TRƯỜNG ĐẠI HỌC HỒNG ĐỨC
KHOA KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Mã đề thi: 101

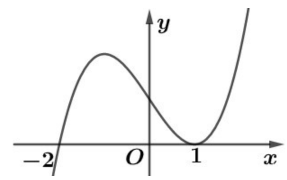
(Đề gồm 5 trang)

KỲ THI ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG LỚP 12
NĂM HỌC 2021 - 2022
Bài thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên: .... **Số CMND:**.................. **Số báo danh:**...............

Câu 1. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 1)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

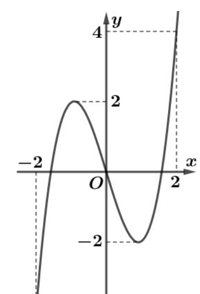
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

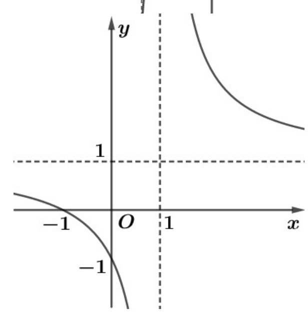
A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây là sai?



A. $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -2$. B. $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = -4$. C. $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 4$. D. $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 2$.

Câu 4. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.
B. $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.
D. $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

A. $y = 1$. B. $y = -\dfrac{1}{2}$. C. $y = 2$. D. $y = -1$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{2021}{2022}}$ là

A. $[0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 7. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)$ bằng

A. $1 + \log_3 a$. B. $1 - \log_3 a$. C. $\dfrac{1}{\log_3 a}$. D. $3 - \log_3 a$.

Câu 8. Trên tập $\mathbb{R}$, đạo hàm của hàm số $y = 7^x$ là

(A) $y' = x7^{x-1}$. (B) $y' = 7^x.\ln 7$. (C) $y' = 7^x$. (D) $y' = \dfrac{7^x}{\ln 7}$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

(A) $x = 9$. (B) $x = 10$. (C) $x = 4$. (D) $x = 8$.

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5 x > -2$ là

(A) $(-\infty; -32)$. (B) $\left(\dfrac{1}{25}; +\infty\right)$. (C) $\left(-\infty; \dfrac{1}{25}\right)$. (D) $(-32; +\infty)$.

Câu 11. Thể tích khối lập phương có cạnh $3a$ bằng

(A) $3a^3$. (B) $27a^3$. (C) $9a^3$. (D) a^3.

Câu 12. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. (B) $\dfrac{a^3}{3}$. (C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + 4i$. Phần thực của số phức $z_1.\overline{z}_2$ là

(A) -23. (B) -14. (C) 26. (D) -7.

Câu 14. Tìm phần ảo của số phức $z = 19 - 20i$?

(A) 19. (B) $20i$. (C) -20. (D) 20.

Câu 15. Cho số phức $z = 2 - i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $Q\,(2;1)$. (B) $P\,(1;2)$. (C) $M\,(2;-1)$. (D) $N\,(-1;2)$.

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$ và $y = x + 3$.

(A) 16. (B) 5. (C) $\dfrac{17}{3}$. (D) $\dfrac{32}{3}$.

Câu 17. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2$ và $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì

(A) $f(1) = 7$. (B) $f(1) = -3$. (C) $f(1) = 3$. (D) $f(1) = 10$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a\,;b]$. Tìm khẳng định **sai**.

(A) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$. (B) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

(C) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. (D) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Câu 19. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - x^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + C$. (B) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

(C) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + C$. (D) $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và công sai là $d = 3$. Tính u_5.

(A) 14. (B) 10. (C) 11. (D) 17.

Câu 21. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh ngồi vào một hàng ghế có 5 chiếc ghế (mỗi bạn ngồi một ghế)?

(A) 24. (B) 120. (C) 1. (D) 5.

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ là
A. 0. B. a. C. $2a$. D. $\frac{a}{2}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc (d)?
A. $(-1;0;7)$. B. $(-1;0;-7)$. C. $(-1;1;7)$. D. $(1;0;7)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 3y + 5z - 3 = 0$. Một véctơ pháp tuyến của (P) là
A. $(1;3;5)$. B. $(1;-3;5)$. C. $(-3;5;-3)$. D. $(0;-3;5)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho $M = (1;3;-1)$ và $N = (-1;1;0)$. Độ dài đoạn thẳng MN là
A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{11}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.

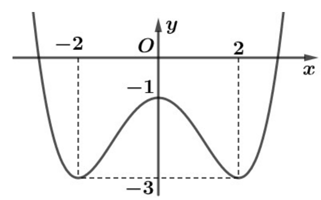
Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{u} = (2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}) - (\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j})$. Tọa độ của $\overrightarrow{u}$ là
A. $(1;-3;-1)$. B. $(2;-1;0)$. C. $(2;3;-1)$. D. $(1;3;-1)$.

Câu 27. Cho khối trụ có bán kính đáy là R và chiều cao là $2R$. Tính thể tích khối trụ đó.
A. πR^2. B. $2\pi R^2$. C. πR^3. D. $2\pi R^3$.

Câu 28. Cho mặt cầu (S) có đường kính $AB = 4$ cm. Tính diện tích mặt cầu (S).
A. 64π cm^3. B. 16π cm^2. C. 16π cm^3. D. 64π cm^2.

Câu 29. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
A. $y = -x^4 + x^2$. B. $y = \frac{x-2}{x+1}$. C. $y = x^3 + x$. D. $y = -3x^3 - 3x$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = f(x-m)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.



A. $\left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 1 \end{array}\right.$. B. $m = 7$. C. $m = 5$. D. $m = 4$.

