

ÔN TẬP NHỮNG KIẾN THỨC CẦN NHỚ ĐỀ VẬN DỤNG GIẢI TOÁN

Vấn đề 1 CÔNG THỨC TÍNH ĐẠO HÀM

$\diamond (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \mapsto (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\diamond (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mapsto (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\diamond \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \mapsto \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\diamond (e^x)' = e^x \mapsto (e^u)' = u' \cdot e^u$ $\diamond (a^x)' = a^x \cdot \ln a \mapsto (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ $\diamond (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ $\diamond \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$\diamond (\sin x)' = \cos x \mapsto (\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $\diamond (\cos x)' = -\sin x \mapsto (\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $\diamond (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \mapsto (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $\diamond (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \mapsto (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$\diamond (\ln x)' = \frac{1}{x} \mapsto (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\diamond (\ln x)' = \frac{1}{x} \mapsto (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\diamond (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \mapsto (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

Vấn đề 2 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Hệ thức lượng cơ bản	Công thức nhân đôi – nhân ba – hạ bậc
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\tan x \cdot \cot x = 1$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ $\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (3\sin - 4\sin^3)$ $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad (4\cos^3 - 3\cos)$
Công thức cộng cung	Công thức biến đổi tổng thành tích
$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$ $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$	$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
Công thức biến đổi tổng thành tích	Công thức tính $\sin \alpha, \cos \alpha$ theo $t = \tan \frac{\alpha}{2}$
$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$	Đặt $t = \tan \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$

Một số công thức khác	Một số công thức khác
$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{3 + 1 \cos 4x}{4}$ $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{5 + 3 \cos 4x}{8}$ $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$	$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

Vấn đề 3

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình lượng giác cơ bản:

a. <u>Phương trình</u>: $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}$	<u>Đặc biệt</u>: $\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$
b. <u>Phương trình</u>: $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + l2\pi \end{cases}$	<u>Đặc biệt</u>: $\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases}$
c. <u>Phương trình</u>: $\begin{cases} \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \\ Đk : u, v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$	<u>Đặc biệt</u>: $\begin{cases} \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$
d. <u>Phương trình</u>: $\begin{cases} \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \\ Đk : u, v \neq k\pi \end{cases}$	<u>Đặc biệt</u>: $\begin{cases} \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

2. Phương trình lượng giác cô điển dạng: $a \sin x + b \cos x = c$ (1)

✧ Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

✧ Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được: (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

✧ Đặt $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ($\alpha \in [0, 2\pi]$). Phương trình trở thành:

$$\sin \alpha \cdot \sin x + \cos \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

3. Phương trình lượng giác đẳng cấp bậc hai dạng: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ (2)

✧ Kiểm tra xem $\cos x = 0$ có phải là nghiệm hay không? Nếu có thì nhận nghiệm này.

✧ Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (2) cho $\cos^2 x$, ta được:

$$a \cdot \tan^2 x + b \cdot \tan x + c = d(1 + \tan^2 x)$$

✧ Đặt $t = \tan x$, đưa về phương trình bậc hai theo t : $(a - d)t^2 + b \cdot t + c - d = 0 \rightarrow t \rightarrow x$

3. **Phương trình đối xứng dạng:** $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$ (3)

✧ Đặt $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2} \cdot \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$; $|t| \leq \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

✧ Thay vào phương trình (3), ta được phương trình bậc hai theo $t \rightarrow t \rightarrow x$

4. **Phương trình đối xứng dạng:** $a|\sin x \pm \cos x| + b \sin x \cos x + c = 0$ (4)

✧ Đặt $t = |\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2} \cdot \left|\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)\right|$; $DK: 0 \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1)$

✧ Giải tương tự như dạng trên. Khi tìm x cần lưu ý phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

Vấn đề 4 PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

1. **Phương trình bậc hai:** $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

a/ Giải phương trình bậc hai

Nếu b là số lẻ	Nếu b là số chẵn
Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ ✧ Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm. ✧ Nếu $\Delta = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b}{2a}$. ✧ Nếu $\Delta > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$	Tính $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$ ✧ Nếu $\Delta' < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm. ✧ Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép: $x = -\frac{b'}{a}$. ✧ Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $\begin{cases} x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \\ x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \end{cases}$

b/ Định lý Viète

Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì:

$$\left. \begin{array}{l} \text{— Tổng hai nghiệm: } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ \text{— Tích hai nghiệm: } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}$$

c/ Dấu các nghiệm của phương trình

✧ Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
✧ Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a \cdot c < 0$
✧ Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$\diamond$ Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
$\diamond$ Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

d/ So sánh hai nghiệm của phương trình bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ với 1 số β bất kì

$$\diamond x_2 > x_1 > \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.g(\beta) > 0 \\ \frac{S}{2} > \beta \end{cases} \quad \diamond x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.g(\beta) > 0 \\ \frac{S}{2} < \beta \end{cases} \quad \diamond x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow a.g(\beta) < 0$$

2. Phương trình bậc 3: $ax^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ (2)

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Đặt $g(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac$

$\diamond$ Phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(\alpha) \neq 0 \end{cases}$
$\diamond$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm kép $x \neq \alpha$ hoặc (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(\alpha) \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases}$
$\diamond$ Phương trình (2) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) vô nghiệm hoặc (3) có nghiệm kép $x = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(\alpha) = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

3. Phương trình bậc bốn trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (4)

Đặt $t = x^2$. ĐK: $t \geq 0$. Phương trình (4) $\Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$ (5)

$\diamond$ Phương trình (4) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (5) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
$\diamond$ Phương trình (4) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (5) có 1 nghiệm $t = 0$ và 1 nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$
$\diamond$ Phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (5) có 2 nghiệm trái dấu hoặc (5) có nghiệm kép

$$\text{dương} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

4. Phương trình chứa căn thức : $+\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \quad +\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối: $+|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \quad +|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$

6. Bất phương trình chứa căn thức: $+\sqrt{A} \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases} \quad +\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$

7. Bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối: $+|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B \quad +|A| \geq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq B \\ A \leq -B \end{cases}$

Vấn đề 5 HÌNH HỌC PHẪNG

Trong mặt phẳng Decac Oxy cho:

- o Bốn điểm: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ và $M(x_o, y_o)$
- o Đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.
- o Đường tròn $(C_m): (x - a)^2 + (y - b)^2 = R$ hay $(C_m): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ có tâm là $I(a, b)$ và bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

— Vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow$ Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
(khoảng cách giữa hai điểm A, B)

— Để ba điểm $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$ và $C(x_C, y_C)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}$.

— Khoảng cách từ điểm $M(x_o, y_o)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ là: $d(M, \Delta) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

— Để A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow \Delta$ là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

— Diện tích $\Delta ABC: S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$
 $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{abc}{4R} = pr$

Trong đó: R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp và nửa chu vi.

— Để A và B nằm về 2 phía (khác phía) so với đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow (ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$.

— Để A và B nằm về cùng phía so với đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow (ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$.

— Để A và B cùng nằm trong đường tròn hay cùng nằm ngoài đường tròn

$$\Leftrightarrow P_{A/(C_m)} \cdot P_{B/(C_m)} > 0 \Leftrightarrow (x_A^2 + y_A^2 - 2ax_A - 2by_A + c)(x_B^2 + y_B^2 - 2ax_B - 2by_B + c) > 0.$$

— Để A và B nằm về hai phía khác nhau đối với đường tròn (1 điểm phía trong, một điểm phía ngoài)

$$\Leftrightarrow P_{A/(C_m)} \cdot P_{B/(C_m)} < 0 \Leftrightarrow (x_A^2 + y_A^2 - 2ax_A - 2by_A + c)(x_B^2 + y_B^2 - 2ax_B - 2by_B + c) < 0$$

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Cơ sở lý thuyết

1. Định nghĩa:

- + Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- + Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần: Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I.

- + Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.
- + Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

3. Điều kiện đủ: Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I.

- + Nếu $y' = f'(x) \geq 0, \forall x \in I$ [$f'(x) = 0$ tại 1 số hữu hạn điểm] thì $y = f(x)$ đồng biến trên I.
- + Nếu $y' = f'(x) \leq 0, \forall x \in I$ [$f'(x) = 0$ tại 1 số hữu hạn điểm] thì $y = f(x)$ nghịch biến trên I.
- + Nếu $y' = f'(x) = 0$, thì $y = f(x)$ không đổi trên I.

Chú ý: Nếu khoảng I được thay bởi **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì $y = f(x)$ phải liên tục trên đó.

DẠNG 1

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU (tìm khoảng tăng - giảm) CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

1. Phương pháp giải

- + **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số. Thường gặp các trường hợp sau:

$$\begin{aligned} - y &= \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \text{TXĐ: } Q(x) \neq 0 \\ - y &= \sqrt{Q(x)} \Rightarrow \text{TXĐ: } Q(x) \geq 0 \\ - y &= \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \Rightarrow \text{TXĐ: } Q(x) > 0 \end{aligned}$$

- + **Bước 2:** Tìm các điểm tại đó $y' = f'(x) = 0$ hoặc $y' = f'(x)$ không xác định, nghĩa là: tìm đạo hàm $y' = f'(x)$. Cho $y' = f'(x) = 0$ tìm nghiệm x_i với $(i = \overline{1; 2; 3 \dots n})$.

- + **Bước 3:** Sắp xếp các điểm đó theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.

- + **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên, kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

- $f'(x) = y' \geq 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến (tăng) trên khoảng.....và.....
- $f'(x) = y' < 0 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến (giảm) trên khoảng...và.....

2. Một số lưu ý khi giải toán

- + **Lưu ý 1:** Đối với hàm phân thức hữu tỷ thì dấu “=” không xảy ra.
- + **Lưu ý 2:**

• Đối với hàm dạng: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ thì hàm số luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) trên TXĐ, nghĩa là luôn tìm được $y' > 0$ (hoặc $y' < 0$) trên TXĐ.

• Đối với hàm dạng: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ luôn có ít nhất hai khoảng đơn điệu.

• Đối với hàm dạng: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ luôn có ít nhất một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến.

• Cả ba hàm số trên **không thể** luôn **đơn điệu trên $\mathbb{R}$** .

+ **Lưu ý 3:** Bảng xét dấu một số hàm thường gặp

a) **Nhi thức bậc nhất:** $y = f(x) = ax + b$, ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

b) **Tam thức bậc hai:** $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$)

• Nếu $\Delta < 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a	cùng dấu với a

• Nếu $\Delta = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu với a	0	cùng dấu với a

• Nếu $\Delta > 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức $f(x) = 0$, ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

c) Đối với hàm mà có $y' = f'(x) = 0$ có nhiều nghiệm, ta xét dấu theo nguyên tắc: (*phương pháp chung*)

• Thay 1 điểm lân cận x_0 gần x_n bên ô phải của bảng xét dấu vào $f'(x)$. [Thay số x_0 sao cho dễ tìm $f'(x)$].

• Xét dấu theo nguyên tắc: Dấu của $f'(x)$ **đổi dấu khi đi qua nghiệm đơn** và **không đổi dấu khi qua nghiệm kép**.

+ **Lưu ý 4:** Xem lại 1 số cách giải phương trình lượng giác thường gặp và ta có thể đưa hàm số lượng giác về dạng đa thức trong 1 số trường hợp.

+ **Lưu ý 5:** Cách tính đạo hàm hàm số dạng hữu tỉ (phân thức).

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}. \quad \text{Cách nhớ: Tích đường chéo chính trừ tích đường chéo phụ.}$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2 + b'x + c')^2} = \frac{(b'a - a'b)x^2 + 2(c'a - a'c)x + (c'b - b'c)}{(a'x^2 + b'x + c')^2} \quad \text{Cách nhớ: (Anh bạn ăn cháo hai lần bỏ chạy)}$$

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a/ $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

b/ $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

c/ $y = x^4 + 4x + 6$.

d/ $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

e/ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

f/ $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

$$g/ \quad y = \frac{2x-1}{x-1}.$$

$$h/ \quad y = \frac{3x+1}{1-x}.$$

$$i/ \quad y = \frac{3-2x}{x+7}.$$

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

$$a/ \quad y = \frac{-x^2+2x-1}{x+2}.$$

$$b/ \quad y = \frac{x^2-8x+9}{x-5}.$$

$$c/ \quad y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-x+3}}.$$

$$d/ \quad y = (4-3x)\sqrt{6x^2+1}.$$

$$e/ \quad y = x+1-2\sqrt{x^2+3x+3}.$$

$$f/ \quad y = \sqrt[3]{x^2-2x}.$$

Bài 3. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

$$a/ \quad y = |x^2+5x+6|.$$

$$b/ \quad y = -x+1-|2x^2+5x-7|.$$

$$c/ \quad y = \sqrt{4x-x^2}.$$

$$d/ \quad y = \sqrt{x^2+2x+3}.$$

$$e/ \quad y = |x^3-7x^2-7x+15|.$$

$$f/ \quad y = \frac{\sqrt{2x^2-x+3}}{3x+2}.$$

Bài 4. Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

$$a/ \quad y = x - \sin x, \quad x \in [0; \pi]$$

$$b/ \quad y = 2\sin x + \cos 2x, \quad x \in [0; \pi].$$

$$c/ \quad y = \sin^2 x + \cos x, \quad [0; \pi].$$

$$d/ \quad y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2.$$

$$e/ \quad y = \sin^2 x + \cos x + 1, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f/ \quad y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x, \quad x \in [0; \pi]$$

Bài 5. Chứng minh rằng:

a/ Hàm số $y = x^3 + x - \cos x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b/ Hàm số $y = 2\sin x + \tan x - 3x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

DẠNG 2

Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến

I. Cơ sở lý thuyết

Cho hàm số $y = f(x, m)$ với m là tham số, có tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \quad \forall x \in D$
- Hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} y' \geq 0$
- Hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} y' \leq 0$
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì nó phải xác định trên $\mathbb{R}$.

II. Phương pháp giải

Dạng 1: Nếu $y' = f'(x, m) = ax^2 + bx + c$ thì:

- Để hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- Để hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x, m) \leq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Chú ý: Đối với hàm phân số hữu tỉ thì dấu “=” không xảy ra.

