

CHƯƠNG II. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

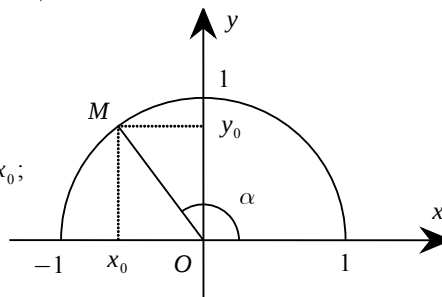
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α ($0^0 \leq \alpha \leq 180^0$) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$.

Khi đó ta có định nghĩa:

- sin của góc α là y_0 , kí hiệu $\sin \alpha = y_0$;
- cosin của góc α là x_0 , kí hiệu $\cos \alpha = x_0$;
- tang của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$),



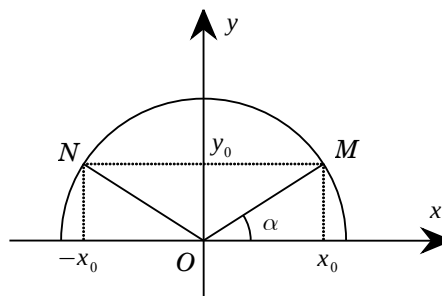
kí hiệu $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;

- cotang của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), kí hiệu $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

2. Tính chất

Trên hình bên ta có dây cung NM song song với trục Ox và nếu $\widehat{xOM} = \alpha$ thì $\widehat{xON} = 180^0 - \alpha$. Ta có $y_M = y_N = y_0$, $x_M = -x_N = x_0$. Do đó

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin(180^0 - \alpha) \\ \cos \alpha &= -\cos(180^0 - \alpha) \\ \tan \alpha &= -\tan(180^0 - \alpha) \\ \cot \alpha &= -\cot(180^0 - \alpha).\end{aligned}$$



3. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Giá trị α lượng giác	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	0

$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\parallel$
---------------	-------------	------------	---	----------------------	---	-------------

Trong bảng kí hiệu " $\parallel$ " để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

Chú ý. Từ giá trị lượng giác của các góc đặc biệt đã cho trong bảng và tính chất trên, ta có thể suy ra giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

Chẳng hạn:

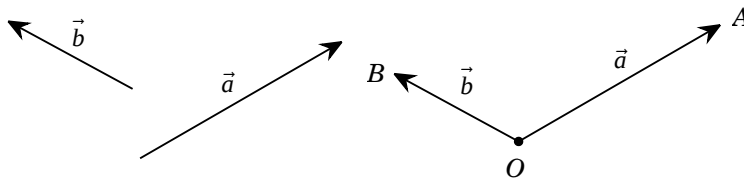
$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Góc giữa hai vector

a) Định nghĩa

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



b) Chú ý. Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

được 6)

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1 : xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
- b) $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

$$c) C = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4\tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

Lời giải

$$a) A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$$

$$b) B = 3 - (1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

$$c) C = \sin^2 45^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2(\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4\tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$b) B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$c) C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$$

Lời giải

$$a) A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) \\ = 1 + 1 = 2$$

$$b) B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$$

$$= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) \\ = 0$$

$$c) C = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$$

$$= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) \\ = 1$$

Dạng 2 : chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc x, đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ .

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

b) $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Lời giải

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

b) $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x (\tan^2 x + 1)$
 $= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos \left(\frac{A+C}{2} \right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin \left(\frac{A+C}{2} \right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$$

Lời giải

Vì $A + B + C = 180^\circ$ nên

$$\begin{aligned} VT &= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos \left(\frac{180^\circ - B}{2} \right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin \left(\frac{180^\circ - B}{2} \right)} - \frac{\cos(180^\circ - B)}{\sin B} \cdot \tan B \\ &= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B} \cdot \tan B = \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + 1 = 2 = VP \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

$$b) B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$$

Lời giải

$$a) A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$$

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} - \sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ &= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} \\ &= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Vậy P không phụ thuộc vào x.

Dạng 3 : xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$

b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$

c) Cho $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$ tính giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^0 < \alpha < 180^0$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì $\tan \gamma = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$ mặt khác $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ nên

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8 + 1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ví dụ 2: a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^0 < \alpha < 90^0$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3\cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3\frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2\cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$$

$$b) B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{3 + 8\sqrt{2}}$$

Ví dụ 3: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ hay $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$\begin{aligned} A &= |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)| \\ \Rightarrow A^2 &= (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x) \\ \Rightarrow A^2 &= \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

A. $P = 0$.

B. $P = 1$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

Do đó, $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 2: Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

A. $P = 0$.

B. $P = 1$.

C. $P = -1$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn A

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

Do đó, $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0$.

Câu 3: Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \alpha < 0$.

B. $\cos \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C

Lấy góc $\alpha = 120^\circ$ sau đó thử ngược

Câu 4: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\cos \alpha < \cos \beta$.

B. $\sin \alpha < \sin \beta$.

C. $\cot \alpha > \cot \beta$.

D. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$ sau đó thử ngược.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$.

B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$.

C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$.

D. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng từ 0° đến 90° , khi giá trị của góc tăng thì giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$.

B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$.

C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$.

D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$.

B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$.

C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$.

D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.

- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 8: Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$?

A. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

B. $\cos^2 \frac{\alpha}{3} + \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.

C. $\cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$.

D. $5\left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5}\right) = 5$.

Lời giải

Chọn D

Từ biểu thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ta suy ra $\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} = 1$.

Do đó ta có $5\left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5}\right) = 5$.

Câu 9: Cho biết $\sin \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{105}{25}$.

B. $P = \frac{107}{25}$.

C. $P = \frac{109}{25}$.

D. $P = \frac{111}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2 \frac{\alpha}{3} + \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{16}{25}$.

Do đó ta có $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5 \cdot \frac{16}{25} = \frac{107}{25}$.

Câu 10: Cho biết $\tan \alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{4}{3}$.

B. $P = \frac{5}{3}$.

C. $P = -\frac{4}{3}$.

D. $P = -\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha} = \frac{6 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 7}{6 + 7 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{6 \tan \alpha - 7}{6 + 7 \tan \alpha} = \frac{5}{3}.$$

Câu 11: Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = -\frac{19}{13}$.

B. $P = \frac{19}{13}$.

C. $P = \frac{25}{13}$.

D. $P = -\frac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có biểu thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Ta có } P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{9}}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{19}{13}.$$

Câu 12: Cho biết $\cot \alpha = 5$. Giá trị của $P = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{10}{26}$.

B. $P = \frac{100}{26}$.

C. $P = \frac{50}{26}$.

D. $P = \frac{101}{26}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1 = \sin^2 \alpha \left(2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1 + \cot^2 \alpha) = \frac{3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{101}{26}. \end{aligned}$$

Câu 13: Cho biết $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

B. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

C. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$.

D. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = \sin \alpha + 1 \rightarrow 9 \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 \Leftrightarrow 9(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 10 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

• $\sin \alpha = -1$: không thỏa mãn vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

• $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}.$

Câu 14: Cho biết $2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

- A. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\alpha = 2 - 2\cos\alpha \rightarrow 2\sin^2\alpha = (2 - 2\cos\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2\alpha) = 4 - 8\cos\alpha + 4\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \cos\alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

• $\cos\alpha = 1$: không thỏa mãn vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

• $\cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15: Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Tính giá trị của $\sin\alpha\cos\alpha$.

- A. $\sin\alpha\cos\alpha = a^2$. B. $\sin\alpha\cos\alpha = 2a$.
C. $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$. D. $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2 - 11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin\alpha + \cos\alpha = a \rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Câu 16: Cho biết $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{5}{4}$. B. $P = \frac{7}{4}$. C. $P = \frac{9}{4}$. D. $P = \frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{9}.$$

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha} = \sqrt{(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2\tan\alpha\cot\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 2} = \frac{7}{4}.$$

Câu 17: Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

B. $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$.

C. $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$.

D. $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

Ta có $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha} = \sqrt{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$
 $= \sqrt{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$.

Câu 18: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?

A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$

B. $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$.

C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$.

D. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Lời giải

Chọn A

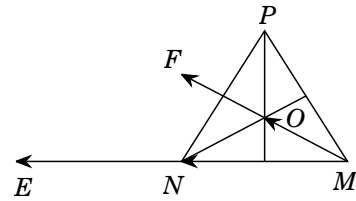
Vẽ $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{MN}$. Khi đó $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}) = (\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NP})$

$= \widehat{PNE} = 180^\circ - \widehat{MNP} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

• Vẽ $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{MO}$. Khi đó $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ON}) = \widehat{NOF} = 60^\circ$.

• Vì $MN \perp OP \rightarrow (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}) = 90^\circ$.

• Ta có $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \widehat{NMP} = 60^\circ$.