Câu 31. Với giá trị dương nào của tham số m, hàm số $f(x) = \frac{x+m^2}{x-2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2?
A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Câu 32. Cho hàm số $y = 2x + \ln(1-2x)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[-1;\frac{1}{4}\right]$. Khi đó $M + m$ bằng
A. 0. B. $-2 + \ln 3$. C. $\frac{1}{2} - \ln 2$. D. $-\frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2}$.

Câu 33. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $2z^2 - 2z + 5 = 0$. Mô đun của $\frac{1}{z_1} + i^{2020}z_1$ bằng
A. $\sqrt{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{130}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\frac{\sqrt{130}}{10}$.

Câu 34. Nếu $\int_0^1 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 [3f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_0^1 [f(x)+6g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng
A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 35. Lập các số tự nhiên có 5 chữ số thuộc tập hợp $X = \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Lấy ngẫu nhiên một số, tính xác suất để số lấy được là số chẵn và có các chữ số đôi một khác nhau.

(A) $\frac{5}{12}$. (B) $\frac{5}{14406}$. (C) $\frac{30}{343}$. (D) $\frac{1600}{2401}$.

Câu 36. Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = AB = a$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

(A) 75°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 60°.

Câu 37. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{2}$. Gọi $M_1(a_1; b_1; c_1)$ và $M_2(a_2; b_2; c_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ chúng đến mặt phẳng (Oyz) bằng 5. Tính $c_1 + c_2$.

(A) $-\frac{14}{3}$. (B) 10. (C) $\frac{7}{3}$. (D) 2.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng vuông góc với trục Ox và đi qua điểm $M(2; -1; 3)$ là

(A) $x + 1 = 0$. (B) $x - 3 = 0$. (C) $x = 0$. (D) $x - 2 = 0$.

Câu 39. Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x) + 2$ có số nghiệm thực là

(A) 7. (B) 6. (C) 4. (D) 9.

Câu 40. Tổng S của tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0; 4\pi)$ của phương trình $2022^{\sin^2 x} - 2022^{\cos^2 x} = 2\ln(\cot x)$ là

(A) $S = 18\pi$. (B) $S = 8\pi$. (C) $S = 7\pi$. (D) $S = 16\pi$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị là $M(0; 2)$. Khi đó $F(1)$ bằng

(A) $\frac{7}{12}$. (B) $\frac{17}{12}$. (C) $\frac{31}{12}$. (D) $-\frac{17}{12}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có hai điểm cực trị là -1 và 1. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trùng với các điểm cực trị của $f(x)$, đồng thời có đỉnh nằm trên đồ thị của $f(x)$ với tung độ bằng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần với giá trị nào nhất dưới đây?

(A) 10. (B) 12. (C) 13. (D) 11.

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$?

(A) 5. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

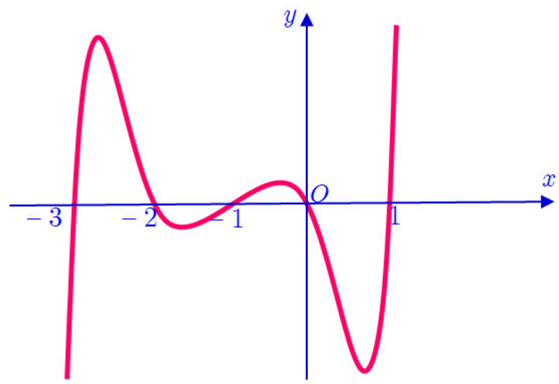
Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của đoạn AB. Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

(A) $\frac{3a^3}{8}$. (B) $\frac{3a^3}{16}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x + y + z + 3 = 0$. Gọi (d') là hình chiếu vuông góc của (d) lên mặt phẳng (P). Lấy $M(a; b; 1)$ thuộc (d'). Tính $2a + 3b$.

(A) -7. (B) -11. (C) -4. (D) -9.

Câu 46. Cho hàm đa thức $y = \left[f\left(x^2 + 2x\right)\right]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m\right)$ có 9 điểm cực trị?



Ⓐ 2020. Ⓑ 2023. Ⓒ 2021. Ⓓ 2022.

Câu 47. Cho x là số nguyên dương và y là số thực. Có tất cả bao nhiêu cặp số $(x\,;\,y)$ thỏa mãn

$$\ln(1+x+2y) = 2y+3x-10?$$

Ⓐ 10. Ⓑ Vô số. Ⓒ 11. Ⓓ 9.

Câu 48. Cho số phức z thoả mãn $iz.\overline{z}+(1+2i)z-(1-2i)\overline{z}-4i=0$. Giá trị lớn nhất của

$$P = |z+1+2i| + |z+4-i|$$

gần số nào nhất sau đây?

Ⓐ 7,4. Ⓑ 4,6. Ⓒ 4,2. Ⓓ 7,7.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1)\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$, $(d_2)\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ và điểm $A(4;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A cắt d_1 và cách d_2 một khoảng lớn nhất. Lấy $\overrightarrow{u}=(a;1;c)$ là một véctơ chỉ phương của Δ. Độ dài của $\overrightarrow{u}$ là

Ⓐ $3\sqrt{5}$. Ⓑ $\sqrt{86}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ $\sqrt{85}$.

Câu 50. Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường cao là R và đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Gọi (d) là tiếp tuyến của đường tròn đáy tại A và (P) là mặt phẳng chứa SA và (d). Mặt phẳng (Q) thay đổi qua S cắt đường tròn O tại hai điểm C, D sao cho $CD=\sqrt{3}R$. Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Q). Tính giá trị lớn nhất của $\cos\alpha$.

Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

—— **HẾT** ——

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HỒNG ĐỨC
KHOA KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Mã đề thi: 101
(Đề gồm 5 trang)

KỲ THI ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG LỚP 12
NĂM HỌC 2021 - 2022
Bài thi: TOÁN

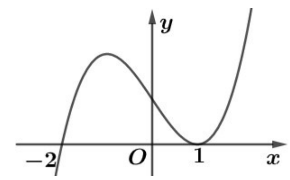
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

ĐÁP ÁN

1. C	6. C	11. B	16. D	21. B	26. D	31. C	36. B	41. C	46. C
2. C	7. B	12. D	17. A	22. B	27. D	32. B	37. A	42. B	47. D
3. C	8. B	13. B	18. A	23. A	28. B	33. D	38. D	43. D	48. D
4. A	9. A	14. C	19. B	24. B	29. D	34. B	39. A	44. C	49. B
5. C	10. B	15. A	20. A	25. D	30. A	35. C	40. C	45. B	50. A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?



(A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
(B) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-2; 1)$.
(C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
(D) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Lời giải. Đáp án đúng (C). □

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

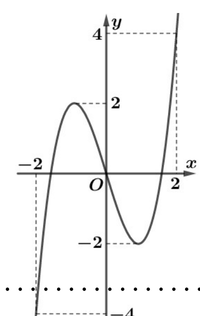
x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Lời giải. Đáp án đúng (C). Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. □

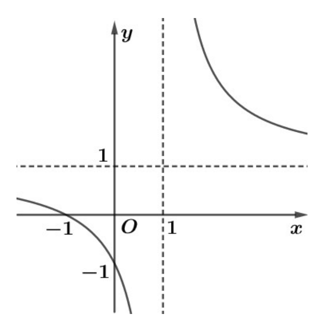
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào dưới đây là sai?



(A) $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -2$. (B) $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = -4$. (C) $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 4$. (D) $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 2$.

Lời giải. Đáp án đúng (C). $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 4$ là mệnh đề sai. □

Câu 4. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình vẽ bên?



(A) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. (B) $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
(C) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. (D) $y = x^3 - 3x + 2$.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (A). Từ đồ thị, ta thấy đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1$, đường tiệm cận ngang $y = 1$. □

Câu 5. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ là

(A) $y = 1$. (B) $y = -\dfrac{1}{2}$. (C) $y = 2$. (D) $y = -1$.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (C). TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+1}{x-1} = 2$.

Nên đường thẳng $y = 2$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. □

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{2021}{2022}}$ là

(A) $[0; +\infty)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $\mathbb{R}$.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (C). Do $\dfrac{2021}{2022}$ là số không nguyên nên hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = (0; +\infty)$. □

Câu 7. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\dfrac{3}{a}\right)$ bằng

(A) $1 + \log_3 a$. (B) $1 - \log_3 a$. (C) $\dfrac{1}{\log_3 a}$. (D) $3 - \log_3 a$.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (B). Ta có $\log_3 \left(\dfrac{3}{a}\right) = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a$. □

Câu 8. Trên tập $\mathbb{R}$, đạo hàm của hàm số $y = 7^x$ là

(A) $y' = x7^{x-1}$. (B) $y' = 7^x.\ln 7$. (C) $y' = 7^x$. (D) $y' = \dfrac{7^x}{\ln 7}$.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (B). Đạo hàm của hàm số $y = 7^x$ là $y' = 7^x.\ln 7$. □

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

(A) $x = 9$. (B) $x = 10$. (C) $x = 4$. (D) $x = 8$.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (A). Ta có $\log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$. □

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5 x > -2$ là

(A) $(-\infty; -32)$.
(B) $\left(\dfrac{1}{25}; +\infty\right)$.
(C) $\left(-\infty; \dfrac{1}{25}\right)$.
(D) $(-32; +\infty)$.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Ta có $\log_5 x > -2 \Leftrightarrow x > 5^{-2} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{25}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{1}{25}; +\infty\right)$. □

Câu 11. Thể tích khối lập phương có cạnh $3a$ bằng

(A) $3a^3$.
(B) $27a^3$.
(C) $9a^3$.
(D) a^3.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Thể tích khối lập phương có cạnh bằng $3a$ là $V = (3a)^3 = 27a^3$. □

Câu 12. Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

(A) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
(B) $\dfrac{a^3}{3}$.
(C) $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.
(D) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). Khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a có đường cao bằng a và diện tích đáy là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên có thể tích là $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. □

Câu 13. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + 4i$. Phần thực của số phức $z_1.\overline{z}_2$ là

(A) -23.
(B) -14.
(C) 26.
(D) -7.

Lời giải. Đáp án đúng (B). $z_2 = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z}_2 = 3 - 4i$.
Ta có $z_1.\overline{z}_2 = (2 - 5i)(3 - 4i) = -14 - 23i$
Vậy phần thực của số phức $z_1.\overline{z}_2$ là -14. □

Câu 14. Tìm phần ảo của số phức $z = 19 - 20i$?

(A) 19.
(B) $20i$.
(C) -20.
(D) 20.

Lời giải. Đáp án đúng (C). Phần ảo của số phức $z = 19 - 20i$ là -20. □

Câu 15. Cho số phức $z = 2 - i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

(A) $Q(2; 1)$.
(B) $P(1; 2)$.
(C) $M(2; -1)$.
(D) $N(-1; 2)$.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Ta có: $\overline{z} = 2 + i$. Vậy số phức $\overline{z}$ được biểu diễn bởi điểm $Q(2; 1)$ trên mặt phẳng tọa độ. □

Câu 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$ và $y = x + 3$.

