

MỤC LỤC

PHẦN A. CÂU HỎI	1
Dạng 1. Bất phương trình logarit	1
Dạng 1.1 Bất phương trình cơ bản	1
Dạng 1.1.1 Không cần biến đổi	1
Dạng 1.1.2 Cần biến đổi	4
Dạng 1.2 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....	6
Dạng 2. Bất phương trình mũ	7
Dạng 2.1 Bất phương trình cơ bản	7
Dạng 2.1.1 Không cần biến đổi	7
Dạng 2.1.2 Cần biến đổi	10
Dạng 2.3 Giải và biện luận một số bất phương trình khó và khác	11
Dạng 2.3.1 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....	11
Dạng 2.3.2 Giải bất phương trình khi biết đồ thị của $f'(x)$	11
PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO	14
Dạng 1. Bất phương trình logarit	14
Dạng 1.1 Bất phương trình cơ bản	14
Dạng 1.1.1 Không cần biến đổi	14
Dạng 1.1.2 Cần biến đổi	20
Dạng 1.2 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....	24
Dạng 2. Bất phương trình mũ	34
Dạng 2.1 Bất phương trình cơ bản	34
Dạng 2.1.1 Không cần biến đổi	34
Dạng 2.1.2 Cần biến đổi	39
Dạng 2.3 Giải và biện luận một số bất phương trình khó và khác	41
Dạng 2.3.1 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....	41
Dạng 2.3.2 Giải bất phương trình khi biết đồ thị của $f'(x)$	46

PHẦN A. CÂU HỎI

Dạng 1. Bất phương trình logarit

Dạng 1.1 Bất phương trình cơ bản

Dạng 1.1.1 Không cần biến đổi

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

- A. $x > 3$ B. $\frac{1}{3} < x < 3$ C. $x < 3$ D. $x > \frac{10}{3}$

Câu 2. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

- A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $S = (-1; 2)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Câu 3. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Tất cả các giá trị x thoả mãn bất phương trình $\log_2(3x+1) > 3$ là

- A. $x > \frac{7}{3}$. B. $-\frac{1}{3} < x < 7$. C. $x > -\frac{1}{3}$. D. $x > \frac{8}{3}$.

Câu 4. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 < 0$.

- A. $S = (-1; 1)$. B. $S = (-1; 0)$. C. $S = (-1; 1) \setminus \{0\}$. D. $S = (0; 1)$.

Câu 5. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (-1; 2)$. C. $S = (-\infty; 2)$. D. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 6. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+3) \geq 0$ là

- A. $S = (-\infty; -1]$. B. $S = [-1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; -1)$. D. $S = (-\infty; 0]$.

Câu 7. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(5-2x) > \log_{\frac{3}{10}} 9$ là

- A. $\left(0; \frac{5}{2}\right)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$. D. $(-2; +\infty)$.

Câu 8. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1) > 1$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 9. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

- A. $(-1; 6)$ B. $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(-\infty; 6)$

Câu 10. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$

- A. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$

- Câu 11. (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 1$ là
- A. $(0; 1)$. B. $\left(\frac{1}{8}; 3 \right)$. C. $\left(\frac{1}{8}; 1 \right)$. D. $\left(\frac{1}{8}; +\infty \right)$.
- Câu 12. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8} (15x+2) > \log_{0,8} (13x+8)$ là
- A. Vô số. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 13. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VINH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01)** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\log_2 (4-x) - 1}$ là
- A. $(-\infty; 4)$. B. $[2; 4)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; 2)$.
- Câu 14. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (3x+1) < 2$ là
- A. $\left[-\frac{1}{3}; 1 \right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}; 1 \right)$ D. $(-\infty; 1)$
- Câu 15. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x^2 - 1) \geq 3$ là?
- A. $[-2; 2]$. B. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $[-3; 3]$.
- Câu 16. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8} (2x-1) < 0$ là
- A. $S = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty \right)$. D. $S = (-\infty; 1)$.
- Câu 17. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5} (5x+14) \leq \log_{0,5} (x^2 + 6x + 8)$ là
- A. $(-2; 2]$. B. $(-\infty; 2]$. C. $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0 \right]$. D. $[-3; 2]$.
- Câu 18. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Bất phương trình $\log_2 (3x-2) > \log_2 (6-5x)$ có tập nghiệm là
- A. $(0; +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{2}; 3 \right)$. C. $(-3; 1)$ D. $\left(1; \frac{6}{5} \right)$
- Câu 19. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỔ NĂM 2018-2019)** Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x+1) < 3$ là:
- A. $S = (-1; 8)$. B. $S = (-\infty; 7)$. C. $S = (-\infty; 8)$. D. $S = (-1; 7)$.
- Câu 20. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln (4x-4)$.
- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Câu 21. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 [x^2 - 1] \geq 3$ là:

- A. $[-2; 2]$. B. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $[-3; 3]$.

Câu 22. (ĐỀ THI THỬ VTEĐ 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (-\infty; 2)$ C. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ D. $S = (-1; 2)$

Câu 23. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{\log(x^2 - 9)}{\log(3 - x)} \leq 1$ là:

- A. $(-4; -3)$. B. $[-4; -3)$. C. $(3; 4]$. D. $\emptyset$.

Câu 24. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2(x^2 + mx + m + 2) \geq \log_2(x^2 + 2)$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 25. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Giải bất phương trình $\log_2(3x - 2) > \log_2(6 - 5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = \frac{26}{5}$. B. $S = \frac{11}{5}$. C. $S = \frac{28}{15}$. D. $S = \frac{8}{3}$.

Câu 26. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Bất phương trình $\log_3(x^2 - 2x) > 1$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. B. $S = (-1; 3)$.
C. $S = (3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1)$.

Câu 27. (TT THANH TƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(5x - 2x^2 + 7) > 2$ là

- A. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. D. $\left(-1; \frac{7}{2}\right)$.

Dạng 1.1.2 Cần biến đổi

Câu 28. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

- A. $[3; 5]$ B. $(1; 3]$ C. $[1; 3]$ D. $(1; 5)$

Câu 29. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$.

A. $S = \left[-\frac{3}{8}; 3\right]$. B. $S = \left(\frac{3}{4}; 3\right]$. C. $S = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. D. $S = [3; +\infty)$.

Câu 30. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9$ chứa tập hợp nào sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 6\right)$. B. $(0; 3)$. C. $(1; 5)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 31. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là:

A. $(-\infty; 4]$. B. $(1; 4]$. C. $(1; 4)$. D. $\left[4; \frac{11}{2}\right)$.

Câu 32. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là

A. $(-\infty; 4]$ B. $(1; 4]$ C. $(1; 4)$ D. $\left[4; \frac{11}{2}\right)$

Câu 33. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là:

A. $S = (-\infty; 4]$. B. $S = (1; 4)$. C. $S = (1; 4]$. D. $S = \left(3; \frac{11}{2}\right)$.

Câu 34. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2 \sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2)$ bằng

A. 12 B. 9 C. 5 D. 3

Câu 35. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2 + 3) > \log(x^2 + mx + 1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-2 < m < 2$. B. $m < 2\sqrt{2}$. C. $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. D. $m < 2$.

Câu 36. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ B. $S = [2; 16]$
C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$ D. $(-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$

Câu 37. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

A. $m < 1$ B. $m \leq 1$ C. $m < 0$ D. $m < \frac{2}{3}$

Câu 38. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \log_{(5^x+2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$.

A. $P = 7$. B. $P = 11$. C. $P = 18$. D. $P = 16$.

Câu 39. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x - 6 \leq 0$ là

A. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$. B. $S = [64; +\infty)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$. D. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$.

Câu 40. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là

A. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$. B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$.
C. $S = [64; +\infty)$. D. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$.

Dạng 1.2 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....

Câu 41. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Kí hiệu $\max\{a; b\}$ là số lớn nhất trong hai số a, b . Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1$.

A. $S = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$. B. $S = (0; 2)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Câu 42. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hai số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ là.

A. 12. B. 14. C. 16. D. 8.

Câu 43. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $2 \log_a x \leq x - 1$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(7; 8)$ B. $(3; 5]$ C. $(2; 3)$ D. $(8; +\infty)$

Câu 44. (THPT CẨM GIÀNG 2 NĂM 2018-2019) Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3 \log_3(1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2 \log_2 \sqrt{a}$. Giá trị của $\log_2(2017a)$ xấp xỉ bằng:

A. 19. B. 26. C. 25. D. 23.

Câu 45. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ là

A. $\frac{9}{4}$ B. 9 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{9}{8}$

Câu 46. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}(\log_2(3^x + 1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$

A. $m \geq 1$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $m < 2$.

Câu 47. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln(7x^2 + 7) \geq \ln(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính S .

A. $S = 14$. B. $S = 0$. C. $S = 12$. D. $S = 35$.

Câu 48. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết $[a; b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4 (x^2 - 2x + m)} \leq 5$ thỏa mãn với mọi x thuộc $[0; 2]$. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 4$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = 0$. D. $a + b = 6$.

Câu 49. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\log_2 (7x^2 + 7) \geq \log_2 (mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x .

- A. 5 B. 4 C. 0 D. 3

Câu 50. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho $a > 1$. Biết khi $a = a_0$ thì bất phương trình $x^a \leq a^x$ đúng với mọi $x \in (1; +\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 < a_0 < 2$ B. $e < a_0 < e^2$ C. $2 < a_0 < 3$ D. $e^2 < a_0 < e^3$

Câu 51. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình $(x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm.

- A. $m \geq 4$. B. $2\sqrt{3} \leq m \leq 12\log_3 5$.
C. $m > 2\sqrt{3}$. D. $m \geq 2\sqrt{3}$.

Câu 52. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho các bất phương trình $\log_5 (-x^2 + 4x + m) - \log_5 (x^2 + 1) < 1$ (1) và $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-1} \geq 0$ (2). Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1) là

- A. 13 B. 21 C. 28 D. 11

Câu 53. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(1; 20)$ để $\forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình $\log_m x > \log_x m$?

- A. 18. B. 16. C. 17. D. 0.

Câu 54. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2} (4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

- A. $S = \{-1; 1\}$ B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$
C. $S = \{-5; 5\}$ D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$

Câu 55. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (x\sqrt{x^2+2} + 4-x^2) + 2x + \sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$.

Khi đó $a.b$ bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{16}{15}$. D. $\frac{5}{12}$.

Dạng 2. Bất phương trình mũ

Dạng 2.1 Bất phương trình cơ bản

Dạng 2.1.1 Không cần biến đổi

Câu 56. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là:

A. $(-\infty; 6)$

B. $(0; 64)$

C. $(6; +\infty)$

D. $(0; 6)$

Câu 57. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

A. $(3; +\infty)$

B. $(-1; 3)$

C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

D. $(-\infty; -1)$

Câu 58. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$

B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$

C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$

D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$

Câu 59. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

A. $S = (-\infty; -2)$.

B. $S = (1; +\infty)$.

C. $S = (-1; +\infty)$.

D. $S = (-2; +\infty)$.

Câu 60. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = e^{x^2+2x-3} - 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là:

A. $(-\infty; -1]$.

B. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

C. $[-3; 1]$.

D. $[-1; +\infty)$.

Câu 61. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ trên tập số thực là

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(-2; +\infty)$.

