

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1: (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(5m+2)x - 20$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trong khoảng $(-3; 2)$.

Bài 2: (3 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ 2u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1+2} + \frac{1}{u_2+2} + \dots + \frac{1}{u_n+2}$. Tính $\lim S_n$.

Bài 3: (5 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$.

b)
$$\begin{cases} xy^4 + y^3 + y^2 + 5x = y^5 + xy^2 + y(x+5) \\ \sqrt{2y^2 - 6x + 8} + 2 = \sqrt{x} + 2021x - 2020y \end{cases}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 4: (2 điểm) Cho một đa giác đều có 170 đường chéo. Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh từ các đỉnh của đa giác đó. Tính xác suất để tam giác tạo ra từ các đỉnh được chọn là tam giác vuông không cân.

Bài 5: (5 điểm)

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB', BC' theo a .

b) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi B_1, C_1, O_1 lần lượt là điểm đối xứng với B, C, O qua AC, AB, BC ; K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1 . Chứng minh rằng K, A, O_1 thẳng hàng.

Bài 6: (2 điểm) Có bao nhiêu số nguyên dương n , ($n \leq 2021$) để đa thức $x^{2^n} + x + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$?

Bài 7: (1 điểm) Trên bảng có ghi mười số 1; 2; 3; 4; ...; 10. Ở mỗi bước ta xóa đi hai số a, b rồi thêm vào số mới $a+b+\frac{ab}{f(a,b)}$ với $f(a,b)$ là tổng tất cả các số còn ghi trên bảng trừ hai số a, b . Cứ làm như thế cho đến khi trên bảng chỉ còn hai số x, y ($x \geq y$).

a) Gọi S_k là tổng của tất cả các tích của các cặp số còn ghi trên bảng ở bước thứ k . Chứng minh rằng $S_i = S_k$ với mọi i, k .

b) Tìm giá trị lớn nhất có thể có của x .

.....HẾT.....

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.