

KỸ NĂNG SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

1. Kiến thức cần nắm vững

Như các bạn đã biết, phương pháp sử dụng hàm đặc trưng để giải bài toán VDC logarit thường xuyên xuất hiện trong đề thi của BGD các năm gần đây. Đối với dạng toán về mũ và logarit thì đây là một phương pháp tối ưu nhất.

Các em học sinh cần nắm vững định lý: Cho hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $(a;b)$. Nếu $f(u) = f(v)$ và $u, v \in (a;b)$ thì khi đó $u = v$.

Nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ và $u, v \in (a;b)$ thì $f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \geq v$.

Nếu $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ và $u, v \in (a;b)$ thì $f(u) \geq f(v) \Leftrightarrow u \leq v$.

Bình luận: Khi giải toán, chúng ta sẽ gặp những bài toán cho sẵn hàm $f(x)$ đơn điệu và biểu thức hàm đặc trưng dễ thấy. Tuy nhiên, ở mức độ vận dụng và vận dụng cao thì chúng ta phải khéo léo biến đổi để trở thành hàm đặc trưng $f(u) = f(v)$ hoặc $f(u) \geq f(v)$.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn $5 + 16 \cdot 4^{x^2 - 2y} = (5 + 16^{x^2 - 2y}) \cdot 7^{2y - x^2 + 2}$. Gọi M và m lần lượt là giá

trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{10x + 6y + 26}{2x + 2y + 5}$. Tính $T = M + m$.

A. $T = \frac{19}{2}$.

B. $T = \frac{21}{2}$.

C. $T = 10$.

D. $T = 15$.

Lời giải

Đặt $t = x^2 - 2y$, khi đó giả thiết tương đương với

$$5 + 16 \cdot 4^t = (5 + 16^t) \cdot 7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{5 + 4^{t+2}}{7^{t+2}} = \frac{5 + 4^{2t}}{7^{2t}}. (1)$$

Xét hàm số $f(u) = 5\left(\frac{1}{7}\right)^u + \left(\frac{4}{7}\right)^u$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(u) = 5\left(\frac{1}{7}\right)^u \ln \frac{1}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^u \ln \frac{4}{7} < 0, \forall u \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(u)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t+2 = 2t \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 2 \Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{3x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\text{Ta có } P' = \frac{-4x^2 - 22x - 10}{(x^2 + 2x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \cdot \text{Bảng biến thiên}$$

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

$$\text{Từ đó suy ra } M = 7, m = \frac{5}{2} \text{ nên } M + m = \frac{19}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$. Tập giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^3$ chứa bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 4.

B. 5.

C. 9.

D. Vô số.

Lời giải

Điều kiện $x+y > 0; x^2+y^2 > 0$

$$\text{Ta đặt } \log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2) = t. \text{ Ta có } \begin{cases} x+y = 3^t \\ x^2+y^2 = 4^t \end{cases} (1)$$

$$\forall (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \Rightarrow (3^t)^2 \leq 2 \cdot 4^t \Rightarrow t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2 \approx 0,85.$$

$$\text{Ta có } x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow xy = \frac{9^t - 4^t}{2}.$$

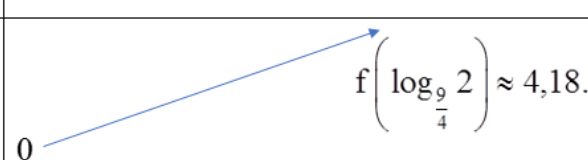
$$\text{Khi đó } P = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 27^t - 3 \cdot 3^t \cdot \frac{9^t - 4^t}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 27^t + \frac{3}{2} \cdot 12^t = f(t)$$

$$\text{Xét } f(t) = -\frac{1}{2} \cdot 27^t + \frac{3}{2} \cdot 12^t \text{ với } t \leq \log_{\frac{9}{4}} 2 \text{ có } f'(t) = -\frac{1}{2} \cdot 27^t \cdot \ln 27 + \frac{3}{2} \cdot 12^t \cdot \ln 12$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 27^t \cdot \ln 27 = \frac{3}{2} \cdot 12^t \cdot \ln 12 \Leftrightarrow \left(\frac{27}{12}\right)^t = 3 \cdot \frac{\ln 12}{\ln 27} \Leftrightarrow t = \log_{\frac{27}{12}} \left(3 \cdot \frac{\ln 12}{\ln 27}\right) \approx 1,006 (l)$$