Câu 62. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1} \leq 8^{x-2}$ là

A. $[8; +\infty)$.

B. $\emptyset$.

C. $(0; 8)$.

D. $(-\infty; 8]$.

Câu 63. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < 9$ là

A. $S = (-\infty; 2]$.

B. $S = (2; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2)$.

D. $S = \{2\}$.

Câu 64. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x} \leq 8$ là

A. $(-\infty; -3]$.

B. $[-3; 1]$.

C. $(-3; 1)$.

D. $(-3; 1]$.

Câu 65. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tập nghiệm S của bất phương trình

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (-\infty; 2)$

B. $S = (-\infty; 1)$

C. $S = (1; +\infty)$

D. $S = (2; +\infty)$

Câu 66. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

A. $S = (-\infty; -2)$

B. $S = (1; +\infty)$

C. $S = (-2; +\infty)$

D. $S = (-1; +\infty)$

Câu 67. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(4; +\infty)$.

C. $(-1; 4)$.

D. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 68. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019) Tập nghiệm bất phương trình: $2^x > 8$ là

- A. $(-\infty; 3)$. B. $[3; +\infty)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; 3]$.

Câu 69. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}.$$

- A. $S = [1; 2]$ B. $S = (-\infty; 1)$ C. $S = (1; 2)$ D. $S = (2; +\infty)$

Câu 70. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(3; +\infty)$ C. $(-1; 3)$ D. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Câu 71. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Cho $f(x) = x.e^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ B. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ D. $(0; 1)$

Câu 72. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02) Số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \text{ là}$$

- A. 7. B. 6. C. vô số. D. 8.

Câu 73. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1) Tập nghiệm của bất phương trình

$$2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6} \text{ là}$$

- A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.

Câu 74. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$

có tập nghiệm là

- A. $[3; +\infty)$. B. $(-\infty; -1]$. C. $[-1; 3]$. D. $(-1; 3)$.

Câu 75. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $4^{x^2-2x} < 64$ là

- A. 2. B. -1. C. 3. D. 0.

Câu 76. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256}$ là

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. C. $\mathbb{R}$. D. $(-2; 2)$.

Câu 77. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8$ là

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 3)$.
C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 78. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{e}{\pi}\right)^x > 1$

là

A. $\mathbb{R}$

B. $(-\infty; 0)$

C. $(0; +\infty)$

D. $[0; +\infty)$

Câu 79. (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA LẦN 2 NĂM 2018-2019) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \leq 16$ là số nào sau đây ?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Câu 80. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với a là tham số, $a \neq 0$) là:

A. $(-\infty; 0)$

B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

C. $(0; +\infty)$

D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Câu 81. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < e^x$ là:

A. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $S = (0; +\infty)$.

C. $S = \mathbb{R}$.

D. $S = (-\infty; 0)$.

Dạng 2.1.2 Cần biến đổi

Câu 82. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $(17-12\sqrt{2})^x \geq (3+\sqrt{8})^{x^2}$ là:

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 83. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$.

A. $(2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-\infty; 2]$.

D. $[2; +\infty)$.

Câu 84. (CHUYÊN HƯNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}} > 12$ có tập nghiệm $S = (a; b)$. Giá trị của biểu thức $P = 3a + 10b$ là

A. 5.

B. -3.

C. -4.

D. 2.

Câu 85. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$.

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 86. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là?

A. $S = (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Câu 87. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $(2-\sqrt{3})^{x^2+4x-14} \geq 7+4\sqrt{3}$ là:

A. $[-6; 2]$.

B. $(-\infty - 6] \cup [2; +\infty)$.

C. $(-6; 2)$.

D. $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$.

Câu 88. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2 \cdot 3^x$

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0

Dạng 2.3 Giải và biện luận một số bất phương trình khó và khác**Dạng 2.3.1 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....**

Câu 89. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$:

$$y = \sqrt{4^x - (m+1) \cdot 2^x - m}$$

A. Đáp án khác.

B. $m > -1$.

C. $m < 0$.

D. $-3 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 90. Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $(-1; 16]$.

Câu 91. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 0]$.

C. $m \in (0; +\infty)$.

D. $m \in (0; 1)$.

Câu 92. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $(-1; 16]$.

Câu 93. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9} + (x^2 - 9) \cdot 5^{x+1} < 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$

A. 6.

B. 3.

C. 8.

D. 4.

Câu 94. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Bất phương trình

$$\frac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}} - \sqrt{2-3^{2x}}} + \frac{3^{4x} + \sqrt{4-3^{4x}} - 7}{3^{2x}} \geq \frac{3^{2x} - 2}{\sqrt{4-3^{4x}} - 2 + 3^{2x}}$$
 có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Câu 95. (THPT HÀM RỒNG THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 1) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(6 + 2\sqrt{7})^x + (2 - m)(3 - \sqrt{7})^x - (m + 1)2^x \geq 0$$

A. 10.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Câu 96. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\ln 120$.

B. $\ln 10$.

C. $\ln 30$.

D. $\ln 14$.

Câu 97. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ của bất phương trình: $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0$ là

A. 38.

B. 36.

C. 37.

D. 19.

Câu 98. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4} + (x^2 - 4) \cdot 2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

A. 5.

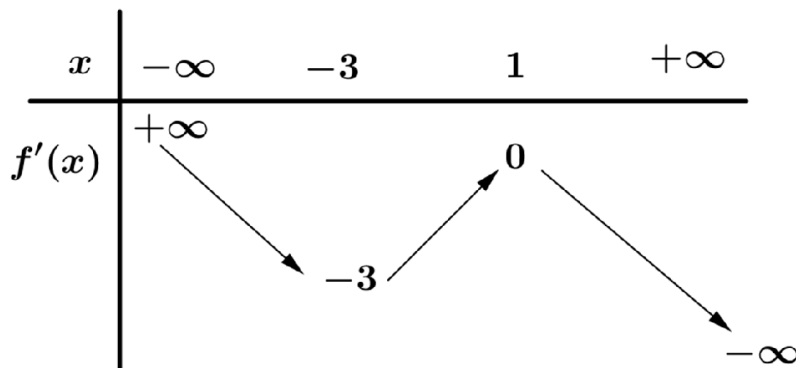
B. 4.

C. -5.

D. -1.

Dạng 2.3.2 Giải bất phương trình khi biết đồ thị của $f'(x)$

Câu 99. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi.

- A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$ B. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$ C. $m > f(1) - e$ D. $m \geq f(1) - e$

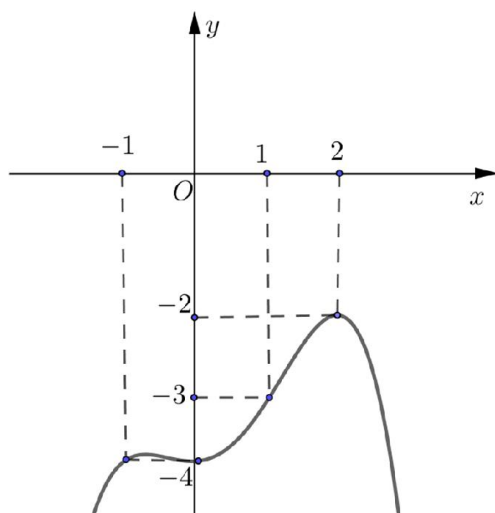
Câu 100. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0) - 1$. B. $m > f(-1) - e$. C. $m > f(0) - 1$. D. $m \geq f(-1) - e$.

Câu 101. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ

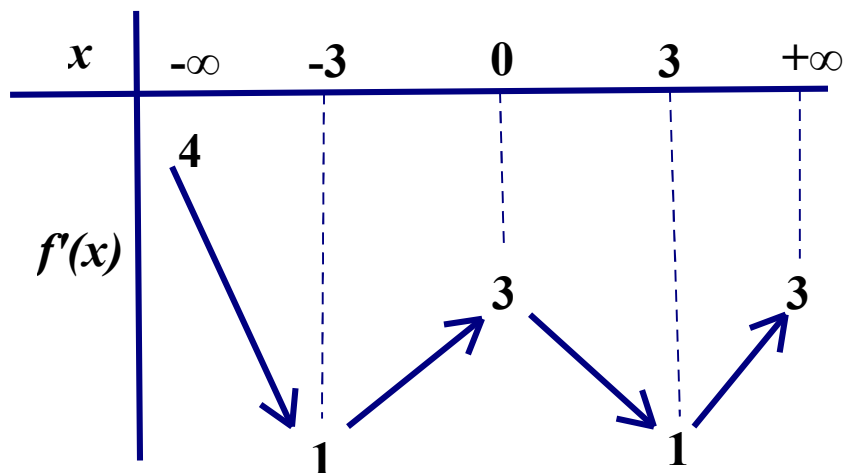


Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R} \text{ là}$$

- A. 10 B. 4 C. 5 D. 9

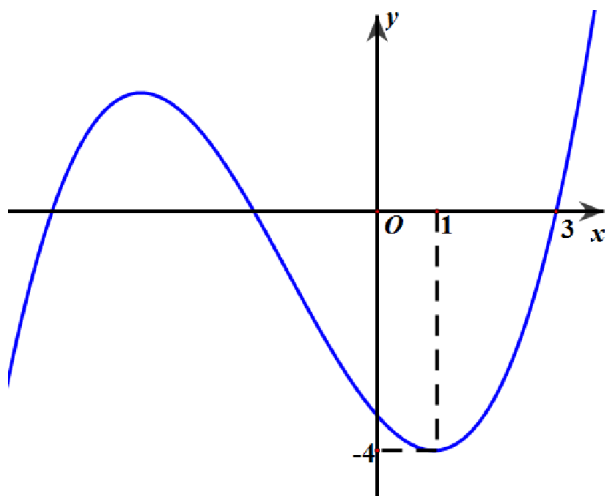
Câu 102. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < 3e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

- A. $m \geq f(-2) - 3$ B. $m > f(-2) - 3e^4$ C. $m \geq f(2) - 3e^4$ D. $m > f(-2) - 3$

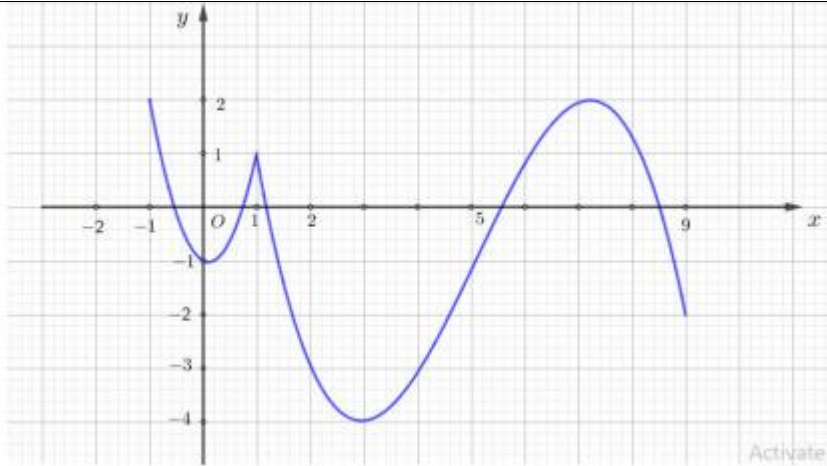
Câu 103. (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m > -\frac{4}{1011}$ B. $m \geq -\frac{4}{3e+2019}$ C. $m > -\frac{2}{1011}$ D. $m > \frac{f(e)}{3e+2019}$

Câu 104. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1; 9]$?