Câu 19: Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = -\frac{3}{2}$.

D. $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

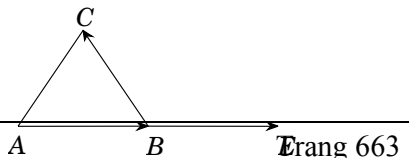
Lời giải

Chọn C

Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180^\circ - \widehat{CBA} = 120^\circ$

$\rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$.



Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}$.

Câu 20: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

A. 30° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 150° .

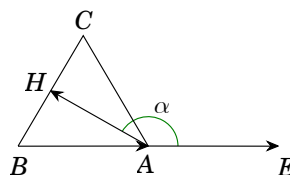
Lời giải

Chọn D

Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{HAE} = \alpha$ (hình vẽ)

$$= 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$



Câu 21: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$.

B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$.

C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.

D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

Câu 22: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$.

B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

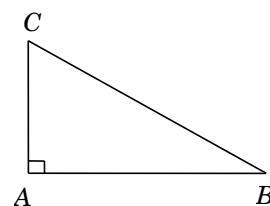
Chọn B

Xác định được $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \longrightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$



Câu 23: Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. 180° .

B. 360° .

C. 270° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \widehat{CAB} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 540^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

Câu 24: Cho tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

A. 120° .

B. 360° .

C. 270° .

D. 240° .

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA})$$

$$= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 360^\circ - 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ.$$

Câu 25: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

A. 360° .

B. 180° .

C. 80° .

D. 160° .

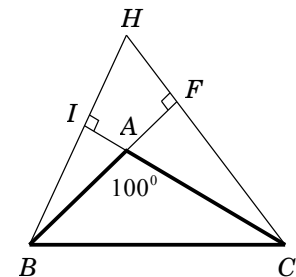
Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) = \widehat{BHA} \\ (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \widehat{BHC} \\ (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{CHA} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{BHA} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA}$$

$$= 2\widehat{BHC} = 2(180^\circ - 100^\circ) = 160^\circ$$



(do tứ giác $HIAF$ nội tiếp. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

Câu 26: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DO})$.

A. 45° .

B. 405° .

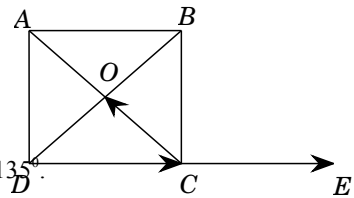
C. 315° .

D. 225° .

Lời giải

Chọn C

- Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.
- Ta có $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ$.
- Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, khi đó $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}) = \widehat{OCE} = 135^\circ$.



Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$
 $= 0^\circ + 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$.

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vector $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vector $\vec{a}$.

Ta có:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Nhận xét. Hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vector $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vector

Độ dài của vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

b) Góc giữa hai vector

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vector ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG 1 : Xác định biểu thức tích vô hướng, góc giữa hai vector.

1. Phương pháp giải.

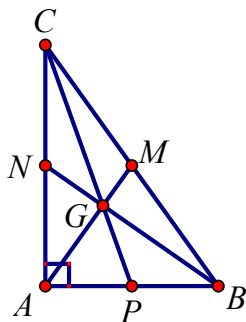
- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

Lời giải (hình 2.2)



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 2a^2 \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$

$$\text{Mặt khác } \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \cos \widehat{ABC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$$

$$* \text{ Ta có } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos \widehat{ACB}$$

$$\text{Theo định lý Pitago ta có } CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) \text{ Ta có}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

$$\text{Để thấy tam giác } ABM \text{ đều nên } GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

Lời giải (hình 2.3)

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có :

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

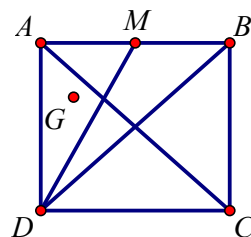
$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}$$



Hình 2.3

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A .

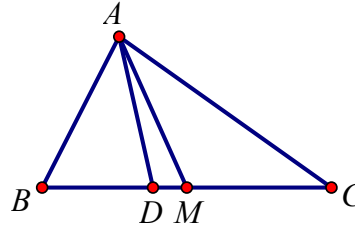
a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải (hình 2.3)

a) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[AB^2 + AC^2 - CB^2 \right] = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2)\end{aligned}$$



Hình 2.3

Mặt khác $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A \text{ hay } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} \left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + b^2 \right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{b}{c} \overrightarrow{DC} \quad (*)$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{b}{c} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c) \overrightarrow{AD} = b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = (b \overrightarrow{AB})^2 + 2bc \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + (c \overrightarrow{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = b^2 c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + c^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c-a)(b+c+a)$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

Nhận xét : Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$

Dạng 2: chứng minh các đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài của đoạn thẳng.

1. Phương pháp giải.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vector
- Sử dụng hằng đẳng thức vector về tích vô hướng.

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải:

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = VP \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 (*)$$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lý: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} \cdot (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0 \\ &\text{(đpcm)} \end{aligned}$$

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

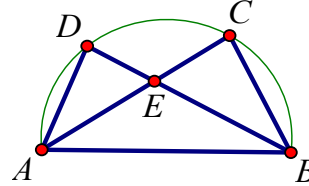
Ví dụ 3: Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = AB^2$

Lời giải (hình 2.4)

$$\text{Ta có } VT = \overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BE}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$$

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$, $\widehat{ACB} = 90^\circ$



Hình 2.4

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} = 0, \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = 0$$

$$\text{Do đó } VT = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{AB}^2 = VP \quad (\text{đpcm}).$$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \left(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - AB^2) + bc(IB^2 + IC^2 - BC^2) + ca(IA^2 + IC^2 - CA^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + ab + ca)IA^2 + (b^2 + ba + bc)IB^2 + (c^2 + ca + cb)IC^2 - (abc^2 + ab^2c + a^2bc) = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2) = (a + b + c)abc$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 = abc \quad (\text{đpcm})$$

Dạng 3: tìm tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài.

1. Phương pháp giải.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $\left| \overrightarrow{AM} \right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vector $\vec{a}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải:

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} \text{)} \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI = a \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$

b) Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A .

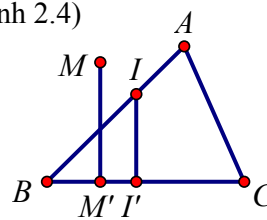
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải (hình 2.4)

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Khi đó $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \right] \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 \end{aligned}$$



Hình 2.4

Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC

Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

$$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC .

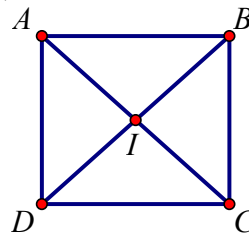
Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước.

Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$

Lời giải (hình 2.5)

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} \end{aligned}$$



Hình 2.5

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$

DẠNG 4: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp giải.

- Cho $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vector là $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

+ Góc của hai vector được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

- Để xác định độ dài một vector đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a} = (x; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

+ Nếu $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thì $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(1;2), B(-2;6), C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\vec{AB}(-3;4), \vec{AC}(8;6) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3.8 + 4.6 = 0$

Do đó $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\vec{BC}(11;2), \vec{BA}(3;-4)$

$$\text{Suy ra } \cos B = \cos(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{11.3 + 2.(-4)}{\sqrt{11^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

c) Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\vec{AH}(x-1; y-2), \vec{BH}(x+2; y-6), \vec{BC}(11;2)$

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0$$

$$\text{Hay } 11x + 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \vec{BH}, \vec{BC} \text{ cùng phương nên } \frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } x = \frac{1}{5}, y = \frac{32}{5}$$

$$\text{Vậy hình chiếu của A lên BC là } H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$$

Ví dụ 2: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(1;1)$, đỉnh $A(3;2)$ và đỉnh B nằm trên trục hoành. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình thoi.

Lời giải:

Vì B nằm trên trục hoành nên giả sử $B(0;y)$

Vì I là tâm hình thoi $ABCD$ nên I là trung điểm của AC và BD

$$\text{Suy ra } C = (2x_I - x_A; 2y_I - y_A) = (-1;0), D = (2x_I - x_B; 2y_I - y_B) = (2;2-y)$$

$$\text{Do đó } AB = AD \Leftrightarrow AB^2 = AD^2 \Leftrightarrow 9 + (y-2)^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{Vậy } B(0;3), C(-1;0), D(2;-1)$$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $\widehat{AMB} = 45^\circ$

Lời giải:

$$\text{Giả sử } M(x;y) \text{ suy ra } \overrightarrow{MA}(3-x;4-y), \overrightarrow{MB}(2-x;1-y), \overrightarrow{BC}(-3;-3)$$

$$\text{Vi } \widehat{AMB} = 45^\circ \text{ suy ra } |\cos \widehat{AMB}| = |\cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BC})|$$

$$\Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3(3-x) - 3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} \sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = |x+y-7| (*)$$

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vector $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương

$$\text{Suy ra } \frac{2-x}{-3} = \frac{1-y}{-3} \Leftrightarrow x = y+1 \text{ thế vào (*) ta được}$$

$$\sqrt{(2-y)^2 + (4-y)^2} = |2y-6| \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = 4$$

$$+ \text{ Với } y = 2 \Rightarrow x = 3, \text{ ta có } \overrightarrow{MA}(0;2), \overrightarrow{MB}(-1;-1) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Khi đó $\widehat{AMB} = 135^\circ$ (không thỏa mãn)

$$+ \text{ Với } y = 4 \Rightarrow x = 5, \overrightarrow{MA}(-2;0), \overrightarrow{MB}(-3;-3) \Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Khi đó $\widehat{AMB} = 45^\circ$

Vậy $M(5;4)$ là điểm cần tìm.