Ta có: $f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \ln 27 + \frac{3}{2} \cdot \ln 12 > 0$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\log_{\frac{9}{4}} 2$
$f'(t)$	+	
$f(t)$		

Gọi T là tập giá trị của P . Đặt $f\left(\log_{\frac{9}{4}} 2\right) = \alpha$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} T = (0; \alpha] \\ P \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \{1; 2; 3; 4\} \in T$

Suy ra tập giá trị của P có chứa 4 giá trị nguyên.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực dương y thỏa mãn biểu thức $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $2^{x^2+y^2} = 2.2^{y-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} = 2^{y-x+1} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x + 1 \Leftrightarrow y^2 - y = -x^2 - x + 1 (*)$

Cách 1:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phương trình (*) có nghiệm y dương.

Xét hàm số $f(y) = y^2 - y$ trên $(0, +\infty)$ có $f'(y) = 2y - 1$, $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

y	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình (*) có nghiệm y dương $\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.

Cách 2 :

$$\text{Yêu cầu bài toán được thỏa} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases}$$

Trường hợp 1 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} . \text{Ta chọn } x \in \{-1; 0\}$$

Trường hợp 2 :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; y > 0 \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z}; \frac{-1-\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{6}}{2} \\ y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}; y > 0 \end{cases} , \text{ không tồn tại } x \in \mathbb{Z} \text{ để } y > 0$$

Vậy có 2 số nguyên x để phương trình (*) có nghiệm thực y dương.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x-2}\right) + 4m - 4 = 0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2}; 4\right]$.

A. $-3 < m \leq \frac{7}{3}$.

B. $m \in \mathbb{R}$.

C. $m \in \{1\}$.

D. $-3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.

Lời giải

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$. Do $x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Ta có phương trình: $4(m-1)t^2 - 4(m-5)t + 4m - 4 = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m(t^2 - t + 1) = t^2 - 5t + 1 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$$

Xét $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$, với $t \in [-1; 1]$, ta có: $f'(t) = \frac{4t^2 - 4}{(t^2 - t + 1)^2} = \frac{-4(1 - t^2)}{(t^2 - t + 1)^2} \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$

Suy ra, hàm số nghịch biến đoạn $[-1; 1]$. Phương trình (1) có nghiệm khi đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$. $\Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(-1) \Leftrightarrow -3 \leq m \leq \frac{7}{3}$.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn biểu thức sau

$$\log_4(x + y + 3) = \log_5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)?$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Ta có: $\log_4(x + y + 3) = \log_5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5)$

$$\Leftrightarrow \log_4[(x+1) + (y+2)] = \log_5[(x+1)^2 + (y+2)^2]$$

Đặt $X = x + 1; Y = y + 2$. Khi đó ta có: $\log_4(X + Y) = \log_5(X^2 + Y^2)$

Đặt $t = \log_4(X + Y) = \log_5(X^2 + Y^2)$ suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} X + Y = 4^t \\ X^2 + Y^2 = 5^t \end{cases}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $(X + Y)^2 \leq 2(X^2 + Y^2) \Leftrightarrow 16^t \leq 2 \cdot 5^t \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{16}{5}} 2$.

Mặt khác: $X^2 = 5^t - Y^2 \leq 5^t \leq 5^{\frac{\log_{16} 2}{5}} \Leftrightarrow -5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq X \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}$

Vì $X \in \mathbb{Z} \Rightarrow X \in \{-1; 0; 1\}$. Tương tự ta có: $-5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2} \leq Y \leq 5^{\frac{1}{2} \log_{\frac{16}{5}} 2}$.

Trường hợp 1: $X = 0$, ta có phương trình $\log_4 Y = \log_5 Y^2$ (1).

$Y = 1$ là nghiệm của phương trình (1). Do đó $X = 0$ thỏa mãn suy ra: $x = y = -1$.

Trường hợp 2: $X = -1$, ta có phương trình $\log_4(Y - 1) = \log_5(1 + Y^2)$ (2).