A. 32. B. 31. C. 5. D. 6.

PHẦN B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

Dạng 1. Bất phương trình logarit

Dạng 1.1 Bất phương trình cơ bản

Dạng 1.1.1 Không cần biến đổi

Câu 1. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Giải bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$.

- A. $x > 3$ B. $\frac{1}{3} < x < 3$ C. $x < 3$ D. $x > \frac{10}{3}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đkxđ: } 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow 3x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3 \text{ (t/m đk).}$$

Vậy bpt có nghiệm $x > 3$.

Câu 2. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

- A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. C. $S = (-1; 2)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow x+1 > 2x-1 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Kết hợp } (*) \Rightarrow S = \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

Câu 3. (ĐỀ 15 LOVE BOOK NĂM 2018-2019) Tất cả các giá trị x thỏa mãn bất phương trình

$$\log_2(3x+1) > 3 \text{ là}$$

A. $x > \frac{7}{3}$.

B. $-\frac{1}{3} < x < 7$.

C. $x > -\frac{1}{3}$.

D. $x > \frac{8}{3}$.

Lời giải

Điều kiện $3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương

$$\log_2(3x+1) > 3 \Leftrightarrow 3x+1 > 2^3 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x > \frac{7}{3}$.

Câu 4. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\ln x^2 < 0.$$

A. $S = (-1; 1)$.

B. $S = (-1; 0)$.

C. $S = (-1; 1) \setminus \{0\}$.

D. $S = (0; 1)$.

Lời giải

Ta có: $\ln x^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$. Vậy $S = (-1; 1) \setminus \{0\}$.

Câu 5. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1).$$

A. $S = (2; +\infty)$.

B. $S = (-1; 2)$.

C. $S = (-\infty; 2)$.

D. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$.

Câu 6. (THPT - YÊN ĐỊNH THANH HÓA 2018 2019- LẦN 2) Tập nghiệm S của bất phương trình

$$\log_2(2x+3) \geq 0 \text{ là}$$

A. $S = (-\infty; -1]$.

B. $S = [-1; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; -1)$.

D. $S = (-\infty; 0]$.

Lời giải

Ta có $\log_2(2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$

Vậy tập nghiệm bất phương trình $S = [-1; +\infty)$

Câu 7. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{0.3}(5-2x) > \log_{\frac{3}{10}} 9 \text{ là}$$

A. $\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $\left(-2; \frac{5}{2}\right)$.

D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

$\log_{0.3}(5-2x) > \log_{\frac{3}{10}} 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x > 0 \\ 5-2x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-2; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 8. (CHUYÊN ĐHSPT HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{0,5}(x-1) > 1 \text{ là}$$

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow 0 < x-1 < 0,5 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là: } S = \left(1; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 9. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5) \text{ là}$$

- A. $(-1; 6)$ B. $\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(-\infty; 6)$

Lời giải

$$\text{Do } \frac{\pi}{4} < 1 \text{ nên } \log_{\frac{\pi}{4}}(x+1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6.$$

Câu 10. (THPT AN LÃO HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tập nghiệm S của bất phương

$$\text{trình } \log_3(2x+3) < \log_3(1-x)$$

- A. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ D. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < 1.$$

$$\log_3(2x+3) < \log_3(1-x) \Leftrightarrow 2x+3 < 1-x \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}.$$

$$\text{So với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right).$$

Câu 11. (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right) < 1$ là

- A. $(0; 1)$. B. $\left(\frac{1}{8}; 3\right)$. C. $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$. D. $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}}x < 3^1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 > x > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 1 > x > \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left(\frac{1}{8}; 1\right).$$

Câu 12. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2) > \log_{0,8}(13x+8)$ là

- A. Vô số. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải

Điều kiện $x > -\frac{2}{15}$.

Khi đó, $\log_{0,8}(15x+2) > \log_{0,8}(13x+8) \Leftrightarrow 15x+2 < 13x+8 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $T = \left(-\frac{2}{15}; 3\right) \Rightarrow x \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 13. (SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO VĨNH PHÚC NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Tập xác định của hàm số

$$y = \sqrt{\log_2(4-x) - 1}$$

- A. $(-\infty; 4)$. B. $[2; 4)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \log_2(4-x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(4-x) \geq 1 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 2 \\ 4-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 2]$.

Câu 14. (SỞ GD&ĐT BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_2(3x+1) < 2$$

- A. $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$ B. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ C. $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$ D. $(-\infty; 1)$

Lời giải

Chọn C

$$\text{ĐK: } x > -\frac{1}{3}$$

$$\log_2(3x+1) < 2 \Leftrightarrow 3x+1 < 4 \Leftrightarrow x < 1$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{3} < x < 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 15. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2 - 1) \geq 3$ là?

- A. $[-2; 2]$. B. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $[-3; 3]$.

Lời giải

$$\log_2(x^2 - 1) \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Câu 16. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm S của bất phương trình

$$\log_{0,8}(2x-1) < 0$$

- A. $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $S = (-\infty; 1)$.

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } \log_{0,8}(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 2x-1 > (0,8)^0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1) < 0$ là $S = (1; +\infty)$.

Câu 17. (SỞ GD&ĐT BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+14) \leq \log_{0,5}(x^2+6x+8)$ là

- A. $(-2; 2]$. B. $(-\infty; 2]$. C. $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$. D. $[-3; 2]$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5x+14 > 0 \\ x^2+6x+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -2 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \log_{0,5}(5x+14) \leq \log_{0,5}(x^2+6x+8) \Leftrightarrow 5x+14 \geq x^2+6x+8 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $-2 < x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2; 2]$.

Câu 18. (CHUYÊN TRẦN PHÚ HẢI PHÒNG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bất phương trình $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

- A. $(0; +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. C. $(-3; 1)$ D. $\left(1; \frac{6}{5}\right)$

Lời giải

Vì $2 > 1$ nên

$$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 6-5x \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{6}{5}.$$

Câu 19. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TÔ NĂM 2018-2019) Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1) < 3$ là:

- A. $S = (-1; 8)$. B. $S = (-\infty; 7)$. C. $S = (-\infty; 8)$. D. $S = (-1; 7)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_2(x+1) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 < 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 7)$.

Câu 20. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2 > \ln(4x-4)$.

- A. $S = (2; +\infty)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Lời giải

$$\ln x^2 > \ln(4x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 4x-4 \\ 4x-4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Câu 21. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_2 [x^2 - 1] \geq 3 \text{ là:}$$

- A. $[-2; 2]$. B. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $[-3; 3]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_2 [x^2 - 1] \geq 3 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$$

Câu 22. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} (2x-1)$$

- A. $S = (2; +\infty)$ B. $S = (-\infty; 2)$ C. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ D. $S = (-1; 2)$

Lời giải

Chọn C:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} (2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-1 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases}$$

Câu 23. (CHUYÊN KHTN LẦN 2 NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{\log(x^2 - 9)}{\log(3-x)} \leq 1$ là:

- A. $(-4; -3)$. B. $[-4; -3)$. C. $(3; 4]$. D. $\emptyset$.

Lời giải

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \vee x < -3 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3.$$

Với $x < -3$ suy ra $\log(3-x) > 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log(x^2 - 9) \leq \log(3-x) \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 3]$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $[-4; -3)$

Câu 24. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2 (x^2 + mx + m + 2) \geq \log_2 (x^2 + 2)$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \log_2 (x^2 + mx + m + 2) \geq \log_2 (x^2 + 2) \text{ nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx + m + 2 \geq x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow mx + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 0.$$

Suy ra có 1 giá trị m thỏa mãn.

Câu 25. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Giải bất phương trình $\log_2 (3x-2) > \log_2 (6-5x)$ được tập nghiệm là $(a; b)$. Hãy tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = \frac{26}{5}$. B. $S = \frac{11}{5}$. C. $S = \frac{28}{15}$. D. $S = \frac{8}{3}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{6}{5}.$$

Ta có

$$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow 3x-2 > 6-5x \Leftrightarrow 8x > 8 \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $1 < x < \frac{6}{5}$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1; \frac{6}{5}\right)$.

$$\text{Từ đó, } S = a + b = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}.$$

Lời giải ngắn gọn như sau:

$$\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 6-5x \\ 6-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{6}{5}.$$

Câu 26. (SỞ GD&ĐT NINH BÌNH LẦN 01 NĂM 2018-2019) Bất phương trình $\log_3(x^2 - 2x) > 1$ có tập nghiệm là

A. $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

B. $S = (-1; 3)$.

C. $S = (3; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1)$.

Lời giải

$$\log_3(x^2 - 2x) > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 27. (TT THANH TRƯỜNG NGHỆ AN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(5x - 2x^2 + 7) > 2$ là

A. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

D. $\left(-1; \frac{7}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_3(5x - 2x^2 + 7) > 2 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x + 7 > 9 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2.$$

Dạng 1.1.2 Cần biến đổi

Câu 28. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1$ là

A. $[3; 5]$

B. $(1; 3]$

C. $[1; 3]$

D. $(1; 5)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $1 < x < 5$.

$$\text{Ta có } 2\log_2(x-1) \leq \log_2(5-x) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \leq \log_2[2(5-x)] \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 10-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3. \text{ Vậy tập nghiệm của bpt là } S = (-3; 3].$$

Câu 29. (THPT GIA LỘC HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27)$.

A. $S = \left[-\frac{3}{8}; 3\right]$. B. $S = \left(\frac{3}{4}; 3\right]$. C. $S = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$. D. $S = [3; +\infty)$.

Lời giải

$$2\log_3(4x-3) \leq \log_3(18x+27) (*)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 4x-3 > 0 \\ 18x+27 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}.$$

$$\text{Với điều kiện trên, } (*) \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \leq \log_3(18x+27)$$

$$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \leq 18x+27$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta được } S = \left(\frac{3}{4}; 3\right].$$

Câu 30. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9 \text{ chứa tập hợp nào sau đây?}$$

A. $\left(\frac{3}{2}; 6\right)$. B. $(0; 3)$. C. $(1; 5)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải

+ Điều kiện: $x > 0$.

+ Ta có:

$$\log_2^2(2x) + \log_2 \frac{x}{4} < 9 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 + \log_2 x - 2 < 9 \Leftrightarrow \log_2^2 x + 3\log_2 x - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^5} < x < 4$$

$$\text{Vậy } x \in \left(\frac{1}{2^5}; 4\right) \text{ chứa tập } \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

Câu 31. (THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \text{ là:}$$

A. $(-\infty; 4]$. B. $(1; 4]$. C. $(1; 4)$. D. $\left[4; \frac{11}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x-1 > 0 \\ 11-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(1; \frac{11}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3 \frac{11-2x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11-2x}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{11}{2}\right]$$

Kết luận: $x \in \left(1; \frac{11}{2}\right)$. Vì $x \in \left[4; \frac{11}{2}\right) \subset \left(1; \frac{11}{2}\right)$. Ta chọn đáp án D

Câu 32. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là

- A. $(-\infty; 4]$ B. $(1; 4]$ C. $(1; 4)$ D. $\left[4; \frac{11}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $1 < x < \frac{11}{2}$.