(A) 16.
(B) 5.
(C) $\dfrac{17}{3}$.
(D) $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). Ta có $x^2 - x = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$ và $y = x + 3$ là

$S = \int\limits_{-1}^{3} \left|x^2 - x - (x+3)\right| \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right) \,\mathrm{d}x = \dfrac{32}{3}$. □

Câu 17. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2$ và $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5$ thì

(A) $f(1) = 7$.
(B) $f(1) = -3$.
(C) $f(1) = 3$.
(D) $f(1) = 10$.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Ta có $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\big|_0^1 = f(1) - f(0)$.

Suy ra $\int\limits_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = 5 \Leftrightarrow f(1) - f(0) = 5 \Leftrightarrow f(1) = f(0) + 5 = 7$. Vậy $f(1) = 7$. □

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a\,;b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a\,;b]$. Tìm khẳng định **sai**.

(A) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.
(B) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
(C) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Theo định nghĩa tích phân $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. □

Câu 19. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - x^{\frac{1}{3}}$ là

(A) $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + C$.
(B) $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.
(C) $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + C$.
(D) $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$. □

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và công sai là $d = 3$. Tính u_5.

(A) 14.
(B) 10.
(C) 11.
(D) 17.

Lời giải. Đáp án đúng (A). $u_5 = u_1 + 4d = 2 + 12 = 14$. □

Câu 21. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn học sinh ngồi vào một hàng ghế có 5 chiếc ghế (mỗi bạn ngồi một ghế)?

(A) 24. (B) 120. (C) 1. (D) 5.

Lời giải. Đáp án đúng (B). $5! = 120$.

Câu 22. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ là

(A) 0. (B) a. (C) $2a$. (D) $\frac{a}{2}$.

Lời giải. Đáp án đúng (B). $d(AB, A'C') = AA'$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc (d)?

(A) $(-1;0;7)$. (B) $(-1;0;-7)$. (C) $(-1;1;7)$. (D) $(1;0;7)$.

Lời giải. Đáp án đúng (A). $(-1;0;7) \in (d)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P)\colon x - 3y + 5z - 3 = 0$. Một véctơ pháp tuyến của (P) là

(A) $(1;3;5)$. (B) $(1;-3;5)$. (C) $(-3;5;-3)$. (D) $(0;-3;5)$.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Véctơ pháp tuyến là $(1;-3;5)$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho $M = (1;3;-1)$ và $N = (-1;1;0)$. Độ dài đoạn thẳng MN là

(A) $\sqrt{2}$. (B) $\sqrt{11}$. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 3.

Lời giải. Đáp án đúng (D). $MN = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2 + (0-(-1))^2} = 3$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2\vec{i} - \vec{k}) - (\vec{i} - 3\vec{j})$. Tọa độ của $\vec{u}$ là

(A) $(1;-3;-1)$. (B) $(2;-1;0)$. (C) $(2;3;-1)$. (D) $(1;3;-1)$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). $\vec{u} = (2\vec{i} - \vec{k}) - (\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (1;3;-1)$.

Câu 27. Cho khối trụ có bán kính đáy là R và chiều cao là $2R$. Tính thể tích khối trụ đó.

(A) πR^2. (B) $2\pi R^2$. (C) πR^3. (D) $2\pi R^3$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). Áp dụng công thức thể tích khối trụ ta có $V = 2R \cdot \pi R^2 = \pi R^3$.

Câu 28. Cho mặt cầu (S) có đường kính $AB = 4$ cm. Tính diện tích mặt cầu (S).

(A) 64π cm^3. (B) 16π cm^2. (C) 16π cm^3. (D) 64π cm^2.

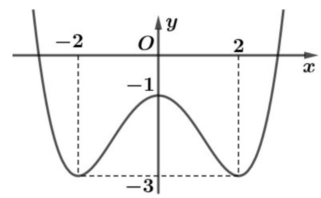
Lời giải. Đáp án đúng (B). Diện tích mặt cầu là $4\pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 16\pi$ cm^2. $\square$

Câu 29. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = -x^4 + x^2$. (B) $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. (C) $y = x^3 + x$. (D) $y = -3x^3 - 3x$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). $y = -3x^3 - 3x \Rightarrow y' = -9x^2 - 3 = -3\left(x^2+1\right) \le 0\ \forall x$. Nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. $\square$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = f(x-m)$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.



(A) $\left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=1 \end{array}\right.$. (B) $m = 7$. (C) $m = 5$. (D) $m = 4$.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \pm 2$.

Vậy để hàm số $y = f(x-m)$ đạt cực tiểu tại $x = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-m=2 \\ 3-m=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$. $\square$

Câu 31. Với giá trị dương nào của tham số m, hàm số $f(x) = \dfrac{x+m^2}{x-2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2?

(A) $m = 1$. (B) $m = 3$. (C) $m = 2$. (D) $m = 4$.

Lời giải. Đáp án đúng (C). Ta có $y' = \dfrac{-2-m^2}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in [0;1]$ suy ra $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) = f(0) = -\dfrac{m^2}{2}$.

Khi đó $-\dfrac{m^2}{2} = -2 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = 2$ (vì $m > 0$). $\square$

Câu 32. Cho hàm số $y = 2x + \ln(1-2x)$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[-1;\dfrac{1}{4}\right]$. Khi đó $M + m$ bằng

(A) 0. (B) $-2 + \ln 3$. (C) $\dfrac{1}{2} - \ln 2$. (D) $-\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{3}{2}$.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Tập xác định: $D = \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có: $y' = 2 - \dfrac{2}{1-2x} = \dfrac{4x}{2x-1}$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1;0]$.