Xét hàm số: $f(Y) = \log_4(Y-1) - \log_5(1+Y^2)$, $Y \in \left(1; 5^{\frac{1}{2} \log_{16} 2}\right]$

Ta có: $f'(Y) = \frac{1}{(Y-1)\ln 4} - \frac{2Y}{(1+Y^2)\ln 5} > 0, \forall Y \in \left(1; 5^{\frac{1}{2} \log_{16} 2}\right]$

Suy ra hàm số đồng biến trên $(1; \beta]$, với $\beta = 5^{\frac{1}{2} \log_{16} 2} \Rightarrow \max_{(1; \beta]} f(Y) = f(\beta) \approx -1,1477689 < 0$

$\Rightarrow f(Y) = 0$ vô nghiệm. Hay phương trình (2) vô nghiệm. Do đó: $X = -1$ (loại)

Trường hợp 3: $X = 1$, ta có $\log_4(Y+1) = \log_5(1+Y^2)$ (3).

$Y = 0$ là nghiệm của phương trình (3). Do đó $X = 1$ thỏa.

Vậy có 2 giá trị $X \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn là: $\begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 6: Cho x, y thỏa mãn $2^{2x-y+1} + 3^{2x-y+1} - 5^{2x-y+1} = 5^{-2x+y+1} - 2^{-2x+y+1} - 3^{-2x+y+1}$ (*). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1$.

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Phương trình (*) $\Leftrightarrow 2^{2x-y+1} + 3^{2x-y+1} + 2^{-2x+y+1} + 3^{-2x+y+1} = 5^{-2x+y+1} + 5^{2x-y+1}$

Đặt $2x - y = a$, phương trình trở thành $2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) = 5(5^a + 5^{-a})$

Nhận thấy nếu a là nghiệm thì $-a$ cũng là nghiệm nên chỉ cần xét $a \geq 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^t + x^{-t}$, $x > 1$ với số thực t dương tùy ý.

Ta có $f'(x) = tx^{t-1}(1 - x^{-2t})$, do $x > 1$ nên $1 - x^{-2t} > 0 \Rightarrow$ hàm số này đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Do đó, ta được bất đẳng thức sau: $2^a + 2^{-a} \leq 3^a + 3^{-a} \leq 5^a + 5^{-a}, \forall a \geq 0$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 0$. Suy ra $2(2^a + 2^{-a}) + 3(3^a + 3^{-a}) \leq 5(5^a + 5^{-a})$.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = 0$ hay $2x - y = 0 \Leftrightarrow 2x = y$.

Khi đó $P = 2x^2 - y^2 - 2x + 3y + 1 = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3 \leq 3$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3 khi $x = 1$.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn biểu thức

$$\log_3(x + \sqrt{2}y) = \log_2(x^2 + y^2).$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Điều kiện $x + \sqrt{2}y > 0; x^2 + y^2 \neq 0$. Đặt $\log_3(x + \sqrt{2}y) = \log_2(x^2 + y^2) = t$, khi đó $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 2^t \end{cases}$

$$\text{Vì } (x + \sqrt{2}y)^2 \leq 3(x^2 + y^2) \Rightarrow 9^t \leq 3 \cdot 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \leq 3 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{2}} 3.$$

Như vậy $x^2 + y^2 = 2^t \Rightarrow x^2 \leq 2^t \leq 2^{\log_{\frac{9}{2}} 3} \approx 1,65$. Vì x nguyên nên $x^2 \in \{0; 1\}$.

$$\text{Với } x = 0 \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = \frac{3^t}{\sqrt{2}} \\ y^2 = 2^t \end{cases} \text{ suy ra } \frac{9^t}{2} = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{\frac{9}{2}} 2 \Rightarrow y = \frac{3^{\log_{\frac{9}{2}} 2}}{\sqrt{2}} \approx 1,17.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có phương trình } \log_3(1 + \sqrt{2}y) = \log_2(1 + y^2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \approx 0,7686 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có phương trình } \log_3(\sqrt{2}y - 1) - \log_2(1 + y^2) = 0.$$

Xét hàm số $f(y) = \log_3(\sqrt{2}y - 1) - \log_2(1 + y^2)$. Lập bảng biến thiên ta chứng minh được $\max f(y) \approx f(1,369) \approx -1,583 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó ta chọn được $x \in \{0; 1\}$. Vậy có 2 giá trị x thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 8: Có bao nhiêu cặp số $(x; y)$ thuộc đoạn $[1; 2020]$ thỏa mãn y là số nguyên và

$$x + \ln x = y + e^y?$$

A. 2021.

B. 2020.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $f(t) = t + e^t \Rightarrow f'(t) = 1 + e^t > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ (1).