Khi đó ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x) \geq \log_3(x-1) \Leftrightarrow 11-2x \geq x-1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 4].$$

Câu 33. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0$ là:

- A. $S = (-\infty; 4]$. B. $S = (1; 4)$. C. $S = (1; 4]$. D. $S = \left(3; \frac{11}{2}\right)$.

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(11-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \log_3(11-2x) - \log_3(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(11-2x) \geq \log_3(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 11-2x \geq x-1 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 4.$$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; 4]$.

Câu 34. (KSCL THPT NGUYỄN KHUYẾN LẦN 05 NĂM 2018-2019) Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2 \sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2)$ bằng

- A. 12 B. 9 C. 5 D. 3

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

$$2\log_2 \sqrt{x+1} \leq 2 - \log_2(x-2) \Leftrightarrow \log_2(x+1) \leq \log_2 \frac{4}{(x-2)} \Leftrightarrow x+1 \leq \frac{4}{(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2 - 4}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; 3]$$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là: $x \in (2; 3]$.

Nghiệm nguyên là: $x = 3$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên là 3

Câu 35. (CHUYÊN BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $\log(2x^2 + 3) > \log(x^2 + mx + 1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $-2 < m < 2$. B. $m < 2\sqrt{2}$. C. $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. D. $m < 2$.

Lời giải

Ta có $\log(2x^2 + 3) > \log(x^2 + mx + 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 1 > 0 \\ 2x^2 + 3 > x^2 + mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + 1 > 0 \\ x^2 - mx + 2 > 0 \end{cases} (*)$$

Để bất phương trình $\log(2x^2 + 3) > \log(x^2 + mx + 1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì hệ (*) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4 < 0 \\ \Delta_2 = m^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 36. (MÃ ĐỀ 123 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

- A. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ B. $S = [2; 16]$
C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$ D. $(-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x > 0$

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 4 \\ \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

Câu 37. (MĐ 105 BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- A. $m < 1$ B. $m \leq 1$ C. $m < 0$ D. $m < \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \log_2 x$ ($x > 0$), ta có bất phương trình: $t^2 - 2t + 3m - 2 < 0$.

Để BPT luôn có nghiệm thực thì $\Delta' = 3 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Câu 38. (THPT ĐOÀN THƯỢNG - HẢI DƯƠNG - 2018 2019) Biết rằng bất phương trình $\log_2(5^x + 2) + 2 \cdot \log_{(5^x + 2)} 2 > 3$ có tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$, với a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a \neq 1$. Tính $P = 2a + 3b$.

- A. $P = 7$. B. $P = 11$. C. $P = 18$. D. $P = 16$.

Lời giải

Đặt $\log_2(5^x + 2) = t$. Do $5^x + 2 > 2$ với mọi x nên $\log_2(5^x + 2) > \log_2 2 = 1$ hay $t > 1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t + \frac{2}{t} > 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0$ (do $t > 1$) $\Leftrightarrow \begin{cases} t < 1 \\ t > 2 \end{cases}$.

Đối chiếu với $t > 1$ ta lấy $t > 2$.

Khi đó $\log_2(5^x + 2) > 2 \Leftrightarrow 5^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S = (\log_5 2; +\infty)$, ta có $a = 5, b = 2 \Rightarrow 2a + 3b = 16$.

Câu 39. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là

A. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$. B. $S = [64; +\infty)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$. D. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log_2 x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 2^{-1} \leq x \leq 2^6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$$

Vậy tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$.

Câu 40. (HỌC MÃI NĂM 2018-2019-LẦN 02) Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$ là

A. $S = \left[\frac{1}{2}; 64\right]$. B. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right]$.
C. $S = [64; +\infty)$. D. $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [64; +\infty)$.

Lời giải

$$\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0 \quad (1)$$

ĐK: $x > 0$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$ (2)

$$(1) \text{ thành } t^2 - 5t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 6 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -1 \leq \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$$

$$\text{So với } (*): (1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$$

$$\text{Vậy } S = \left[\frac{1}{2}; 64\right].$$

Dạng 1.2 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....

Câu 41. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019) Kí hiệu $\max\{a; b\}$ là số lớn nhất trong

hai số a, b . Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x\right\} < 1$.

A. $S = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$. B. $S = (0; 2)$. C. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$$y = \log_2 x - \log_{\frac{1}{3}} x = \log_2 x + \log_3 x$$

$$y' = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x \ln 3} > 0, \forall x > 0 \text{ nên phương trình } y = 0 \text{ có nghiệm duy nhất}$$

Mà phương trình $y = 0$ có nghiệm $x = 1$ do đó

$$\text{TH1: } x < 1: \log_2 x < \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$\text{Ta có } \max \left\{ \log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x \right\} < 1. \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{3} < x < 1$$

$$\text{TH2: } x \geq 1: \log_2 x \geq \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$\text{Ta có } \max \left\{ \log_2 x; \log_{\frac{1}{3}} x \right\} < 1. \Leftrightarrow \log_2 x < 1 \Leftrightarrow x < 2$$

$$\text{Do đó } 1 \leq x < 2$$

$$\text{Vậy } S = \left(\frac{1}{3}; 2 \right).$$

$$S = \left(\frac{1}{3}; 2 \right).$$

Câu 42. (THPT QUỲNH LƯU 3 NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho hai số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ là.

A. 12.

B. 14.

C. 16.

D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_2(a+1) + \log_2(b+1) \geq 6 \Leftrightarrow \log_2[(a+1)(b+1)] \geq 6 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) \geq 64.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a+1$ và $b+1$, ta được

$$(a+1) + (b+1) \geq 2\sqrt{(a+1)(b+1)} \geq 2\sqrt{64} = 16 \Leftrightarrow a+b+2 \geq 16 \Leftrightarrow a+b \geq 14$$

Dấu "=" xảy ra khi $a+1 = b+1 \Leftrightarrow a = b$.

Vậy $\min(a+b) = 14$ khi $a = b = 7$.

Câu 43. (THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho a là số thực dương, $a \neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x \leq x-1$ nghiệm đúng với mọi $x > 0$. Số a thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(7; 8)$

B. $(3; 5]$

C. $(2; 3)$

D. $(8; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: với $x = 1$ thì $2\log_a 1 = 0 = 1 - 1$

Ta sẽ tìm a để đường thẳng $y = x - 1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2\log_a x$ tại điểm $x = 1$

$$\text{Có } y' = \frac{2}{x \ln a} \Rightarrow y'(1) = \frac{2}{\ln a}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } y = \frac{2}{\ln a}(x-1)$$

Vậy để đường thẳng $y = x - 1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2 \log_a x$ thì

$$\frac{2}{\ln a} = 1 \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = e^2$$

Thử lại $a = e^2$ ta sẽ chứng minh $2 \log_{e^2} x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1$
 $\Leftrightarrow f(x) = \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x > 0$

Có $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			0	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

Câu 44. (THPT CẨM GIANG 2 NĂM 2018-2019) Cho a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3 \log_3 (1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2 \log_2 \sqrt{a}$. Giá trị của $\log_2 (2017a)$ xấp xỉ bằng:

A. 19. B. 26. C. 25. D. 23.

Lời giải

Từ giả thiết $3 \log_3 (1 + \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}) > 2 \log_2 \sqrt{a}$.

Đặt $\log_2 \sqrt{a} = 3x \Leftrightarrow a = 64^x$.

Ta được bất phương trình: $3 \log_3 (1 + 8^x + 4^x) > 6x \Leftrightarrow 1 + 8^x + 4^x > 9^x$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x > 1.$$

Đặt $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x$.

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x \ln \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{8}{9}\right)^x \ln \left(\frac{8}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^x \ln \left(\frac{4}{9}\right) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Và ta lại có $f(2) = 1$.

$$\text{Từ } \left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x < 2.$$

Suy ra $a < 64^2 = 4096$ mà a là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn suy ra $a = 4095$.

Vậy $\log_2 (2017a) = \log_2 (2017 \cdot 4095) \approx 22.97764311 \approx 23$.

Câu 45. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Trong các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2} (2x+y) \geq 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x + y$ là

A. $\frac{9}{4}$ B. 9 C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{9}{8}$

Lời giải

- TH1: $x^2 + 2y^2 > 1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2} (2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2$

$$\Rightarrow 2x+y \geq x^2+2y^2 > 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-CopSky ta có

$$\left(2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)(x^2+2y^2) \geq (2x+y)^2$$

$$\Rightarrow x^2+2y^2 \geq \frac{2(2x+y)^2}{9}$$

$$\Rightarrow 2x+y \geq \frac{2(2x+y)^2}{9} \Leftrightarrow (2x+y)\left(2x+y-\frac{9}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow 2x+y \in \left[1; \frac{9}{2}\right]$$

Giá trị lớn nhất của $T = 2x+y = \frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2; y=\frac{1}{2}$

$$\text{- TH2: } 0 < x^2+2y^2 < 1$$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2} (2x+y) \geq 1 \Leftrightarrow 2x+y \leq x^2+2y^2 < 1 < \frac{9}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T = 2x+y = \frac{9}{2}$.

Câu 46. (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02} (\log_2 (3^x+1)) > \log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$

A. $m \geq 1$.

B. $0 < m < 1$.

C. $m > 1$.

D. $m < 2$.

Lời giải

Đk: $x \in \mathbb{R}; m > 0$.

Ta có: $\log_{0,02} (\log_2 (3^x+1)) > \log_{0,02} m, \forall x \in (-\infty; 0)$.

$$\Leftrightarrow \log_2 (3^x+1) < m, \forall x \in (-\infty; 0).$$

$$\Leftrightarrow 3^x+1 < 2^m, \forall x \in (-\infty; 0).$$

Xét hàm $f(x) = 3^x+1$ trên $(-\infty; 0)$. Ta có $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0
y'		+
y		2

1

Để phương trình có nghiệm với mọi $x \in (-\infty; 0)$ ta phải có $2^m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Câu 47. (KTNL GV THUẬN THÀNH 2 BẮC NINH NĂM 2018-2019) Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của m để bất phương trình $\ln(7x^2+7) \geq \ln(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi x thuộc

$\mathbb{R}$. Tính S .

A. $S = 14$.

B. $S = 0$.

C. $S = 12$.

D. $S = 35$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\ln(7x^2 + 7) \geq \ln(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0 \quad (1) \\ mx^2 + 4x + m > 0 \quad (2) \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi các bất phương trình (1), (2) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $(7-m)x^2 - 4x + 7 - m \geq 0 \quad (1)$.

+ Khi $m = 7$ ta có (1) trở thành $-4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Do đó $m = 7$ không thỏa mãn.

+ Khi $m \neq 7$ ta có (1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-m > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ 4 - (7-m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \vee m \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5 \quad (*).$$

Xét $mx^2 - 4x + m > 0 \quad (2)$.

+ Khi $m = 0$ ta có (2) trở thành $-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

+ Khi $m \neq 0$ ta có (2) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \quad (**).$$

Từ (*) và (**) ta có $2 < m \leq 5$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$. Từ đó $S = 3 + 4 + 5 = 12$.

Câu 48. (THPT YÊN PHONG SỐ 1 BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Biết $[a; b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2 \sqrt{x^2 - 2x + m} + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 5$ thỏa mãn với mọi x thuộc $[0; 2]$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 4$.