Dạng 2: Nếu $y' = ax + b; \forall x \in [\alpha; \beta]$ thì:

- Để hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên $[\alpha; \beta] \Leftrightarrow y' \geq 0; \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} y'(\alpha) \geq 0 \\ y'(\beta) \geq 0 \end{cases}$

- Để hàm số $y = f(x, m)$ nghịch biến trên $[\alpha; \beta] \Leftrightarrow y' \leq 0 ; \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} y'(\alpha) \leq 0 \\ y'(\beta) \leq 0 \end{cases}$

Dạng 3: Nếu $y' = f'(x) = ax^2 + bx + c$ hoặc $y' = f'(x)$ là một hàm bất kỳ nào khác, mà ta cần $y' = f'(x) \geq 0$ hay $y' = f'(x) \leq 0$ trên khoảng (a, b) hoặc đoạn $[a, b]$ (hoặc trên nửa đoạn hay nửa khoảng nào đó). Thì ta làm theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm miền xác định của $y' = f'(x)$.
- **Bước 2:** Độc lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$. Lưu ý khi chuyển vế thành phân thức thì phải để ý điều kiện xác định của biểu thức để khi xét dấu $g'(x)$ ta đưa vào bảng xét dấu $g'(x)$.
- **Bước 3:** Tính $g'(x)$. Cho $g'(x) = 0$ và tìm nghiệm.
- **Bước 4:** Lập bảng biến thiên của $g'(x)$.
- **Bước 5:** Kết luận: “**Lớn hơn số lớn – Bé hơn số bé**”. Nghĩa là:
+ khi ta đặt $m \geq g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \geq$ **số lớn nhất** trong bảng biến thiên
+ khi ta đặt $m \leq g(x)$ thì dựa vào bảng biến thiên ta sẽ lấy giá trị $m \leq$ **số nhỏ nhất** trong bảng biến thiên

Dạng 4: Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $= l$.
Ta giải như sau:

- **Bước 1:** Tính $y' = f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và nghịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \quad (1).$
- **Bước 3:** Biến đổi $|x_1 - x_2| = l$ thành $(x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \quad (2).$
- **Bước 4:** Sử dụng định lý Viét đưa (2) thành phương trình theo m .
- **Bước 5:** Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

III. Một số lưu ý khi giải toán

- **Lưu ý 1:** Cần sử dụng thành thạo định lý Viét và so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với số β .
- **Lưu ý 2:** Ta có thể dùng dạng toán loại 3 để giải bài toán tìm tham số m của một bất phương trình hoặc tìm điều kiện để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc 1, 2, ...n nghiệm, ...

Bài 1. Tìm tham số m để hàm số:

- a/ $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
b/ $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
c/ $y = x^3 + (m-3)x^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên tập xác định của nó.
d/ $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2-1)x - 3m^2 - 1$ luôn giảm.
e/ $y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 3$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.
f/ $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 5$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp số: a/ $m \geq -1$ b/ $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ c/ $m \in [6 - 3\sqrt{3}; 6 + 3\sqrt{3}]$
d/ $m = 0$ e/ $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$ f/ $m \in (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$

Bài 2. Tìm tham số m để hàm số:

- a/ $y = \frac{mx + 3 - 2m}{x + m}$ luôn nghịch biến trên mỗi tập xác định của nó.

b/ $y = \frac{mx - 2}{x - m + 1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

c/ $y = \frac{2mx + 1}{x + m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

d/ $y = \frac{-2x^2 + (m + 2)x - 3m + 1}{x - 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Đáp số: a/ $-3 < m < 1$ b/ $-1 < m < 2$ c/ $-\frac{1}{\sqrt{2}} < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ d/ $m \leq \frac{1}{2}$

Bài 3. Tìm tham số m để hàm số:

a/ $y = x^3 - 2mx^2 - (m + 1)x + 1$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

b/ $y = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c/ $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

d/ $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

e/ $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

f/ $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

g/ $y = x + m \cos x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đáp số: a/ $m \leq -1$ b/ $m \leq -10$ c/ $m \leq 0$ d/ $m \geq \frac{1}{2}$
 e/ $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$ f/ $-2 < m < -1$ g/ $m \leq -\frac{14}{5}$ h/ $-1 \leq m \leq 1$

Bài 4. Tìm tham số m để hàm số:

a/ $y = x^3 - (m + 1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m^2 - m$ đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

b/ $y = \frac{2}{3}x^3 + (m + 1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - m^2$ đồng biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

c/ $y = \frac{1}{3}x^3 - (m + 1)x^2 + m(m + 2)x + 7$ đồng biến trên đoạn $[4; 9]$.

d/ $y = x^3 - mx^2 - (2m^2 - 7m + 7)x + 2(m - 1)(2m - 3)$ đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Bài 5. Tìm giá trị thực m để hàm số:

a/ $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 1.

b/ $y = -x^3 + x^2 - (2 - m)x + 1$ tăng trên đoạn có độ dài bằng 2.

Đáp số: a/ $m = \frac{9}{4}$. b/ $m = \frac{14}{3}$.

DẠNG 3

Ứng dụng tính đơn điệu chứng minh bất đẳng thức

1. Phương pháp giải

• **Bước 1:** Chuyển bất đẳng thức về dạng $f(x) > 0$ (hay $<, \geq, \leq$). Xét hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định do đề bài chỉ định hoặc miền xác định của bài toán mà ta phải tìm.

• **Bước 2:** Xét dấu $y' = f'(x)$. Suy ra hàm số đồng biến (hay nghịch biến).

• **Bước 3:** Dựa vào định nghĩa đồng biến (hay nghịch biến) để kết luận. Tức là:

+ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

+ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K$ và $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Một số lưu ý khi giải toán

• **Lưu ý 1:** Trong trường hợp ta chưa xét được dấu của $f'(x)$ thì ta đặt $h(x) = f'(x)$ và quay lại tiếp tục xét dấu $h'(x)$... cho đến khi nào xét dấu được thì thôi.

• **Lưu ý 2:** Nếu bất đẳng thức có hai biến thì ta đưa bất đẳng thức về dạng $f(a) < f(b)$. Xét tính đơn điệu của hàm số $f(x)$ trong khoảng (a, b) .

Bài 1. Chứng minh rằng

a/ $\sin x \leq x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b/ $\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

c/ $\tan x > \sin x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

d/ $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

e/ $\tan x + 2\sin x > 3x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

f/ $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 2. Chứng minh rằng

a. $\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b. $\sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \forall x > 0$

c. $\sin x > \frac{2x}{\pi}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

d. $x \sin \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{6x^2}, \forall x \in (0; +\infty)$

e. $\frac{1}{\sin^2 x} < \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

f. $1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x, \forall x > 0$

g. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \forall x \in (1; +\infty)$

h. $28/\sin^2 x < \frac{4x}{\pi^2}(\pi - x), \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

DẠNG 4

Ứng dụng tính đơn điệu để giải phương trình – bất phương trình có chứa tham số m

Bài toán 1. Tìm m để phương trình $f(x; m) = 0$ có nghiệm trên D ?

• **Bước 1.** Độc lập (tách) m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) = A(m)$.

• **Bước 2.** Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .

• **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$.

• **Bước 4.** Kết luận những giá trị cần tìm của m để phương trình $f(x) = A(m)$ có nghiệm trên D .

Lưu ý:

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ có GTLN và GTNN trên D thì giá trị m cần tìm là những m thỏa mãn:

$$\min_D f(x) \leq A(m) \leq \max_D f(x).$$

+ Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y = A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt.

Bài toán 2. Tìm m để bất phương trình $f(x; m) \geq 0$ hoặc $f(x; m) \leq 0$ có nghiệm trên D ?

• **Bước 1.** Độc lập (tách) m ra khỏi biến số x và đưa về dạng $f(x) \geq A(m)$ hoặc $f(x) \leq A(m)$.

• **Bước 2.** Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D .

• **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên xác định giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm:

+ Với bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm trên đường thẳng $y = A(m)$, tức là $A(m) \leq \max_D f(x)$ (khi $\max_D f(x) \exists$).

+ Với bất phương trình $f(x) \leq A(m)$ đó là những m sao cho tồn tại phần đồ thị nằm dưới đường thẳng $y = A(m)$, tức là $A(m) \geq \min_D f(x)$ (khi $\min_D f(x) \exists$).

Bài toán 3. Tìm tham số m để bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ hoặc $f(x) \leq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D$?

+ Bất phương trình $f(x) \geq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow \min_D f(x) \geq A(m)$.

+ Bất phương trình $f(x) \leq A(m)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow \max_D f(x) \leq A(m)$.

Lưu ý:

+ Các bài toán liên quan hệ phương trình, hệ bất phương trình $\longrightarrow$ ta cần biến đổi chuyển về các phương trình và bất phương trình.

+ Khi đổi biến, cần quan tâm đến điều kiện của biến mới.

LOẠI 1

Ứng dụng tính đơn điệu để giải phương trình có chứa tham số m

Bài 1. Tìm tham số thực m để phương trình:

a/ $x + \sqrt{3x^2 + 1} = m$ có nghiệm thực.

b/ $m\sqrt{x^2 + 2} = x + m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

c/ $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq x^2 - 4x + m$ có nghiệm thực trong đoạn $[2; 3]$.

Đáp số: a/ $m \geq \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$. b/ $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. c/ $m \leq -1$

Bài 2. Tìm tham số thực m để phương trình:

a/ $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm phân biệt.

b/ $\sqrt{x} + \sqrt{9 - x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ có nghiệm.

c/ $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$ có nghiệm.

d/ $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3} = mx$ có nghiệm.

Đáp số: a/ $m \geq \frac{9}{2}$ b/ $-\frac{9}{4} \leq m \leq 10$ c/ $-1 < m \leq \frac{1}{3}$ d/ $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 3. Tìm tham số thực m để phương trình:

a/ $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$ có nghiệm.

b/ $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$ có nghiệm.

LOẠI 2

Ứng dụng tính đơn điệu để giải bất phương trình có chứa tham số

Bài 1. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{4x-2} + 2\sqrt{4-x} < m$ có nghiệm.

Đáp số: $m > \sqrt{14}$.

Bài 2. Tìm tham số m để bất phương trình sau có nghiệm: $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$

Đáp số: $m \leq \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

Bài 3. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m$ (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-4; 6]$

Đáp số: $m \geq 6$.

Bài 4. Tìm m để bất phương trình $m\sqrt{2x^2+9} < x+m$ có nghiệm với mọi x .

Đáp số: $m < -\frac{3}{4}$.

BÀI 2 CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Cơ sở lý thuyết

1. Khái niệm cực trị của hàm số: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D ($D \subset \mathbb{R}$) và $x_o \in D$

+ x_o là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu $\exists (a, b) \in D$ và $x_o \in (a, b)$ sao cho $f(x) < f(x_o)$, $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_o\}$. Khi đó: $f(x_o)$ được gọi là giá trị cực đại của $y = f(x)$

+ x_o là điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu $\exists (a, b) \in D$ và $x_o \in (a, b)$ sao cho $f(x) > f(x_o)$, $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_o\}$. Khi đó: $f(x_o)$ được gọi là giá trị cực tiểu của $y = f(x)$

+ Nếu x_o là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $(x_o; f(x_o))$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị (Định lý Ferman).

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_o và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_o) = 0$. Nghĩa là hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

a. Định lý 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b) \supset x_o$ và có đạo hàm $(a, b) \setminus \{x_o\}$

+ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm** sang **dương** khi x đi qua x_o thì $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_o .

+ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương** sang **âm** khi x đi qua x_o thì $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_o .

x	a	x_o	b
$f'(x)$		0	+
$y = f(x)$	f(a)	cực tiểu $f(x_o)$	f(b)

x	a	x_o	b
$f'(x)$		0	-
$y = f(x)$	f(a)	cực đại $f(x_o)$	f(b)

b. Định lý 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b) \supset x_o$; $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) \neq 0$

+ Nếu $f''(x_o) < 0$ thì $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_o .

+ Nếu $f''(x_o) > 0$ thì $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_o .

DẠNG 1

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Phương pháp giải

✧ **Quy tắc 1:** Dùng định lý 1

- **Bước 1:** Tìm miền xác định. Tính $y' = f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm $x_i (i = \overline{1, 2, \dots, n})$ tại đó $y' = f'(x) = 0$ hoặc $y' = f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Xét dấu $f'(x)$, từ đó suy ra điểm cực trị dựa vào định lý 1.

✧ **Quy tắc 2:** Dùng định lý 2

- **Bước 1:** Tìm miền xác định. Tính $y' = f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm $x_i (i = \overline{1, 2, \dots, n})$ tại đó $y' = f'(x) = 0$ hoặc $y' = f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Xét dấu $f''(x)$ và $f''(x_i)$
 - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i .
 - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i .

2. Một số lưu ý khi giải toán

- ✧ Có 2 qui tắc tìm cực trị dựa vào định lý 1 (qui tắc 1) và định lý 2 (qui tắc 2):
 - Nếu việc xét dấu của đạo hàm bậc nhất dễ dàng, thì nên dùng qui tắc 1.
 - Nếu việc xét dấu ấy khó khăn (ví dụ như trong bài toán mà hàm số đã cho có dạng lượng giác, hoặc bài toán có chứa tham số), thì nên dùng qui tắc 2.
- ✧ Nếu y' không đổi dấu khi đi qua nghiệm (nghiệm kép) thì hàm số không có cực trị.
- ✧ Đối với hàm bậc 3 thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là điều kiện cần và đủ để hàm có cực trị.
- ✧ Không cần xét hàm số $y = f(x)$ có hay không có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ nhưng không thể bỏ qua điều kiện “hàm số liên tục tại điểm x_0 ”.

✧ Hàm số đạt cực trị tại $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}$

✧ Đối với hàm số căn thức ta không xét dấu được như bậc 1, bậc 2 thì chọn điểm để xét dấu.