Ta lại có: $x + \ln x = y + e^y \Leftrightarrow f(\ln x) = f(y)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$.

Để $1 \leq x \leq 2020$ thì $1 \leq e^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \ln 2020$.

Mà y nguyên và $y \in [1; 2020]$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Với mỗi giá trị $y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta có một giá trị x tương ứng thuộc đoạn $[1; 2020]$.

Vậy có 7 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Ví dụ 9: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x > \frac{1}{10}$ và $\log x + \log y + 1 \geq \log(x + y)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $\left[\frac{5}{3}; 2\right)$. B. $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ C. $\left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ D. $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Với điều kiện trên ta có: $\log(10xy) \geq \log(x + y) \Leftrightarrow 10xy \geq x + y$

$$\Leftrightarrow y(10x - 1) \geq x > 0 \Rightarrow y \geq \frac{x}{10x - 1} \left(\text{do } x > \frac{1}{10} \right). \text{ Do đó } S = x + 3y \geq x + \frac{3x}{10x - 1}.$$

Xét $f(x) = x + \frac{3x}{10x - 1} \left(x > \frac{1}{10} \right)$. Ta có $f'(x) = 1 - \frac{3}{(10x - 1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (10x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow 10x - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + 1}{10} \left(\text{do } x > \frac{1}{10} \right).$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = f\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{10}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{5}$.

$$\text{Khi đó } S = x + 3y \geq x + \frac{3x}{10x - 1} \geq \min_{\left(\frac{1}{10}; +\infty\right)} f(x) = \frac{2 + \sqrt{3}}{5} \text{ và } S = \frac{2 + \sqrt{3}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3} + 1}{10} \\ y = \frac{x}{10x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3} + 1}{10} \\ y = \frac{3 + \sqrt{3}}{30} \end{cases}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$ là $S_{\min} = \frac{2 + \sqrt{3}}{5} \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

3. Bài tập vận dụng

Câu 1: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^y$.

- A. 2020. B. 1010. C. 6. D. 7.

Câu 2: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x, y \in [5; 37]$ và $\sqrt{x} = y^2 + 2y - x + 2 + \sqrt{y^2 + 2y + 2}$

- A. 32. B. 5. C. 1. D. 33

- Câu 3:** Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $2.2^x + x + \sin^2 y = 2^{\cos^2 y}$?
 A. 4. B. 3. C. 1. D. 0.
- Câu 4:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq 2020$ và $3^{x+1} + x + 1 = 3^y + y$?
 A. 2020. B. 2021. C. 2022. D. 2023.
- Câu 5:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\log_2(m + \sqrt{m+2^x}) = 2x$ có nghiệm thực?
 A. 2017. B. 2018. C. 2016. D. 2015.
- Câu 6:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện sau $0 \leq y \leq 100$ và $x^6 + 6x^4y + 12x^2y^2 - 19y^3 + 3x^2 - 3y = 0$?
 A. 10. B. 100. C. 20. D. 21.
- Câu 7:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x, y \in [3; 48]$ và $(x-2)\sqrt{y+2} = \sqrt{y+1} \cdot \sqrt{x^2-4x+5}$.
 A. 46. B. 6. C. 45. D. 5.
- Câu 8:** Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+1}{2}\right) + x = 4^{\sin^4 y + \cos^4 y} - \sin^2 2y$?
 A. Vô số. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 9:** Cho số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2} - 2^y = y - x^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x - 2y$.
 A. $P = \frac{1}{4}$. B. $P = \frac{3}{4}$. C. $P = \frac{1}{3}$. D. $P = \frac{1}{8}$.
- Câu 10:** Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.
 A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.
- Câu 11:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện đề bài $0 \leq x \leq 2020$ và $3(9^y + 2y) = x + \log_3(x+1)^3 - 2$?
 A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.
- Câu 12:** Cho $f(x) = 2020^x - 2020^{-x}$. Gọi m_0 là số lớn nhất trong số nguyên m thỏa mãn $f(m+1) + f\left(\frac{m}{2020} - 2020\right) < 0$.
 A. $m_0 = 2018$. B. $m_0 = 2019$. C. $m_0 = 2020$. D. $m_0 = 2021$.

