

(Đề thi gồm có 1 trang)

Câu 1 (1 điểm). Giải phương trình

$$\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 2 \cos x = 0.$$

Câu 2 (2 điểm).

a) Cho đa giác lồi n cạnh nội tiếp đường tròn, biết số tam giác lập được bằng $\frac{4}{7}$ số tứ giác lập được từ n đỉnh của đa giác đó. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(3+2x)^n$.

b) Tính tổng $S = \frac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \frac{C_n^1}{C_{n+2}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+2}^3} + \dots + \frac{C_n^n}{C_{n+2}^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Câu 3 (1 điểm). Cho đồ thị $(C): y = \frac{2mx-1}{2x-2}$ và điểm $M(2;5)$. Đường thẳng d đi qua M và tiếp xúc với (C) . Tìm m để đường thẳng d tạo với 2 tia Ox và Oy tam giác có diện tích lớn nhất.

Câu 4 (1 điểm).

Biết $\lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - \sqrt[3]{bn^3 + 6n^2 + 5n + 2019} \right) = 0$. Tính $a^{2018} + b^{2019} - 1$.

Câu 5 (2 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân ($AD \parallel BC$), $BC = 2a$, $AB = AD = DC = a$ ($a > 0$). Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Biết SD vuông góc với AC .

a) Chứng minh mặt phẳng (SBC) vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$. Tính độ dài đoạn thẳng SD .

b) Mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc đoạn thẳng OD (M khác O và D) và song song với đường thẳng SD và AC . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) biết $MD = x$.
Tìm x để diện tích thiết diện lớn nhất.

Câu 6 (1 điểm). Cho tam giác ABC , điểm K nằm trên cạnh BC sao cho $KB = 2KC$ và $\widehat{KAB} = 2\widehat{KAC}$, điểm $E\left(3; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC , điểm $M\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ là hình chiếu của B lên đường thẳng AK .

Biết rằng A nằm trên đường thẳng $d: y = 5x$ và điểm $I(0;5)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AC . Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC .

Câu 7 (1 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 7x^2 + 18x + 18 = y^3 - 2y^2 + 3y \\ (x+2)^2 + y^2 - 3y - 9 + 3\sqrt{4x+1} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+x+y-1}(y+\sqrt{4x+1}-3) \end{cases}$$

Câu 8 (1 điểm). Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

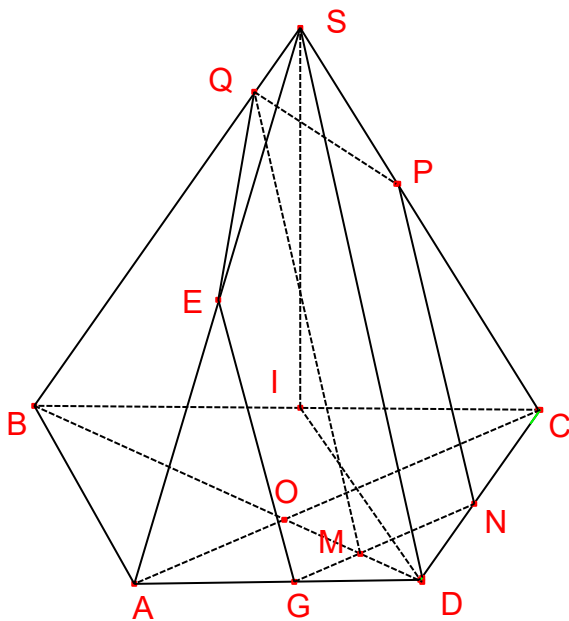
$$\frac{x}{x^2 + x + 1 + yz} + \frac{y}{y^2 + y + 1 + zx} + \frac{z}{z^2 + z + 1 + xy} \leq \frac{3}{4}.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1 điểm)		1
	$\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 2 \cos x = 0$ $\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,5
2 (2 điểm)	2a)	1
	Từ giả thiết suy ra $C_n^3 = \frac{4}{7}C_n^4 \Leftrightarrow n = 10$	0,5
	Xét $(3+2x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 3^{10-k} 2^k x^k$ nên ta xét $k = 4$ thu được hệ số của x^4 là $C_{10}^4 3^6 2^4 = 2449440$	0,5
	2b)	1
	Ta có $\frac{C_n^k}{C_{n+2}^{k+1}} = \frac{(k+1)(n-k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(k+1)+1-k^2}{(n+1)(n+2)}$ nên	0,25
	$S = \frac{n(1+2+\dots+n+1)+n+1-(1^2+2^2+\dots+n^2)}{(n+1)(n+2)}$	0,25
	$= \frac{n+3}{6}$	0,5
3 (1 điểm)		1
	Giả sử d: $y = ax + b$. Đường thẳng d cắt 2 tia Ox và Oy lần lượt tại A và B nên $a < 0$. d đi qua M(2;5) nên $b = 5 - 2a$.	0,25
	d tiếp xúc với (C): $y = \frac{2mx-1}{2x-2}$ khi và chỉ khi $2mx-1 = (ax+b)(2x-2)$ có nghiệm kép	0,25