Khi đó $y(-1) = -2 + \ln 3; y(0) = 0, y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 2$.

Vậy $M = 0$ và $m = -2 + \ln 3$. Suy ra $M + m = -2 + \ln 3$. $\square$

Câu 33. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $2z^2 - 2z + 5 = 0$. Mô đun của $\dfrac{1}{z_1} + i^{2020} z_1$ bằng

(A) $\sqrt{10}$. (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{130}$. (C) $\sqrt{13}$. (D) $\dfrac{\sqrt{130}}{10}$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). Phương trình: $2z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i \\ z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}i \end{array}\right.$.

Từ giả thiết ta có $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

Khi đó $\dfrac{1}{\dfrac{1+3i}{2}} + i^{2020}\dfrac{1+3i}{2} = \dfrac{1-3i}{5} + \dfrac{1+3i}{2} = \dfrac{7}{10} + \dfrac{9}{10}i$.

Vậy $\left|\dfrac{1}{z_1} + i^{2020} z_1\right| = \left|\dfrac{7}{10} + \dfrac{9}{10}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{7}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{130}}{10}$. □

Câu 34. Nếu $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = 2$ và $\displaystyle\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)]\mathrm{d}x = 5$ thì $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + 6g(x)]\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 2. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Đặt $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ và $B = \displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $2 = \displaystyle\int_0^1 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = A + B \quad (1)$.

Lại có $5 = \displaystyle\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)]\mathrm{d}x = 3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 3A - 2B$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} A + B = 2 \\ 3A - 2B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{9}{5} \\ B = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Vậy $\displaystyle\int_0^1 [f(x) + 6g(x)]\,\mathrm{d}x = A + 6B = 3$. □

Câu 35. Lập các số tự nhiên có 5 chữ số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Lấy ngẫu nhiên một số, tính xác suất để số lấy được là số chẵn và có các chữ số đôi một khác nhau.

(A) $\dfrac{5}{12}$. (B) $\dfrac{5}{14406}$. (C) $\dfrac{30}{343}$. (D) $\dfrac{1600}{2401}$.

Lời giải. Đáp án đúng (C). Gọi A là biến cố "Số lấy được là số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau".

$n_\Omega = 6 \cdot 7^4$.

$n_A = 4\mathrm{A}_6^4 - 3\mathrm{A}_5^3$.

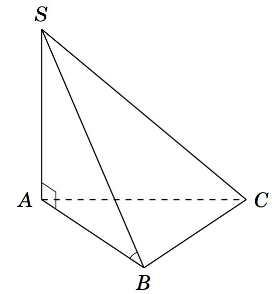
$P(A) = \dfrac{n_A}{n_\Omega} = \dfrac{30}{343}$. □

Câu 36. Cho chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = AB = a$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

(A) 75°. (B) 45°. (C) 30°. (D) 60°.

Lời giải. Đáp án đúng (B).

$(SB,(ABC)) = \widehat{SBA} = 45^\circ$.



□

Câu 37. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+1}{2}$. Gọi $M_1(a_1;b_1;c_1)$ và $M_2(a_2;b_2;c_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng (d) sao cho khoảng cách từ chúng đến mặt phẳng (Oyz) bằng 5. Tính $c_1 + c_2$.

(A) $-\dfrac{14}{3}$. (B) 10. (C) $\dfrac{7}{3}$. (D) 2.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Lấy $M(2+3t;-1-3t;-1+2t) \in (d)$.
Khoảng cách từ M đến (Oyz) là $|2+3t|$.

Xét phương trình $|2+3t| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+3t=5 \\ 2+3t=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$

Suy ra $c_1 + c_2 = -1+2-1-\dfrac{14}{3} = -\dfrac{14}{3}$. □

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng vuông góc với trục Ox và đi qua điểm $M(2;-1;3)$ là

(A) $x+1=0$. (B) $x-3=0$. (C) $x=0$. (D) $x-2=0$.

Lời giải. Đáp án đúng (D). Do $(P) \perp Ox$, nên véctơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n} = (1;0;0)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $1(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$. □

Câu 39. Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ có số nghiệm thực là

(A) 7. (B) 6. (C) 4. (D) 9.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Đặt $t = f(x)+1 \Rightarrow t = x^3 - 3x^2 + 2$ $(*)$

Suy ra $t' = 3x^2 - 6x$. Khi đó $t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. Ta có, bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó $\sqrt{f\left(f\left(x\right)+1\right)+1}=f\left(x\right)+2$ trở thành:

$\sqrt{f\left(t\right)+1}=t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq -1 \\ f\left(t\right)+1=t^2+2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq -1 \\ t^3-4t^2-2t+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t\geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} t=a\in(-1;0) \\ t=b\in(0;\,1) \\ t=c\in(4;\,5) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a\in(-1;\,0) \\ t=b\in(0;\,1) \\ t=c\in(4;\,5) \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta có

+) Với $t=a\in(-1;\,0)$, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Với $t=b\in(0;\,1)$, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm trên.