Ví dụ 4: Cho điểm $A(2; 1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm tọa độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $B(b; 0), C(0; c)$ với $b \geq 0, c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2; -1), \overrightarrow{AC}(-2; c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2) - 1 \cdot (c-1) = 0 \Leftrightarrow c = -2b + 5$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{2^2 + (c-1)^2} \\ &= (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } c > 0 \text{ nên } -2b + 5 > 0 \Rightarrow 0 \leq b < \frac{5}{2}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0	2	$\frac{5}{2}$
y	5	1	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$ là $y = 5$ khi $x = 0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b = 0$, suy ra $c = 5$.

Vậy $B(0; 0), C(0; 5)$ là điểm cần tìm.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Câu 3. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Chọn D

Câu 4. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 180^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

Suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Câu 5. Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

$$\text{C. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

$$\text{D. } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a}\vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

$$\bullet \text{ A đúng, vì } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right).$$

$$\bullet \text{ B đúng, vì } |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}.$$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}.$$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 8. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là sai?

$$\text{A. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2.$$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2} \longrightarrow \text{B đúng.}$$

- Xác định được góc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 120^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6} \longrightarrow \text{C sai.}$$

- Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB \cdot AG \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2} \longrightarrow \text{D đúng.}$$

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải**Chọn D**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2.$$

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$.

C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$.

D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$.

B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$.

C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$.

D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

Khi đó $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$.

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$.

B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$.

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}.\end{aligned}$$

Câu 15. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều.

B. tam giác OAB cân tại O .

C. tam giác OAB vuông tại O .

D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải**Chọn B**

$$\begin{aligned}\text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 &= 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA.\end{aligned}$$

Câu 16. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$.

D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải**Chọn B**

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$.

A. $P = -1$.

B. $P = 3a^2$.

C. $P = -3a^2$.

D. $P = 2a^2$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2. \end{aligned}$$

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

A. $P = 2\sqrt{2}a$.

B. $P = 2a^2$.

C. $P = a^2$.

D. $P = -2a^2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + 0 \\ &= -2 \cdot BA \cdot BD \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -2 \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2. \end{aligned}$$

Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$.

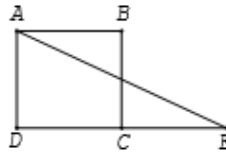
B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$.

C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$.

D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.$$

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

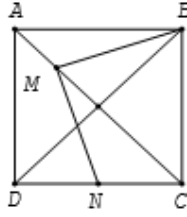
A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$.

B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$.

D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

$$\bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\bullet \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \right) = \frac{1}{16} (3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{16} (0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$.

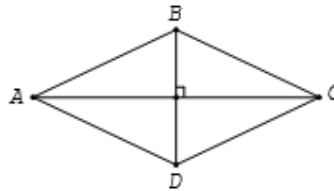
B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải**Chọn D**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 23. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải**Chọn D**

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ theo các vectơ

có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

Câu 24. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8 \text{ cm}$, $AD = 12 \text{ cm}$, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2 . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}.$

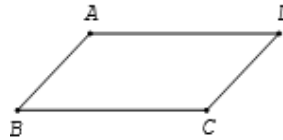
B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}.$

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}.$

D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD} = 2.S_{\triangle ABC} = 54 \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = 27 \text{ cm}^2$. Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{ABC}.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{2.S_{\triangle ABC}}{AB \cdot AD} = \frac{2 \cdot 27}{8 \cdot 12} = \frac{9}{16}$$

$$\longrightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$

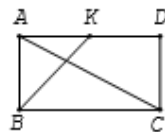
B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}.$

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}.$

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2.$

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases} \\ \longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \right) \\ = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0. \end{aligned}$$

Câu 26. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Câu 27. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

Câu 28. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 29. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

Câu 30. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$

$$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Theo giả thiết, ta có $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;11)$, $\overrightarrow{AC} = (-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$.

- A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. B. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. D. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3;1)$, $\overrightarrow{OB} = (2;10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4; 6)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$.

- A. $\vec{c} = (-1; -3)$. B. $\vec{c} = (-1; 3)$. C. $\vec{c} = (1; -3)$. D. $\vec{c} = (1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c} = (x; y)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = (-1; 3).$$

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

- A. $P = 0$. B. $P = 18$. C. $P = 20$. D. $P = 28$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (6; 6)$. Suy ra $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-2; -1)$ và $\vec{b} = (4; -3)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 60^\circ$. **C.** $\alpha = 45^\circ$. **D.** $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1+49}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{x} = (1; 2)$ và $\vec{y} = (-3; -1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha = 45^\circ$. **B.** $\alpha = 60^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 135^\circ$.

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4+25} \cdot \sqrt{9+49}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{a} = (9; 3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?

A. $\vec{v}_1 = (1; -3)$. **B.** $\vec{v}_2 = (2; -6)$. **C.** $\vec{v}_3 = (1; 3)$. **D.** $\vec{v}_4 = (-1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận vector đó không vuông góc với $\vec{a}$.

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$.

B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$.

D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -1)$ và $\overrightarrow{AC} = (4; -3)$.

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15° .

B. 60° .

C. 120° .

D. 135° .

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-4; -2)$. Suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \widehat{B} = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ.$$

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$.

D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8;4)$, $\overrightarrow{AD} = (5;-5)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (-5;5)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{8 \cdot 5 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{(-2) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ.$$

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vector $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

- A. $k = 20$. B. $k = -20$. C. $k = -40$. D. $k = 40$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right), \vec{v} = (k; -4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vector $\vec{u}$ và vector $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

- A. $k = \frac{37}{4}$. B. $k = \frac{\sqrt{37}}{2}$. C. $k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$. D. $k = \frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right), \vec{v} = (k; -4)$.

Suy ra $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$ và $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$. Do đó để

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4} \Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vector $\vec{c}$ vuông góc với vector $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2k = 2m$. B. $3k = 2m$. C. $2k + 3m = 0$. D. $3k + 2m = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = (-2k + 4m; 3k + m) \\ \vec{a} + \vec{b} = (2; 4) \end{cases}.$$

$$\text{Để } \vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0.$$

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1)$. Tìm vector $\vec{d}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = -2$.

- A. $\vec{d} = \left(\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$. B. $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$. C. $\vec{d} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{6}{7}\right)$. D. $\vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; -\frac{6}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{d} = (x; y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{u} = (4; 1)$, $\vec{v} = (1; 4)$ và $\vec{a} = \vec{u} + m\vec{v}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m = 4$.

B. $m = -4$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a} = \vec{u} + m\vec{v} = (4 + m; 1 + 4m)$. Trục hoành có vector đơn vị là $\vec{i} = (1; 0)$.

Vector $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (4; 1)$ và $\vec{v} = (1; 4)$. Tìm m để vector $\vec{a} = m\vec{u} + \vec{v}$ tạo với vector $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc 45° .

A. $m = 4$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{1}{4}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \vec{a} = m\vec{u} + \vec{v} = (4m + 1; m + 4) \\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} = (1; 1) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(4m + 1) + (m + 4)}{\sqrt{2} \sqrt{(4m + 1)^2 + (m + 4)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{5(m + 1)}{\sqrt{2} \sqrt{17m^2 + 16m + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5(m + 1) = \sqrt{17m^2 + 16m + 17} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \geq 0 \\ 25m^2 + 50m + 25 = 17m^2 + 16m + 17 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1; -2)$ và $N(-3; 4)$.

A. $MN = 4$.

B. $MN = 6$.

C. $MN = 3\sqrt{6}$.

D. $MN = 2\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-4; 6)$ suy ra $MN = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{42} = 2\sqrt{13}$.

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P = 4 + 2\sqrt{2}$.

B. $P = 4 + 4\sqrt{2}$.

C. $P = 8 + 8\sqrt{2}$.

D. $P = 2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; -2) \\ \overrightarrow{BC} = (2; 2) \\ \overrightarrow{CA} = (-4; 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ CA = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4 \end{cases}$$

Vậy chu vi P của tam giác ABC là $P = AB + BC + CA = 4 + 4\sqrt{2}$.