Bài 1. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a/ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ b/ $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 4$ c/ $y = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$

d/ $y = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ e/ $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$ f/ $y = x^4 - 2x^2 - 3$

Đáp số: a/ Hàm số không có cực trị.

b/ $y_{CD} = y(-3) = 31$; $y_{CT} = y(1) = -1$.

c/ $y_{CD} = y(2) = \frac{2}{3}$; $y_{CT} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{4}$

d/ hàm số không có cực trị.

e/ $y_{CD} = y(-2) = 25$; Hàm số không có cực tiểu.

f/ $y_{CD} = y(0) = -3$; $y_{CT} = y(1) = y(-1) = -4$.

Bài 2. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a/ $y = \frac{3-2x}{x-1}$ b/ $y = \frac{3x+1}{1-x}$ c/ $y = \frac{-x^2+2x-1}{x+2}$ d/ $y = \frac{x^2-8x+9}{x-5}$

Đáp số: a/ Hàm số không có cực trị.

b/ Hàm số không có cực trị.

c/ $y_{CD} = y(1) = 0$; $y_{CT} = y(-5) = 12$.

d/ Hàm số không có cực trị.

Bài 3. Tìm cực trị của các hàm số:

a/ $y = \sqrt{-x^3 + 3x^2}$ b/ $y = x\sqrt{4-x^2}$ c/ $y = 2x - \sqrt{x^2 - 3}$

d/ $y = 2x + 1 - \sqrt{2x^2 - 8}$ e/ $y = |x|(x+2)$ f/ $y = (x-3)\sqrt{|x|}$

Đáp số:

$$a/ y_{CD} = y(2) = 2; y_{CT} = y(0) = 0.$$

$$b/ y_{CT} = y(-\sqrt{2}) = -2; y_{CD} = y(\sqrt{2}) = 2.$$

c/ Hàm số không có cực đại.

$$d/ y_{CT} = y(2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 1. \text{Hàm số không có điểm cực đại.}$$

$$e/ y_{CD} = y(-1) = 1; y_{CT} = y(0) = 0.$$

$$f/ y_{CD} = y(0) = 0; y_{CT} = y(1) = -2$$

Bài 4. Tìm cực trị của các hàm số:

$$a/ y = \sin 2x - x$$

$$b/ y = 2 \sin 2x - 3$$

$$c/ y = 3 - 2 \cos x - \cos 2x$$

$$d/ y = \cos x \sqrt{\sin x} \text{ trên } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Đáp số:

$$a/ y_{CD} = y\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right). y_{CT} = y\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} - k\pi.$$

$$b/ y_{CD} = y\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -1. y_{CT} = y\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = -5.$$

$$c/ y_{CD} = y\left(\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \frac{9}{2}. y_{CT} = y(k\pi) = 2(1 - \cos k\pi).$$

$$d/ \text{Hàm số đạt cực đại tại } x = \beta; y(\beta) = \frac{\sqrt[4]{12}}{3} \text{ với } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

DẠNG 2 TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ TẠI x_0

Bài toán 1: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực trị** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m)$

+ Để hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì: $f'(x_0, m) = 0 \Rightarrow m$.

Bài toán 2: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực đại** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực đại** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) < 0 \end{cases} \Rightarrow m$

Bài toán 3: Cho hàm số $y = f(x, m)$. Tìm tham số m để hàm số đạt **cực tiểu** tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải

+ Tìm tập xác định

+ Tính $y' = f'(x, m); y'' = f''(x, m)$

+ Để hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = x_0$ thì: $\begin{cases} f'(x_0, m) = 0 \\ f''(x_0, m) > 0 \end{cases} \Rightarrow m$

Bài 1. Tìm tham số để hàm số:

$$a/ y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m \text{ đạt cực đại tại } x = 2.$$

$$b/ y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6 \text{ đạt cực tiểu tại } x = 1.$$

$$c/ y = x^3 - 2x^2 + mx + 1 \text{ đạt cực tiểu tại } x = 1$$

d/ $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

e/ $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Đáp số a/ $m = 3$ b/ $m = -2$ c/ $m = 1$ d/ $m = -2$ e/ $m = -3$

Bài 2. Tìm tham số m để hàm số:

a/ $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực trị tại $x = 1$. Khi đó hàm số đạt cực đại hay cực tiểu.

Tìm cực trị tương ứng.

b/ $y = -x^3 + mx^2 - 4$ để hàm số nhận điểm $M(2;0)$ làm điểm cực đại.

c/ $y = 2(m^2 - 3)\sin x - 2m\sin 2x + 3m - 1$ đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{3}$.

Đáp số a/ $m = 2$ b/ $m = 3$ c/ $m = 1$

Bài 3. Tìm tham số a, b để hàm số:

a/ $y = \frac{x^4}{4} + ax^2 + b$ có cực trị tại $x = -1$ và giá trị cực trị tương ứng của hàm số bằng -2 .

b/ $y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$ có giá trị cực trị là những số dương và $x_0 = -\frac{5}{9}$ là điểm cực đại.

Đáp số: a/ $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{9}{4}$ b/ $a = -\frac{9}{25}; b \geq -\frac{128}{27}$ hoặc $a = \frac{9}{5}; b \geq -\frac{140}{27}$

Bài 4. Tìm giá trị của tham số để hàm số :

a/ $y = x^3 + mx^2 + (m + 1)x - 1$ có cực trị tại $x = 2$. Khi đó hàm số đạt cực đại hay cực tiểu ? Tính giá trị cực trị tương ứng.

b/ $y = 2x^3 - (4 - 2m)x^2 + (m - 5)x - 4$ có cực trị khi $x = 0$. Khi đó hàm số đạt cực đại hay cực tiểu. Tính giá trị cực trị tương ứng.

c/ $y = \frac{x^2 + 2mx - 2}{x + 1}$ có điểm cực trị khi $x = -2$. Khi đó hàm số đạt giá trị cực tiểu hay cực đại. Tính giá trị cực trị tương ứng.

d/ $y = x^3 - mx^2 + \left(m - \frac{2}{3}\right)x + 5$ đạt cực trị tại $x = 1$. Khi đó, nó là điểm cực đại hay cực tiểu, tính giá trị cực trị còn lại (nếu có).

Bài 5. Tìm giá trị của tham số $a; b$ để hàm số :

a/ $y = \frac{1}{4}x^4 - (2a + b)x^2 - a - b$ đạt giá trị cực đại bằng 2 tại $x = 1$.

b/ $y = -x^4 + (a - 3b)x^2 - 3a + b$ đạt giá trị cực tiểu bằng 1 tại $x = 0$

c/ $y = \frac{3}{4}x^4 - (3a - 2b)x^2 - a + 2b$ có giá trị cực trị bằng 0 khi $x = 0$. Khi đó hàm số đạt cực tiểu hay cực đại.

d/ $y = \frac{ax^2 + bx + ab}{bx + a}$ đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 4$.

e/ $y = \frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}$ đạt cực đại bằng 5 tại $x = 1$.

d/ $y = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ để hàm số đạt cực trị bằng -6 tại $x = -1$.

Bài 6. Tìm giá trị của tham số $a; b; c$ để hàm số :

a/ $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0,1)$.

b/ $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $A(1, -3)$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

c/ $y = ax^4 + bx^2 + c$ để đồ thị đi qua gốc tọa độ O và đạt cực trị bằng -9 tại $x = \sqrt{3}$.

Bài 7. Tìm giá trị của tham số $a; b; c; d$ để hàm số :

a/ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$, có giá trị cực đại bằng 1.

b/ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu bằng 0 tại $x = 0$ và đạt cực đại bằng $\frac{4}{27}$ tại $x = \frac{1}{3}$.

DẠNG 3 BIỆN LUẬN HOÀN ĐỘ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

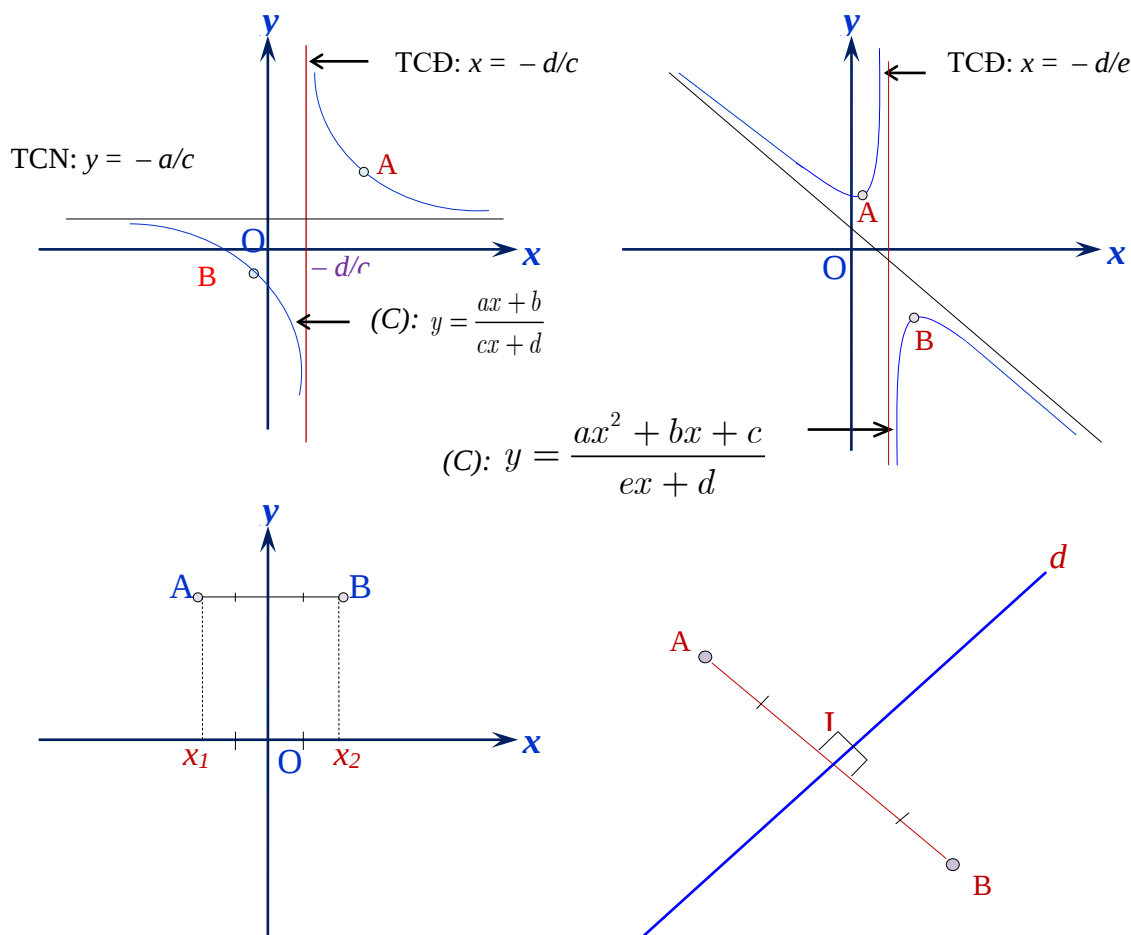
Hàm số $y = f(x)$ có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.

Một số lưu ý khi giải toán

• **Lưu ý 1:** Hoàn chỉnh độ cực trị thường là nghiệm của phương trình bậc 2. Do đó, ta cần phải nắm vững kiến thức về phương trình bậc 2 như: Định lý Viét, so sánh nghiệm phương trình bậc 2 với 1 số β bất kỳ, các điều kiện có nghiệm của phương trình, ... đồng thời, nó liên quan đến một số tính chất của hình học phẳng.

• **Lưu ý 2:** Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và hàm hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có cực đại và cực tiểu (2 cực trị) $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

• **Lưu ý 3:** Để A và B thuộc hai nhánh của đồ thị dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ hoặc $y = \frac{ax^2 + bx + c}{ex + d}$ thì 2 điểm A và B phải nằm về hai phía so với đường tiệm cận đứng tương ứng của đồ thị.



• **Lưu ý 4:** Cực trị của hàm bậc bốn : $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d$

$$+ \text{Ta có: } y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 3bx + 2c = 0 = g(x) \end{cases} \quad (2)$$

$$+ \text{Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi $a > 0$.

Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

+ Hàm số có 1 cực trị khi và chỉ khi (2) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm

$$x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Khi đó: Hàm chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ (nghĩa là có cực tiểu mà không có cực đại).

Hàm số chỉ có cực đại khi $a < 0$ (nghĩa là có cực đại mà không có cực tiểu).

Loại 1

Tìm giá trị tham số m để hàm số n cực trị, hoặc không có cực trị

Hàm bậc 3

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

$$\text{Hàm bậc 3: } y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0) \quad (*)$$

Phương pháp giải:

$$- \text{Ta có: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$+ \text{Hàm số } (*) \text{ có 2 cực trị} \Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$$

$$+ \text{Hàm số } (*) \text{ không có cực trị} \Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$$

Bài 1. Tìm giá trị tham số m để hàm số có cực trị

a/ $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x + 3m + 4$

b/ $y = -x^3 + (m+1)x^2 - 3x$

c/ $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$

d/ $y = \left(\frac{m-3}{3}\right)x^3 - (3-m)x^2 + 2x - 1$

e/ $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m+3)x + 1$

f/ $y = (4+m)x^3 - (2m+8)x^2 + x + 3$

Bài 2. Tìm giá trị tham số m để hàm số có 2 cực trị

a/ $y = x^3 + (m-2)x^2 - (m+2)x - 3$

b/ $y = 2x^3 - (m-2)x^2 + (6-3m)x + m + 1$

c/ $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$

d/ $y = (1-m)x^3 + (m+2)x^2 - (m-1)x + m + 2$

e/ $y = -x^3 + (3-m)x^2 - (9-3m)x + 2m$

f/ $y = \left(\frac{m-3}{3}\right)x^3 - (3-m)x^2 + 2x - 1$

Bài 3. Tìm giá trị tham số m để hàm số không có cực trị

a/ $y = x^3 - 3mx^2 + 3mx + 3m + 4$

b/ $y = x^3 + (m-1)x^2 + 3x - 2$

c/ $y = (4+m)x^3 - (2m+8)x^2 + x + 3$

d/ $y = x^3 - (2m-1)x^2 + 3x + 2$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số:

a/ $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ luôn có cực đại và cực tiểu với mọi giá trị m .

b/ $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 1$ luôn đạt cực trị tại x_1, x_2 với mọi giá trị m và biểu thức $x_2 - x_1$ không phụ thuộc vào m .