+) Với $t=c\in(4;\,5)$, phương trình (*) có 1 nghiệm khác 6 nghiệm trên.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm. □

Câu 40. Tổng S của tất cả các nghiệm thuộc khoảng $(0;4\pi)$ của phương trình $2022^{\sin^2 x}-2022^{\cos^2 x}=2\ln\left(\cot x\right)$ là

A. $S=18\pi$. B. $S=8\pi$. C. $S=7\pi$. D. $S=16\pi$.

Lời giải. Đáp án đúng C. Điều kiện $\cot x>0$. Ta có

$$\begin{aligned} &2022^{\sin^2 x}-2022^{\cos^2 x}=2\ln\left(\cot x\right) \\ \Leftrightarrow &2022^{\sin^2 x}-2022^{\cos^2 x}=\ln\left(\cos^2 x\right)-\ln\left(\sin^2 x\right) \\ \Leftrightarrow &2022^{\sin^2 x}+\ln\left(\sin^2 x\right)=2022^{\cos^2 x}+\ln\left(\cos^2 x\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=2022^t+\ln t$ với $t>0$

$f'\left(t\right)=2022^t.\ln 2022+\dfrac{1}{t}>0,\,\forall\, t>0 \Rightarrow$ hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f\left(\sin^2 x\right)=f\left(\cos^2 x\right)\Leftrightarrow \sin^2 x=\cos^2 x\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Do $\cot x>0$ nên $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Mà $x\in(0;4\pi)$ suy ra $x\in\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{9\pi}{4}:\dfrac{13\pi}{4}\right\}$. Suy ra $S=7\pi$. □

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2-3x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và đồ thị hàm số $F(x)$ có một điểm cực trị là $M(0;2)$. Khi đó $F(1)$ bằng

A. $\dfrac{7}{12}$. B. $\dfrac{17}{12}$. C. $\dfrac{31}{12}$. D. $-\dfrac{17}{12}$.

Lời giải. Đáp án đúng C. Đồ thị của hàm số $F(x)$ đạt cực trị tại điểm $M(0;2)\Rightarrow \begin{cases} F'(0)=f(0)=0 \\ F(0)=2 \end{cases}$.

Ta có: $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x+C$.

Do $f(0)=0\Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+2x$.

Mà $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)$. Suy ra $F(1)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+F(0)=\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)\mathrm{d}x+2=\frac{31}{12}$. □

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có hai điểm cực trị là -1 và 1. Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trùng với các điểm cực trị của $f(x)$, đồng thời có đỉnh nằm trên đồ thị của $f(x)$ với tung độ bằng 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gần với giá trị nào nhất dưới đây?

A. 10. B. 12. C. 13. D. 11.

Lời giải. Đáp án đúng B. Gọi I là toạ độ đỉnh của đồ thị hàm số $g(x)$, dễ thấy $I(0; 2)$ và $g(x) = -2(x-1)(x+1)$ hay $g(x) = -2x^2 + 2$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases} 3 - 2a + b = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + c.$

Vì I thuộc đồ thị của $f(x)$, nên $c = 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Xét $f(x) - g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-3}^{0} |x^3 + 2x^2 - 3x| dx + \int_{0}^{1} \left|x^3 + 2x^2 - 3x\right| dx = \frac{7}{6} \approx 11{,}8.$$

□

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$?

A. 5. B. 3. C. 6. D. 4.

Lời giải. Đáp án đúng D. Ta có $\Delta' = m^2 - 6m + 5$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên xảy ra hai trường hợp:

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và $z_1 = \overline{z_1}; z_2 = \overline{z_2}$ nên

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2 = z_2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \text{ (ko thoả mãn)}, \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0. \end{array}\right.$$

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (1; 5)$, thì phương trình có hai nghiệm phức là hai số phức liên hợp.

Khi đó $z_1 = \overline{z_2}; \overline{z_1} = z_2$ nên $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1 z_2 = z_1 z_2$ luôn đúng với $m \in (1; 5)$.

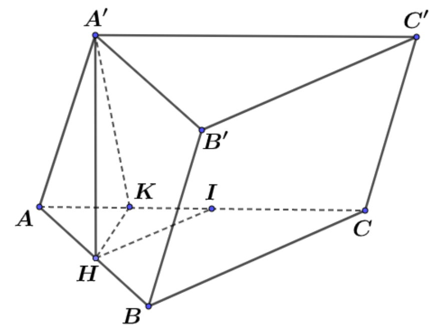
Vậy có 4 giá trị nguyên của m thoả mãn bài toán. □

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm của đoạn AB. Mặt bên $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc 30°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{3a^3}{8}$. B. $\dfrac{3a^3}{16}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải. Đáp án đúng C. Gọi I là trung điểm của BC, K là trung điểm của AI, H là trung điểm của AB.

Ta có $A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AC$.
Tam giác ABC đều nên $BI \perp AC$, HK là đường trung bình của tam giác ABI nên $HK \perp AC$.
Từ đó $AC \perp (A'HK) \Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng $(AA'C'C)$ là góc $\widehat{A'KH} \Rightarrow \widehat{A'KH} = 30^\circ$.
Do đó, $A'H = HK \tan 30^\circ = \dfrac{BI}{2} \tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} . \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{4}$.
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.



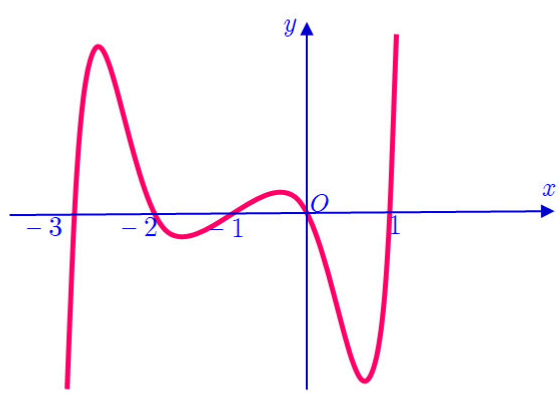
□

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(d)\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P)\colon x+y+z+3=0$. Gọi (d') là hình chiếu vuông góc của (d) lên mặt phẳng (P). Lấy $M(a;b;1)$ thuộc (d'). Tính $2a+3b$.

A -7. B -11. C -4. D -9.