Câu 53. Trong hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho vector $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vector $\vec{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$.

B. 1.

C. $\frac{6}{5}$.

D. $\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \longrightarrow \vec{a} = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

B. $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

D. $\vec{u} = -\vec{v}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 2)$, $B(-2; -4)$, $C(0; 1)$ và $D\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$.

B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

C. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-3; -6) \text{ và } \overrightarrow{CD} = \left(-1; \frac{1}{2}\right) \text{ suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-3) \cdot (-1) + (-6) \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{CD}$.

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7; -3)$, $B(8; 4)$, $C(1; 5)$ và $D(0; -2)$. Khẳng

định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$.
- B. Tam giác ABC đều.
- C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.
- D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 7) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} = (-7; 1) \Rightarrow BC = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD} = (-1; -7) \Rightarrow CD = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA} = (7; -1) \Rightarrow DA = 5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB = BC = CD = DA = 5\sqrt{2}.$$

Lại có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1(-7) + 7 \cdot 1 = 0$ nên $AB \perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-1; 1)$, $B(0; 2)$, $C(3; 1)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- B. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.
- C. Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
- D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 1) \\ \overrightarrow{DC} = (3; 3) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra $DC \parallel AB$ và $DC = 3AB$. (1)

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AD = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \end{cases} \longrightarrow AD = BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$ và $C(1; -1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều.
- B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
- C. Tam giác ABC cân tại B .
- D. Tam giác ABC vuông cân tại A .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -4)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

Suy ra $\begin{cases} AB = AC = 2\sqrt{2} \\ AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{cases}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A .

A. Tam giác ABC đều.
B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
C. Tam giác ABC vuông cân tại B .
D. Tam giác ABC có góc A tù.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (3; -7)$ và $\overrightarrow{AC} = (-4; -10)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-7) \cdot 3 + (-3) \cdot (-7) = 0$ và $AB = BC$.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, $B(1;-1)$ và $C(-2;2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC vuông cân tại A .

C. Tam giác ABC vuông tại B .

D. Tam giác ABC vuông cân tại C .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-3; 3)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; 3)$.

Do đó $\begin{cases} AB = AC = 3 \\ BC = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;0)$, $C(6;0)$. **C.** $C(0;0)$. **D.** $C(-1;0)$.

Ta có $C \in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2-c;4) \\ \overrightarrow{CB} = (8-c;4) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2-c) \cdot (8-c) + 4 \cdot 4 = 0$

$$\Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \rightarrow C(6;0) \\ c = 0 \rightarrow C(0;0) \end{cases}$$

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- A. $C(0;6)$. B. $C(5;0)$. C. $C(3;1)$. D. $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4;-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c-2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;0)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. $M(-2;0)$. B. $M(2;0)$. C. $M(-4;0)$. D. $M(-5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in Ox$ nên $M(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-4-x;0) \\ \overrightarrow{MB} = (-5-x;0) \\ \overrightarrow{MC} = (3-x;0) \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-6-3x;0)$.

Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nên $-6-3x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \longrightarrow M(-2;0)$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(-2;2)$ và $N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng.

- A. $P(0;4)$. B. $P(0;-4)$. C. $P(-4;0)$. D. $P(4;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P \in Ox$ nên $P(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MP} = (x+2;-2) \\ \overrightarrow{MN} = (3;-1) \end{cases}$.

Do M, N, P thẳng hàng nên $\frac{x+2}{3} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow x = 4 \longrightarrow P(4;0)$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1;4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

- A. $M(1;0)$. B. $M(1;0), M(-3;0)$.

C. $M(3;0)$.

D. $M(1;0), M(3;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1-m;4)$.

Theo giả thiết: $MN = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MN}| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-m)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \longrightarrow M(1;0) \\ m = -3 \longrightarrow M(-3;0) \end{cases}$$

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B .

A. $C\left(-\frac{5}{3};0\right)$.

B. $C\left(\frac{5}{3};0\right)$.

C. $C\left(-\frac{3}{5};0\right)$.

D. $C\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C \in Ox$ nên $C(x;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x-1;-3) \\ \overrightarrow{BC} = (x-4;-2) \end{cases}$.

$$\text{Do } CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (-3)^2 = (x-4)^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \longrightarrow C\left(\frac{5}{3};0\right).$$

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$?

A. $M(0;1)$.

B. $M(6;0)$.

C. $M(1;6)$.

D. $M(0;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m-2;-2) \\ \overrightarrow{BM} = (m-5;2) \end{cases}$.

Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ$ suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ nên $(m-2)(m-5) + (-2).2 = 0$.

$$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \longrightarrow M(1;0) \\ m = 6 \longrightarrow M(6;0) \end{cases}$$

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$.

B. $M(0;-1)$.

C. $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M \in Oy$ nên $M(0; m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1; -1-m) \\ \overrightarrow{MB} = (3; 2-m) \end{cases}$.

Khi đó $MA^2 + MB^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 1^2 + (-1-m)^2 + 3^2 + (2-m)^2 = 2m^2 - 2m + 15$.

$$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}; \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $\{MA^2 + MB^2\}_{\min} = \frac{29}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2} \longrightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2; 0)$, $B(2; 5)$, $C(6; 2)$. Tìm tọa độ điểm D .

- A.** $D(2; -3)$. **B.** $D(2; 3)$. **C.** $D(-2; -3)$. **D.** $D(-2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x+2; y)$ và $\overrightarrow{BC} = (4; -3)$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \longrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \longrightarrow D(2; -3).$$

Câu 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 3)$, $B(-2; 4)$, $C(5; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

- A.** $G\left(2; \frac{10}{3}\right)$. **B.** $G\left(\frac{8}{3}; -\frac{10}{3}\right)$. **C.** $G(2; 5)$. **D.** $G\left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G(x_G; y_G) \text{ là } \begin{cases} x_G = \frac{1-2+5}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{3+4+3}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}.$$

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

- A.** $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. **C.** $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } I(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = (x+4; y-1) \\ \overrightarrow{BI} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{CI} = (x-2; y+2) \end{cases}$$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 = (x-2)^2 + 9 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

- A.** $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a+3; b) & \& \overrightarrow{BC} = (-1; 6) \\ \overrightarrow{BH} = (a-3; b) & \& \overrightarrow{AC} = (5; 6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3) \cdot (-1) + b \cdot 6 = 0 \\ (a-3) \cdot 5 + b \cdot 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b = 7.$$

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

- A.** $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } A'(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x-4; y-3) \\ \overrightarrow{BC} = (-5; -15) \\ \overrightarrow{BA'} = (x-2; y-7) \end{cases}$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \begin{cases} AA' \perp BC \\ B, A', C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BA'} = k \overrightarrow{BC} & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow -5(x-4) - 15(y-3) = 0 \Leftrightarrow x+3y=13.$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x-y=-1.$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \longrightarrow A'(1;4).$$

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

- A. $A'\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. B. $A'\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. C. $A'\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. D. $A'\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } A'(x;y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{BC} = (6; -2) \\ \overrightarrow{BA'} = (x+3; y-1) \end{cases}.$$

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AA' \perp BC \\ B, C, A' \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) \cdot 6 + (y-4) \cdot (-2) = 0 \\ \frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}.$$

Câu 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$ và $C(11;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

- A. $D(5;-8)$. B. $D(8;5)$. C. $D(-5;8)$. D. $D(-8;5)$.

Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \longrightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Suy ra I là trung điểm của $AC \longrightarrow I(4;-1)$.

$$\text{Gọi } D(x;y), \text{ do } I \text{ cũng là trung điểm của } BD \longrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{2} = 4 \\ \frac{y+6}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow D(5;-8).$$

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .

- A. $C(4;0)$. B. $C(-2;2)$. C. $C(4;0)$, $C(-2;2)$. D. $C(2;0)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } C(x;y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BA} = (1;3) \\ \overrightarrow{BC} = (x-1; y-1) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } B &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ BA = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) = 0 \\ 1^2 + 3^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y^2 - 20y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;-1)$ và $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm D , biết D có tung độ âm.

- A. $D(0;-1)$. B. $D(2;-3)$. C. $D(2;-3), D(0;1)$. D. $D(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } C = (x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 1) \\ \overrightarrow{BC} = (x-3; y) \end{cases}.$$

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình vuông nên ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3) + 1 \cdot y = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3-x) \\ 5(x-3)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3-x) \\ (x-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Với $C_1(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2;-3)$: thỏa mãn.