Hàm bậc 4 trùng phương

$$y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$$

Hàm bậc 4 trùng phương : $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0) \quad (*)$

Phương pháp giải:

• Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = x(4ax^2 + 2b) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 2b = 0 = g(x) \quad (1) \end{cases}$

• Hàm số $(*)$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$

Khi đó: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi $a > 0$.

Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu khi $a < 0$.

• Hàm số có 1 cực trị khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm hoặc có 1 nghiệm $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.b > 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Khi đó: Hàm số chỉ có cực tiểu khi $a > 0$ (nghĩa là có cực tiểu mà không có cực đại).

Hàm số chỉ có cực đại khi $a < 0$ (nghĩa là có cực đại mà không có cực tiểu).

Chú ý: Hàm bậc 4 trùng phương:

- Luôn có ít nhất 1 cực trị.
- Nếu có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh thuộc trục Oy.

Bài 1. Tìm giá trị tham số m để hàm số có cực trị

a/ $y = x^4 - 2(m - 4)x^2 + 2m - 5$

b/ $y = x^4 + 2(m + 1)x^2 + 1$

c/ $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 3$

d/ $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$

Bài 2. Tìm giá trị tham số m để hàm số có 1 cực trị

a/ $y = x^4 + 2(m + 1)x^2 + 1$

b/ $y = mx^4 + (m - 1)x^2 + 1 - 2m$

c/ $y = x^4 - mx^2 + 4x + m$

d/ $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(m - 1)x^2 + m - m^2$

Bài 3. Tìm giá trị tham số m để hàm số có 3 cực trị

a/ $y = 2x^4 + 8mx^3 + (8m + 1)x^2$

b/ $y = x^4 + (m - 1)x^2 + 2$

c/ $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$

d/ $y = (m - 2)x^4 + 2mx^2 + m - 1$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số luôn có cực đại và cực tiểu $\forall m \in \mathbb{D}$

a/ $y = -\frac{2}{3}x^3 + mx^2 + (m + 3)x - 4m$

b/ $y = -\frac{1}{3}x^3 + (2m - 1)x^2 - (m^2 - m - 3)x + 1$

c/ $y = x^3 + (m - 2)x^2 - (m + 2)x - 3$

d/ $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$

Hàm phân thức

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Hàm phân thức: $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (*)$

Phương pháp giải:

- Ta có: $y' = f'(x) = \frac{ad.x^2 + 2ae.x + bc + dc}{(dx + e)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dx + e \neq 0 \\ ad.x^2 + 2ae.x + bc + dc = 0 = g(x) \end{cases} \quad (1)$
- Hàm số (*) **có 2 cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} g\left(-\frac{e}{d}\right) \neq 0 \\ \Delta_{(1)} > 0 \end{cases}$
- Hàm số (*) **không có cực trị** $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} ad \neq 0 \\ \Delta_{(1)} \leq 0 \end{cases}$

Bài 1. Tìm giá trị tham số m để hàm số có cực trị

a/ $y = \frac{x^2 - x + m^2 - 1}{x + 1}$

b/ $y = \frac{mx^2 - (m - 2)x - 1}{x + 2}$

c/ $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m + 2}{x - 1}$

d/ $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$

Bài 2. Tìm giá trị tham số m để hàm số có 2 cực trị

a/ $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$

b/ $y = \frac{x^2 - x + m}{x + 1}$

c/ $y = \frac{x^2 - mx + 2}{x - 1}$

d/ $y = \frac{x^2 + (m^2 - 1)x - m}{x + 1}$

Bài 3. Tìm giá trị tham số m để hàm số không có cực trị

a/ $y = \frac{x^2 + 2mx - 3}{x - m}$

b/ $y = \frac{-x^2 + mx + 5}{x - 3}$

c/ $y = \frac{x^2 - (m + 1)x - m^2 + 4m - 2}{x - 1}$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số luôn có cực đại và cực tiểu $\forall m \in \mathbb{D}$

a/ $y = \frac{x^2 - m(m + 1)x + m^3 + 1}{x - m}$

b/ $y = \frac{x^2 + m(m^2 - 1)x - m^4 + 1}{x - m}$

c/ $y = \frac{x^2 - x + m^2 - 1}{x + 1}$

d/ $y = \frac{x^2 + mx - m + 2}{x - m + 1}$

Loại 2

Tìm giá trị tham số m để hàm số có n cực trị thỏa điều kiện cho trước (sử dụng định lý Viét)

Hàm bậc 3

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

Cách viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm bậc ba:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

• Bước 1: Tìm điều kiện để có cực trị là: $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Khi đó, giả sử $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là các điểm cực trị

• Bước 2: Chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được: $f(x) = Q(x).f'(x) + Ax + B$

• Bước 3: Vì $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là các điểm cực trị nên:
$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) = Q(x_1).f'(x_1) + Ax_1 + B \\ y_2 = f(x_2) = Q(x_2).f'(x_2) + Ax_2 + B \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f'(x_1) = 0 \\ f'(x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = Ax_1 + B \\ y_2 = f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Các điểm $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ nằm trên đường thẳng $y = Ax + B$ là đường thẳng nối hai điểm cực trị của hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Bài 1. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số sau

a/ $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

b/ $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

Bài 2. Tìm tham số m để hàm số sau đây có 2 cực trị. Hãy viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số sau:

a/ $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$

b/ $y = x^3 - 3(m - 1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m - 1)$

Bài 3. Cho hàm số: $y = x^3 + 2(m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

Đáp số: $m = 1$ hoặc $m = 5$

Bài 4. Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + \frac{1}{3}$. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 , đồng thời hai điểm cực trị này thỏa: $x_1 + 2x_2 = 1$.

Đáp số: $m = \frac{2}{3}$ hoặc $m = 2$

Bài 5. Cho hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x + 2$. Tìm m để đồ thị của hàm số có hai cực trị đều dương.

Đáp số: $\begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 6. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3(m + 1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$ có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

Đáp số: $m < 1$

Bài 7. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) có điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C) nằm về hai phía khác nhau của một đường tròn (phía trong đường tròn và phía ngoài đường tròn): $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx - 4my + 5m^2 - 1 = 0$.

Đáp số: $\frac{3}{5} < m < 1$

Bài 8. Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này cách đều trục tung Oy .

Đáp số: $m = 0$

Bài 9. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x - 2y - 5 = 0$.

Đáp số: $m = 0$

Bài 10. Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có hai điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía so với trục tung.

Đáp số: $1 < m < 2$

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 1 + m$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm ấy là ngắn nhất.

Đáp số: $m = 0$

Bài 12. Tìm giá trị của tham số m để hàm số:

a/ $y = x^3 + 3mx^2 + 7x + 3$ có đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 7$.

b/ $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

c/ $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -4x + 1$.

d/ $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x$ có các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị nằm trên đường thẳng $y = -4x$.

Bài 13. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán.

a/ Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - (m^2 - 1)x + 1$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa: $2(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

b/ Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$. Tìm m để hàm số luôn đạt cực trị tại x_1, x_2 với $|x_2 - x_1|$ không phụ thuộc vào m .

c/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Tìm tham số m để hàm số có 2 cực trị thỏa: $x_1 + 2x_2 = 1$.

d/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + mx - 1$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa: $|x_1 - x_2| \geq 8$.

e/ Cho hàm số $y = (x-m)(x^2 - 3x - m - 1)$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa: $|x_{CD} \cdot x_{CT}| = 1$.

f/ Cho hàm số $y = x^3 - 3(1+m)x^2 + 9x - m$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị, đồng thời hai hoành độ cực trị thỏa mãn: $|x_1 - x_2| \leq 2$.

Bài 14. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán.

a/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - \frac{1}{2}(3m-1)x^2 + 2m(m-1)x$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa: $x_1 = x_2^2 + 3$.

b/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x - \frac{m}{3}$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị thỏa: $x_1^2 = x_1 \cdot (x_2 - 5) + 12$.

c/ Cho hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x + 1$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị, đồng thời 2 hoành độ cực trị thỏa: $x_{CD}^2 = x_{CT}$.

Bài 15. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán

a/ Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 5$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị, đồng thời 2 điểm cực trị này nằm về hai phía so với trục hoành Ox .

b/ Cho hàm số $y = -\frac{(m+1)}{3}x^3 - mx^2 + 3m - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời hai điểm này nằm về hai phía so với trục tung Oy .

c/ Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 1$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị, đồng thời 2 điểm cực trị này nằm hai bên (khác phía nhau) so với đường thẳng $x = 3$.

Bài 16. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán

a/ Cho hàm số $y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$. Tìm m để hàm số có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ nhỏ hơn 1.

b/ Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + (m+1)x - 4$. Tìm m để hàm số có điểm cực tiểu tại một điểm có hoành độ âm.

Bài 17. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán.

a/ Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + x - 5m + 1$. Tìm m để hàm số có cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị bé hơn $\sqrt{2}$.

b/ Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - 4$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị là A và B thỏa: $AB^2 = \frac{900m^2}{729}$.

c/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + 1 + m$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa hai điểm ấy là ngắn nhất.

Bài 18. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán.

a/ Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (3m-1)x^2 - 4x - 2$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị là A, B sao cho diện tích tam giác MAB bằng 1 với $M(0;1)$.

b/ Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m-1)x + m$. Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABO vuông cân với O là gốc tọa độ.

c/ Cho hàm số $y = -x^3 + \frac{3m^2}{2}x^2$. Tìm m để hàm số có cực đại A, cực tiểu B và tạo với $C(-2; 3)$ thành tam giác ABC đều.

d/ Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

Hàm bậc 4 trùng phương

$$y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$$

- Luôn có ít nhất 1 cực trị.
- Nếu có 3 cực trị thì 3 cực trị này luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh thuộc trục Oy.

Bài 1. Cho hàm số $y = 3x^4 - mx^2 - 2$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại tại $A(0;-2)$ và đạt cực tiểu tại hai điểm B; C sao cho: $|x_C - x_B| < \sqrt{6(m^2 - m)}$.

Đáp số: $m \geq 1$

Bài 2. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Tìm tham số m để hàm số có 3 cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị này là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.

Đáp số: $m = \pm 1$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx + 2m + m^4$. Tìm tham số m để hàm số có 3 cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị này lập thành một tam giác đều.

Đáp số: $m = \sqrt[3]{3}$

Bài 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$. Tìm tham số m để hàm số có 3 cực trị, đồng thời các điểm cực trị A, B, C của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Đáp số: $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \end{cases}$

Bài 5. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán.

a/ Cho hàm số $y = 3x^4 - mx^2 - 2$. Tìm m để hàm số có cực đại tại $A(0;-2)$ và đạt cực tiểu tại hai điểm B; C sao cho: $|x_B \cdot x_C| > 2(m^2 + 8m + 10)$.

b/ Cho hàm số $y = x^4 - 4mx^2 + 1$. Tìm m để hàm số có cực đại tại $A(0;1)$ và đạt cực tiểu tại hai điểm B; C sao cho: $|x_C - x_B| > \sqrt{2(2m - m^2)}$.

Bài 6. Tìm tham số m để hàm số thỏa yêu cầu của bài toán.

a/ Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + 3$. Tìm m để hàm số có 3 cực trị và 3 điểm này lập thành 1 tam giác đều.

b/ Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + 4 + m$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị là A, B, C và tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

c/ Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$. Tìm m để hàm số có cực trị là A, B, C sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

d/ Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số có 3 cực trị, đồng thời các điểm cực trị A, B, C của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

BÀI 3

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D với $D = \mathbb{R}$.

$$M = \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \text{ và } m = \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

2. Tính chất:

a. Tính chất 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ thì :

$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

b. Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a, b]$ thì :

$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a,b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

DẠNG 1

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT (GTLN) VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT (GTNN) CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Phương pháp giải

Phương pháp 1: Dùng bảng biến thiên để tìm max – min. Phương pháp này thường dùng cho bài toán tìm GTLN và GTNN trên **một khoảng** (a, b) **hoặc nửa đoạn** $[a, b), (a, b]$.

• **Bước 1:** Tính $f'(x)$.

• **Bước 2:** Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

• **Bước 3:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Phương pháp 2: Thường dùng khi tìm max – min của hàm số liên tục trên **một đoạn** $[a, b]$.

• **Bước 1:** Tính $f'(x)$.

• **Bước 2:** Giải $f'(x) = 0$ tìm được các nghiệm $x_i (i = \overline{1, n})$ trên đoạn $[a, b]$ (nếu có).

• **Bước 3:** Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

• **Bước 4:** So sánh các giá trị vừa tính được và kết luận

$$\begin{cases} \max_{[a,b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \\ \min_{[a,b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \end{cases}.$$

Chú ý: Có thể dùng bảng biến thiên để tìm max – min của hàm số trên **một đoạn** $[a, b]$.

2. Một số lưu ý khi giải toán

• **Lưu ý 1:** Phương trình $f'(x) = 0$ có thể là phương trình mũ, logarit, đại số, lượng giác, ... Do đó đó, cần nắm vững kiến thức về cách giải phương trình các loại.

• **Lưu ý 2:** Đối với hàm lượng giác dạng: $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} (*)$.

$$\text{Đặt } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Thay vào $(*)$, ta được hàm hữu tỉ đại số dạng: $f(t) = \frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'}$

• **Lưu ý 3:** Khi bài toán yêu cầu tìm max – min nhưng không nói trên tập nào thì ta hiểu tìm max – min trên tập xác định D của hàm số.

• **Lưu ý 4:** Để tìm tham số m, n của hàm số $f(x, m, n)$ với x là biến số sao cho $f(x, m, n)$ có $\max f(x, m, n) = a$ và $\min f(x, m, n) = b$. Ta làm như sau:

+ **Bước 1:** Hàm số đã cho xác định và liên tục trên D mà đề cho hoặc ta tìm.

- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng a khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x, m, n) \leq a \\ \exists x_0 \in D : f(x_0, m, n) = a \text{ có nghiệm } x_0 \end{cases}$

- Giải tìm điều kiện và kết hợp đánh giá hai vế của một đẳng thức: $\begin{cases} A \geq B \\ A \leq B \end{cases} \Leftrightarrow A = B \quad (1).$

+ **Bước 2:** Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng b khi và chỉ khi $\begin{cases} f(x, m, n) \geq b \\ \exists x_0 \in D : f(x_0, m, n) = b \text{ có nghiệm } x_0 \end{cases}.$

Tương tự ta được phương trình (2).

+ **Bước 3:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow m, n$ cần tìm.

• **Lưu ý 5:** Ta có thể tìm GTLN và GTNN của hàm số bằng cách dùng miền giá trị (**đk có nghiệm**)

Đặt vấn đề: Tìm max – min của hàm số $y = f(x)$ trên một miền D cho trước ?

• **Bước 1:** Gọi y_0 là một giá trị tùy ý của $f(x)$ trên D, thì hệ phương trình (ẩn x) sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = y_0 \\ x \in D \end{cases}$$

• **Bước 2:** Tùy theo điều kiện của hệ trên mà ta có các điều kiện tương ứng. Thông thường điều kiện ấy (sau khi biến đổi) có dạng: $m \leq y_0 \leq M \quad (3)$. Vì y_0 là một giá trị bất kỳ của $f(x)$ nên từ (3) ta suy ra

$$\text{được: } \begin{cases} \min_D f(x) = m \\ \max_D f(x) = M \end{cases}$$

Loại 1

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a/ $y = x + \frac{4}{x}$, $(x > 0)$.

b/ $y = \frac{x-1}{x^2-x+1}$.

c/ $y = x - \frac{1}{x}$, $x \in (0; 2]$.

d/ $y = \frac{x + \sqrt{1+9x^2}}{8x^2+1}$, $(x > 0)$.

Đáp số:

a/ $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 4$ khi $x = 2$

b/ $\max_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{1}{3}$ khi $x = 0$ và $\min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{1}{3}$ khi $x = 2$.

c/ $\min_{(0;2]} f(x) = 0$ khi $x = 1$.

f/ $\min_{(0;+\infty)} g(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$; $\max_{(0;+\infty)} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ khi $x = \frac{1}{6\sqrt{2}}$.

Bài 2. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

a/ $y = 1 + 8x - x^2$.

b/ $y = 4x^3 - 3x^4$.

c/ $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

d/ $y = \frac{x}{4 + x^2}$.

e/ $y = \frac{2x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$.

f/ $y = \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1}$.

Bài 3. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

a/ $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$.

b/ $y = x^2 + \frac{2}{x}$, $x > 0$.

c/ $y = x\sqrt{3-x}$

d/ $y = \sqrt{x^2 + 2}$

e/ $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+200}$

f/ $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

Loại 2

TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = f(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ trên đoạn $[0; 2]$

b/ $y = f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$

c/ $y = x^6 + 4(1-x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

d/ $y = f(x) = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

e/ $y = f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ trên đoạn $[-5; -3]$.

f/ $y = f(x) = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

Đáp số:

a/ $\begin{cases} \max_{[0;2]} f(x) = 1 \text{ khi } x = 0 \\ \min_{[0;2]} f(x) = -9 \text{ khi } x = 2 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} \max_{[0;2]} f(x) = 5 \text{ khi } x = 1 \\ \min_{[0;2]} f(x) = -13 \text{ khi } x = 2 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} \max_{[-1;1]} y = 4 \text{ khi } x = 0 \\ \min_{[-1;1]} y = \frac{4}{9} \text{ khi } x = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$

$$d/ \begin{cases} \max_{[2;4]} f(x) = \frac{11}{2} & \text{khi } x = 2 \\ \min_{[2;4]} f(x) = 6 & \text{khi } x = 3 \end{cases} \quad e/ \begin{cases} \max_{[-5;-3]} f(x) = -8 & \text{khi } x = -4 \\ \min_{[-5;-3]} f(x) = -9 & \text{khi } x = -3 \end{cases} \quad f/ \begin{cases} \max_{[0;2]} y = f(0) = \frac{1}{3} & \text{khi } x = 0 \\ \min_{[0;2]} y = f(2) = -5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a/ y = f(x) = |x^2 - 3x + 2| \text{ trên đoạn } [-10; 10]. \quad b/ y = |x^3 - 3x^2 + 1| \text{ trên đoạn } [-2; 1].$$

Đáp số: a/ $\begin{cases} \min_{[-10;10]} f(x) = f(1) = f(2) = 0 \\ \max_{[-10;10]} f(x) = f(-10) = 132 \end{cases}$ b/ $\begin{cases} \max_{[-2;1]} f(x) = 19 \\ \min_{[-2;1]} g(x) = 0 \end{cases}$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a/ y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} \text{ trên } [-1; 3]. \quad b/ y = x + 1 + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9} \text{ trên } [-1; 3].$$

$$c/ y = x + \sqrt{2 - x^2} \text{ trên } [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]. \quad d/ y = x + 1 + 2\sqrt{-2x^2 + 2x + 4} \text{ trên } [-1; 2].$$

$$e/ y = (x - 6)\sqrt{x^2 + 4} \text{ trên } [0; 3]. \quad f/ y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ trên } [-1; 2].$$

Đáp số:

$$a/ \begin{cases} \max_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2} & \text{khi } x = -1; x = 2 \\ \min_{[-1;3]} f(x) = 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad b/ \begin{cases} \max_{[-1;3]} f(x) = 6 & \text{khi } x = 2 \\ \min_{[-1;3]} f(x) = 0 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} \max_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} f(x) = 2 & \text{khi } x = 1 \\ \min_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} f(x) = -\sqrt{2} & \text{khi } x = -\sqrt{2} \end{cases} \quad d/ \begin{cases} \max_{[-1;2]} f(x) = \frac{3 + \sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} & \text{khi } x = \frac{1 + \sqrt{6}}{2} \\ \min_{[-1;2]} f(x) = 0 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} \max_{[0;3]} y = -3\sqrt{13} & \text{khi } x = 3 \\ \min_{[0;3]} y = -12 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad f/ \begin{cases} \max_{[-1;2]} f(x) = \sqrt{2} & \text{khi } x = 1 \\ \min_{[-1;2]} f(x) = 0 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a/ y = \sqrt{4 - x^2} \quad b/ y = x + \sqrt{4 - x^2} \quad c/ y = \sqrt{2 + x} + \sqrt{4 - x}$$

$$d/ y = 3x + \sqrt{10 - x^2} \quad e/ y = (x + 2)\sqrt{4 - x^2} \quad f/ y = \sqrt{3 + 2x - x^2}$$

Đáp số:

$$a/ \begin{cases} \max_{[-2;2]} f(x) = 0 & \text{khi } x = \pm 2 \\ \min_{[-2;2]} f(x) = 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad b/ \begin{cases} \max_{[-2;2]} f(x) = 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \\ \min_{[-2;2]} f(x) = -2 & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} \max_{[-2;4]} f(x) = 2\sqrt{3} & \text{khi } x = 1 \\ \min_{[-2;4]} f(x) = \sqrt{6} & \text{khi } x = -2; x = 4 \end{cases} \quad d/ \begin{cases} \max_{[-\sqrt{10};\sqrt{10}]} y = 10 & \text{khi } x = 3 \\ \min_{[-\sqrt{10};\sqrt{10}]} y = -3\sqrt{10} & \text{khi } x = -\sqrt{10} \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} \max_{[-2;2]} y = 3\sqrt{3} & \text{khi } x = 1 \\ \min_{[-2;2]} y = 0 & \text{khi } x = \pm 2 \end{cases} \quad f/ \begin{cases} \max_{[-1;3]} y = 2 & \text{khi } x = 1 \\ \min_{[-1;3]} y = 0 & \text{khi } x = -1, x = 3 \end{cases}$$

Bài 5. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau

a/ $y = |x^2 - 4x| + 3$ trên $[0; 3]$.

b/ $y = |x^2 - 3x + 2|$ trên $[-10; 10]$.

Loại 3 TÌM GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

b/ $y = \sqrt{2} \cos 2x + 4 \sin x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c/ $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$

d/ $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Đáp số:

a/ $\max_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} y = \frac{\pi}{2}$ khi $x = -\frac{\pi}{2}$ và $\min_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} y = -\frac{\pi}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{2}$.

b/ $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = 2\sqrt{2}$ khi $x = \frac{\pi}{4}$ và $\min_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} y = \sqrt{2}$ khi $x = 0$.

c/ $\begin{cases} \max_{[0, \pi]} f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} & \text{khi } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4} \\ \min_{[0, \pi]} f(x) = 0 & \text{khi } x = 0, x = \pi \end{cases}$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$.

b/ $y = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

c/ $y = \cos^4 x + \sin^2 x - 2$.

d/ $y = \sin x + 3 \sin 2x$

e/ $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$

f/ $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$.

g/ $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$.

h/ $y = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 + \cos x}$

Đáp số:

a/ $\begin{cases} \max_{[-1, 1]} f(t) = \max_{D=\mathbb{R}} y = 3 & \text{khi } t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \min_{[-1, 1]} f(t) = \min_{D=\mathbb{R}} y = -\frac{3}{2} & \text{khi } t = \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \end{cases}$

$$b/ \begin{cases} \max f(x) = \frac{81}{16} \text{ khi } t = \sin 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \\ \min f(x) = \frac{7}{2} \text{ khi } t = \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

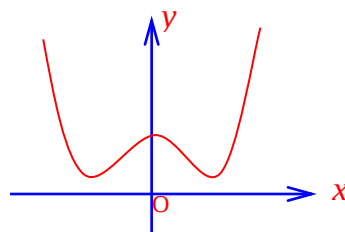
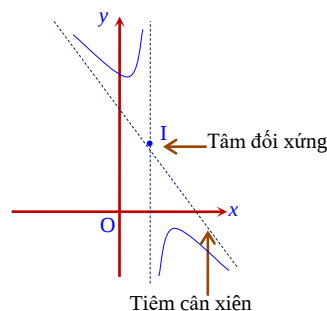
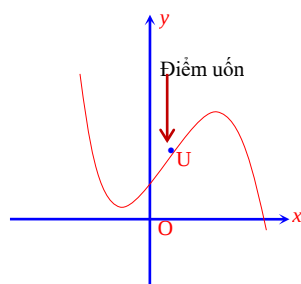
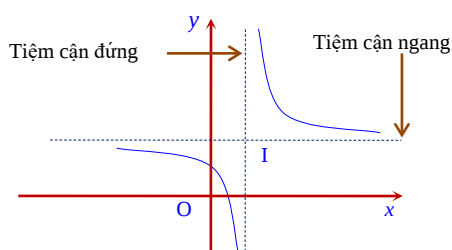
$$c/ \begin{cases} \max y = -1 \text{ khi } t = 1; t = 0 \\ \min y = -\frac{5}{4} \text{ khi } t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d/ \max y = \frac{5\sqrt{5}}{3} \text{ khi } \begin{cases} \cos x = \frac{2}{3} \\ \sin x = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos \frac{2}{3} \\ x = \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} \max_{t \in [-1;1]} f(x) = \max_{t \in [-1;1]} f(t) = 1 \text{ khi } t = \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \min_{t \in [-1;1]} f(x) = \min_{t \in [-1;1]} f(t) = 0 \text{ khi } t = \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} \max_{\mathbb{R}} f(t) = 2 \text{ khi } t = 2 \\ \min_{\mathbb{R}} f(t) = \frac{2}{11} \text{ khi } t = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad g/ \begin{cases} \min y = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \\ \max y = 1 \end{cases} \quad h/ \begin{cases} \max_{\mathbb{R}} f(x) = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ \min_{\mathbb{R}} f(x) = 1 \end{cases}$$

BÀI 4 TIỆM CẬN VÀ ĐIỂM UỖN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



CƠ SỞ LÝ THUYẾT

I. Tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Định nghĩa

a. Đường thẳng $x = x_o$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một

trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \mid \lim_{x \rightarrow x_o^+} f(x) = +\infty \\ 2 \mid \lim_{x \rightarrow x_o^-} f(x) = -\infty \\ 3 \mid \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = +\infty \\ 4 \mid \lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = -\infty \end{array} \right] \Rightarrow TCD: x = x_o$$

b. Đường thẳng $y = y_o$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất 1

trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_o \\ 2 \mid \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_o \end{array} \right] \Rightarrow TCN: y = y_o$$

c. Đường thẳng $y = ax + b$; ($a \neq 0$) được gọi là **đường tiệm cận xiên** của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \\ 2 \mid \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \end{array} \right] \Rightarrow TCX: y = ax + b$$

2. Lưu ý

• Trường hợp $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm số phân thức hữu tỷ.

+ Nếu $Q(x) = 0$ có nghiệm x_o thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_o$ (x_o là điểm tại đó hàm số không xác định $\Rightarrow x = x_o$ là tiệm cận đứng).

+ Nếu bậc $[P(x)] \leq$ bậc $[Q(x)]$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.

+ Nếu bậc $[P(x)] =$ bậc $[Q(x)] + 1$ thì đồ thị có tiệm cận xiên.

+ Số tiệm cận đứng của hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là số nghiệm của hệ $\begin{cases} Q(x) = 0 \\ P(x) \neq 0 \end{cases}$

+ Đồ thị có tiệm cận ngang thì không có tiệm cận xiên và ngược lại.

• Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của **đường tiệm cận xiên**, ta có thể áp dụng các công

thức:

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \\ a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] \end{cases} \text{ . Nếu } a = 0 \text{ thì TCX trở thành TCD.}$$

• Thông thường đối với hàm dạng: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ thì ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia đa thức, lấy phần nguyên là tiệm cận xiên do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{phần dư}) = 0$.

• Hàm số bậc ba và bậc bốn không có các đường tiệm cận.

