 1 - \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = 1$, ta được $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

TH1. Với $x = k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -2\pi$.

TH2. Với $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Câu 4: Từ phương trình $(1 + \sqrt{3})(\cos x + \sin x) - 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} - 1 = 0$, nếu ta đặt $t = \cos x + \sin x$ thì giá trị của t nhận được là:

A. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{2}$.

B. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{3}$.

C. $t = 1$.

D. $t = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x + \cos x \left(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}\right) \longrightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Phương trình trở thành $(1 + \sqrt{3})t - (t^2 - 1) - \sqrt{3} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Câu 5: Cho x thỏa mãn $2 \sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$. Tính $\sin 2x$.

A. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

B. $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

D. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. Vì $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho trở thành $2(t^2 - 1) - 3\sqrt{6}t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ t = \sqrt{6} \text{ (loại)} \end{cases}$

$$\sin 2x = t^2 - 1 = \frac{1}{2}.$$

Câu 6: Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4037.

B. 4036.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = |\sin x - \cos x| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right|$. Vì $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$.

Ta có $t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$.

Phương trình đã cho trở thành $t + 4(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$

Với $t = 1$, ta được $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Theo giả thiết $x \in [0; 2018\pi] \longrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2} \leq 2018\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 4046$

$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 4036\} \longrightarrow$ có 4037 giá trị của k nên có 4037 nghiệm.

Câu 7: Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng:

A. 1.

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$.

Ta có $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2$.

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \left(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right) \longrightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Phương trình trở thành } \Leftrightarrow \sqrt{2} t (t^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow t^3 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2} - \cos x.$$

$$\text{Mà } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + (\sqrt{2} - \cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 2\sqrt{2} \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} \cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ có nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \left(-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \right) \longrightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Phương trình trở thành } \frac{t^2 - 1}{2} - t + m = 0 \Leftrightarrow -2m = t^2 - 2t - 1 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = -2m + 2.$$

$$\text{Do } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \longrightarrow -\sqrt{2} - 1 \leq t - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \longrightarrow 0 \leq (t - 1)^2 \leq 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy để phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow 0 \leq -2m + 2 \leq 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\}.$$