B. $a + b = 2$.

C. $a + b = 0$.

D. $a + b = 6$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình đã cho tương đương $\log_4(x^2 - 2x + m) + 4\sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 5$.

Đặt $t = \sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)}$, $t \geq 0$.

Bất phương trình trở thành $t^2 + 4t - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq t \leq 1$.

Kết hợp điều kiện ta được $t \in [0; 1]$.

Khi đó: $0 \leq \sqrt{\log_4(x^2 - 2x + m)} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \log_4(x^2 - 2x + m) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 - 2x + m \leq 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 + 2x + 1 \\ m \leq -x^2 + 2x + 4 \end{cases} \quad (I)$$

+ Xét hàm $f(x) = -x^2 + 2x + 1 = 2 - (x-1)^2 \leq 2 \quad \forall x \in [0; 2] \Rightarrow \max_{[0; 2]} f(x) = 2$.

+ Xét hàm $g(x) = -x^2 + 2x + 4 = 4 + x(2-x) \geq 4 \quad \forall x \in [0; 2] \Rightarrow \min_{[0; 2]} g(x) = 4$.

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc $[0; 2] \Leftrightarrow (I)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[0;2]} f(x) \\ m \leq \min_{[0;2]} g(x) \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4. \text{ Vậy } m \in [2; 4], \text{ tức } a=2, b=4. \text{ Vậy } a+b=6.$$

Câu 49. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi x .

A. 5

B. 4

C. 0

D. 3

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

$$\text{Bpt: } \log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (m-7)x^2 + 4x + m - 7 \leq 0 \\ g(x) = mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

$$\text{Bpt đã cho nghiệm đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• Trường hợp 1: $m = 7$

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x + 7 > 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 7$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 2: $m = 0$

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x^2 + 4x - 7 \leq 0 \\ 4x > 0 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 3: $m \neq 0; m \neq 7$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_f < 0 \\ \Delta'_f \leq 0 \\ a_g > 0 \\ \Delta'_g < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 < 0 \\ 4-(m-7)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ 4-m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ m \leq 5 \vee m \geq 9 \\ m > 0 \\ m < -2 \vee m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Cách 2:

$$\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + 7 \geq mx^2 + 4x + m \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-7)x^2 + 4x + m - 7 \leq 0 \\ mx^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 - 4x + 7 \geq m(x^2 + 1) \\ m(x^2 + 1) > -4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7x^2 - 4x + 7}{x^2 + 1} \geq m \\ m > \frac{-4x}{x^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \frac{-4x}{x^2 + 1} \geq m \\ m > \frac{-4x}{x^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 \leq \frac{-4x}{x^2 + 1} \\ m > \frac{-4x}{x^2 + 1} \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{-4x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4(x^2+1) + 4x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
g'	$+$	0	$-$	0	$+$
g					
		2		0	
	0		-2		

$$\text{Vậy đk (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 \leq -2 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Câu 50. (ĐỀ THI THỬ VTED 03 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho $a > 1$. Biết khi $a = a_0$ thì bất phương trình $x^a \leq a^x$ đúng với mọi $x \in (1; +\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $1 < a_0 < 2$

B. $e < a_0 < e^2$

C. $2 < a_0 < 3$

D. $e^2 < a_0 < e^3$

Lời giải

Chọn C

$$x^a \leq a^x \Leftrightarrow a \cdot \ln x \leq x \cdot \ln a \Leftrightarrow \frac{a}{\ln a} \leq \frac{x}{\ln x}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x}{\ln x}, x \in (1; +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Bảng biến thiên:

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{a}{\ln a} \leq e \Leftrightarrow a \leq e \cdot \ln a \Leftrightarrow a - e \cdot \ln a \leq 0$

* Xét hàm số

$$g(x) = x - e \cdot \ln x; g'(x) = 1 - \frac{e}{x} \Leftrightarrow \frac{x-e}{x}$$

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	1	0	$+\infty$

Vậy $a - e \cdot \ln a \geq 0$

Theo bảng biến thiên, ta có: $a - e \cdot \ln a \leq 0 \Leftrightarrow a = e$

Vậy $a = a_0 = e \in (2; 3)$

Câu 51. (ĐỀ GK2 VIỆT ĐỨC HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để bất phương trình $(x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3$ có nghiệm.

A. $m \geq 4$. **B.** $2\sqrt{3} \leq m \leq 12\log_3 5$.

C. $m > 2\sqrt{3}$. **D.** $m \geq 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \leq 4$

$$\text{Vì } 0 < x \leq 4 \Rightarrow 5 - \sqrt{4-x} > 1 \Rightarrow \log_3(5 - \sqrt{4-x}) > 0$$

$$\text{suy ra: } (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \leq m \cdot \log_{5-\sqrt{4-x}} 3 \Leftrightarrow \log_{5-\sqrt{4-x}} 3^m \geq x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}$$

$$\Leftrightarrow 3^m \geq (5 - \sqrt{4-x})^{x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}}$$

$$\Leftrightarrow m \geq (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \log_3(5 - \sqrt{4-x}) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } f(x) = (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12}) \cdot \log_3(5 - \sqrt{4-x}) \text{ với } x \in [0; 4]$$

$$f'(x) = \left(\frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+12}} \right) \cdot \log_3(5 - \sqrt{4-x}) + \frac{1}{2\sqrt{4-x}(5 - \sqrt{4-x}) \cdot \ln 3} \cdot (x\sqrt{x} + \sqrt{x+12})$$

Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in (0; 4) \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 4]$.

Để bất phương trình (1) có nghiệm thì $m > \min_{[0;4]} f(x) = f(0) = 2\sqrt{3}$.

Câu 52. (LIÊN TRƯỜNG THPT TP VINH NGHỆ AN NĂM 2018-2019) Cho các bất phương trình $\log_5(-x^2 + 4x + m) - \log_5(x^2 + 1) < 1$ (1) và $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-1} \geq 0$ (2). Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1) là

A. 13

B. 21

C. 28

D. 11

Lời giải

$$\text{Xét bất phương trình (2): } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

$$\text{Xét bất phương trình (1): } (1) \Leftrightarrow \log_5(-x^2 + 4x + m) < 1 + \log_5(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(-x^2 + 4x + m) < \log_5 5(x^2 + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + m > 0 \\ -x^2 + 4x + m < 5(x^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + m > 0 \\ 6x^2 - 4x + 5 - m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > x^2 - 4x \\ m < 6x^2 - 4x + 5 \end{cases} \quad (*)$$

Mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1) $\Leftrightarrow$ hệ bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 4]$.

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 - 4x, g(x) = 6x^2 - 4x + 5. \text{ Có } \max_{[1;4]} f(x) = f(4) = 0, \min_{[1;4]} g(x) = g(1) = 7.$$

$$\text{Hệ bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi } x \in [1; 4] \Leftrightarrow \max_{[1;4]} f(x) < m < \min_{[1;4]} g(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 7.$$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy tổng các giá trị cần tìm là $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Câu 53. (SỞ GD&ĐT THANH HÓA NĂM 2018 - 2019) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(1; 20)$ để $\forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ đều là nghiệm của bất phương trình $\log_m x > \log_x m$?

A. 18.

B. 16.

C. 17.

D. 0.

Lời giải

Đặt $\log_m x = t$. Do $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$; $m \in (1; 20)$ nên t xác định, đồng thời $t < 0$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành $t > \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 < 1$ (do $t < 0$) $\Leftrightarrow -1 < t < 0$.

$$\Rightarrow -1 < \log_m x < 0 \Rightarrow \log_m \frac{1}{m} < \log_m x < \log_m 1 \Rightarrow \frac{1}{m} < x < 1.$$

Mà $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1$. Suy ra $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \geq 3$. Mà $m \in (1; 20) \Rightarrow m \in \{3; 4; \dots; 19\}$.

Vậy có tất cả 17 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 54. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A. $S = \{-1; 1\}$

B. $S = \{-5; -1; 1; 5\}$

C. $S = \{-5; 5\}$

D. $S = \{-7; -5; -1; 1; 5; 7\}$

Lời giải.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq m^2 \text{ là một hình tròn } (C_1) \text{ tâm } I(2;2),$$

bán kính $R_1 = |m|$ với $m \neq 0$ hoặc là điểm $I(2;2)$ với $m = 0$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ là một đường tròn } (C_2) \text{ tâm } J(-1;2), \text{ bán kính } R_2 = 2.$$

TH1: Với $m = 0$ ta có: $I(2;2) \notin (C_2)$ suy ra $m = 0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

TH2: Với $m \neq 0$.

Để hệ $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) \geq 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thì hình tròn (C_1) và đường

tròn (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow IJ = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + 0^2} = |m| + 2 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 55. (SỞ GD&ĐT BẮC NINH NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$ là $(-\sqrt{a}; -\sqrt{b}]$.

Khi đó a, b bằng

A. $\frac{15}{16}$.

B. $\frac{12}{5}$.

C. $\frac{16}{15}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Ta có: $x\sqrt{x^2+2}-x^2 = x(\sqrt{x^2+2}-x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$.

Ta có: $\log_2(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2(x(\sqrt{x^2+2}-x)+4)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1 \Leftrightarrow \log_2\frac{2(3x+2\sqrt{x^2+2})}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2} \leq 1, (1)$$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Điều kiện: } 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2} > -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \\ 4x^2 + 8 > 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\sqrt{\frac{8}{5}}, (*)$$

Với điều kiện (*), ta có

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) + 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq \log_2(\sqrt{x^2 + 2} + x) + \sqrt{x^2 + 2} + x, \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$. Có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, $(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) \in (0; +\infty)$ và

$$(\sqrt{x^2 + 2} + x) \in (0; +\infty)$$

$$\text{Nên } (2) \Leftrightarrow f(3x + 2\sqrt{x^2 + 2}) \leq f(\sqrt{x^2 + 2} + x)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{x^2 + 2} \leq \sqrt{x^2 + 2} + x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^2 + 2 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\sqrt{\frac{8}{5}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ hay $a.b = \frac{16}{15}$.

Chọn đáp án **C**.

Dạng 2. Bất phương trình mũ

Dạng 2.1 Bất phương trình cơ bản

Dạng 2.1.1 Không cần biến đổi

Câu 56. (ĐỀ THAM KHẢO BGD & ĐT 2018) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là:

- A. $(-\infty; 6)$ B. $(0; 64)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(0; 6)$

Lời giải:

Chọn A

$$\text{Cách 1: } 2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2x < x + 6 \Leftrightarrow x < 6$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0$$

$$\text{Bất phương trình trở thành: } t^2 - 64t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 64 \Leftrightarrow 0 < 2^x < 64 \Leftrightarrow x < 6.$$

Câu 57. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

- A. $(3; +\infty)$ B. $(-1; 3)$
C. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ D. $(-\infty; -1)$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Câu 58. (ĐỀ MINH HỌA GBD&ĐT NĂM 2017) Cho hàm số $f(x) = 2^x \cdot 7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0$ B. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \ln 2 + x^2 \ln 7 < 0$
C. $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \log_7 2 + x^2 < 0$ D. $f(x) < 1 \Leftrightarrow 1 + x \log_2 7 < 0$

Lời giải

Chọn D

Đáp án A đúng vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_2 f(x) < \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 7^{x^2} < 0$

$$\Leftrightarrow x + x^2 \cdot \log_2 7 < 0$$

Đáp án B đúng vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln f(x) < \ln 1 \Leftrightarrow \ln (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \ln 2^x + \ln 7^{x^2} < 0$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln 2 + x^2 \cdot \ln 7 < 0$$

Đáp án C đúng vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_7 f(x) < \log_7 1 \Leftrightarrow \log_7 (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \log_7 2^x + \log_7 7^{x^2} < 0$

$$\Leftrightarrow x \cdot \log_7 2 + x^2 < 0$$

Vậy D sai vì $f(x) < 1 \Leftrightarrow \log_2 f(x) < \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 7^{x^2}) < 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 7^{x^2} < 0$

$$\Leftrightarrow x + x^2 \log_2 7 < 0.$$

Câu 59. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2017) Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

- A. $S = (-\infty; -2)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (-1; +\infty)$. D. $S = (-2; +\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình tương đương $5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$.