• Hàm số $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$; ($a \neq 0$)

+ Nếu: $a < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số không có các đường tiệm cận.

+ Nếu: $a > 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ khi $x \rightarrow +\infty$ và

$$y = -\sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \text{ khi } x \rightarrow -\infty.$$

• Đồ thị hàm số $y = mx + n + p\sqrt{ax^2 + bx + c}$; ($a > 0$) có tiệm cận là đường thẳng

$$y = mx + n + p\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|.$$

II – Điểm uốn của đồ thị hàm số

1. Định nghĩa: Điểm $I(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một khoảng (a, b) chứa điểm x_0 sao cho trên một trong hai khoảng (a, x_0) và (x_0, b) tiếp tuyến của đồ thị tại điểm U nằm về phía trên đồ thị còn trên điểm kia tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị.

2. Tính chất

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0 ; $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì $I(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số.

- Đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; ($a \neq 0$) luôn có một điểm uốn và đó là tâm đối xứng của đồ thị.

DẠNG 1 TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Tìm các tiệm cận của các hàm số sau

a/ $y = \frac{2x-5}{x-1}$

b/ $y = \frac{x}{2-x}$

c/ $y = \frac{10x+3}{1-2x}$

d/ $y = \frac{7}{x} - 1$

Bài 2. Tìm các tiệm cận của các hàm số sau

a/ $y = \frac{x^2+4x-1}{2x-1}$

b/ $y = \frac{x^2-x+6}{x-1}$

c/ $y = \frac{7x^2+4x+5}{2-3x}$

d/ $y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$

e/ $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

f/ $y = \frac{2x^3-x^2}{x^2+1}$

Bài 3. Tìm các tiệm cận của các hàm số sau

a/ $y = \sqrt{x^2+3}$

b/ $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

c/ $y = \sqrt{x^2+x+3}$

d/ $y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

e/ $y = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$

f/ $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x+1}$

g/ $y = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2-9}}$

h/ $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+1}}$

i/ $y = \frac{\sqrt{x^2+5x+1}}{x+2}$

Bài 4. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị của các hàm số sau có đúng hai tiệm cận đứng

a/ $y = \frac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$

b/ $y = \frac{x^2+2}{3x^2+2(m+1)x+4}$

c/ $y = \frac{x+3}{x^2+x+m-2}$

d/ $y = \frac{x-3}{x^2+2(m+2)x+m^2+1}$

Bài 5. Tìm m để đồ thị hàm số sau có tiệm cận xiên

a/ $y = \frac{x^2+(3m+2)x+2m-1}{x+5}$

b/ $y = \frac{mx^2+(2m+1)x+m+3}{x+2}$

Bài 6. Tính diện tích của tam giác tạo bởi tiệm cận xiên của đồ thị các hàm số sau chắn trên hai trục tọa độ Oxy

a/ $y = \frac{3x^2+x+1}{x-1}$

b/ $y = \frac{-3x^2+x-4}{x+2}$

c/ $y = \frac{x^2+x-7}{x-3}$

Bài 7. Tìm m để tiệm cận xiên của đồ thị các hàm số sau tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích S đã được chỉ ra

a/ $y = \frac{x^2+mx-1}{x-1}; S = 8$

b/ $y = \frac{x^2+(2m-1)x-2x+3}{x+1}; S = 8$

Bài 8. Chứng minh rằng: Tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đồ thị của các hàm số đến hai tiệm cận bằng một hằng số.

a) $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

b) $y = \frac{2x^2+5x-4}{x+3}$

c) $y = \frac{x^2+x-7}{x-3}$

Bài 9. Định m để hàm số có tiệm cận đứng đi qua $A(-1; \sqrt{2})$ với $y = \frac{mx-1}{2x+m}$

Bài 10. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + m - 1}{x - 1}$ có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến đường tiệm cận xiên của nó bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x + m^2 - 4m + 3}{mx + 1}$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến tiệm cận xiên hoặc ngang là nhỏ nhất?

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x^2 + (m+1)x - 2m + 3}{x - 2m} \quad (C_m), \forall m \in \mathbb{R}$.

a/ Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị (C_m) bằng 45° .

b/ Tìm m để đồ thị (C_m) có tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho ΔAOB có diện tích bằng 4?

DẠNG 2 ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Tìm điểm uốn của đồ thị các hàm số sau

a/ $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 2$

b/ $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

c/ $y = x^4 - 6x^2 + 3$

d/ $y = x^4/4 - 2x^2 + 3$

Bài 2. Tìm giá trị của tham số m, n để đồ thị của hàm số sau có điểm uốn I được chỉ ra

a/ $y = -x^3/3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 8/3; I(1;3)$

b/ $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4; I(1;2)$

c/ $y = mx^3 + nx^2 + 1; I(1,4)$

d/ $y = x^3 - mx^2 + nx - 2; I(2/3, -3)$

BÀI 5 KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Các bước khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

• **Bước 1:** Tìm tập xác định của hàm số.

• **Bước 2:** Xét sự biến thiên của hàm số.

+ Tính y'

+ Tìm các điểm tại đó đạo hàm $y' = 0$ hoặc không xác định.

+ Tìm các giới hạn $\Rightarrow$ tiệm cận (nếu có).

+ Lập bảng biến thiên, ghi rõ dấu của đạo hàm, chiều biến thiên, cực trị của hàm số.

• **Bước 3:** Vẽ đồ thị hàm số

+ Tìm điểm uốn của đồ thị (đối với hàm số bậc ba và hàm số trùng phương).

- Tính y''

- Tìm các điểm tại đó $y'' = 0$ và xét dấu y''

+ Vẽ các đường tiệm cận (nếu có) của đồ thị.

+ Xác định một số điểm đặc biệt của đồ thị như: giao điểm của đồ thị với trục tọa độ (trong trường hợp đồ thị không cắt các trục tọa độ hoặc tìm tọa độ giao điểm ấy phức tạp thì có thể bỏ qua). Ngoài ra, ta tìm thêm một số điểm thuộc đồ thị nhằm vẽ hình chính xác hơn.

+ Nhận xét về đồ thị: Chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có) của đồ thị.

Bài 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau đây:

a/ $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

b/ $y = 2 + 3x - x^3$

c/ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

d/ $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 - x - 1$

e/ $y = x^3 + x + 1$

f/ $y = -2x^3 - x + 2$

g/ $y = (x-1)^2(4-x)$

h/ $y = (x+3)^2x$

i/ $y = -x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

Bài 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau đây:

a/ $y = x^4 - 2x^2 - 1$

b/ $y = -2x^4 + 4x^2 + 5$

c/ $y = \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 1$

d/ $y = -x^4 - x^2 + 2$

e/ $y = (x-1)^2(x+1)^2$

f/ $y = (2-x)^2(x+2)^2$

Bài 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số nhất biến sau đây:

a/ $y = \frac{x+1}{x+2}$

b/ $y = \frac{2x-1}{x+1}$

c/ $y = \frac{2x+1}{x-1}$

d/ $y = \frac{2x}{x-1}$

Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số hữu tỉ sau đây:

a/ $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

b/ $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

c/ $y = \frac{x^2+x+2}{x-1}$

d/ $y = -x+1+\frac{1}{x+1}$

BÀI 6

CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI TOÁN 1

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

Dạng 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_o, y_o)$:**Phương pháp:**

- **Bước 1:** Phương trình tiếp tuyến có dạng $P_{ttt}: y = k_{tt} \cdot (x - x_o) + y_o$ (*) với $k_{tt} = f'(x_o)$.
- **Bước 2:** Tính $y' = f'(x) \Rightarrow k_{tt} = f'(x_o)$.
- **Bước 3:** Thay x_o, y_o, k_{tt} vào (*) $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Dạng 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ cho trước:**Phương pháp:****Cách 1:**

- **Bước 1:** Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C)

Pttt cần tìm đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ có dạng: $y = k_{tt}(x - x_M) + y_M$ (*)

• **Bước 2:**

+ Tính $y' = f'(x) \Rightarrow k_{tt} = f'(x_0)$.

+ Vì tiếp tuyến tiếp xúc với đồ thị (C) tại $N(x_0; y_0)$ nên:
$$\begin{cases} k_{tt} = f'(x_0) & (1) \\ f(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_M) + y_M & (2) \end{cases}$$

• **Bước 3:**

+ Giải phương trình (2) tìm x_0 , sau đó thay vào phương trình (1) tìm được k_{tt}

+ Thay k_{tt} vào (*) ta được *Pttt* cần tìm

Cách 2:

• **Bước 1::** Gọi *Pttt* có dạng *Pttt*: $y = ax + m$ (1)

• **Bước 2:** Áp dụng điều kiện tiếp xúc:
$$\begin{cases} y_{(C)} = y_{tt} \\ y'_{(C)} = y'_{tt} \end{cases} \Rightarrow a$$

• **Bước 3:** Do *Pttt* đi qua M nên ta thay tọa độ M vào (1) $\Rightarrow m$

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$, biết tiếp tuyến có hệ số góc k_{tt} cho trước:

Phương pháp:

• **Bước 1:** Gọi $N(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C)

Pttt cần tìm tại điểm $N(x_0; y_0)$ có dạng: $y = k_{tt}(x - x_0) + y_0$ (*)

• **Bước 2:** Tính $y' = f'(x) \Rightarrow k_{tt} = f'(x_0)$ (1).

• **Bước 3:**

+ Giải phương trình (1) tìm x_0 , sau đó thay vào đồ thị (C) tìm được y_0 .

+ Thay x_0, y_0 vào (*) ta được *Pttt* cần tìm.

Lưu ý: Viết *Pttt* là tìm ba thành phần x_o, y_o, k_{tt} . Một số cách tìm hệ số góc k_{tt} thường gặp:

• Nếu *Pttt* // $\Delta: y = ax + b \Leftrightarrow k_{tt} = k_{\Delta} = a = f'(x_o) \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o$.

• Nếu *Pttt* $\perp \Delta: y = ax + b \Leftrightarrow k_{tt} = -\frac{1}{k_{\Delta}} = -\frac{1}{a} = f'(x_o) \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o$.

• Nếu $M(x_o, y_o) = (C) \cap Oy \Rightarrow x_o = 0 \rightarrow y_o \rightarrow f'(x_o)$.

• Nếu $M(x_o, y_o) = (C) \cap Ox \Rightarrow y_o = 0 \rightarrow x_o \rightarrow f'(x_o)$.

• Nếu *Pttt* tạo với chiều dương Ox một góc α thì $k_{tt} = f'(x_o) = \tan \alpha \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o$

• Nếu *Pttt* tạo với $\Delta: y = ax + b$ một góc α thì $\left| \frac{k_{tt} - a}{1 + k_{tt} \cdot a} \right| = \tan \alpha \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o$.

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm được chỉ ra:

a/ $(C): y = 3x^3 - x^2 - 7 + 1$ tại điểm $A(0; 1)$.

b/ $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại điểm $B(1; 0)$.

c/ $(C): y = \frac{3x + 4}{2x - 1}$ tại điểm $C(1; 7)$.

d/ $(C): y = x + 1 - \frac{2}{2x - 1}$ tại điểm $D(0; 3)$.

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm được chỉ ra:

a/ $(C): y = \frac{3(x-2)}{x-1}$ tại điểm A có tung độ bằng 4.

b/ $(C): y = \frac{x+1}{x-2}$ tại các giao điểm của (C) với trục hoành, trục tung.

c/ $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại điểm uốn của đồ thị (C) .

d/ $(C): y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$ tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

e/ $(C): y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-2}$ tại điểm B có hoành độ là 4.

f/ $(C): y = 2x - \sqrt{2x^2 + 1}$ tại các giao điểm của (C) với trục hoành, trục tung.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết rằng Δ có hệ số góc k được chỉ ra:

a/ $(C): y = 2x^3 - 2x^2 + 5$; $k = 12$

b/ $(C): y = \frac{2x-1}{x-2}$; $k = -3$

c/ $(C): y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x-1}$; $k = -1$

d/ $(C): y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; $k = 2$

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết rằng Δ song song với đường thẳng d cho trước:

a/ $(C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ & $d: y = 3x + 2$.

b/ $(C): y = \frac{2x-1}{x-2}$ & $d: y = -\frac{3}{4}x + 2$.

c/ $(C): y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ & $d: 4x + y - 2015 = 0$.

d/ $(C): y = \frac{x^2 - 2x - 3}{4x + 6}$ & $d: 2x + y - 2016 = 0$.

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết rằng Δ vuông góc với đường thẳng d cho trước:

a/ $(C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ & $d: x + 8y - 999 = 0$.

b/ $(C): y = \frac{2x-1}{x-2}$ & đường thẳng d là đường phân giác góc phần tư thứ nhất của hệ trục Oxy.

c/ $(C): y = \frac{x^2 + 3}{x+1}$ & $d: y = -3x + 2015$.

d/ $(C): y = \frac{x^2 + x - 1}{x+2}$ & $d: y = x - 2$.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với các đường được chỉ ra:

a/ $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$ & $d: y = 7x + 4$.

b/ $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$ & $d: y = -x^2 + 8x - 3$.

c/ $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$ & $(C'): y = x^3 - 4x^2 + 6x - 7$.