	$x \neq 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} (b-a-m)^2 - 2a(1-2b) = 0 \\ 2m-1 \neq 0 \end{cases}$ Từ trên ta có được	0,5
	$(5-m-3a)^2 = 2a(4a-9) \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 5-3a-\sqrt{2a(4a-9)} \\ m_2 = 5-3a+\sqrt{2a(4a-9)} \end{cases}$ Do $a < 0$ nên m_1 và m_2 là phân biệt vậy ta luôn tìm được giá trị của m với mỗi trường hợp $a < 0$.	0,25
	Ta lại có $S_{OAB} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{ a } = \frac{(5-2a)^2}{2 a }$. Chọn $a = \frac{-1}{n} (n \in \mathbb{N})$ thì $S_{OAB} = \frac{1}{2} \frac{(5n+2)^2}{n}$ ta tìm được $m_1 = 5 + \frac{3}{n} + \sqrt{\frac{2(9n+4)}{n^2}}$. Khi $n \rightarrow +\infty$ thì $m_1 \rightarrow 5$ và $S_{OAB} \rightarrow +\infty$ tức ta không tìm được m để thỏa mãn bài toán.	0,25
4 (1 điểm)		1
	Đặt $L = \lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - \sqrt[3]{bn^3 + 6n^2 + 5n + 2019} \right)$. Nếu $b \neq 1 \Rightarrow L = \infty$ (loại) Nên $b = 1$	0,5
	Xét $b = 1$ ta có $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 6n^2 + 5n + 2019} - n - 2 \right) = 0$ nên $\lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - n - 2 \right) = 0$ mà $\lim \left(\sqrt{n^2 + an + 2018} - n - 2 \right) = \frac{a-4}{2}$. Ta được $a = 4$. Vậy $A = 4^{2018}$.	0,5
5 (2 điểm)		2



5a)

1

Gọi I là trung điểm của BC nên tứ giác ADIC là hình thoi cạnh a nên $IA = IB = IC = a$ thì tam giác ABC vuông tại A, suy ra AC vuông góc DI

0,25

$$AC \perp ID (ID \parallel AB), AC \perp SD \Rightarrow AC \perp (SID) \\ \Rightarrow AC \perp SI$$

0,25

Do $AC \perp SI, BC \perp SI \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBC)$

0,25

Ta có : $SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = 2a$

0,25

5b)

1

Từ M kẻ hai đường thẳng lần lượt song song với SD, AC chúng cắt theo thứ tự SB tại Q và AB tại G, AC tại N. Từ G kẻ đường thẳng song song SD, cắt SA tại E, từ N kẻ đường thẳng song song với SD cắt SC tại P. Ta được thiết diện là ngũ giác GNPQE.