Câu 13: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $9x^3 + (2 - y\sqrt{3xy - 5})x + \sqrt{3xy - 5} = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^3 + y^3 + 6xy + 3(3x^2 + 1)(x + y - 2)$

- A. $\frac{4\sqrt{6} + 36}{9}$. B. $\frac{36 + 296\sqrt{15}}{9}$. C. $\frac{36 - 296\sqrt{15}}{9}$. D. $\frac{-4\sqrt{6} + 36}{9}$.

Câu 14: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn bất đẳng thức sau đây $\log \frac{x+1}{3y+1} \leq 9y^4 + 6y^3 - x^2y^2 - 2y^2x$ (1). Biết $y \leq 1000$, hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất đẳng thức (1).

- A. 1501100. B. 1501300. C. 1501400. D. 1501500.

Câu 15: Cho 2 số thực x, y không âm thỏa mãn: $2^{\frac{x+1}{x}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$. Giá trị của biểu thức $P = |1 - 2(x+y)|$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 1. D. 2.

Câu 16: Cho x, y là các số thực thỏa mãn biểu thức $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$ (*). Biết $0 \leq x \leq 2018$, số cặp x, y nguyên thỏa mãn đẳng thức (*) là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 17: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn biểu thức sau đây $2(2^{a^2+b^2+c^2} - 1) + (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 4^{a+b+c}$. Đặt $P = \frac{3a+2b+c}{a+b+c}$ và gọi S là tập hợp gồm những giá trị nguyên của P . Số phần tử của tập hợp S là

- A. Vô Số. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 18: Phương trình $\log(x+1) = 2$ có nghiệm là

- A. 11. B. 9. C. 101. D. 99.

Câu 19: Cho $2^a = 3, 3^b = 4, 4^c = 5, 5^d = 6$. Tính 2^{abcd} .

- A. $\log_2 6$. B. $\log_6 2$. C. 2. D. 6.

Câu 20: Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$. Tính $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

- A. -2. B. 3. C. 0. D. 1.

Câu 21: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn biểu thức $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

- A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Câu 22: Cho x, y, a, b là các số thực thỏa mãn $a > b > 1$ và $a^{x+1} = b^{2y} = \frac{a}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + y$ là

- A. -2 . B. $-\frac{13}{4}$. C. 4 . D. $\frac{3}{4}$.

Câu 23: Cho biết a, b, c là các số thực dương thỏa mãn biểu thức $2018^a = 2019^b = 2020^c$. Hãy tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$.

- A. $\log_{2018} 2019$. B. $\log_{2018} 2019 + \log_{2019} 2020$.
C. $\log_{2018} 2020$. D. $\log_{2018} 2019 \cdot 2020$.

Câu 24: Cho x, y dương thỏa mãn: $\log_3(x^2 + 2y) = 1 + \log_3 4$. Giá trị lớn nhất của $P = \sqrt{xy}$ thuộc khoảng nào dưới đây.

- A. $(-1; 1)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. C. $(5; 10)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 25: Cho $a, b, c > 1$ và các số thực dương thay đổi x, y, z thỏa mãn $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$.

- A. 24 . B. $24 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. C. 20 . D. $20 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 26: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $2020^{\frac{2019(x^2 - y + 4)}{(x+2)^2}} = \frac{4x + y}{(x+2)^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = y - 2x$.

- A. $\min P = 4$. B. $\min P = 2$. C. $\min P = 1$. D. $\min P = 3$.

Câu 27: Cho $x > y \geq 0$ thỏa mãn $3^{x+y+2xy-2} = \frac{2(1-xy)}{x+y}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 5y$ là

- A. 2 . B. $\frac{9}{5}$. C. 4 . D. $\frac{50 - 8\sqrt{5}}{4\sqrt{5} + 1}$.

Câu 28: Xét các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{3} < b < a < 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{3b-1}{4} \right) + 12 \log_{\frac{b}{a}}^2 a - 3$$

- A. $\min P = 13$. B. $\min P = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. C. $\min P = \sqrt[3]{2}$. D. $\min P = 9$.

Câu 29: Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt[3]{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(2; 4)$. B. $(4; 6)$. C. $(6; 8)$. D. $(8; 10)$.

Câu 30: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 4y$ là $P_{\min} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n \in \mathbb{N}$, khi đó giá trị của biểu thức $T = m^2 + n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 79. B. 25. C. 34. D. 85.