Lời giải. Đáp án đúng B. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và vuông góc với (P).
Khi đó $(d') = (P) \cap (Q)$.
Véctơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = (1;-1;0)$ và có $(1;-1;1) \in (Q)$
Phương trình mặt phẳng (Q) là $x-y-2=0$.
Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y+z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b-2=0 \\ a+b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow 2a+3b=-11$. □

Câu 46. Cho hàm đa thức $y = \left[f\left(x^2+2x\right)\right]'$ có đồ thị cắt trục Ox tại 5 điểm phân biệt như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m với $2022m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m\right)$ có 9 điểm cực trị?



A 2020. B 2023. C 2021. D 2022.

Lời giải. Đáp án đúng C. Ta có:

$$\left[f\left(x^2+2x\right)\right]' = (2x+2)\, f'\left(x^2+2x\right) = a(x+3)(x+2)(x+1)(x)(x-1) \quad (a>0)$$
$$\Rightarrow f'\left(x^2+2x\right) = \frac{a}{2}(x+3)(x+2)\,x\,(x-1) = \frac{a}{2}\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x\right).$$

Đặt $t = x^2+2x \Rightarrow f'(t) = \dfrac{a}{2}(t-3)\,t$.
Ta có $g(x) = f\left(x^2 - 2|x-1| - 2x + m\right) = f\left(|x-1|^2 - 2|x-1| + m - 1\right)$.

Ta thấy $g(2-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị lớn hơn 1 của hàm số $g(x)$. Theo bài ra ta có $2a+1 = 9 \Leftrightarrow a = 4$. Vì vậy ta cần tìm m để hàm số $g(x)$ có đúng 4 điểm cực trị lớn hơn 1.
Khi $x > 1$ thì $g(x) = f\left(x^2 - 4x + m + 2\right)$.

$g'(x) = (2x-4)f'\left(x^2-4x+m+2\right), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - 4x + m + 2 = 0 \ (1) \\ x^2 - 4x + m + 2 = 3 \ (2) \end{array}\right.$.

Đặt $u(x) = x^2 - 4x + m + 2$, ta có bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
$u(x)$	$m-1$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để 2 phương trình (1), (2) có đúng 3 nghiệm phân biệt khác 2, điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$m - 2 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 2,$$

suy ra

$$2022 < 2022m < 4044 \Rightarrow 2022m \in \{2023; 2024; \ldots; 4043\},$$

do đó có 2021 giá trị của m thỏa mãn bài toán. □

Câu 47. Cho x là số nguyên dương và y là số thực. Có tất cả bao nhiêu cặp số $(x\,; y)$ thỏa mãn

$$\ln(1 + x + 2y) = 2y + 3x - 10?$$

(A) 10. (B) Vô số. (C) 11. (D) 9.

....

Lời giải. Đáp án đúng (D). Điều kiện: $1 + x + 2y > 0 \Leftrightarrow y > -\dfrac{x+1}{2}$.
Ta luôn chứng minh được $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Xét hàm số $y = g(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow g'(x) = e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
$y = g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Ta có: $\ln(1 + x + 2y) = 2y + 3x - 10 \Leftrightarrow 1 + x + 2y = e^{2y+3x-10} \geq (2y + 3x - 10) + 1 \Leftrightarrow x \leq 5$.
Do $x \in \mathbb{N}^*$, nên $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Lại có: $\ln(1 + x + 2y) = 2y + 3x - 10 \Leftrightarrow \ln(1 + x + 2y) - 2y - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$.
Xét hàm số $f(y) = \ln(1 + x + 2y) - 2y - 3x + 10$ trên khoảng $\left(-\dfrac{x+1}{2}; +\infty\right)$
Suy ra $f'(y) = \dfrac{2}{1 + x + 2y} - 2; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{x}{2} \in \left(-\dfrac{x+1}{2}; +\infty\right)$
Bảng biến thiên của hàm số $f(y) = \ln(1 + x + 2y) - 2y - 3x + 10$.

y	$-\dfrac{x+1}{2}$		$-\dfrac{x}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10-2x$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy:
Với một giá trị $x \in \{1;2;\,3;4\}$, phương trình $\ln(1+x+2y)-2y-3x+10=0$ theo ẩn y có 2 nghiệm phân biệt.
Với $x=5$ phương trình $\ln(1+x+2y)-2y-3x+10$ theo ẩn y có 1 nghiệm.
Vậy có 9 nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bài toán. □

Câu 48. Cho số phức z thoả mãn $iz.\bar{z}+(1+2i)z-(1-2i)\bar{z}-4i=0$. Giá trị lớn nhất của

$$P=|z+1+2i|+|z+4-i|$$

gần số nào nhất sau đây?

(A) 7,4. (B) 4,6. (C) 4,2. (D) 7,7.

. . . .

Lời giải. Đáp án đúng (D). Giả sử $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$$\begin{aligned}
&iz.\bar{z}+(1+2i)z-(1-2i)\bar{z}-4i=0\\
\Leftrightarrow\ &i(x+yi)(x-yi)+(1+2i)(x+yi)-(1-2i)(x-yi)-4i=0\\
\Leftrightarrow\ &i\left(x^2+y^2\right)+(x-2y)+(2x+y)i-(x-2y)-(-2x-y)i-4i=0\\
\Leftrightarrow\ &x^2+y^2+4x+2y-4=0. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Suy ra, tập hợp các số phức z có điểm biểu diễn thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R=3$.
Lại có

$$\begin{aligned}
P&=|z+1+2i|+|z+4-i|=|(x+1)+(y+2)i|+|(x+4)+(y-1)i|\\
&=\sqrt{x^2+y^2+2x+4y+5}+\sqrt{x^2+y^2+8x-2y+17}
\end{aligned}$$