0,5

Ta có $BD = a\sqrt{3}$ nên tính được $EG = NP = 2(a - x\sqrt{3})$, $QM = 2\left(a - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$, $GN = 3x$

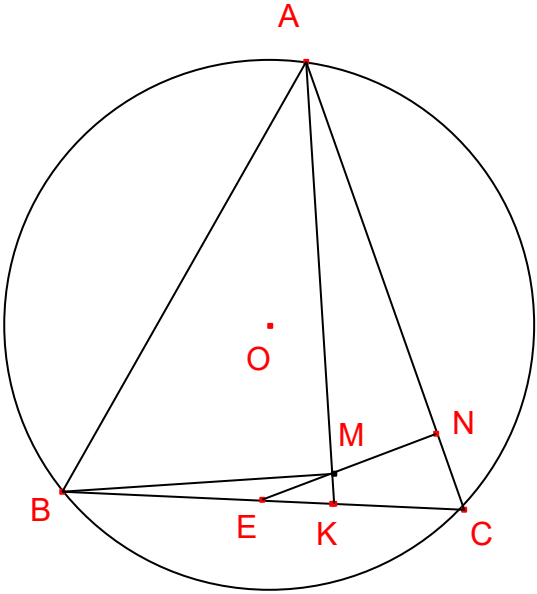
Tứ giác EGMQ và MNPQ là hai hình thang vuông đường cao lần lượt là GM và NM nên

$$S_{MNPQE} = 4x(3a - 2\sqrt{3}x)$$

0,25

$$\text{Max } S_{MNPQE} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \text{ tại } x = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

0,25

6 (1 điểm)		1
		
	Chứng minh AC vuông góc với EM.	0,25
	Từ đó AC : $x = 0$ nên A(0, 0). Và C(0; y) nên $B(6; 3\sqrt{3} - y)$	0,25
	Do $BM \perp AM \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$ nên B(6;0) và C(0; $3\sqrt{3}$)	0,25
	Ta được BC: $2x + 3\sqrt{3}y - 18 = 0$	0,25
7 (1 điểm)		1
	$\begin{cases} x^3 + 7x^2 + 18x + 18 = y^3 - 2y^2 + 3y(1) \\ (x+2)^2 + y^2 - 3y - 9 + 3\sqrt{4x+1} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + x + y - 1}(y + \sqrt{4x+1} - 3)(2) \end{cases}$	
	Ta có (1) $\Leftrightarrow x + 2 = y - 1$	0,25
	Thế vào (2) ta được: $2x^2 + 4x - 5 = (x + \sqrt{4x+1})(\sqrt{2x^2 + 4x + 4} - 3)$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 5 = (x + \sqrt{4x+1}) \frac{(\sqrt{2x^2 + 4x + 4}^2 - 9)}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4} + 3}$	

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x - 5 = 0(3) \\ x + \sqrt{4x+1} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4} + 3(4) \end{cases}$	
	$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 + \sqrt{14}}{2} (t/m) \\ x = \frac{-2 - \sqrt{14}}{2} (l) \end{cases}$	0,25
	(4) $\Leftrightarrow x - 3 + \sqrt{4x+1} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$. Do $2x^2 + 4x + 4 > 4x + 1 \geq 0$ nên $x > 3$. Ta có $(x-3) + \sqrt{4x+1} \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4x + 1} = \sqrt{2(x^2 - 2x + 10)}$ $< \sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}$ nên (4) vô nghiệm. Vậy $S = \left\{ \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}; \frac{4 + \sqrt{14}}{2} \right\}$	0,25
8 (1 điểm)		1
	Ta có $x^2 + x + 1 \geq 3x$ nên $\frac{x}{x^2 + x + 1 + yz} \leq \frac{x}{3x + yz}$. Từ đó $VT \leq \frac{x}{3x + yz} + \frac{y}{3y + zx} + \frac{z}{3z + xy} .$	0,25
	Đặt $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ nên a, b, c là ba cạnh của một tam giác có p = 3. $VT = \frac{p-b}{ac} + \frac{p-c}{ba} + \frac{p-a}{cb}$ $\frac{p-b}{ac} = \frac{1}{6} \frac{(a+b+c)(a+c-b)}{2ac} = \frac{1}{6} (1 + \cos B) \text{ nên } VT = \frac{1}{6} (3 + \cos A + \cos B + \cos C)$	0,25
	Mà $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$	0,25
	suy ra $VT \leq \frac{3}{4}$.Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.	0,25