Câu 31: Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện sau đây $x > -1, y > -3$ và $\log_2 \left[(y+3)(x+1) \right] + \frac{xy+3x+y+2}{x+1} = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây $P = x + 3y + 10$ thuộc tập nào dưới đây:

- A. $[1; 3)$. B. $[3; 4)$. C. $[4; 5)$. D. $[5; 6)$.

Câu 32: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $1 > a > b > \frac{1}{4}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \log_a \left(b - \frac{1}{4} \right) - \log_{\frac{a}{b}} \sqrt{b}$$

thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $\left(4; \frac{11}{2} \right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 4 \right)$. D. $\left(1; \frac{5}{2} \right)$.

Câu 33: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \leq 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln \frac{x+2y}{y}$$

là $a + \ln b$. Giá trị của tích $a.b$ là

- A. 45. B. 81. C. 108. D. 115.

Câu 34: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $1 < a \leq b \leq a^3$ và $a^x = b^y = \sqrt[3]{ab}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + 3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

- A. $[1; 2)$. B. $[2; 3)$. C. $[3; 4)$. D. $[4; 5)$.

Câu 35: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_2 a + \log_3 b = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\log_3 a} + \sqrt{\log_2 b}$ bằng.

- A. $\sqrt{\log_2 3} + \sqrt{\log_3 2}$. B. $\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}$.
C. $\frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_3 2)$. D. $\frac{2}{\sqrt{\log_2 3 + \log_3 2}}$.

Câu 36: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{16} x = \log_{20} y = \log_{25} \frac{2x-y}{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = \frac{y}{x}.$$

A. $T = \frac{2}{3}$.

B. $T = \frac{3}{2}$.

C. $T = -\frac{2}{3}$.

D. $T = -\frac{3}{2}$.

Câu 37: Cho p và q là các số thực dương sao cho: $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16} (p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{q}{p}$.

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{8}{5}$.

C. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$.

D. $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Câu 38: Cho x, y là hai số nguyên không âm thỏa mãn $\log_2 (x+y) = \log_3 (x-y)$. Hỏi tổng $x+y$ là bao nhiêu?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Câu 39: Cho số thực $1 \leq x \leq 8$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\log_2 \frac{x}{128}}{\log_2 x + 1} - \log_{\sqrt{2}} x$$

lần lượt là a, b . Tính ab .

A. $ab = 5$.

B. $ab = 35$.

C. $ab = -7$.

D. $ab = -35$.

Câu 40: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$, $x \leq 2020$ và thỏa mãn phương trình sau đây $\log_2 x + \log_2 (x-y) = 1 + 4\log_4 y$.

A. 2020.

B. 1010.

C. 2019.

D. 1011.

Câu 41: Biết x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $\log_2 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right) = 6x - 4x^2$ và

$$2x_1 - x_2 = \frac{3}{4}(a - \sqrt{b}), (a, b \in \mathbb{N}).$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = -4$.

B. $P = 6$.

C. $P = -6$.

D. $P = 4$.

Câu 42: Cho phương trình $2\log_3 (\cot x) = \log_2 (\cos x)$. Phương trình có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2020\pi)$

A. 2020.

B. 2019.

C. 1009.

D. 1010.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của y thỏa mãn $5^x = \log_5 (x+y) + y$. Biết rằng $|y| \leq 2020$.

A. 2020.

B. 2019.

C. 1010.

D. 1018.

Câu 44: Cho bất phương trình $\log 10x + \log^2 x + 3 \geq m \cdot \log 100x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m nguyên dương để bất phương trình có nghiệm với mọi x thuộc $[1; +\infty)$?

A. 1.

B. 3.

C. vô số.

D. 2.

- Câu 45:** Cho x, y là các số thực thoả mãn $\log_3(x+y) = \log_4(x^2+y^2)$. Tập giá trị của biểu thức $P = x^3 + y^3$ chứa bao nhiêu giá trị nguyên?
- A. 4. B. 5. C. 9. D. Vô số.

Bảng đáp án

1.D	2.C	3.D	4.B	5.A	6.DB	7.B	8.B	9.D	10.B
11.D	12.A	13.B	14.D	15.C	16.C	17.D	18.D	19.D	20.C
21.A	22.D	23.B	24.B	25.C	26.D	27.A	28.D	29.A	30.D
31.B	32.B	33.B	34.B	35.B	36.A	37.D	38.A	39.B	40.B
41.B	42.D	43.A	44.A	45.A					