Với $C_2(2;2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0;1)$: không thỏa mãn.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1;2)$, $B(-1;3)$, $C(-2;-1)$ và $D(0;-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $ABCD$ là hình vuông. B. $ABCD$ là hình chữ nhật.
C. $ABCD$ là hình thoi. D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 1) \\ \overrightarrow{BC} = (-1; -4) \\ \overrightarrow{DC} = (-2; 1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác OAB với $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB .

- A. $E = \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$. B. $E = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
C. $E = (-2 + 3\sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$. D.
 $E = (-2 + 3\sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. (*)

Gọi $E(x; y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{EA} = (1-x; 3-y) \\ \overrightarrow{EB} = (4-x; 2-y) \end{cases}$.

$$\text{Từ (*), suy ra } \begin{cases} 1-x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(4-x) \\ 3-y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3\sqrt{2} \\ y = 4 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Câu 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

- A.** $D(7;0)$. **B.** $D(7;0)$, $D(2;9)$. **C.** $D(0;7)$, $D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

Lời giải

Chọn B

Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x; y)$.

- Trường hợp 1: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \neq CD \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ (với $k \neq -1$)

$$\Leftrightarrow (x-0; y-7) = (-2k; 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = 2k + 7 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x-2; y) \Rightarrow AD = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ \overrightarrow{BC} = (0; 5) \Rightarrow BC = 5 \end{cases} \longrightarrow AD = BC \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } (-2k-2)^2 + (2k+7)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \text{ (loại)} \\ k = -\frac{7}{2} \end{cases} \longrightarrow D(7;0).$$

- Trường hợp 2: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \neq BC \end{cases}$. Làm tương tự ta được $D = (2;9)$.

Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(2;9)$.

BÀI 3. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định lý cosin

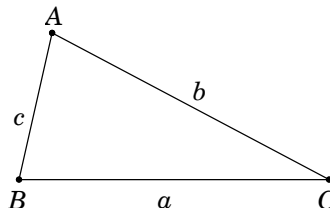
Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$ và $AB = c$.

Ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$



Hệ quả

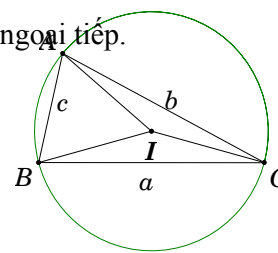
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lý sin

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



3. Độ dài đường trung tuyến

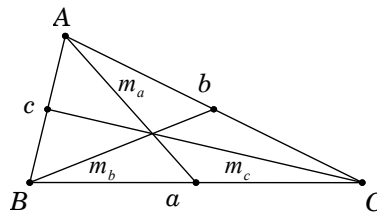
Cho tam giác ABC có m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C .

Ta có

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



4. Công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC có

- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB ;
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác;
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác;
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác;
- S là diện tích tam giác.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp.

- Sử dụng định lý côsin và định lý sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC , và độ dài đường cao kẻ từ A .

Lời giải

Áp dụng định lý côsin ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Theo định lý sin ta có $a = 2R \sin A = 2.3.\sin 30^\circ = 3$,

$b = 2R \sin B = 2.3.\sin 45^\circ = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R \sin C = 2.3.\sin 105^\circ \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

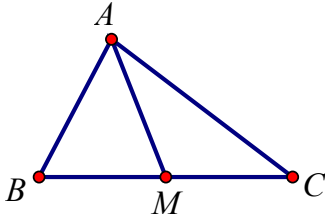
$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Biết

$AB = 3$, $BC = 8$, $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC .

Lời giải (hình 2.7)



Hình 2.7

$BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí côsin ta có

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM}$$

$$\text{Suy ra } \frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{2 \cdot 4 \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \\ x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

$$\text{TH1: Nếu } x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7.$$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + 49 - 64}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{1}{7}$$

Suy ra $A \approx 98^\circ 12'$

$$\text{TH2: Nếu } x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \frac{49}{13} = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{397}{13}}$$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + \frac{397}{13} - 64}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{397}{13}}} = -\frac{53}{\sqrt{5161}}$$

Suy ra $A \approx 137^\circ 32'$

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật ABCD biết $AD = 1$. Giả sử E là trung điểm AB và thỏa mãn

$$\sin \widehat{BDE} = \frac{1}{3}.$$

Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải (hình 2.8)

$$\text{Đặt } AB = 2x \ (x > 0) \Rightarrow AE = EB = x.$$

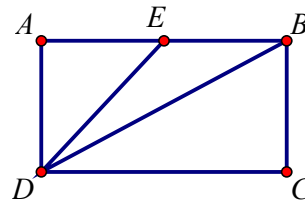
Vì góc $\widehat{BDE}$ nhọn nên $\cos \widehat{BDE} > 0$ suy ra

$$\cos \widehat{BDE} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{BDE}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Theo định lí Pitago ta có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 1 + x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{1 + x^2}$$

$$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow BD = \sqrt{4x^2 + 1}$$



Hình 2.8

Áp dụng định lý côsin trong tam giác BDE ta có

$$\cos \widehat{BDE} = \frac{DE^2 + DB^2 - EB^2}{2DE \cdot DB} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4x^2 + 2}{2\sqrt{(1+x^2)(4x^2+1)}}$$
$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (Do } x > 0 \text{)}$$

Vậy độ dài cạnh AB là $\sqrt{2}$

Dạng 2: giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai

góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lý côsin và định lý sin ; định lý tổng ba góc trong một tam giác bằng 180° và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\widehat{A} = 87^\circ$.

Lời giải

Theo định lý côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 32^2 + 4^2 - 2 \cdot 32 \cdot 4 \cdot \sin 87^\circ$$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lý sin ta có

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{32 \sin 87^\circ}{53,8} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 180^\circ - 87^\circ - 36^\circ = 57^\circ$$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 40^\circ$ và $c = 14$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Theo định lý sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lý côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 12^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } \widehat{A} = 120^\circ$$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120° .

Dạng 3: Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi về này thành về kia, hai về cùng bằng một về hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacôpxki,...)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lý sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lý cosin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

Lời giải (hình 2.9)

a) Trên tia đối của tia AC lấy D thỏa $AD = AB = c$ suy ra tam giác BDA cân tại A và

$$\widehat{BDA} = \frac{1}{2} \widehat{A}.$$

Áp dụng định lý hàm số Cosin cho $\triangle ABD$, ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} \\ &= 2c^2 - 2c^2 \cdot \cos(180^\circ - A) \\ &= 2c^2(1 + \cos A) = 2c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{c}{b}(a + b + c)(b + c - a) = \frac{4c}{b}p(p-a) \end{aligned}$$

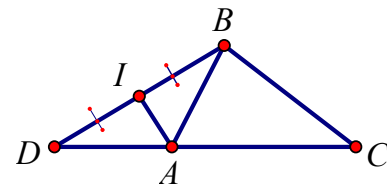
Suy ra

$$BD = 2\sqrt{\frac{cp(p-a)}{b}}$$

Gọi I là trung điểm của BD suy ra $AI \perp BD$.

Trong tam giác ADI vuông tại I, ta có

$$\cos \frac{A}{2} = \cos \widehat{ADI} = \frac{DI}{AD} = \frac{BD}{2c} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$



Hình 2.9

$$\text{Vậy } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

b) Từ định lý hàm số sin, ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p}{R}$ (1)

Theo câu a) ta có $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, tương tự thì $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ và $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

kết hợp với công thức $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= 4 \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \\ &= \frac{4p}{abc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4pS}{abc} = \frac{p}{R} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

Nhận xét: Từ câu a) và hệ thức lượng giác cơ bản ta suy ra được các công thức

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lý cosin và công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \quad \text{đpcm}$$

b) Theo câu a) tương tự ta có $\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \cot A + \cot B + \cot C &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{3p-a-b-c}{3} \right)^3 = \left(\frac{p}{3} \right)^3$

Mặt khác $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S \leq \sqrt{p \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Ta có $p^2 = \frac{(a+b+c)^2}{4} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$ suy ra $S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

$$\text{Do đó } \cot A + \cot B + \cot C \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

(đpcm)

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm các đường chéo. Chứng minh :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

Lời giải (hình 2.10)

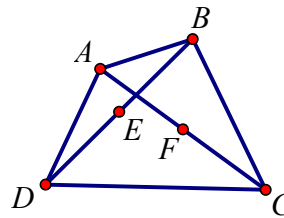
Áp dụng công thức đường trung tuyến với tam giác ABC và ADC ta có:

$$AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + \frac{AC^2}{2} \quad (1)$$

$$CD^2 + DA^2 = 2DE^2 + \frac{AC^2}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(BE^2 + DE^2) + AC^2$$



Hình 2.10

Mặt khác EF là đường trung tuyến tam giác BDF nên $BE^2 + DE^2 = 2EF^2 + \frac{BD^2}{2}$

$$\text{Suy ra } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$$

Dạng 4: Nhận Dạng Tam Giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lý cosin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lý cosin và sin ta có:

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b + c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \right) \Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4 \sin^2 A \sin^2 B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R} \right)^2 = \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo định lí hàm cosin, ta có } \cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2.5.8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó, } \hat{A} = 60^\circ.$$

Câu 2: Tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $BC = 1$.