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết Δ đi qua điểm được chỉ ra:

a/ $(C): y = -x^3 + 3x - 2$; $A(2; 4)$

b/ $(C): y = x^3 - 3x + 1$; $B(1; -6)$

c/ $(C): y = (2 - x^2)^2$; $C(0; 4)$

d/ $(C): y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$; $D\left(0; \frac{3}{2}\right)$

$$e/ (C): y = \frac{x+2}{x-2}; E(-6;5)$$

$$f/ (C): y = \frac{3x+4}{x-1}; F(2;3)$$

$$g/ (C): y = \frac{x^2-3x+3}{x-2}; G(1;0)$$

$$h/ (C): y = \frac{x^2-x+2}{x-1}; H(2;2)$$

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết Δ tạo với chiều dương trục hoành Ox một góc α :

$$a/ (C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4; \alpha = 60^\circ.$$

$$b/ (C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4; \alpha = 75^\circ.$$

$$c/ (C): y = \frac{3x-2}{x-1}; \alpha = 45^\circ$$

Bài 9. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) , biết Δ tạo với đường thẳng d một góc α :

$$a/ (C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4 \text{ \& } d: y = 3x + 7; \alpha = 45^\circ.$$

$$b/ (C): y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4 \text{ \& } d: y = -\frac{1}{2}x + 3; \alpha = 30^\circ.$$

$$c/ (C): y = \frac{4x-3}{x-1} \text{ \& } d: y = 3x; \alpha = 45^\circ.$$

$$d/ (C): y = \frac{3x-7}{5-2x} \text{ \& } d: x + y = 0; \alpha = 60^\circ.$$

$$e/ (C): y = \frac{x^2-x+3}{x-2} \text{ \& } d: y = -x + 1; \alpha = 60^\circ.$$

Bài 10. Tính diện tích tam giác chắn hai trục tọa độ bởi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm được chỉ ra:

$$a/ (C): y = \frac{5x+11}{2x-3} \text{ tại điểm } A \text{ có hoành độ là } x_A = 2.$$

$$b/ (C): y = \sqrt{x^2-27x+26} \text{ tại điểm } B \text{ có } x_B = 2.$$

Bài 11. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm được chỉ ra chắn hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S cho trước:

$$a/ (C): y = \frac{2x+m}{x-1} \text{ tại điểm } A \text{ có } x_A = 2 \text{ và } S = \frac{1}{2}.$$

$$b/ (C): y = \frac{x-3m}{x+2} \text{ tại điểm } B \text{ có } x_B = -1 \text{ và } S = \frac{9}{2}.$$

$$c/ (C): x^3 + 1 - m(x+1) \text{ tại điểm } C \text{ có } x_C = 0 \text{ và } S = 8.$$

BÀI TOÁN 2

BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dùng đồ thị, biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 + m = 0$.

Bài 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Với giá trị nào của m thì phương trình: $x^3 - 3x + \frac{2m}{m^2+1} = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào đồ thị (C) , biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x - m^2 - 2m - 2 = 0$

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b/ Tìm m để phương trình $x^3 - 6x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Sử dụng đồ thị, biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình: $(x+1)^3 - 3 + m - 3x = 0$.

Bài 6. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 8x - m = 0$.

c/ Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của (C) .

Bài 7. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + \frac{9}{2}$

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b/ Tìm k để phương trình $2x^3 + 6x^2 - 18x - k = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{5}x + 2$.

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x^2 + m = 0$.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3.

Bài 9. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 - 6x^2 + 9x + m = 0$.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

Bài 10. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{3}$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để phương trình: $2x^3 + 3x^2 - 12x + m = 0$ có đúng một nghiệm.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 4x + y - 1 = 0$

Bài 11. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để phương trình $2x^3 - 9x^2 + 12x = m$ có đúng một nghiệm dương.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$.

Bài 12. Cho hàm số $y = 2x^3 - 6x + 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , biện luận theo m số giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = \frac{m}{2}$.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng $-\sqrt{3}$.

Bài 13. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để phương trình $2x^3 - 3x^2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

c/ Xác định tọa độ các giao điểm của (C) và đường thẳng $y = 2x + 1$.

Bài 14. Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2(x^2 - 1)$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^4 - 4x^2 - m = 0$.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(a; 2) \in (C)$ với $a > 0$.

Bài 15. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , tìm m để phương trình $x^4 - 8x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành.

Bài 16. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để phương trình $x^4 + x^2 + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 6y - 1 = 0$.

Bài 17. Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành, biết giao điểm đó có hoành độ là một số âm.

Bài 18. Cho hàm số $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Dựa vào (C) , tìm m để phương trình $x^4 - 8x^2 + m = 0$ vô nghiệm.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = -\sqrt{2}$.

Bài 19. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để phương trình $x^4 - 4x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

c/ Xác định tọa độ các giao điểm của (C) và đường thẳng $y = 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm đó.

Bài 20. Cho hàm số $y = \frac{3x + 2}{2x - 1}$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{3x + 2}{2x - 1} = m + 1$.

c/ Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

d/ Tìm các điểm trên (C) cách đều hai trục tọa độ.

BÀI TOÁN 3

GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

Cho $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$

• Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $\boxed{f(x) = g(x)}$ $(*)$

• Để (C_1) cắt (C_2) tại n điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm [phương trình(*)] có n nghiệm phân biệt.

Lưu ý 1: Nếu một trong hai đồ thị trên có dạng hữu tỉ và có TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Khi đó, để (C_1) cắt (C_2) tại n điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm [phương trình(*)] có n nghiệm phân biệt $\neq \alpha$.

Lưu ý 2: Định lý Viét đối với phương trình bậc ba: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$

Nếu phương trình bậc ba dạng $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thì:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

Lưu ý 3: Xem lại phần Ôn tập phương trình đại số

Lưu ý 4: Tìm tham số để đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (C) cắt trục hoành Ox tại n điểm phân biệt. **(Phương pháp cực trị).**

Lúc đó, phương trình hoành độ giao điểm: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (*)

• Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) & \text{có 2 cực trị.} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \end{cases}$

• Để (C) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) & \text{có 2 cực trị.} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} = 0 \end{cases}$

(lúc này đồ thị (C) tiếp xúc với trục hoành Ox)

• Để (C) cắt Ox tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ chỉ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) & \text{không có cực trị.} \\ y = f(x) & \text{có 2 cực trị.} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} > 0 \end{cases}$

• Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) & \text{có 2 cực trị.} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CB} > 0, x_{CT} > 0 \\ a \cdot f(0) < 0 \quad (\text{hay } a \cdot d < 0) \end{cases}$$

• Để (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm âm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) & \text{có 2 cực trị.} \\ y_{CB} \cdot y_{CT} < 0 \\ x_{CB} < 0, x_{CT} < 0 \\ a \cdot f(0) > 0 \quad (\text{hay } a \cdot d > 0) \end{cases}$$

Học sinh tự vẽ hình.

Lưu ý 5: Tìm tham số để đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ (C) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng (cách đều nhau)?

Phương trình hoành độ giao điểm: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1)

• Đặt $t = x^2 \geq 0$. Lúc đó: (1) $\Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$ (2)

• Để (C) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt dương} \Leftrightarrow 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \Rightarrow \text{tham số (3)} \\ P > 0 \end{cases}$$

• Gọi t_1, t_2 là hai nghiệm phân biệt của (2). Lúc đó, 4 nghiệm phân biệt của (1) là: $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ (nên sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn).

• Do 4 nghiệm này lập thành cấp số cộng (hay cách đều) $\Leftrightarrow -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow 9t_1 = t_2$. Kết hợp định lý Viét, ta tìm được tham số. So với (3) $\Rightarrow$ giá trị tham số thỏa yêu cầu bài toán.

HÀM SỐ BẬC 3

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b/ Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3, 20)$ và có hệ số góc m . Tìm m để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

$$\text{ĐS: } m > \frac{15}{4} \text{ và } m \neq 24$$

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b/ Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(2, 1)$ và có hệ số góc m . Tìm tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

$$\text{ĐS: } m > -3$$

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b/ Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua điểm $I(1, 2)$ với hệ số góc k ($k > -3$) đều cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt I, A, B, đồng thời I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1) (Trích đề thi ĐH khối A - 2010)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b/ Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

$$\text{ĐS: } -\frac{1}{4} < m < 1 \wedge m \neq 0$$

Bài 5. Cho $(C_m): y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$. Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có

hoành độ x_1, x_2, x_3 và thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$

$$\text{ĐS: } |m| > 1$$

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2$ có đồ thị là (C_m) , điểm $M(3,1)$, đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng d cắt (C_m) tại 3 điểm $A(0,2), B, C$ sao cho tam giác MBC có diện tích bằng $2\sqrt{6}$

ĐS: $m = -2 \vee m = 5$

Bài 7. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+2)x + 2m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm.

ĐS: $0 < m < \frac{1}{4}$

Bài 8. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ âm.

ĐS: $0 < m < \frac{1}{2} \wedge m \neq \frac{1}{3}$

Bài 9. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2$ (C)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b/ Gọi d là đường thẳng qua $A(1;-2)$ và có hệ số góc là m . Biện luận theo m vị trí tương đối giữa đường thẳng d và đồ thị (C) .

Bài 10. Cho hàm số: $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ (C_m). Định giá trị của m để hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ đều lớn hơn 1.

Bài 11. Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - 1$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

b/ Tìm m để cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Bài 12. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b/ Định m để $y = m(x+1) - 2$ cắt đồ thị tại 3 điểm A, B, C sao cho $BC = 2\sqrt{2}$ với $A(-1;-2)$

Bài 13. Cho hàm số: $y = \frac{m-1}{3}x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ (C_m)

a/ Khảo sát khi $m = 2$.

b/ Tìm m để đồ thị (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Bài 14. Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} + 3x$ (C) và đường thẳng $d: y = m(x-3)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để (C) và d có 3 giao điểm A, B, C với A cố định và $OA \perp OC$, $BC = \sqrt{42}$

Bài 15. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + 4 - 4m$ (C_m)

a/ Khảo sát khi $m = 1$.

b/ Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ đều lớn hơn -2 .

c/ Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ cách đều nhau.

d/ Tìm m để (C_m) cắt $y = mx + 2$ tại 3 điểm cách đều nhau.

Bài 16. Tìm tham số m để đồ thị của các hàm số

a/ $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx - 8$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

b/ $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$; $y = 4x + m$ cắt nhau tại 3 điểm A, B, C với B là trung điểm của BC.

c/ $y = x^4 - (2m+4)x^2 + m^2$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

d/ $y = x^3 - (m+1)x^2 - (m-1)x + 2m - 1$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

e/ $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 + 9mx + 192$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Bài 17. Tìm tham số m để các phương trình sau chỉ có đúng 1 nghiệm:

a/ $2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2 = 0$ b/ $x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m = 0$

c/ $2x^3 - 3mx^2 + 6(m-1)x - 3m + 12 = 0$ d/ $x^3 - 6x^2 - 3(m-4)x + 4m - 8 = 0$

e/ $2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2 - m = 0$ f/ $x^3 - 3mx + 2m = 0$

Bài 18. Tìm tham số m để các phương trình sau chỉ có 2 nghiệm:

a/ $x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1) = 0$ b/ $x^3 - 3mx + 2m = 0$

c/ $x^3 - (2m+1)x^2 + (3m+1)x - (m+1) = 0$ d/ $x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m = 0$

Bài 19. Tìm tham số m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a/ $x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1) = 0$ b/ $x^3 - 6x^2 - 3(m-4)x + 4m - 8 = 0$

c/ $2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-1)x + 2 - m = 0$ d/ $\frac{1}{3}x^3 - x + m = 0$

Bài 20. Tìm tham số m để các phương trình sau có 3 nghiệm dương phân biệt

a/ $2x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1) = 0$ b/ $x^3 - 6x^2 - 3(m-4)x + 4m - 8 = 0$

c/ $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + m + \frac{7}{6} = 0$ d/ $x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2 = 0$

Bài 21. Tìm tham số m để các phương trình sau có 3 nghiệm âm phân biệt:

a/ $2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2 - m = 0$ b/ $x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1) = 0$

c/ $x^3 + 3x^2 - 9x + m = 0$ d/ $x^3 - x^2 + 18mx - 2m = 0$

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

$$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

Bài 1. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

b/ Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

ĐS: $-\frac{1}{3} < m < 1, m \neq 0$

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (1)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 1$

b/ Tìm tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

ĐS: $1 < m < \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

Bài 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^4 + (m-1)x^2 - 3$ (1)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$

b/ Tìm tham số m để đường thẳng $y = -4$ cắt đồ thị hàm số (1) tại 4 điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ (C_m)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 5$.

b/ Định m để hàm số (C_m) có 3 cực trị.

c/ Định m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Bài 5. Cho hàm số: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m$ (C_m)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 2$.

b/ Định m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

c/ Định m để (C_m) cắt đường thẳng $y = 2$ tại 4 điểm phân biệt.

Bài 6. Cho hàm số: $y = 2mx^4 - x^2 + 1 - 4m$ (C_m)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = \frac{1}{2}$.

b/ Định m để hàm số (C_m) có 3 cực trị.

c/ Định m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -3$ tại 4 điểm phân biệt.

Bài 7. Cho hàm số: $y = x^4 + 2(m+1)x^2 + 4$ (C_m)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 0$.

b/ Định m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt mà có hoành độ lập thành cấp số cộng (4 điểm cách đều).

c/ Định m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt mà có hoành độ đều lớn hơn -2 .

Bài 8. Cho hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ (C_m)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 1$

b/ Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

c/ Định m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt mà có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Bài 9. Cho hàm số: $y = x^4 - 10mx^2 + 9m$ (C_m)

a/ Khảo sát khi $m = 1$.

b/ Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ cách đều nhau.

Bài 10. Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$ (C_m)

a/ Khảo sát khi và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

b/ Tìm m để (C_m) có 3 điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân.

c/ Tìm m để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm cách đều nhau.

HÀM SỐ NHẤT BIẾN

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

ĐS: $b / m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{3-2x}{x-1}$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m sao cho trên đồ thị (C) có hai điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ khác nhau và thỏa điều kiện

$$\begin{cases} mx_A - y_A = -2 \\ mx_B - y_B = -2 \end{cases}$$

ĐS: $m \in (-\infty, -6 - 2\sqrt{5}) \cup (-6 + 2\sqrt{5}, +\infty) \setminus \{0\}$

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1} \quad (C)$

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $M(-1, 3)$ và có hệ số góc m . Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Bài 4. Tìm m để đường thẳng $y = mx + 3$ cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác ABC vuông tại O.

ĐS: $m = 3 \pm \sqrt{5}$

Bài 5. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $I(2, 0)$ và có hệ số góc m .

Tìm tham số m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

ĐS: $m = \frac{2}{3}$

Bài 6. Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - m$ luôn cắt đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x+3}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm tham số m để AB ngắn nhất.