Kết hợp với (2) ta được $P=\sqrt{9-2(x-y)}+\sqrt{21+4(x-y)}$.
Đặt $t=x-y$ thì $P=f(t)=\sqrt{9-2t}+\sqrt{21+4t}$ với $t\in\left[-\dfrac{21}{4};\dfrac{9}{2}\right]$.
Khảo sát hàm số $f(t)$ hoăc áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta được

$$P=\sqrt{9-2t}+\sqrt{2\left(\frac{21}{2}+2t\right)}\le\sqrt{(1+2)\left(9+\frac{21}{2}\right)}=\frac{3\sqrt{26}}{2}\approx 7{,}65.$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=\dfrac{5}{4}$, từ đó có thể tính được $z=\dfrac{-7\pm\sqrt{217}}{8}+i\dfrac{-17\pm\sqrt{217}}{8}$. □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1)\colon \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$, $(d_2)\colon \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ và điểm $A(4;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A cắt d_1 và cách d_2 một khoảng lớn nhất. Lấy $\overrightarrow{u}=(a;1;c)$ là một véctơ chỉ phương của Δ. Độ dài của $\overrightarrow{u}$ là

(A) $3\sqrt{5}$. (B) $\sqrt{86}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{85}$.

Lời giải. Đáp án đúng (B). Gọi H là hình chiếu của A lên d_2, khi đó Δ nằm trên mặt phẳng (P) qua A và nhận $\overrightarrow{AH}$ là véctơ pháp tuyến.
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và (d_1). Khi đó $\Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow \overrightarrow{u}_\Delta = [\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{n}_Q]$.
Giả sử $H(1+t; -3+2t; 1+3t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (t-3; 2t-4; 3t-1)$.
Ta có $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{u}_{d_2}, \overrightarrow{u}_{d_2} = (1;2;3) \Rightarrow t-3+4t-8+9t-3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-2;-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{n}_P = (1;1;-1)$.
Lấy $N(-1;1;-2) \in (d_1) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = (-5;0;-4) \Rightarrow \overrightarrow{n}_Q = [\overrightarrow{u}_{d_1}, \overrightarrow{AN}] = (4;-2;-5)$.
Suy ra $\overrightarrow{u}_\Delta = [\overrightarrow{n}_P, \overrightarrow{n}_Q] = (-7;1;-6) \Rightarrow |\overrightarrow{u}| = \sqrt{86}$. □

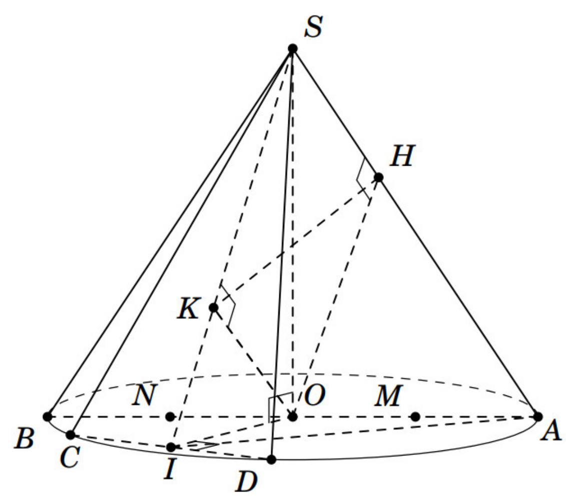
Câu 50. Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường cao là R và đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Gọi (d) là tiếp tuyến của đường tròn đáy tại A và (P) là mặt phẳng chứa SA và (d). Mặt phẳng (Q) thay đổi qua S cắt đường tròn O tại hai điểm C, D sao cho $CD = \sqrt{3}R$. Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Q). Tính giá trị lớn nhất của $\cos\alpha$.

(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. (C) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. (D) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải. Đáp án đúng (A). Gọi I là trung điểm CD, khi đó $OI \perp CD$, hạ $OK \perp SI$ tại $K \Rightarrow OK \perp (Q)$.
Hạ $OH \perp SA \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow \alpha = (OH, OK)$

$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\dfrac{OK^2 + OH^2 - HK^2}{2OH \cdot OK}\right|$. Ta có

$OI = \sqrt{OD^2 - ID^2} = \dfrac{R}{2}, OK = \dfrac{OI \cdot OS}{\sqrt{OI^2 + SO^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{5}}; OH = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.



$$\begin{aligned} HK^2 &= SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cos\widehat{ASI} \\ &= SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cdot \frac{SI^2 + SA^2 - AI^2}{2SI \cdot SA}. \end{aligned}$$

$SA = \sqrt{2}R, SI = \dfrac{\sqrt{5}}{2}R, SH = \dfrac{SO^2}{SA} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}, SK = \dfrac{SO^2}{SI} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}R$.
Gọi M và N lần lượt là trung điểm OA và OB khi đó

$$AM \le AI \le AN.$$

Suy ra

$$SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cdot \frac{SI^2 + SA^2 - AM^2}{2SI \cdot SA} \le HK^2 \le SK^2 + SH^2 - 2SK \cdot SH \cdot \frac{SI^2 + SA^2 - AN^2}{2SI \cdot SA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}R^2 \le HK^2 \le \frac{9}{10}R^2 \Rightarrow -\frac{\sqrt{10}}{10} \le \frac{OK^2 + OH^2 - HK^2}{2OH \cdot OK} \le \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \cos\alpha \le \max\left\{\frac{\sqrt{10}}{10}; \frac{3\sqrt{10}}{10}\right\} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$ □