Câu 60. (TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM HƯNG YÊN NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = e^{x^2+2x-3} - 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là:

- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.
C. $[-3; 1]$. D. $[-1; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $y' = (2x+2)e^{x^2+2x-3}$.

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow (2x+2)e^{x^2+2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là $[-1; +\infty)$.

Câu 61. (THPT HÙNG VƯƠNG BÌNH PHƯỚC NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương

trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ trên tập số thực là

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-\infty; 2)$. D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9 \Leftrightarrow 3^{-x} > 3^2 \Leftrightarrow -x > 2 \Leftrightarrow x < -2.$$

Vậy tập nghiệm là: $S = (-\infty; -2)$.

Câu 62. (THPT BẠCH ĐẰNG QUẢNG NINH NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình

$$4^{x+1} \leq 8^{x-2}$$

- A. $[8; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $(0; 8)$. D. $(-\infty; 8]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4^{x+1} \leq 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x+2} \leq 2^{3x-6} \Leftrightarrow 2x+2 \leq 3x-6 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [8; +\infty)$.

- Câu 63. (THPT MINH KHAI HÀ TĨNH NĂM 2018-2019)** Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < 9$ là
A. $S = (-\infty; 2]$. **B.** $S = (2; +\infty)$. **C.** $S = (-\infty; 2)$. **D.** $S = \{2\}$.

Lời giải

Ta có: $3^x < 9 \Leftrightarrow 3^x < 3^2 \Leftrightarrow x < 2$. Vậy tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < 9$ là: $S = (-\infty; 2)$.

- Câu 64. (THPT CÙ HUY CẬN NĂM 2018-2019 LẦN 01)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x} \leq 8$ là
A. $(-\infty; -3]$. **B.** $[-3; 1]$. **C.** $(-3; 1)$. **D.** $(-3; 1]$.

Lời giải

Ta có: $2^{x^2+2x} \leq 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} \leq 2^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

- Câu 65. (THPT CHUYÊN VINH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là
A. $S = (-\infty; 2)$ **B.** $S = (-\infty; 1)$ **C.** $S = (1; +\infty)$ **D.** $S = (2; +\infty)$

Lời giải

$$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2$$

- Câu 66. (ĐỀ 04 VTED NĂM 2018-2019)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.
A. $S = (-\infty; -2)$ **B.** $S = (1; +\infty)$ **C.** $S = (-2; +\infty)$ **D.** $S = (-1; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

$$5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0 \Leftrightarrow 5^{x+1} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-2; +\infty)$.

- Câu 67. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019)** Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là
A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(4; +\infty)$. **C.** $(-1; 4)$. **D.** $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải

$$2^{x^2-3x} < 16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} < 2^4 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

- Câu 68. (THPT GANG THẾP THÁI NGUYÊN NĂM 2018-2019)** Tập nghiệm bất phương trình: $2^x > 8$ là
A. $(-\infty; 3)$. **B.** $[3; +\infty)$. **C.** $(3; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 3]$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(3; +\infty)$.

- Câu 69. (CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$.
A. $S = [1; 2]$ **B.** $S = (-\infty; 1)$ **C.** $S = (1; 2)$ **D.** $S = (2; +\infty)$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -x^2+3x > 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; 2)$.

- Câu 70. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là
A. $(-\infty; -1)$ **B.** $(3; +\infty)$ **C.** $(-1; 3)$ **D.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

- Câu 71. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC LẦN 02 NĂM 2018-2019)** Cho $f(x) = x \cdot e^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > 0$ là

- A.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ **B.** $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ **D.** $(0; 1)$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f'(x) = e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x} = e^{-3x}(1 - 3x).$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-3x}(1 - 3x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}.$$

- Câu 72. (THPT BA ĐÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \text{ là}$$

- A.** 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 3^{-(2x^2-3x-7)} > 3^{2x-21}$$

$$\Leftrightarrow -(2x^2 - 3x - 7) > 2x - 21 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 7 > 2x - 21$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 28 > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < 4.$$

$$\text{Do } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có 7 nghiệm nguyên.

- Câu 73. (THPT LƯƠNG THẾ VINH HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 1)** Tập nghiệm của bất phương trình

$$2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6} \text{ là}$$

- A.** $(0; 6)$. **B.** $(-\infty; 6)$. **C.** $(0; 64)$. **D.** $(6; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6} \Leftrightarrow 2^{3x} < 2^{2x+6} \Leftrightarrow 3x < 2x + 6 \Leftrightarrow x < 6.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 6)$.

Câu 74. (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG GIA LAI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$

có tập nghiệm là

A. $[3; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $[-1; 3]$.

D. $(-1; 3)$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [-1; 3]$.

Câu 75. (THPT YÊN PHONG 1 BẮC NINH NĂM HỌC 2018-2019 LẦN 2) Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $4^{x^2-2x} < 64$ là

A. 2.

B. -1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Ta có $4^{x^2-2x} < 64 \Leftrightarrow 4^{x^2-2x} < 4^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Vậy nghiệm nguyên lớn nhất là $x = 2$.

Câu 76. (SỞ GD&ĐT HÀ NỘI NĂM 2018-2019) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256}$ là

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-2; 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow -x^2 < 4 \Leftrightarrow -x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Câu 77. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8$ là

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Bất phương trình } 2^{x^2-2x} > 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} > 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 78. (CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 01) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{e}{\pi}\right)^x > 1$ là

A. $\mathbb{R}$

B. $(-\infty; 0)$

C. $(0; +\infty)$

D. $[0; +\infty)$

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{e}{\pi} < 1 \text{ nên } \left(\frac{e}{\pi}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{e}{\pi}} \left(\frac{e}{\pi}\right)^x < \log_{\frac{e}{\pi}} 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0)$.

Câu 79. (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA LẦN 2 NĂM 2018-2019) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \leq 16$ là số nào sau đây ?

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$2^{x^2+3x} \leq 16 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} \leq 2^4 \Leftrightarrow x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-4; 1].$$

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là : $-4; -3; -2; -1; 0; 1$.

Câu 80. (THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC NĂM 2018-2019 LẦN 3) Tập nghiệm của bất phương trình

$$\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \text{ (với } a \text{ là tham số, } a \neq 0 \text{) là:}$$

A. $(-\infty; 0)$ B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ C. $(0; +\infty)$ D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^0 \quad (1).$$

$$\text{Nhận thấy } 1+a^2 > 1, \forall a \neq 0 \text{ nên: } \frac{1}{1+a^2} < 1.$$

$$\text{Khi đó bất phương trình (1) tương đương } 2x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho : } S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right).$$

Câu 81. (CỤM 8 TRƯỜNG CHUYÊN LẦN 1) Tập nghiệm S của bất phương trình $3^x < e^x$ là:

A. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.B. $S = (0; +\infty)$.C. $S = \mathbb{R}$.D. $S = (-\infty; 0)$.

Lời giải

$$3^x < e^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{e}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0. \text{ Tập nghiệm của bất phương trình là } S = (-\infty; 0).$$

Dạng 2.1.2 Cần biến đổi

Câu 82. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ NĂM 2018 - 2019 LẦN 01) Số nghiệm nguyên của bất phương trình:

$$(17-12\sqrt{2})^x \geq (3+\sqrt{8})^{x^2} \text{ là:}$$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (17-12\sqrt{2})^x \geq (3+\sqrt{8})^{x^2} \Leftrightarrow (3-\sqrt{8})^{2x} \geq (3+\sqrt{8})^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow (3+\sqrt{8})^{x^2+2x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2+2x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 0].$$

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

Câu 83. (CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN ĐIỆN BIÊN NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1}$.

A. $(2; +\infty)$.B. $(-\infty; 2)$.C. $(-\infty; 2]$.D. $[2; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2^x + 2^{x+1} \leq 3^x + 3^{x-1} \Leftrightarrow 3.2^x \leq 4.3^{x-1} \Leftrightarrow 2^{x-2} \leq 3^{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Câu 84. (CHUYÊN HÙNG YÊN NĂM 2018-2019 LẦN 03) Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$ có

tập nghiệm $S = (a; b)$. Giá trị của biểu thức $P = 3a + 10b$ là

- A. 5. B. -3. C. -4. D. 2.

Lời giải

Đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ($t > 0$). Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t > 12 \Leftrightarrow (t-3)(t+4) > 0 \Leftrightarrow t > 3 \text{ (vì } t > 0 \text{)}.$$

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1; 0)$.

Vậy $a = -1$ và $b = 0$. Suy ra $P = 3a + 10b = -3$.

Câu 85. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$.

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Lời giải

Đặt $t = 3^x > 0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 3^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = (0, 1)$ nên nó không có nghiệm nguyên dương.

Câu 86. (THPT ĐÔNG SƠN THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 02) Bất phương trình $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0$ có tập nghiệm là?

- A. $S = (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x > 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{3}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 87. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Tập nghiệm của bất phương trình $(2 - \sqrt{3})^{x^2 + 4x - 14} \geq 7 + 4\sqrt{3}$ là:

- A. $[-6; 2]$. B. $(-\infty - 6] \cup [2; +\infty)$. C. $(-6; 2)$. D. $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$, $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ và $2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1} \Rightarrow 7 + 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-2}$.

$$(2 - \sqrt{3})^{x^2 + 4x - 14} \geq 7 + 4\sqrt{3} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})^{x^2 + 4x - 14} \geq (2 - \sqrt{3})^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 14 \leq -2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $[-6; 2]$.