ĐS: $AB_{\min} = \sqrt{10}$ khi $m = -2$

Bài 7. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1} \quad (C)$

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (với O là gốc tọa độ).

ĐS: $m = \pm 2$

Bài 8. Cho hàm số: $y = \frac{2x+2}{x+1} \quad (C)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Gọi d là đường thẳng qua $A(2; 2)$ có hệ số góc là k . Định k để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 9. Cho hàm số: $y = \frac{1-x}{2x} \quad (C)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để đường thẳng $d: y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 10. Cho hàm số: $y = 1 - \frac{2}{x+1} \quad (C)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 11. Cho hàm số: $y = 2 - \frac{3}{x+1} \quad (C)$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ CMR đường thẳng $d: y = -\frac{x}{2} + m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 12. Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$ (C)

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Gọi A là điểm trên (C) có $x_A = 2$ và d là đường thẳng qua A có hệ số góc k . Tìm k để d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 13. Cho hàm số: $y = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 4$ (C)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) .

b/ Định m để $d: mx - y + 4 + 3m = 0$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 14. Cho hàm số: $y = -x^3 + mx + 1 - m$ (C_m)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 3$.

b/ Định m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 15. Cho hàm số: $y = 2x^3 + 3x^2 - mx + m - 2$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 1$.

b/ Định m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 16. Cho hàm số: $y = x^3 - (m + 4)x^2 - 4x + m$ (C)

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 0$.

b/ Định k để (C) cắt đường thẳng $y = kx$ tại 3 điểm phân biệt.

Bài 17. Cho hàm số: $y = \frac{x + 3}{x + 1}$

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b/ CMR $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M và N.

c/ Tìm m để $MN_{\min}$

Bài 18. Cho hàm số: $y = \frac{x + 2}{x - 2}$ (C)

a/ CMR $d: y = x + m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm P và Q thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị.

b/ Tìm m để $\triangle OPQ$ vuông tại O.

c/ Tìm m để $PQ_{\min}$

d/ Tìm m để $PQ = \sqrt{14}$

HÀM SỐ HỮU TỈ BẬC 2

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Bài 1. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 4$.

ĐS: $m = \pm 2\sqrt{6}$

Bài 2. Tìm m để đường thẳng $d: y = m$ cắt $(C): y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$.

ĐS: $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 3. Tìm tham số m để đồ thị hàm số $(C_m): y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

ĐS: $-\frac{1}{2} < m < 0$

Bài 4. Tìm tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc trục tung.

ĐS: $m = 1$

Bài 5. Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = 3x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số $(C): y = x + \frac{4}{x}$ tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, tìm tham số m để I nằm trên đường thẳng $d': y = 2x + 3$.

ĐS: $m = 4$

Bài 6. Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ (C_m)

a/ Khảo sát khi $m = 2$.

b/ Tìm m để $(d): y = m$ cắt (C_m) tại 2 điểm A, B sao cho $OA \perp OB$.

c/ Tìm m để $(\Delta): y = 2x - 1$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị.

d/ Tìm m để $(\Delta): y = 2x - 1$ cắt (C_m) tại 2 điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị.

BÀI TOÁN 4 CÁC BÀI TOÁN KHÁC LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

Tìm điều kiện để hai đường tiếp xúc nhau

a) Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (*) \text{ có nghiệm. Nghiệm của hệ } (*) \text{ là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.}$$

b) Nếu $(C_1): y = px + q$ và $(C_2): y = ax^2 + bx + c$ thì (C_1) tiếp xúc với $(C_2) \Leftrightarrow$ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

Bài 1. Tìm điều kiện của tham số m để hai đường (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau:

a/ $(C_1): y = x^3 + (3 + m)x^2 + mx + 2$ & $(C_2):$ trục hoành.

b/ $(C_1): y = x^3 - 2x^2 - (m - 1)x + m$ & $(C_2):$ trục hoành.

c/ $(C_1): y = x^3 + m(x + 1) + 1$ & $(C_2): y = x + 1$.

d/ $(C_1): y = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ & $(C_2): y = x + m$.

Bài 2. Tìm điều kiện của tham số m để hai đường (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau:

a/ $(C_1): y = x^4 + 2x^2 + 1$ & $(C_2): y = 2mx^2 + m$

b/ $(C_1): y = -x^4 + x^2 - 1$ & $(C_2): y = -x^2 + m$

c/ $(C_1): y = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + \frac{9}{4}$ & $(C_2): y = -x^2 + m$

$$\begin{aligned} \text{d/ } (C_1): y &= (x+1)^2(x-1)^2 & \& \quad (C_2): y = 2x^2 + m \\ \text{e/ } (C_1): y &= \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1} & \& \quad (C_2): y = x \\ \text{f/ } (C_1): y &= \frac{x^2 - x + 1}{x-1} & \& \quad (C_2): y = x^2 + m \end{aligned}$$

Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$

a/ Gọi $\Delta: y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) với u là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_1) , v là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_2) .

$$+ \Delta \text{ tiếp xúc với } (C_1) \text{ và } (C_2) \text{ khi và chỉ khi hệ } \begin{cases} f(u) = au + b & (1) \\ f'(u) = a & (2) \\ g(v) = av + b & (3) \\ g'(v) = a & (4) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$+ \text{Từ } (2) \text{ và } (4) \Rightarrow f'(u) = g'(v) \Rightarrow u = h(v) \quad (5)$$

$$+ \text{Thế } a \text{ từ } (2) \text{ vào } (1) \Rightarrow b = \varphi(u) \quad (6)$$

+ Thế $(2), (5), (6)$ vào $(3) \Rightarrow v \Rightarrow a \Rightarrow u \Rightarrow b$. Từ đó viết được phương trình Δ .

b/ Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 thì một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) cũng là tiếp tuyến của (C_1) và (C_2) tại điểm đó.

Bài 3. Hãy viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị

$$\text{a/ } (C_1): y = x^2 - 5x + 6 \quad \& \quad (C_2): y = -x^2 + 5x - 11$$

$$\text{b/ } (C_1): y = x^2 - 5x + 6 \quad \& \quad (C_2): y = -x^2 - x - 14$$

$$\text{c/ } (C_1): y = x^2 - 5x + 6 \quad \& \quad (C_2): y = x^3 + 3x - 10$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG 1 ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Cho hàm số: $y = \frac{mx-1}{2x+m}$

a/ Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$, hàm số luôn luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b/ Định m để đường tiệm cận đứng của đồ thị đi qua điểm $A(-1; \sqrt{2})$

c/ Định m để đường tiệm cận ngang của đồ thị có phương trình $y = -5$

d/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 2$

e/ Viết PTTT của (C) tại M trên (C) có $x_M = -2$

f/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành

g/ Viết PTTT của (C) có hệ số góc bằng $\frac{1}{6}$

h/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến song song $d: y = 6x - 1$

i/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến vuông góc $\Delta: x + 24y - 7 = 0$

j/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua điểm $B(-1;3)$

Bài 2. Cho hàm số: $y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x - 1}$

a/ Định m để hàm số để hàm số luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

b/ Định m để đường tiệm cận ngang của đồ thị đi qua $A(\sqrt{3}; -6)$

c/ Định m để đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.

d/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$

e/ Viết PTTT của (C) tại B trên (C) có tung độ là 2.

f/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

g/ Viết PTTT của (C) có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2}$

h/ Viết PTTT của (C) và song song với đường thẳng: $d: y = -2x + 3$

i/ Viết PTTT của (C) và vuông góc với đường thẳng: $\Delta: x - 8y + 1 = 0$

j/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua điểm $C(2;0)$

Bài 3. Cho hàm số: $y = \frac{x - 2}{x + m - 1}$

a/ Tìm m để hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

b/ Tìm m để đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x = -5$.

c/ Tìm m để đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 .

d/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 2$.

e/ Viết PTTT của (C) tại A trên (C) có tung độ là 3.

f/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

g/ Viết PTTT của (C) có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$

h/ Viết PTTT của (C) và song song với đường thẳng $d: y = 3x$

i/ Viết PTTT của (C) và vuông góc với đường thẳng $\Delta: x + 9y - 4 = 0$

j/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua $B(3;-1)$

Bài 4. Cho hàm số: $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a/ Tìm a và b để đồ thị hàm số qua 2 điểm $A(1,2)$ và $B(-2,-1)$

b/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $a = 1$ và $b = -1$.

c/ Viết PTTT của (C) tại điểm M trên (C) có hoành độ là -1 .

d/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

e/ Viết PTTT của (C) có hệ số góc bằng -1 .

f/ Viết PTTT của (C) và song song với đường thẳng $d: y = 4x - 7$

g/ Viết PTTT của (C) và vuông góc với đường thẳng $\Delta: x + 20y = 0$

h/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua $C(2,2)$

Bài 5. Cho hàm số: $y = x^3 + (m+3)x^2 + m - 1$ (C_m)

a/ Định m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$.

b/ Định m để (C_m) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 .

- c/ Định m để (C_m) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.
- d/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) với $m = 0$.
- e/ Viết PTTT của (C) tại điểm A trên (C) có tung độ bằng 1.
- f/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
- g/ Viết PTTT của (C) có hệ số góc bằng 0.
- h/ Viết PTTT của (C) và tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = 9x - 8$
- i/ Viết PTTT của (C) và tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : x - 3y - 2 = 0$
- j/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua $C(4, 5)$

Bài 6. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+1)x - 4$ (C_m)

- a/ Định m để hàm số có điểm cực tiểu là $x = -3$.
- b/ Định m để (C_m) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.
- c/ Chứng minh rằng hàm số luôn có 2 cực trị.
- d/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 0$.
- e/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
- f/ Viết PTTT của (C) tại A trên (C) có hoành độ bằng -3 .
- g/ Viết PTTT của (C) có hệ số góc bằng 3.
- h/ Viết PTTT của (C) và tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : y = -5x + 2$
- i/ Viết PTTT của (C) và tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : x - 12y - 1 = 0$
- j/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua điểm $C(-2, 5)$

Bài 7. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^4 - (m+2)x^2 + m - \frac{1}{2}$ (C_m)

- a/ Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.
- b/ Tìm m để hàm số có điểm cực trị là $x = -1$, tại đó là điểm cực đại hay điểm cực tiểu? Tìm giá trị cực trị tương ứng?
- c/ Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.
- d/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 1$.
- e/ Viết PTTT của (C) tại M trên (C) có hoành độ là -1 .
- f/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$
- g/ Viết PTTT của (C) và song song với đường thẳng $d : y = -4x - 10$
- h/ Viết PTTT của (C) và vuông góc với đường thẳng $\Delta : x - 4y = 0$
- i/ Viết PTTT của (C) , biết tiếp tuyến đi qua $A(1, 2)$

Bài 8. Cho hàm số: $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ (C_m)

- a/ Tìm m để hàm số có 3 cực trị.
- b/ Tìm m để hàm số có điểm cực đại là $x = 1$.
- c/ Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.
- d/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $m = 1$.
- e/ Viết PTTT của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
- f/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = -44$

Bài 9. Cho hàm số: $y = x^4 + ax^2 + b$

- a/ Tìm a và b để hàm số có giá trị cực trị bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = 1$.
- b/ Tìm a và b sao cho $y(-1) = 0$ và $y''(-1) = 8$
- c/ Khảo sát và vẽ đồ thị (C) khi $a = -\frac{1}{2}$ và $b = 1$
- d/ Viết PTTT của (C) tại điểm có tung độ bằng 1
- e/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 2$
- f/ Viết PTTT của (C) và song song với đường thẳng $d: y = 3x + 2$

Bài 10. Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

- a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C).
- b/ Giải bất phương trình: $f'(x-1) > 0$
- c/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ x_0 biết $f''(x_0) = -6$
- d/ Viết PTTT của (C) và có hệ số góc $k = 9$.
- e/ Dựa vào (C) biện luận số nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x^2 - 9x - 2 + m = 0$
- f/ Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số.

Bài 11. Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 1$

- a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)
- b/ Dùng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình: $2x^3 + 6x^2 - 2m = 0$
- c/ Định k để (d): $y = k(x+2) + 5$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.
- d/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ thỏa: $y'(x) = 9$
- e/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.

Bài 12. Cho hàm số: $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+3)x - 4$ (C_m)

- a/ Tìm m để hàm số đồng biến trên tập xác định.
- b/ Khảo sát và vẽ (C) với $m = 0$.
- c/ Dựa vào đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình: $2x^3 + 6x^2 + 18x + 24 + 3k = 0$
- d/ Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.
- e/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ thỏa: $y''(x) = -4$
- f/ Tìm a để (d): $y = a(x+3) - 13$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 13. Cho hàm số: $y = \frac{1}{2}x^4 + ax^2 + b$

- a/ Tìm a và b để hàm số có cực tiểu bằng $-\frac{7}{2}$ khi $x = \sqrt{3}$
- b/ Khảo sát và vẽ (C) khi $a = -3$ và $a = -3$.
- c/ Dựa vào đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình: $x^4 - 6x^2 + 2 = m$
- d/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ thỏa: $y''(x_0) = 18$

Bài 14. Cho hàm số: $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

- a/ Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

- b/ Viết PTTT của (C) tại các giao điểm của (C) với trục hoành.
- c/ Định m để (C) cắt Parabol $(P) : y = -2x^2$ tại 4 điểm phân biệt.
- d/ Viết PTTT của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình: $y''(x) = 8$
- e/ Biện luận theo k số nghiệm của phương trình: $x^4 - 8x^2 - 9 - 4k = 0$

Bài 15. Cho hàm số: $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 - 2m - 1$ (C_m)

- a/ Định m để hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.
- b/ Định m để hàm số có 3 cực trị.
- c/ Định m để hàm số có cực đại khi $x = 1$.
- d/ Khảo sát và vẽ (C) khi $m = 1$.
- e/ Viết PTTT của (C) tại các giao điểm của (C) với đường thẳng $y = -3$ biết hoành độ của nó là số âm.
- f/ Dùng đồ thị biện luận số nghiệm của phương trình: $x^4 - 4x^2 + m = 0$