B. $BC = 2$.

C. $BC = \sqrt{2}$.

D. $BC = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A} = 2^2 + 1^2 - 2.2.1.\cos 60^\circ = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{3}.$$

Câu 3: Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 3 + 3\sqrt{6}$. B. $BC = 3\sqrt{6} - 3$. C. $BC = 3\sqrt{7}$. D. $BC = \frac{3 + 3\sqrt{33}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC .

→ MN là đường trung bình của $\triangle ABC$.

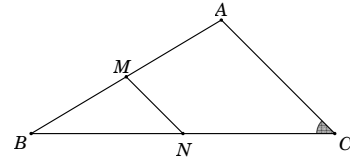
→ $MN = \frac{1}{2}AC$. Mà $MN = 3$, suy ra $AC = 6$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos\widehat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 - 2.6.BC.\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{6}$$



Câu 4: Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{5}$. B. $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. C. $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. D. $BC = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos\widehat{C} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + BC^2 - 2.\sqrt{3}.BC.\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Câu 5: Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 5\sqrt{2}$. D. $AC = 10$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Theo định lí hàm sin, ta có } \frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 6: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \sqrt{3}$. B. $AC = \sqrt{2}$. C. $AC = 2\sqrt{3}$. D. $AC = 2$.

Lời giải

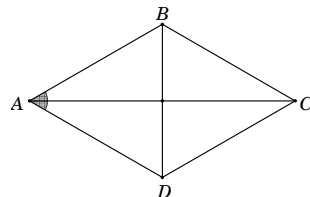
Chọn A

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}$$

$$= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$$



- Câu 7:** Tam giác ABC có $AB=4, BC=6, AC=2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài cạnh AM .
- A. $AM=4\sqrt{2}$. B. $AM=3$. C. $AM=2\sqrt{3}$. D. $AM=3\sqrt{2}$.

Lời giải

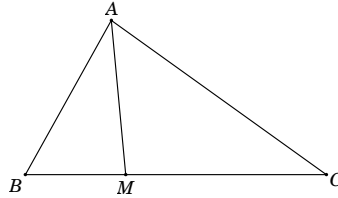
Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2}$.

Do $MC=2MB \rightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B \\ &= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



- Câu 8:** Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, BC=\sqrt{3}, CA=\sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng bao nhiêu độ?
- A. 45° . B. 60° . C. 75° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C

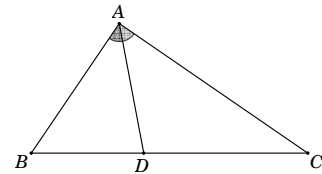
Theo định lí hàm cosin, ta có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

Trong $\triangle ABD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{ABD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ$.



- Câu 9:** Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH=32\text{ cm}$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?
- A. 38 cm . B. 40 cm . C. 42 cm . D. 45 cm .

Lời giải

Chọn B

Do tam giác ABC vuông tại A , có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB:AC$ là 3:4 nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

$$\text{Ta có } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB.$$

Trong $\triangle ABC$ có AH là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}AB\right)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{32^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{9}{16AB^2} \Rightarrow AB = 40.$$

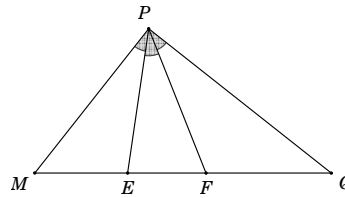
- Câu 10:** Tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}, \widehat{EPF}, \widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP=q, PQ=m, PE=x, PF=y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?
- A. $ME=EF=FQ$. B. $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.

C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$.

D. $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MPF} = \widehat{EPQ} = 60^\circ$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$$\begin{aligned} ME^2 &= AM^2 + AE^2 - 2 \cdot AM \cdot AE \cdot \cos \widehat{MAE} \\ &= q^2 + x^2 - 2qx \cdot \cos 30^\circ = q^2 + x^2 - qx\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MF^2 &= AM^2 + AF^2 - 2 \cdot AM \cdot AF \cdot \cos \widehat{MAF} \\ &= q^2 + y^2 - 2qy \cdot \cos 60^\circ = q^2 + y^2 - qy \end{aligned}$$

$$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 = q^2 + m^2.$$

Câu 11: Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải

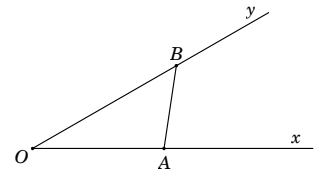
Chọn D

Theo định lí hàm sin, ta có:

$$\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB}$$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ$.

Khi đó $OB = 2$.



Câu 12: Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Khi OB có độ dài lớn nhất thì độ dài của đoạn OA bằng:

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Theo định lí hàm sin, ta có

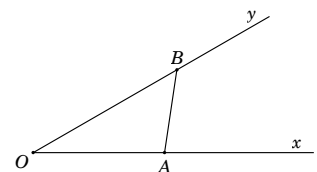
$$\frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \Leftrightarrow OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB}$$

Do đó, độ dài OB lớn nhất khi và chỉ khi

$$\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ.$$

Khi đó $OB = 2$.

$$\text{Tam giác } OAB \text{ vuông tại } A \Rightarrow OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$



- Câu 13:** Tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ?
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$.

Mà $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 \Leftrightarrow -a^2(b+c) + (b^3 + c^3) = 0$

$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 + c^2 - a^2 - bc) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 - bc = 0$ (do $b > 0, c > 0$)

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

Khi đó, $\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.

- Câu 14:** Tam giác ABC vuông tại A , có $AB = c, AC = b$. Gọi ℓ_a là độ dài đoạn phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tính ℓ_a theo b và c .

- A. $\ell_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. B. $\ell_a = \frac{2(b+c)}{bc}$. C. $\ell_a = \frac{2bc}{b+c}$. D. $\ell_a = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{bc}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Do AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}$

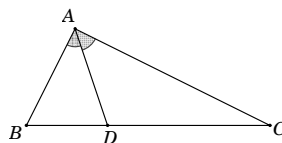
$\Rightarrow BD = \frac{AB}{AC} \cdot DC = \frac{c}{b} \cdot DC = \frac{c}{b+c} \cdot BC = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{b+c}$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

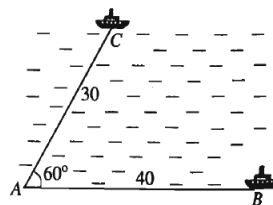
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{ABD} \Leftrightarrow \frac{c^2(b^2 + c^2)}{(b+c)^2} = c^2 + AD^2 - 2c \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$

$\Rightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \left(c^2 - \frac{c^2(b^2 + c^2)}{(b+c)^2} \right) = 0 \Leftrightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \frac{2bc^3}{(b+c)^2} = 0$.

$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$ hay $\ell_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$.



- Câu 15:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?
- A. 61 hải lí. B. 36 hải lí.
C. 21 hải lí. D. 18 hải lí.



Lời giải

Chọn B

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB = 40, AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC , ta có

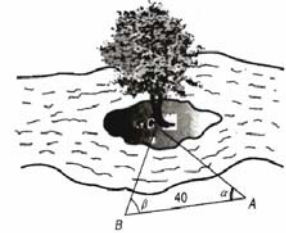
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 30^2 + 40^2 - 2.30.40. \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

Câu 16: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 53 m .
- B. 30 m .
- C. 41,5 m .
- D. 41 m .



Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC , ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

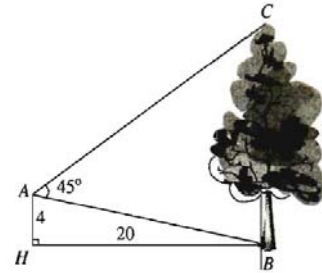
Vì $\sin C = \sin(\alpha + \beta)$ nên $AC = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \approx 41,47 \text{ m}.$

Câu 17: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 17,5m .
- B. 17m .
- C. 16,5m .
- D. 16m .



Lời giải

Chọn B

Trong tam giác AHB , ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^\circ 19'.$

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'.$

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'.$

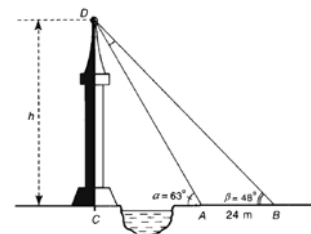
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \approx 17\text{m}.$$

Câu 18: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24 \text{ m}$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = 48^\circ$.

Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 18m .
- B. 18,5m .
- C. 60m .
- D. 60,5m .



Lời giải

Chọn D

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD , ta có $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D}$.

Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

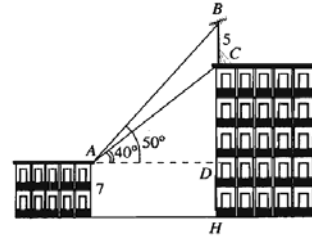
$$\text{Do đó } AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ACD , có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 61,4 \text{ m}$.

Câu 19: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang.

Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 12m . B. 19m .
C. 24m . D. 29m .

**Lời giải****Chọn B**

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có

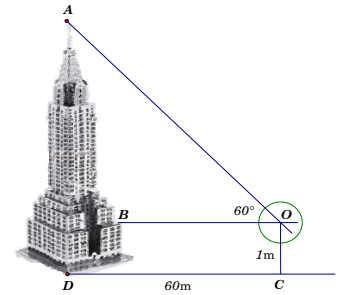
$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \rightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9 \text{ m}$.

$$\text{Vậy } CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9 \text{ m.}$$

Câu 20: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60\text{m}$, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1\text{m}$. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:

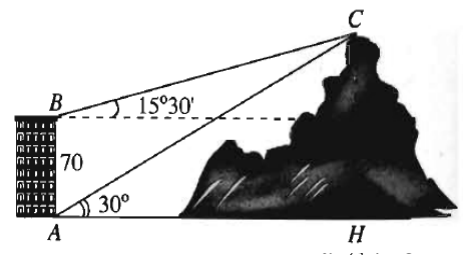
- A. 40m . B. 114m .
C. 105m . D. 110m .

**Lời giải****Chọn C**

Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3} \text{ m}$.

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1)\text{m}$.

Câu 21: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so



với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 135m . B. 234m .
C. 165m . D. 195m .

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

$$\text{Khi đó } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'.$$

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

$$\text{Do đó } AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4 \text{ m.}$$

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên

$$CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7 \text{ m. Vậy ngọn núi cao khoảng } 135 \text{ m.}$$

Câu 22: Tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng:

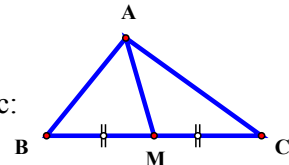
- A. 4cm . B. $\sqrt{3}\text{cm}$. C. 7cm . D. 5cm .

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức đường trung tuyến $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ta được:

$$m_a^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{8^2 + 6^2}{2} - \frac{10^2}{4} = 25 \Rightarrow m_a = 5.$$



Câu 23: Tam giác ABC vuông tại A và có $AB = AC = a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

- A. $BM = 1,5a$. B. $BM = a\sqrt{2}$. C. $BM = a\sqrt{3}$. D. $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

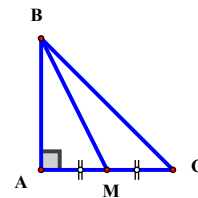
Lời giải

Chọn D

M là trung điểm của $AC \Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Tam giác $\triangle BAM$ vuông tại A

$$\Rightarrow BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Câu 24: Tam giác ABC có $AB = 9\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ và $BC = 15\text{cm}$. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

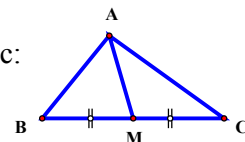
- A. $AM = \frac{15}{2}\text{cm}$. B. $AM = 10\text{cm}$. C. $AM = 9\text{cm}$. D. $AM = \frac{13}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng hệ thức đường trung tuyến $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ta được:

$$m_a^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{12^2 + 9^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4}.$$



$$\Rightarrow m_a = \frac{15}{2}.$$

Câu 25: Tam giác ABC cân tại C , có $AB = 9\text{cm}$ và $AC = \frac{15}{2}\text{cm}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính độ dài cạnh AD .

A. $AD = 6\text{ cm}.$

B. $AD = 9\text{ cm}.$

C. $AD = 12\text{ cm}.$

D. $AD = 12\sqrt{2}\text{ cm}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: D là điểm đối xứng của B qua $C \Rightarrow C$ là trung điểm của BD .

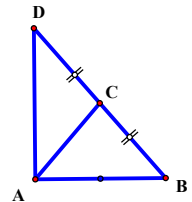
$\Rightarrow AC$ là trung tuyến của tam giác $\triangle DAB$.

$$BD = 2BC = 2AC = 15.$$

Theo hệ thức trung tuyến ta có:

$$AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Rightarrow AD^2 = 2AC^2 + \frac{BD^2}{2} - AB^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15^2}{2} - 9^2 = 144 \Rightarrow AD = 12.$$



Câu 26: Tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ và $AM > 3$. Tính độ dài cạnh AC .

A. $AC = \sqrt{13}.$

B. $AC = \sqrt{7}.$

C. $AC = 13.$

D. $AC = 7.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: M là trung điểm của $BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = 4$.

$$\text{Trong tam giác } ABM \text{ ta có: } \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \widehat{AMB} + BM^2 - AB^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - \frac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{13} > 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ AM = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

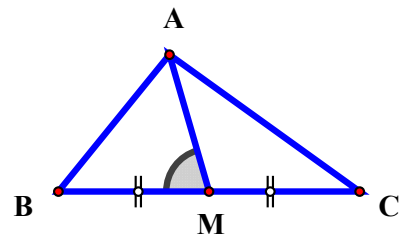
$$\Rightarrow AM = \sqrt{13}.$$

Ta có: $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ là hai góc kề bù.

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMC} = -\cos \widehat{AMB} = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$$

Trong tam giác $\triangle AMC$ ta có:

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cdot \cos \widehat{AMC} = 13 + 16 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right) = 49 \Rightarrow AC = 7.$$



Câu 27: Tam giác ABC có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

A. $AB = \sqrt{11}.$

B. $AB = \sqrt{13}.$

C. $AB = 2\sqrt{11}.$

D. $AB = 2\sqrt{13}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BGN} = 120^\circ$.

G là trọng tâm của tam giác $\triangle ABC$

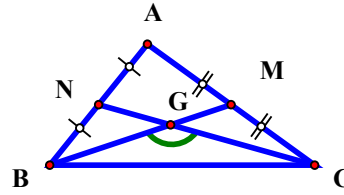
$$\Rightarrow \begin{cases} BG = \frac{2}{3}BM = 4. \\ GN = \frac{1}{3}CN = 3. \end{cases}$$

Trong tam giác $\triangle BGN$ ta có:

$$BN^2 = GN^2 + BG^2 - 2GN \cdot BG \cdot \cos \widehat{BGN}$$

$$\Rightarrow BN^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow BN = \sqrt{13}.$$

$$N \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow AB = 2BN = 2\sqrt{13}.$$



Câu 28: Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là 9; 12; 15. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. 24.

B. $24\sqrt{2}$.

C. 72.

D. $72\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 81 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 144 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 292 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{73} \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 10 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{208 + 100 - 292}{2 \cdot 4\sqrt{13} \cdot 10} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)^2} = \frac{18\sqrt{13}}{65}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } \triangle ABC: S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{13} \cdot 10 \cdot \frac{18\sqrt{13}}{65} = 72$$

Câu 29: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Nếu giữa a , b , c có liên hệ $b^2 + c^2 = 2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $2a\sqrt{3}$.

D. $3a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh } A \text{ của tam giác: } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Mà: } b^2 + c^2 = 2a^2 \Rightarrow m_a^2 = \frac{2a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 30: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = m$ và $AC = n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng:

A. $m^2 + n^2 = 3(a^2 + b^2)$.

B. $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2)$.

C. $2(m^2 + n^2) = a^2 + b^2$.

D. $3(m^2 + n^2) = a^2 + b^2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có: $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{m}{2}$.

BO là trung tuyến của tam giác $\triangle ABC$

$$\Rightarrow BO^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Câu 31: Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai trung tuyến AM và BN là góc nào?