Câu 88. (CHUYÊN BẮC GIANG NĂM 2018-2019 LẦN 02) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2 \cdot 3^x$$

A. 2.**B.** 3.**C.** 1.**D.** 0**Lời giải****Chọn C**

$$6^x + 4 \leq 2^{x+1} + 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 6^x + 4 - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x (3^x - 2) + 2(2 - 3^x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x - 2)(2^x - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in [\log_3 2; 1]$$

Dạng 2.3 Giải và biện luận một số bất phương trình khó và khác**Dạng 2.3.1 Kết hợp nhiều phương pháp đặt ẩn phụ, cô lập m, đánh giá....****Câu 89. (CHUYÊN HẠ LONG NĂM 2018-2019 LẦN 02)** Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$:

$$y = \sqrt{4^x - (m+1) \cdot 2^x - m}$$

A. Đáp án khác.**B.** $m > -1$.**C.** $m < 0$.**D.** $-3 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -3 + 2\sqrt{2}$.**Lời giải**Hàm số $y = \sqrt{4^x - (m+1) \cdot 2^x - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x - (m+1) \cdot 2^x - m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$). Khi đó: $t^2 - (m+1)t - m \geq 0 \quad \forall t > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} \geq m \quad \forall t > 0$.Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2 - t}{t+1}$ với $t > 0$.Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{(t+1)^2}$ khi đó: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 + \sqrt{2}$ do $t > 0$.Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min_{(0; +\infty)} f(t) = f(-1 + \sqrt{2}) = -3 + 2\sqrt{2}$.Để bất phương trình $\frac{t^2 - t}{t+1} \geq m \quad \forall t > 0$ thì $m \leq -3 + 2\sqrt{2}$.**Câu 90.** Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là**A.** $(-\infty; 12]$.**B.** $(-\infty; -1]$.**C.** $(-\infty; 0]$.**D.** $(-1; 16]$.**Lời giải****Chọn B**Đặt $t = 2^x$. ĐK: $t \geq 1$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0 \Leftrightarrow (2t-1)m \leq t^2 - 2t \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2t}{2t-1} = g(t) \Leftrightarrow m \leq \min g(t)$$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow \min g(t) = g(1) = -1 \Rightarrow m \in (-\infty; -1]$$

Câu 91. (CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH YÊN BÁI LẦN 01 NĂM 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 0]$.

C. $m \in (0; +\infty)$.

D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải

Bất phương trình $4^{x-1} - m(2^x + 1) > 0$ (1).

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $\frac{1}{4}t^2 - m(t+1) > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4mt - 4m > 0$ (2).

Đặt $f(t) = t^2 - 4mt - 4m$.

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đồ thị là một Parabol với hệ số a dương, đỉnh $I(2m; -4m^2 - 4m)$.Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t > 0$ hay $f(t) > 0, \forall t > 0$.

TH1: $m \leq 0 \Rightarrow f(0) = -4m \geq 0 \Rightarrow m \leq 0$ thỏa mãn.

TH2: $m > 0 \Rightarrow -4m^2 - 4m < 0$ nên $m > 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 92. (CHUYÊN NGUYỄN TRÃI HẢI DƯƠNG NĂM 2018-2019 LẦN 01) Bất phương trình $4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty; 12)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $(-1; 16]$.

Lời giải

$4^x - (m+1)2^{x+1} + m \geq 0, \forall x \geq 0$.

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2(m+1)2^x + m \geq 0, \forall x \geq 0$ (1).

Đặt $t = 2^x$, ($t > 0$).

(1) trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0, \forall t \geq 1$ (2).

Cách 1:

(2) $\Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2t}{2t - 1}, \forall t \geq 1$ (3).

Xét hàm số $y = f(t) = \frac{t^2 - 2t}{2t - 1}$. Ta có hàm số $y = f(t)$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{(2t-2)(2t-1) - 2(t^2-2t)}{(2t-1)^2} = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(2t-1)^2} > 0, \forall t \geq 1.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(1) = -1, \forall t \geq 1$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow m \leq \min_{[1; +\infty)} f(t) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Cách 2: $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0$ là một bất phương trình bậc hai.Tam thức bậc hai ở vế trái luôn có $\Delta' = m^2 + m + 1 > 0, \forall m$ nên tam thức luôn có hai nghiệm là

$t = m+1 - \sqrt{m^2 + m + 1}$ và $t = m+1 + \sqrt{m^2 + m + 1}$.

Suy ra bất phương trình $t^2 - 2(m+1)t + m \geq 0$ có tập nghiệm là

$$(-\infty; m+1 - \sqrt{m^2 + m + 1}] \cup [m+1 + \sqrt{m^2 + m + 1}; +\infty).$$

$$(2) \Leftrightarrow m+1+\sqrt{m^2+m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+m+1} \leq -m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m^2+m+1 \leq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Câu 93. (CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM 2018-2019 LẦN 03) Tập nghiệm của bất phương trình

$$3^{x^2-9} + (x^2-9) \cdot 5^{x+1} < 1 \text{ là khoảng } (a; b). \text{ Tính } b-a$$

A. 6.

B. 3.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

$$3^{x^2-9} + (x^2-9) \cdot 5^{x+1} < 1 \quad (1).$$

$$\text{Có } 5^{x+1} > 0 \quad \forall x.$$

$$\text{Xét } x^2-9=0, \text{ VT } (1) = 3^0 + 0 = 1 \text{ (loại).}$$

$$\text{Xét } x^2-9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9} > 3^0 = 1 \\ (x^2-9) \cdot 5^{x+1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT } (1) > 1 \text{ (loại).}$$

$$\text{Xét } x^2-9 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-9} < 3^0 = 1 \\ (x^2-9) \cdot 5^{x+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{VT } (1) < 1 \text{ luôn đúng.}$$

$$\text{Có } x^2-9 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 3).$$

$$\Rightarrow \text{Tập nghiệm của bất phương trình là: } (-3; 3) \Rightarrow b-a = 6.$$

Câu 94. (ĐỀ HỌC SINH GIỎI TỈNH BẮC NINH NĂM 2018-2019) Bất phương trình

$$\frac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}} - \sqrt{2-3^{2x}}} + \frac{3^{4x} + \sqrt{4-3^{4x}} - 7}{3^{2x}} \geq \frac{3^{2x} - 2}{\sqrt{4-3^{4x}} - 2 + 3^{2x}} \text{ có bao nhiêu nghiệm?}$$

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 3

Lời giải

Đặt $t = 3^{2x} > 0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\sqrt{2+t}}{\sqrt{2+t} - \sqrt{2-t}} + \frac{t^2 + \sqrt{4-t^2} - 7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2} - 2 + t} \quad (1)$$

Điều kiện: $0 < t < 2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2+t}(\sqrt{2+t} + \sqrt{2-t})}{2t} + \frac{t^2 + \sqrt{4-t^2} - 7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2} - 2 + t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t + 3\sqrt{4-t^2} + 2t^2 - 12}{2t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2} - 2 + t} \Leftrightarrow \frac{t + 3\sqrt{4-t^2} + 2t^2 - 12}{2t} \geq \frac{(t-2)(\sqrt{4-t^2} + 2 - t)}{-2t^2 + 4t}$$

$$\Leftrightarrow t + 3\sqrt{4-t^2} + 2t^2 - 12 \geq -\sqrt{4-t^2} - 2 + t \Leftrightarrow 4\sqrt{4-t^2} + 2t^2 - 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4-t^2} - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{3}. \text{ Với } t = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Câu 95. (THPT HÀM RỒNG THANH HÓA NĂM 2018-2019 LẦN 1) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(6 + 2\sqrt{7})^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x - (m+1)2^x \geq 0$$

A. 10.

B. 9.

C. 12.

D. 11.

Lời giải

Ta có:

$$(6+2\sqrt{7})^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x - (m+1)2^x \geq 0 \Leftrightarrow 2^x(3+\sqrt{7})^x + (2-m)(3-\sqrt{7})^x > (m+1)2^x$$

$$\Leftrightarrow (3+\sqrt{7})^x + (2-m)\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x > m+1$$

Đặt $t = (3+\sqrt{7})^x$, $t > 0 \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$$t + (2-m) \cdot \frac{1}{t} > m+1 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t + 2}{t+1} > m.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t+1}$ trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t - 3}{(t+1)^2}$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 0 \end{cases}$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:

x	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	2	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m < 1$. Suy ra trong đoạn $[-10; 10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 96. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN ĐÀ NẴNG NĂM 2018-2019) Tìm m để bất phương trình $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\ln 120$.

B. $\ln 10$.

C. $\ln 30$.

D. $\ln 14$.

Lời giải

+ Với $a > 1$ ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) \cdot \ln a = \ln a$.

+ Với $a > 1$ xét hàm số $f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ ($x \neq 0$), ta có $f'(x) = \frac{xa^x \ln a - a^x + 1}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x) = xa^x \ln a - a^x + 1 \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a + xa^x \ln^2 a - a^x \ln a = xa^x \ln^2 a$.

Với $x > 0$ ta có $g'(x) > 0$ suy ra $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 0$.

Với $x < 0$ ta có $g'(x) < 0$ suy ra $g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x < 0$.

Do đó hàm số $f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 1$) đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Trở lại bài toán:

+ Xét $x = 0$ bất phương trình thỏa mãn.

+ Xét $x > 0$ ta có: $2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx \Leftrightarrow m \leq \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} = h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 = \ln 120$.

$$+ \text{ Xét } x < 0 \text{ ta có: } 2^x + 3^x + 4^x + 5^x \geq 4 + mx \Leftrightarrow m \geq \frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} = h(x).$$

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 = \ln 120$.

Kết hợp lại ta có $m = \ln 120$.

Câu 97. (KTNL GV THPT LÝ THÁI TỔ NĂM 2018-2019) Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ của

bất phương trình: $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0$ là

A. 38. B. 36. C. 37. D. 19.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$ (*).

Vì x là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ nên ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $3 \leq x \leq 20$, khi đó dễ thấy $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x = 2^x(2^{x+1} - 9) > 0$ nên

$2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 0$, do đó trên $[3; 20]$ bất phương trình có 18 nghiệm nguyên.

Trường hợp 2. $x = 2$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $4\sqrt{5} - 4 \geq 0$ (đúng).

Do đó $x = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3. $x = 1$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $-10 \geq 0$ (sai).

Do đó $x = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 4. $-20 \leq x \leq -4$. Khi đó, xét hàm số: $f(x) = x^2 + 2x - 3$, dễ thấy

$$\min_{[-20; -4]} f(x) = f(-4) = 5 \text{ nên } 4\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq 4\sqrt{5}, \forall x \in [-20; -4] \quad (a).$$

Mặt khác, đặt $t = 2^x$, khi đó $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x = 2t^2 - 9t$, $-20 \leq x \leq -4 \Rightarrow 2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$.

Khi đó xét hàm số $g(t) = 2t^2 - 9t$ với $2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$, dễ thấy

$$\min_{[2^{-20}; 2^{-4}]} g(t) = g(2^{-4}) = -\frac{71}{128} \quad (b)$$

Từ (a), (b) suy ra $\min_{[-20; -4]} \{h(x) = 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4\sqrt{x^2 + 2x - 3}\} = h(-4) = 4\sqrt{5} - \frac{71}{128} > 0$. Do đó

bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $-20 \leq x \leq -4$, nên trên đoạn $[-20; -4]$ bất phương trình có 17 nghiệm nguyên.

Trường hợp $x = -3$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là: 36.

Câu 98. (THPT CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 01 NĂM 2018-2019) Tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4} + (x^2-4) \cdot 2019^{x-2} \geq 1$ là khoảng $(a; b)$. Tính $b - a$.

A. 5. B. 4. C. -5. D. -1.

Lời giải

Xét hai trường hợp: $x^2 - 4 \geq 0$ và $x^2 - 4 < 0$

$$\text{TH1: } x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \text{ khi đó ta có:}$$

$$\begin{cases} 9^{x^2-4} \geq 9^0 = 1 \\ x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 2019^{x-2} \geq 2019^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{x^2-4} + (x^2-4)2019^{x-2} \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

TH2: $x^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} 9^{x^2-4} < 9^0 = 1 \\ x-2 < 0 \Leftrightarrow 2019^{x-2} < 2019^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 9^{x^2-4} + (x^2-4)2019^{x-2} < 1$$

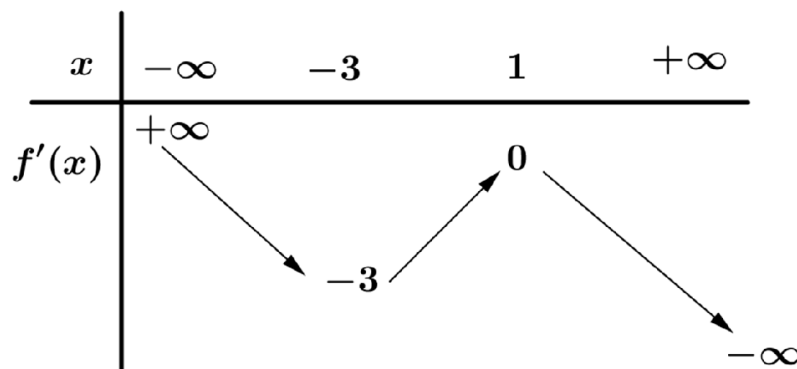
$\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập hợp tất cả các số thực x không thỏa mãn bất phương trình là

$$(-2; 2) \Rightarrow a = -2; b = 2 \Rightarrow b - a = 4$$

Dạng 2.3.2 Giải bất phương trình khi biết đồ thị của $f'(x)$

Câu 99. (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Bất phương trình $f(x) < e^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi.

- A. $m > f(-1) - \frac{1}{e}$ B. $m \geq f(-1) - \frac{1}{e}$ C. $m > f(1) - e$ D. $m \geq f(1) - e$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) < e^x + m \Leftrightarrow m > f(x) - e^x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - e^x$; $g'(x) = f'(x) - e^x < 0 \forall x \in (-1; 1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max g(x) = g(-1) = f(-1) - \frac{1}{e}$, chọn **C**.

Câu 100. (THPT CHUYÊN SƠN LA NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m \geq f(0) - 1$. B. $m > f(-1) - e$. C. $m > f(0) - 1$. D. $m \geq f(-1) - e$.

Lời giải

$$f(x) < e^{x^2} + m \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} < m$$

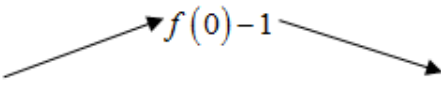
Xét hàm số: $g(x) = f(x) - e^{x^2}$; $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$.

Trên khoảng $(-1; 0)$ ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ -2x > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (-1; 0)$.

Trên khoảng $(0; 1)$ ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ -2x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$.

Tại điểm $x = 0$ ta có $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ -2xe^{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = 0$.

Suy ra bảng biến thiên của $g(x)$:

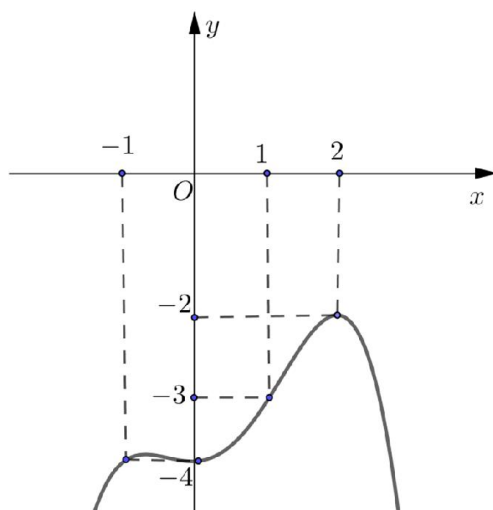
x	-1	0	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(-1;1)} g(x) = f(0) - 1$.

Do đó bất phương trình $m > g(x)$ đúng với mọi $x \in (-1; 1)$ khi và chỉ khi

$$m > \max_{(-1;1)} g(x) = f(0) - 1.$$

Câu 101. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ NĂM 2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R} \text{ là}$$

A. 10

B. 4

C. 5

D. 9

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq -m^2 + 5m \quad (1)$$

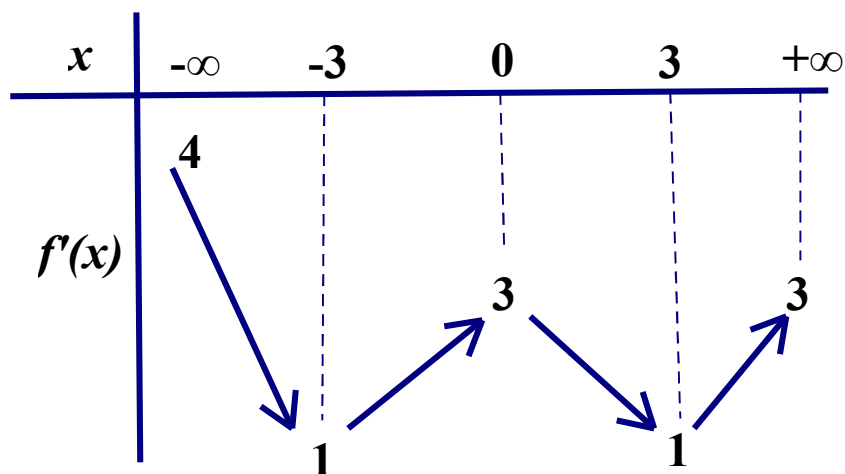
Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } (4 - f^2(x)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Để (1) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $4 \leq -m^2 + 5m \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.Do m là số nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

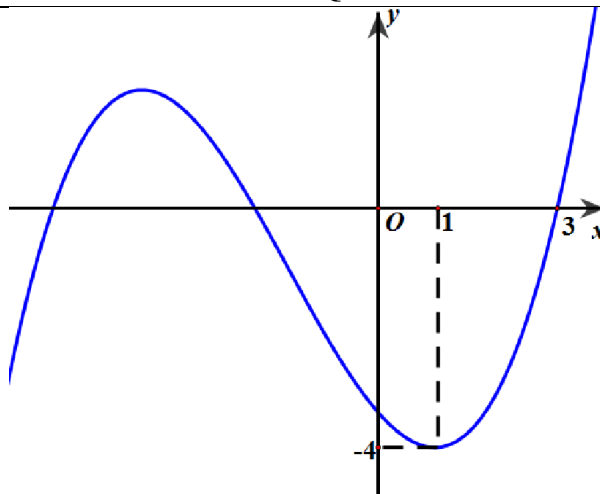
Câu 102. (ĐỀ THI THỬ VTED 02 NĂM HỌC 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Bất phương trình $f(x) < 3 \cdot e^{x+2} + m$ có nghiệm $x \in (-2; 2)$ khi và chỉ khi:

- A.** $m \geq f(-2) - 3$ **B.** $m > f(-2) - 3e^4$ **C.** $m \geq f(2) - 3e^4$ **D.** $m > f(-2) - 3$

Lời giảiBất phương trình tương đương với $m > g(x) = f(x) - 3 \cdot e^{x+2}$.Ta có $g'(x) = f'(x) - 3 \cdot e^{x+2} < 3 - 3 \cdot e^{-2+2} = 0, \forall x \in (-2; 2)$.Do đó $g(x) > g(2) = f(2) - 3 \cdot e^4, \forall x \in (-2; 2)$.Vậy $m > f(2) - 3 \cdot e^4$ thì phương trình có nghiệm trên khoảng $(-2; 2)$.

Câu 103. (THPT-THANG-LONG-HA-NOI-NAM-2018-2019 LẦN 01) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

- A. $m > -\frac{4}{1011}$. B. $m \geq -\frac{4}{3e+2019}$. C. $m > -\frac{2}{1011}$. D. $m > \frac{f(e)}{3e+2019}$.

Lời giải

Đặt $t = e^x$ ($t > 0$). Bất phương trình có dạng: $f(t) < m(3t + 2019) \Leftrightarrow \frac{f(t)}{3t + 2019} < m$.

Ta có: $x \in (0; 1) \Leftrightarrow t = e^x \in (1; e)$.

Xét hàm $g(t) = \frac{f(t)}{3t + 2019}$ có $g'(t) = \frac{f'(t)(3t + 2019) - 3f(t)}{(3t + 2019)^2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy: $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; e)$ và $f(x) < 0 \quad \forall x \in (1; e)$

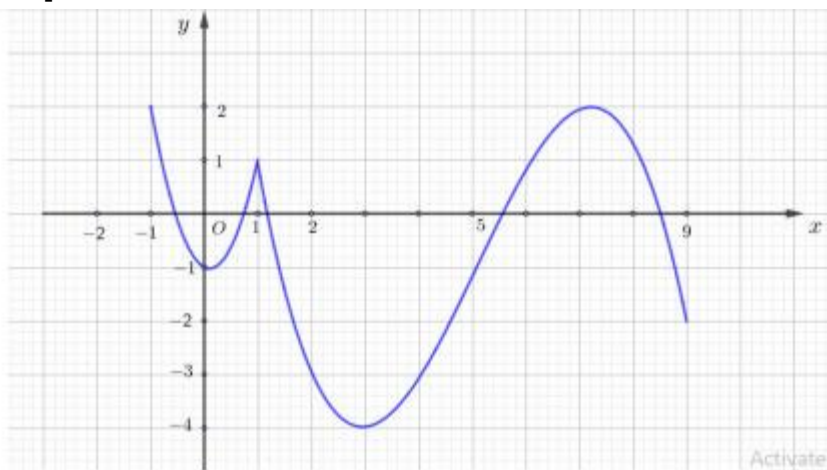
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \quad \forall x \in (1; e).$$

$\Rightarrow g'(t) > 0 \quad \forall t \in (1; e) \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên khoảng $(1; e) \Rightarrow g(1) < g(t) < g(e) \quad \forall t \in (1; e)$.

Vậy bất phương trình $f(e^x) < m(3e^x + 2019)$ có nghiệm $x \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \text{Bất phương trình } \Leftrightarrow \frac{f(t)}{3t + 2019} < m \text{ có nghiệm } t \in (1; e) \Leftrightarrow m > g(1) = -\frac{4}{2022} = -\frac{2}{1011}.$$

Câu 104. (THPT YÊN KHÁNH - NINH BÌNH - 2018 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1; 9]$?

A. 32.

B. 31.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Dễ thấy $-4 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [-1; 9]$ (1) nên $-[f(x) + 4].[f(x) - 2] \geq 0, \forall x \in [-1; 9]$.

Do đó $-[f^2(x) + 2f(x) - 8] \geq 0, \forall x \in [-1; 9]$ (2).

Ta có $16.3^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].4^{f(x)} \geq (m^2 - 3m).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 9]$

$$\Leftrightarrow 16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq m^2 - 3m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 9]$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \min_{x \in [-1; 9]} \left\{ 16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \right\} \geq m^2 - 3m \quad (3).$$

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ và $-[f^2(x) + 2f(x) - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq 0, \forall x \in [-1; 9]$.

Suy ra $16.\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - [f^2(x) + 2f(x) - 8].\left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)} \geq 4, \forall x \in [-1; 9]$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = a \ (7 < a < 8)$.

Do đó $\alpha = 4$ và (3) $\Leftrightarrow 4 \geq m^2 - 3m \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 4$. Vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.