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $\triangle ABC$.

$$\text{Ta có: } AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow AG^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}$$

$$BN^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow GN^2 = \frac{1}{9}BN^2 = \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}$$

Trong tam giác $\triangle AGN$ ta có:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AGN} &= \frac{AG^2 + GN^2 - AN^2}{2 \cdot AG \cdot GN} = \frac{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9} + \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} \\ &= \frac{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9} + \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} = \frac{10c^2 - 2(a^2 + b^2)}{36 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} = 0 \\ &\Rightarrow \widehat{AGN} = 90^\circ. \end{aligned}$$

Câu 32: Tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a, m_b, m_c thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

A. Tam giác cân.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông.

D. Tam giác vuông cân.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases}$$

$$\text{Mà: } 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Rightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10b^2 + 10c^2 - 5a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \text{tam giác } \triangle ABC \text{ vuông.}$$

Câu 33: Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi m_a , m_b , m_c là độ dài ba đường trung tuyến, G trọng tâm. Xét các khẳng định sau:

$$(I). m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (II). GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Trong các khẳng định đã cho có

- A. (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.
C. Cả hai cùng sai. D. Cả hai cùng đúng.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Câu 34: Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $R = 10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Áp dụng định lí sin, ta có } \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin \widehat{A}} = \frac{10}{2 \cdot \sin 30^\circ} = 10.$$

Câu 35: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$ và $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 3$. B. $R = 3\sqrt{3}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng định lí Cosin, ta có } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} \\ &= 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 27 \Leftrightarrow BC^2 = 27 \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra tam giác } ABC \text{ vuông tại } B, \text{ do đó bán kính } R = \frac{AC}{2} = 3.$$

Câu 36: Tam giác ABC có $BC = 21\text{cm}$, $CA = 17\text{cm}$, $AB = 10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{85}{2}\text{cm}$. B. $R = \frac{7}{4}\text{cm}$.
C. $R = \frac{85}{8}\text{cm}$. D. $R = \frac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $p = \frac{AB+BC+CA}{2} = 24$. Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = \sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)} = 84 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tìm là } S_{\Delta ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{21.17.10}{4.84} = \frac{85}{8} \text{ cm}.$$

Câu 37: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng:

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh a , gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } AM \perp BC \text{ suy ra } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AM.BC = \frac{1}{2}.\sqrt{AB^2 - BM^2}.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tính là } S_{\Delta ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}} = \frac{a^3}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 38: Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm và $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \sqrt{3}$ cm.

B. $R = 1,5$ cm.

C. $R = 2$ cm.

D. $R = 3,5$ cm.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC vuông tại A , có đường cao $AH \Rightarrow AB.AC = AH^2$ (*).

$$\text{Mặt khác } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}AC \text{ thế vào (*)}, \text{ ta được } \frac{3}{4}AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{5}.$$

$$\text{Suy ra } AB = \frac{3}{4}.\frac{8\sqrt{3}}{5} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tìm là } R = \frac{BC}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Câu 39: Cho tam giác ABC có $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{3}$ và $CA = 9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

A. $R = \frac{9}{6}$.

B. $R = 3$.

C. $R = 3\sqrt{3}$.

D. $R = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } D \text{ là trung điểm của } BC \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}.$$

Tam giác ABD có $AB = BD = DA = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{\sqrt{3}}{3} AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3$.

Câu 40: Tam giác nhọn ABC có $AC = b$, $BC = a$, BB' là đường cao kẻ từ B và $\widehat{CBB'} = \alpha$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC được tính theo a , b và α là:

- A. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.
 B. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.
 C. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \cos \alpha}$.
 D. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{2 \cos \alpha}$.

Lời giải

Chọn D

Xét tam giác $BB'C$ vuông tại B' , có $\sin \widehat{CBB'} = \frac{B'C}{BC} \Rightarrow B'C = a \cdot \sin \alpha$.

Mà $AB' + B'C = AC \Leftrightarrow AB' = b - a \cdot \sin \alpha$ và $BB'^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha$.

Tam giác ABB' vuông tại B' , có $AB = \sqrt{BB'^2 + AB'^2} = \sqrt{(b - a \cdot \sin \alpha)^2 + a^2 \cdot \cos^2 \alpha}$
 $= \sqrt{b^2 - 2ab \cdot \sin \alpha + a^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp cần tính là

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

Câu 40: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$.
 B. $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.
 C. $S_{\Delta ABC} = 9$.
 D. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 41: Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 8$.
 B. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$.
 C. $S_{\Delta ABC} = 4$.
 D. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4$.

Câu 42: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

- A. $S_{\Delta ABC} = 16$.
 B. $S_{\Delta ABC} = 48$.
 C. $S_{\Delta ABC} = 24$.
 D. $S_{\Delta ABC} = 84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Câu 43: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

- A. $h_a = 3\sqrt{3}$. B. $h_a = \sqrt{3}$. C. $h_a = 3$. D. $h_a = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos A = 27 \longrightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin \widehat{A} = \frac{1}{2}.3.6.\sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.BC.h_a \longrightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3$.

Câu 44: Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh A của tam giác.

- A. $h = 2\sqrt{3}$. B. $h = 4\sqrt{3}$. C. $h = 2$. D. $h = 4$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A .

Tam giác vuông AHC , có $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \longrightarrow AH = AC.\sin \widehat{ACH} = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 45: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

- A. $BB' = 8$. B. $BB' = \frac{84}{5}$.
C. $BB' = \frac{168}{17}$. D. $BB' = \frac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{21+17+10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = \frac{1}{2}.b.BB' \longleftrightarrow 84 = \frac{1}{2}.17.BB' \longrightarrow BB' = \frac{168}{17}$.

Câu 46: Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2 . Giá trị $\sin A$ bằng:

- A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin A = \frac{3}{8}$.
C. $\sin A = \frac{4}{5}$. D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}.$$

Câu 47: Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

- A.** $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2 . **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác ABD là $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}.AB.AD.\sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\sin 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$.

Câu 48: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC bằng:

- A.** 50 cm^2 . **B.** $50\sqrt{2} \text{ cm}^2$.
- C.** 75 cm^2 . **D.** $15\sqrt{105} \text{ cm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Vì F là trung điểm của $AC \Rightarrow FC = \frac{1}{2}AC = 15\text{ cm}$.

Đường thẳng BF cắt CE tại G suy ra G là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó $\frac{d(B;AC)}{d(G;AC)} = \frac{BF}{GF} = 3 \Rightarrow d(G;AC) = \frac{1}{3}d(B;AC) = \frac{AB}{3} = 10 \text{ cm}.$

Vậy diện tích tam giác GFC là: $S_{\Delta GFC} = \frac{1}{2} \cdot d(G; AC) \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75 \text{ cm}^2$.

Câu 49: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích bằng:

- A.** 13 cm^2
- B.** $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$
- C.** $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- D.** 15 cm^2 .

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a .

Theo định lí sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2.4 \Leftrightarrow a = 8. \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}.(4\sqrt{3})^2.\sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Câu 50: Tam giác ABC có $BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 2AB$ và độ dài đường cao $AH = 2$. Tính độ dài cạnh AB .

- A.** $AB = 2$. **B.** $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $AB = 2$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

D. $AB = 2$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3AB}{2}$.

Suy ra $S = \sqrt{\left(\frac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)}$.

Lại có $S = \frac{1}{2}BC.AH = 2\sqrt{3}$.

Từ đó ta có $2\sqrt{3} = \left(\frac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)$

$$\longleftrightarrow 12 = \frac{(9AB^2 - 12)(12 - AB^2)}{16} \longleftrightarrow \begin{cases} AB = 2 \\ AB = \frac{2\sqrt{21}}{3} \end{cases}$$

Câu 51: Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$.

B. $3S$.

C. $4S$.

D. $6S$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S = \frac{1}{2}.AC.BC.\sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2}.ab.\sin \widehat{ACB}$.

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.(3AC).(2BC).\sin \widehat{ACB} = 6.\frac{1}{2}.AC.BC.\sin \widehat{ACB} = 6S.$$

Câu 52: Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60° .

B. 90° .

C. 150° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AC.BC.\sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2}.ab.\sin \widehat{ACB}$.

Vì a, b không đổi và $\sin \widehat{ACB} \leq 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\Delta ABC} \leq \frac{ab}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S = \frac{ab}{2}$.

Câu 53: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM , CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$.

B. $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$.

C. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$.

D. $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM \perp CN \longrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC , ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 5a^2 - 2bc \cos A \longrightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A}$.

Khi đó $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{\cos A} \cdot \sin A = a^2 \tan A = 3\sqrt{3}$.

Câu 54: Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$.

B. $r = 2$.

C. $r = \sqrt{3}$.

D. $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số cosin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 49 \longrightarrow BC = 7.$$

$$\text{Diện tích } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}.$$

Câu 55: Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 16$.

B. $r = 7$.

C. $r = \frac{7}{2}$.

D. $r = 8$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24.$$

$$\text{Suy ra } S = \sqrt{24(24 - 21)(24 - 17)(24 - 10)} = 84.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}.$$

Câu 56: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$.

C. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Diện tích tam giác đều cạnh } a \text{ bằng: } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Lại có } S = pr \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 57: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$ cm.

B. $r = \sqrt{2}$ cm.

C. $r = 2$ cm.

D. $r = 3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2}AB.AC = 24$. Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = 2$ cm.

Câu 58: Tam giác ABC vuông cân tại A , có $AB = a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = \frac{a}{2}$.

B. $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

C. $r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

D. $r = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC = AB = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

Suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.

Câu 59: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng:

A. $1 + \sqrt{2}$.

B. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $AC = AB = a \longrightarrow BC = a\sqrt{2}$. Suy ra $R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right)$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$. Vậy $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$.